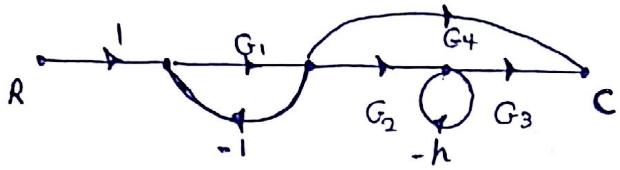
$$\Delta = 1 - \sum_m L_{m1} + \sum_m L_{m2} - \sum_m L_{m3} + \cdots$$

L_{mr} : حاصل ضرب بهره m امین ترکیب ممکن از هر r حلقه مجزا "

مثال) در گراف گذر سیگنال زیر تابع انتقال بین ورودی R و خروجی C چیست؟



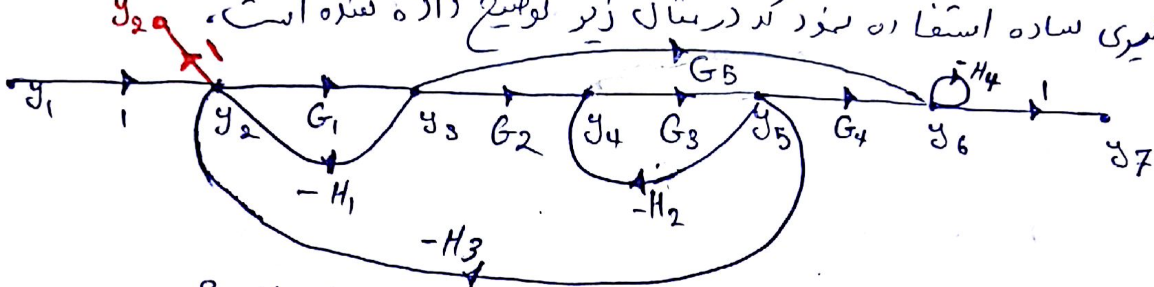
$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + (1+h)G_1G_4}{1+h+G_1+hG_1}$$

$P_2 = G_1G_4$ ، $P_1 = G_1G_2G_3$ و $\Delta = 1+h+G_1+hG_1$

$\Delta_2 = 1+h$ $\quad$ $\Delta_1 = 1$

کاربرد گره میسون بین گره های خروجی و گره های غیر ورودی:

می دانیم روش میسون بین گره های خروجی و گره های ورودی کاربرد دارد. برای این کار می توان از دو نسبت گیری ساده استفاده نمود که در مثال زیر توضیح داده شده است.



در نمودار SFG بالا بهره ی بین y_2 و y_7 را محاسبه کنید. یعنی $y_7/y_2 = ?$

می دانیم y_7 گره خروجی است و y_2 یک گره معمولی است که می توان آن را با اضافه کردن یک شاخه با بهره ی 1 به یک گره خروجی تبدیل نمود. پس دو گره خروجی داریم. سپس می توان نسبت این دو گره را برحسب گره ورودی y_1 در نظر گرفت و از تقسیم این دو رابطه y_7/y_2 را محاسبه نمود پس داریم:

$$\frac{y_7}{y_1} = \frac{\sum_{K=1}^{N} P_K \Delta_K}{\Delta} \quad , \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{\sum_{K=1}^{M} P_K \Delta_K}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \frac{y_7}{y_2} = \frac{\frac{y_7}{y_1}}{\frac{y_2}{y_1}} = \frac{\sum_{K=1}^{N} P_K \Delta_K}{\sum_{K=1}^{M} P'_K \Delta'_K} \rightarrow \begin{cases} P_1 = G_1G_2G_3G_4 & \Delta_1 = 1 \\ P_2 = G_1G_5 & \Delta_2 = 1 + H_2G_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'_1 = 1 \\ \Delta'_1 = 1 - (-H_2G_3 - H_4) + H_2H_4G_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y_7}{y_2} = \frac{1 \times G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + H_2G_3)}{1 \times (1 + H_2G_3 + H_4 + H_2H_4G_3)}$$

خب مسائل ما اکثراً به شکل بلوک دیاگرام می باشند باید بتوان آن ها را تبدیل نمود پس مسئله ی حیاتی برای ما تبدیل بلوک دیاگرام به SFG است تا بتوان یک مسیر ورودی و خروجی آن را مشخص کرد و تابع تبدیل مربوطه را بدست آورد.

