دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی– دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۱ (نیمسال دوم ۹۸-۹۷) جمع نمرات: ۶۰

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۲/۰۴ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

- **این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.**

۱- عدد مختلط $z = (1+i)^4 + 8i - 8$ را در نظر بگیرید. (۱۰ نمره)

الف) نمایش قطبی Z را بدست آورید.

ب) ریشه های سوم Z را بیابید.

۲- قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) را بیان و ثابت کنید. (۱۰ نمره)

۳- ثابت کنید معادله $x^3 - 3x + c = 0$ <u>حداکثر</u> یک ریشه حقیقی در بازه $(0,1)$ دارد. (برای هر C دلخواه) (۱۰ نمره)

۴- با استفاده از سری مک لورن توابع $\cos(x^2)$، e^{x^2} و $\sin(x^4)$ مقدار حد زیر را بیابید. (۲۰ نمره)

(در حل این مسئله مجاز به استفاده از قاعده هوپیتال نمی باشید)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^4)}$$

۵- حد تابع زیر را محاسبه نمایید. (۱۰ نمره)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

پیروز باشید

math-teacher.blog.ir

«ابراهیم شاه ابراهیمی»
اردیبهشت ۹۸

پاسخنامه آزمون میانترم «ریاضی ۱»
«دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی»

$$1)\ Z=(1+i)^6+8i-8$$

$$z_1=1+i\quad\begin{cases} r=\sqrt2 \\ tg\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}\rightarrow z_1=\sqrt2\, e^{\frac{\pi}{4}i}\xrightarrow{\text{دستور موآور}} z_1^6=\sqrt2^{\,6}\, e^{\frac{6\pi}{4}i}=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$=8\left(\cos\tfrac{3\pi}{2}+i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right)=\boxed{-8i}$$

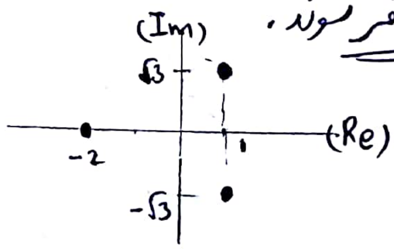
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} Z=-8i+8i-8\rightarrow\boxed{Z=-8}$$

$$Z=-8\quad\begin{cases} r=8 \\ tg\theta=0\rightarrow\theta=\pi\ (\text{چرا؟})\end{cases}\rightarrow\boxed{Z=8e^{\pi i}}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} Z^{1/3}=8^{1/3}e^{\left(\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)i}=2\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)\right)$$

$$\begin{cases} k=0\rightarrow Z=2\left(\cos(\pi/3)+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)=2\left(\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)=\boxed{1+\sqrt3\, i} \\ k=1\rightarrow Z=2\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=2(-1+0)=\boxed{-2} \\ k=2\rightarrow Z=2\left(\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)=2\left(\frac12-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=\boxed{1-\sqrt3\, i}\end{cases}$$

چک شود که مجموع ریشه ها باید صفر شوند.



ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

۲) قضیه مقدار میانگین : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

بیان: هرگاه f تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ و مشتق پذیر در بازه (a,b) باشد آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اثبات: تابع $g(x) = f(x) - rx$ را در نظر می‌گیریم که در آن r عددی ثابت است.
چون تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است تابع g نیز همینگونه است.
حال r را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که $g(a)=g(b)$:

$$g(a) = f(a) - ra = f(b) - rb = g(b)$$

$$\to r(b-a) = f(b) - f(a) \to \boxed{r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$$\to g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$$

از طرفی چون $g(a)=g(b)$ پس تابع $g(x)$ در شرایط قضیه رل صدق می‌کند
پس حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ داریم که:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \xrightarrow{x=c} g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\to \boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

۳) $x^3 - 3x + c = 0$ حداکثر یک ریشه $(0, 1)$

$$\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = -2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 > c > 0 \rightarrow f(0) > 0 \ , \ f(1) < 0 \rightarrow f(0)\,f(1) < 0 \\ c < 0 \rightarrow f(0) < 0 \ , \ f(1) < 0 \end{cases}$$

با توجه به پیوستگی و قضیه بولتزانو حداقل یک ریشه در این بازه دارد

و اگر $c > 2$ ← ریشه ندارد

$\rightarrow f(0)\,f(1) > 0 \rightarrow$ فاقد ریشه

$\xrightarrow[f(x) = x^3 - 3x + c]{0 < c < 2} f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{0 < x < 1} f'(x) < 0 \rightarrow$ تابع نزولی است و فقط یک بار می‌تواند محور x را قطع کند

بنابراین معادله حداکثر دارای ۱ ریشه خواهد بود

math-teacher.blog.ir

۴)
$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \xrightarrow{x \to x^4} \sin(x^4) \simeq x^4 - \dfrac{x^{12}}{3!} + \cdots \\ \cos x \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \xrightarrow{x \to x^2} \cos(x^2) \simeq 1 - \dfrac{x^4}{2!} + \cdots \\ e^x \simeq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \xrightarrow{x \to x^4} e^{x^4} \simeq 1 + x^4 + \cdots \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{\sin(x^4)} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2!} - 1 - x^4}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{2} x^4}{x^4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۸

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱و۲، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی، محاسبات عددی

@EShahebrahimi

$$۵)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$$ مبهم

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{\text{Ln گیری}} \ln A = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\to \ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)-\ln(x)}{x^2} \overset{HoP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}}{2x} \overset{\text{هم ارزی}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2!}-x+\frac{x^3}{3!}}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{2x^3} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$\to \ln A = -\frac{1}{6} \to \boxed{A = e^{-1/6}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱و۲، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی، محاسبات عددی

@EShahebrahimi