سه‌شنبه ۲۳ جولای ۲۰۱۳

مسأله ۱. ثابت کنید برای هر زوج از اعداد صحیح مثبت k و n، وجود دارند k عدد صحیح مثبت m_1، m_2، ...، m_k (نه لزوماً متفاوت) به طوری که

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

مسأله ۲. یک جای‌دهی از ۴۰۲۷ نقطه در صفحه، *کلمبیایی* خوانده می‌شود، اگر متشکل از ۲۰۱۳ نقطه قرمز و ۲۰۱۴ نقطه آبی باشد و هیچ سه نقطه‌ای از این جای‌دهی روی یک خط نباشند. با رسم تعدادی خط، صفحه به تعدادی ناحیه تقسیم می‌شود. یک آرایش از خطوط را برای یک جای‌دهی کلمبیایی، خوب می‌گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند:

- هیچ خطی از هیچ نقطه‌ای از جای‌دهی نگذرد.
- هیچ ناحیه‌ای شامل نقاط از هر دو رنگ نباشد.

کوچک‌ترین مقدار k را بیابید که برای هر جای‌دهی کلمبیایی از ۴۰۲۷ نقطه، یک آرایش خوب از k خط وجود داشته باشد.

مسأله ۳. فرض کنید دایره محاطی خارجی مثلث ABC مقابل به رأس A در نقطه‌ی A_1 به ضلع BC مماس باشد. نقاط B_1 روی CA و C_1 روی AB را به ترتیب مشابهاً توسط دوایر محاطی خارجی مقابل به رأس B و C تعریف می‌کنیم. فرض کنید که مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد. ثابت کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC مقابل به رأس A دایره‌ای است که مماس بر پاره‌خط BC و امتداد AB از طرف B و امتداد AC از طرف C است. دوایر محاطی خارجی مقابل به B و C مشابهاً تعریف می‌شوند.

چهارشنبه ۲۴ جولای ۲۰۱۳

مسأله ۴. فرض کنید ABC یک مثلث حادةالزاویه با مرکز ارتفاعیه‌ی H باشد و فرض کنید W نقطه‌ای روی پاره‌خط BC غیر از B و C باشد. نقاط M و N به ترتیب پای ارتفاع‌های رسم شده از B و C هستند. دایره‌ی محیطی BWN را با ω_1 نمایش می‌دهیم. فرض کنید X نقطه‌ای روی ω_1 است که WX قطر ω_1 می‌باشد. مشابهاً، دایره‌ی محیطی CWM را با ω_2 نمایش می‌دهیم. فرض کنید Y نقطه‌ای روی ω_2 است که WY قطر ω_2 می‌باشد. ثابت کنید X، Y و H هم‌خطاند.

مسأله ۵. فرض کنید $\mathbb{Q}_{>0}$ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. فرض کنید $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

(۱) برای هر $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ داریم $f(x)f(y) \geq f(xy)$؛

(۲) برای هر $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ داریم $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$؛

(۳) وجود دارد عدد گویای $a > 1$، به طوری که $f(a) = a$.

ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ داریم $f(x) = x$.

مسأله ۶. فرض کنید $n \geq 3$ عددی صحیح باشد و روی دایره‌ای $n+1$ نقطه‌ی هم‌فاصله را در نظر بگیرید. همه‌ی برچسب‌گذاری‌های این نقاط را با اعداد ۰، ۱، ...، n در نظر بگیرید که هر برچسب دقیقاً یک بار استفاده شده است. دو برچسب گذاری این‌گونه، یکی فرض می‌شوند، اگر یکی را بتوان از دیگری با یک دوران دایره به دست آورد. یک برچسب‌گذاری، *زیبا* خوانده می‌شود، اگر برای هر چهار برچسب $a < b < c < d$ که در آن $a+d = b+c$ وتر واصل نقاط با برچسب a و d و وتر واصل نقاط با برچسب b و c هم‌دیگر را قطع نکنند.

فرض کنید M تعداد برچسب‌گذاری‌های زیبا باشد و N تعداد زوج‌های مرتب (x, y) از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که $x + y \leq n$ و اعداد x و y نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید

$$M = N + 1$$