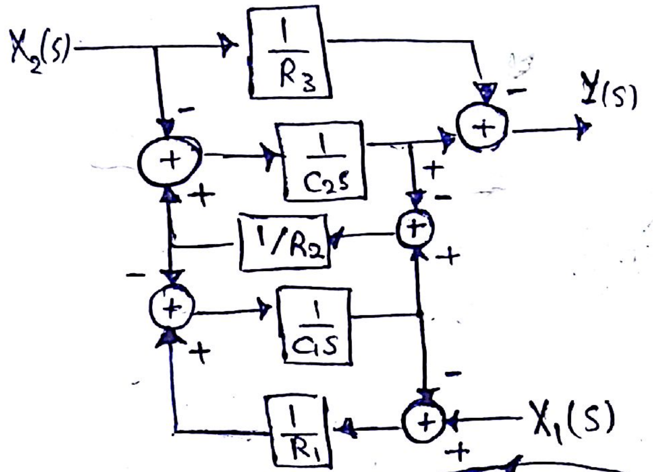
مراحل تبدیل نمودار بلوکی به نمودار SFG (گذر سیگنال)

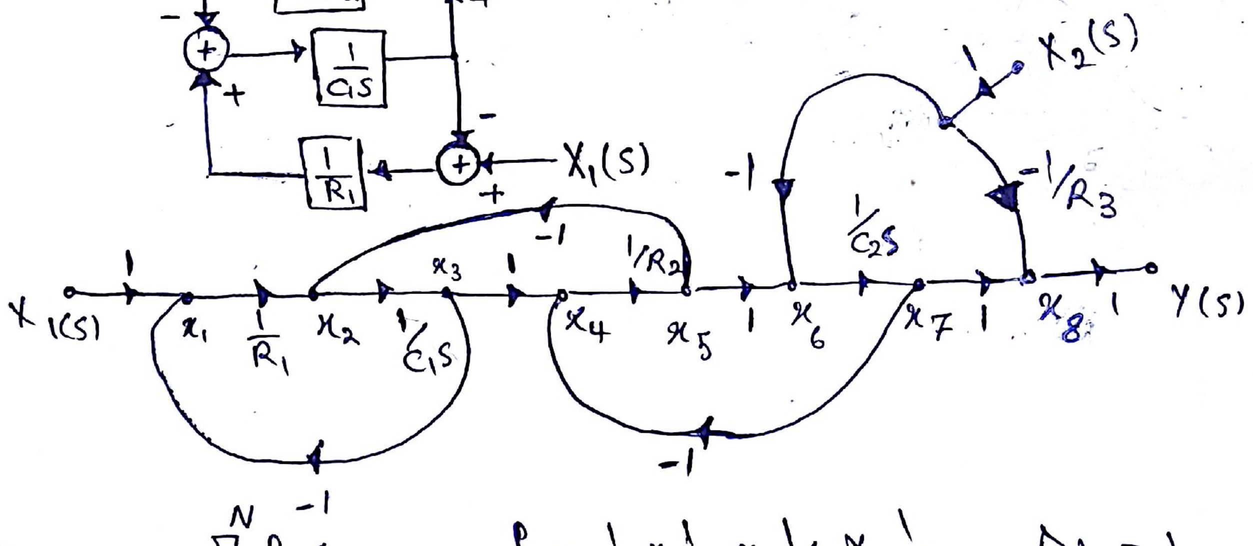
1) در دیاگرام بلوکی به ازای هر ورودی و خروجی و نقطه جمع کننده و انشعاب و بین هر بلوک متوالی یک گره در نظر می گیریم.

2) گره ها را به صورت جداگانه و نقاط پررنگ رسم کرده و آن ها را به صورت 1 و 2 و ... شماره گذاری می کنیم.

3) تمامی مسیرهای موجود در بلوک دیاگرام به وسیله ی شاخه های جهت دار با توجه به پیشرو بودن یا فیدبکی بودن بین گره ها رسم کرده و گین شاخه ها را با توجه به مقادیر بلوک متناظر تعیین کنید. (بهتر است در ابتدا مسیر پیشرو ساده را مشخص کنیم)

مثال: تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{X_1(s)}$ را در دیاگرام بلوکی سیستم دو ورودی و یک خروجی زیر بیابید.





$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta} \quad , \quad P_1 = \frac{1}{R_1} \times \frac{1}{C_1 s} \times \frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_2 s} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{1}{R_1} \times \frac{1}{C_1 s} - \frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_1 s} - \frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_2 s}\right) + \left(-\frac{1}{R_1} \times \frac{1}{C_1 s}\right)\left(-\frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_2 s}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1} \times \frac{1}{C_1 s} \times \frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_2 s}}{\Delta}$$

فصل سوم : تحلیل فضای حالت :

تا سال 1960 تکنیک های کنترل کلاسیک که عمدتاً بر مبنای تابع تبدیل بودند، سیستم های کنترلی را پوشش می دادند ولی بعد از پیچیدگی سیستم های کنترلی در طی سال های اخیر، همچون سیستم های غیرخطی و چند متغیره تئوریه کنترل نوین معرفی شد. این کنترل نوین یا مدرن بر پایه ی روش متغیر حالت پی ریزی شده است. این مفهوم به سیستم های بیولوژیکی، اقتصادی، اجتماعی و غیره نیز قابل اعمال است.

« تعاریف و مفاهیم اولیه کنترل مدرن »

حالت : حالت یک سیستم به رفتار گذشته، حال و آینده سیستم باز می گردد و همه ی اطلاعات را که یک شخص برای دانستن رفتار آینده سیستم نیاز دارد را نمایش می دهد.

متغیرهای حالت : کوچکترین مجموعه متغیرها از یک سیستم دینامیکی هستند که اگر در $t=t_0$ معلوم باشند به همراه ورودی در $t \geq t_0$ رفتار سیستم را به طور کامل مشخص می کند. $x_1(t)$ و ... و $x_n(t)$، n متغیر حالت سیستم را بیان می کند.

بردار حالت : $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t) \dots x_n(t)]^T$ ، فضای حالت : یک فضای n بعدی است که هر محور آن با x_1 و ... و x_n مشخص می شود. و اگر دو بعدی باشد به آن صفحه فاز نیز گویند.

مسیر حالت : منحنی رسم شونده توسط نقطه از $t=t_0$ تا $t=t_1$ در جهت افزایش زمان مسیر حالت یا (state trajectory) نامیده می شود.

معادلات فضای حالت سیستم های خطی :

اگر f و g توابع خطی، $x(t)$ بردار حالت، $y(t)$ بردار خروجی، $u(t)$ ورودی های سیستم باشد داریم : که در آن $A(t)$: ماتریس حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

$B(t)$: ماتریس ورودی ، $C(t)$ ماتریس خروجی و $D(t)$: ماتریس انتقال مستقیم می باشد. حال اگر سیستم نامتغیر با زمان باشد ماتریس های A و B و C و D به صورت ثابت و نامتغیر با زمان خواهند بود پس معادلات فضای حالت یک سیستم LTI به صورت روبرو خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

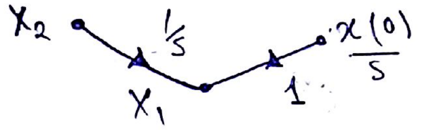
که A یک ماتریس $n \times n$ و B، $n \times m$ و C، $p \times n$ و D، $p \times m$ می باشد.

نمودار حالت.

نمودار حالت شکل تعمیم یافته از نمودار گذر سیگنال است که برای نمایش معادلات حالت و معادلات دیفرانسیلی به کار می رود.

فرض کنید متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ ارتباط داشته باشند با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف اخیر داریم: $sX_1(s) - x(0) = X_2(s) \Rightarrow X_1(s) - \frac{x(0)}{s} = \frac{X_2(s)}{s}$

پس داریم: $X_1(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{X_2(s)}{s}$



اگر بخواهید تابع تبدیل را از روی نمودار حالت بدست آورید ابتدا شرایط اولیه را صفر قرار داده همین گره‌های ورودی که ناشی از شرایط اولیه است صفر شده و سپس با استفاده از فرمول میسون تابع تبدیل را محاسبه می کنیم.

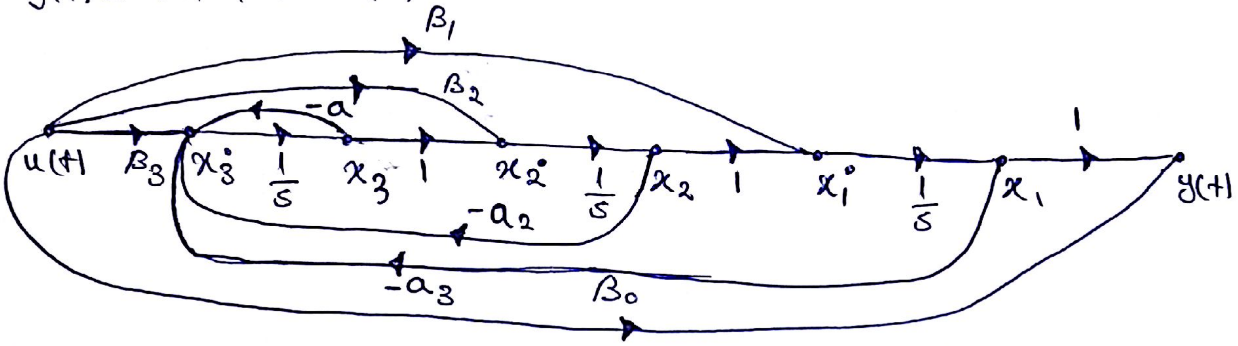
مثال: نمودار حالت سیستمی با فضای حالت زیر را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u(t)$$

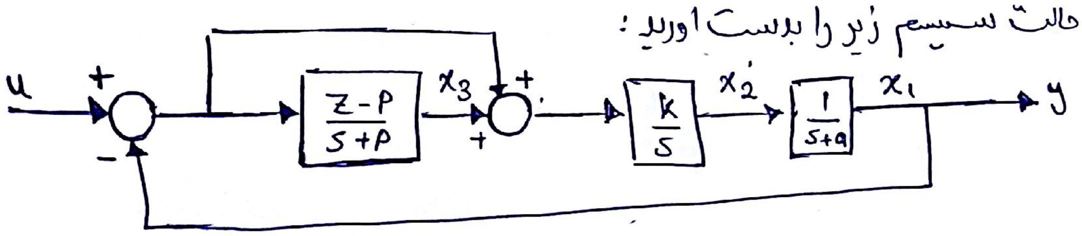
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u(t)$$

حل:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u(t)$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u(t)$$
$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u(t)$$
$$y(t) = x_1 + \beta_0 u(t)$$



مثال: نمایش فضای حالت سیستم زیر را بدست آورید:



$$\begin{cases} X_1 = \left(\dfrac{1}{s+a}\right) X_2 \\ X_2 = (U - X_1 + X_3)\,\dfrac{k}{s} \\ X_3 = \left(\dfrac{z-p}{z+p}\right)(U - X_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1 = -a_1 X_1 + X_2 \\ sX_2 = -kX_1 + kX_3 + kU \\ sX_3 = -(z-p)X_1 - pX_3 + (z-p)U \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + kx_3 + ku \\ \dot{x}_3 = -(z-p)x_1 - px_3 + (z-p)u \end{cases} \quad , \quad y = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & k \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ z-p \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم از روی معادلات فضای حالت آن :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

با گرفتن لاپلاس از معادلات فوق $X(s)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$-x(0) + sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

تابع تبدیل خروجی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} x(0) + C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

حال چون در تابع تبدیل شرایط اولیه صفر است داریم: $x(0) = 0$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)/U(s) = G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

مثال ۱: ماتریس انتقال سیستم زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

حل: فرمول:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \bar{0}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$(sI - A)^{-1} = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+3) & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \bar{0}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن معادله مشخصه سیستم داریم:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

$$G(s) = \frac{C(\text{Adjoint}[sI - A])B}{|sI - A|} + D = \frac{C(\text{Adj}[sI - A])B + |sI - A|D}{|sI - A|}$$

$$\Rightarrow \Delta(s) = |sI - A| = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

ماتریس انتقال حالت:

اگر معادله حالت را بدون ورودی معین هگن در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \Rightarrow \frac{dx(t)}{x(t)} = A\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx(t)}{dt} = \int A\,dt \Rightarrow \ln x(t) = At + C \Rightarrow x(t) = e^{At} e^{C}$$

$$x(0) = e^{C} = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{At}$$

در معادله اخیر $\phi(t) = e^{At}$ ماتریس انتقال حالت گویند

این ماتریس دارای خواص زیر باشد:

1) $\phi(0) = I$, 2) $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$, 3) $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$

4) $[\phi(t)]^K = \phi(tK)$, $\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_2)\phi(t_1)$

روش های محاسبه ی ماتریس انتقال حالت :

روش های متفاوتی برای محاسبه این ماتریس وجود دارد که یکی از قدرتمند ترین آن ها همان تبدیل لاپلاس است .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) \Rightarrow sX(s) - x_0 = AX(s) \Rightarrow$$

$$sX(s) - AX(s) = x_0 \Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 \Rightarrow X(s) = x_0 (sI - A)^{-1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} x_0 \Rightarrow e^{At} = \phi(t) = L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

حل معادله حالت ناهمگن در حوزه لاپلاس : فضای حالت زیر را با شرایط اولیه x_0 در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{لاپلاس}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ \Rightarrow X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} BU(s) \end{cases}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از معادله ی اخیر داریم :

$$x(t) = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} x(0) + L^{-1}\{[sI - A]^{-1} B\, U(s)\}$$

$$\Rightarrow x(t) = \phi(t)\, x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

نکته : از خواص $\phi(t)$ داریم : $\phi(t-\tau) = \phi(t)\,\phi(-\tau)$ پس رابطه اخیر به فرم زیر بازنویسی می شود .

$$x(t) = \phi(t)\left[x_0 + \int_0^t \phi(-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau\right] \quad , \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

مثال : پاسخ زمانی سیستم زیر را بدست آورید :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$u(t) =$ پله

$$x(t) = \phi(t)\left[x_0 + \int_0^t \phi(-\tau) B u(\tau)\, d\tau\right]$$

$$\phi(t) = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)+1}\right\}$$

$$\phi(t) = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{-1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{-1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{+\tau} - \tau e^{+\tau} & -\tau e^{+\tau} \\ +\tau e^{+\tau} & e^{+\tau} + \tau e^{+\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau\right]$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} + te^{-t} \\ -1 + 2e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \qquad y(t) = x_2(t) = -1 + 2e^{-t} - te^{-t}$$

خطی سازی معادلات غیرخطی و نقاط تعادل

در دو شرط می توان سیستم را به روش خطی بررسی نمود: ۱) سیستم به ذات خطی باشد. ۲) سیستم را با اعمال فرضیاتی خطی در نظر بگیریم.

نقطه تعادل: یک سیستم غیرخطی را در نزدیکی نقاطی به نام نقطه تعادل می توان خطی فرض کرد.

که در این نقاط آن معادلات است با: $\dot{x}^* = f(x^*, u^*) = 0$, $y^* = g(x^*, u^*)$ که یک سیستم می تواند نقطه تعادل نداشته باشد یا چندین نقطه تعادل داشته باشد.

یک روش خطی سازی استفاده از سری تیلور است و این گونه عمل می کنیم که بسط سری تیلور تابع غیرخطی را حول نقطه کار نوشته و جملات خطی سری تیلور را نگه داشته و بقیه را حذف می کنیم.

برای تک متغیره داریم: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$ برای چند متغیره داریم:

$$f(x,u) = f(x^*,u^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^*,u^*)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x^*,u^*)}{\partial u_i}(u_i - u_i^*) + \dots$$

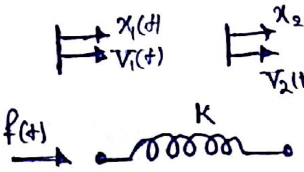
مثال) معادله غیرخطی زیر را در ناحیه $8 < x < 10$ ، $2 < y < 4$ خطی کنید.

$z = x^2 + 4xy + 6y^2$ وسط بازه های بیان شده را می گیریم $x^* = 9$ و $y^* = 3$

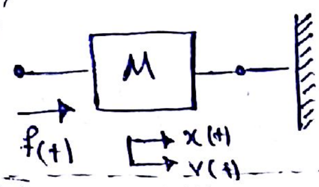
$$Z(x,y) = Z(x^*,y^*) + (2x^* + 4y^*)(x - x^*) + (4x^* + 12y^*)(y - y^*)$$

$$Z(x,y) = 243 + 30(x-9) + 72(y-3)$$

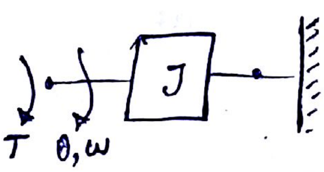
فصل 4: مدل سازی سیستم های فیزیکی



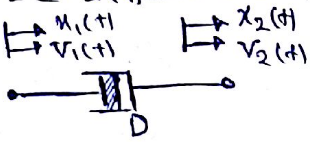
$f = k(x_1 - x_2) = kx$, $f = \int_{-\infty}^{t} (v_1 - v_2)\,dt$



$$f = M\frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{dv}{dt}$$

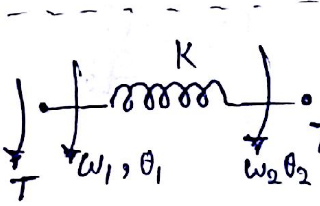


$$T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = J\frac{d\omega}{dt}$$

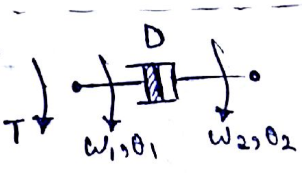


$$f = D(V_1 - V_2) = DV$$

$$f = D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = D\dot{x}$$



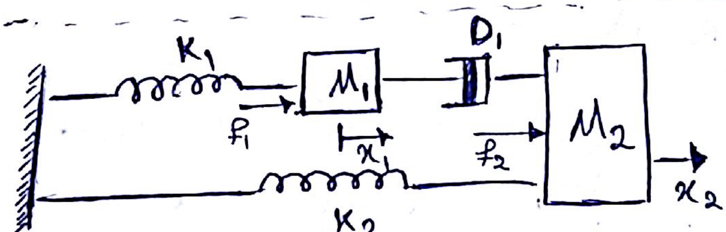
$T = K(\theta_1 - \theta_2) = K\theta$, $T = K\int_{-\infty}^{t} (\omega_1 - \omega_2)\,dt$



$$T = D(\omega_1 - \omega_2) = D\omega$$

$$T = D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = D\dot{\theta}$$

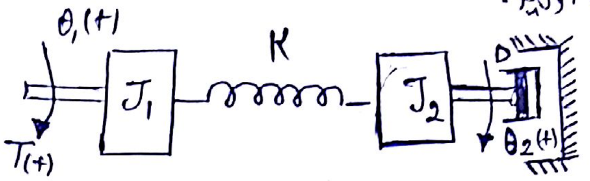
مثال) معادلات دیفرانسیل سیستم مکانیکی زیر را بنویسید:



$$f_1(t) = (d^2x_1/dt^2)M_1 + K_1x_1 + D_1\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)$$

$$f_2(t) = (d^2x_2/dt^2)M_2 + K_2x_2 + D_1(dx_2/dt - dx_1/dt)$$

مثال // تابع تبدیل سیستم مکانیکی دورانی زیر را بدست آورید.



$$T(t) = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + K(\theta_1 - \theta_2)$$

با تبدیل لاپلاس گیری داریم:

$$0 = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + K(\theta_2 - \theta_1) + D\frac{d\theta_2}{dt}$$

$$T(s) = J_1 s^2 \theta_1(s) + K[\theta_1(s) - \theta_2(s)]$$

$$0 = J_2 s^2 \theta_2(s) + K[\theta_2(s) - \theta_1(s)] + Ds\theta_2(s)$$

$$K\theta_1(s) = J_2 s^2 \theta_2(s) + K\theta_2(s) + Ds\,\theta_2(s)$$

$$\theta_1(s) = [J_2 s^2 + K + Ds]\,\theta_2 / K$$

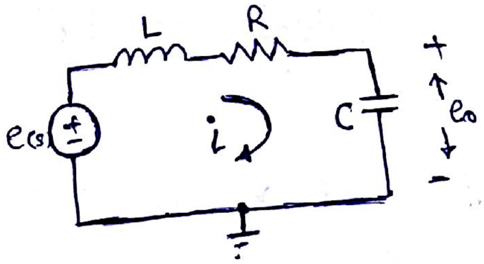
$$\Rightarrow T(s) = J_1 s^2 \frac{[J_2 s^2 + Ds + K]\,\theta_2(s)}{K} + K\left[\frac{[J_2 s^2 + Ds + K]\,\theta_2(s)}{K} - \theta_2(s)\right]$$

$$\Rightarrow T(s) = [J_1 s^2 + K]\,\frac{J_2 s^2 + Ds + K}{K}\,\theta_2(s) - K\theta_2(s)$$

$$\Rightarrow \frac{T(s)}{\theta_2(s)} = [J_1 s^2 + K]\,\frac{J_2 s^2 + Ds + K}{K} - K = \frac{(J_1 s^2 + K)(J_2 s^2 + Ds + K) - K^2}{K}$$

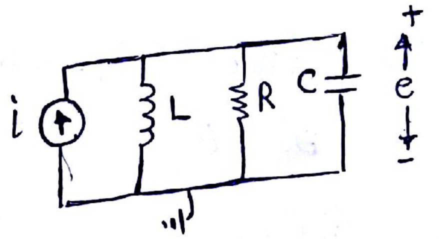
$$\Rightarrow \frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{J_1 J_2 s^4 + J_1 D s^3 + K(J_1 + J_2)s^2 + KDs}$$

// مدل سازی سیستم‌های الکتریکی //



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e \qquad \text{که} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

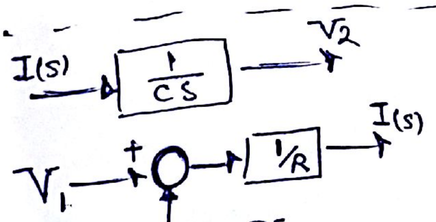
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e$$



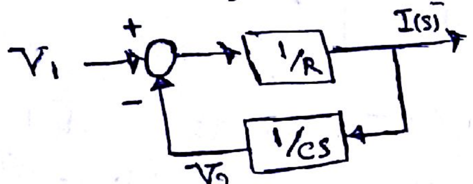
$$C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V\,dt = i \qquad \text{که} \quad V = \frac{d\varphi}{dt}$$

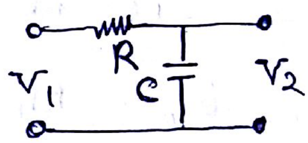
$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{L}\varphi = i$$

مثال // دیاگرام بلوکی مدار الکتریکی زیر را بدست آورید.



$\Rightarrow$



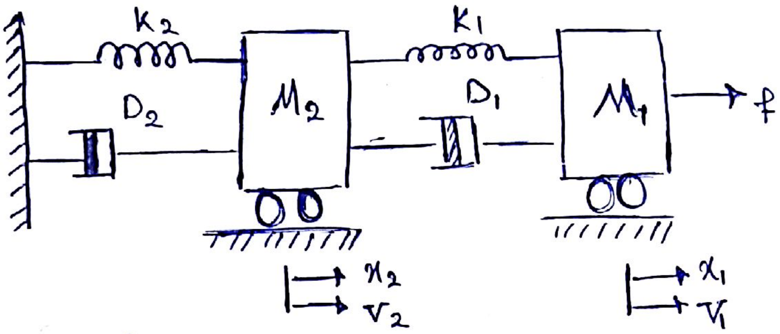


$$I(s) = \frac{V_1 - V_2}{R}, \quad V_2 = \frac{I(s)}{CS}$$

« تشابه نیروها »

سیستم الکتریکی برحسب جریان $i = C\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L}\phi$	سیستم الکتریکی برحسب ولتاژ $e = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$	سیستم مکانیکی دورانی $T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} + K\theta$	سیستم مکانیکی انتقالی $f = M\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + Kx$
جریان i	ولتاژ e	گشتاور T	نیروی F
ظرفیت خازن C	سلف L	ممان اینرسی J	جرم M
مقاومت $1/R$	مقاومت R	ضریب اصطکاک ویسکوز D	ضریب اصطکاک ویسکوز D
عکس اندوکتانس $1/L$	عکس ظرفیت $1/C$	سختی فنر K	سختی فنر K
شار مغناطیسی ϕ	بار الکتریکی	جابه جایی زاویه ای θ	جابه جایی x
ولتاژ e	جریان i	سرعت زاویه ای ω	سرعت V

مثال ۱: دیاگرام جسم - آزاد و تشابه های الکتریکی سیستم مکانیکی زیر را رسم کنید.



$$f = M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + K_1(x_1 - x_2) + D_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$0 = M_2\ddot{x}_2 + K_2(x_2) + D_2\dot{x}_2 + K_1(x_2 - x_1) + D_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$