جزوه معادلات دیفرانسیل

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱-۱) مقدمه

عنوان کلی درس معادلات دیفرانسیل[2] است، اما موضوع اصلی بحث معادلات دیفرانسیل معمولی[3] یا ODE می‌باشد [۱].

۱-۲) تعاریف و کلیات

۱-۲-۱) معادلات جبری

قبلا در ریاضیات پایه با انواع معادلات جبری آشنا شده‌ایم که در حالت کلی به صورت $f(x) = ۰$ هستند. در حالت پیچیده‌تر تابع f می‌تواند تابعی از چند مجهول باشد، مانند: $f(x, y, z, \dots) = ۰$. همچنین تابع f می‌تواند به صورت برداری باشد و آن را به شکل دستگاه معادلات نوشت [۱].

ex11- **مثال ۱-۱** در ساده‌ترین حالت معادلات جبری زیر را در نظر بگیرید. این معادلات از نوع خطی بوده و براحتی قابل حل هستند.

$$\begin{aligned} &ax + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \\ &ax^۲ + bx + c = ۰ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}, \quad b^۲ - ۴ac = \Delta \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

در مواقعی که معادلات جبری براحتی قابل حل نباشند از روش‌های عددی مانند نیوتن رافسون، گوس–سایدل و ... برای حل آن‌ها استفاده می‌شود.

[2] Differential Equations
[3] Ordinary Differential Equations

در مثال ۱-۱ هدف پیدا کردن مجهول x بود. x می‌تواند قابل شمارش (محدود) و یا غیرقابل شمارش (نامحدود) باشد. درواقع، xها محل برخورد نمودار f با محور x هستند. در شکل ۱-۱ تابع f در چهار نقطه محور x را قطع کرده است، یعنی معادله جبری $y = f(x) = 0$ چهار جواب دارد. در معادلات جبری،

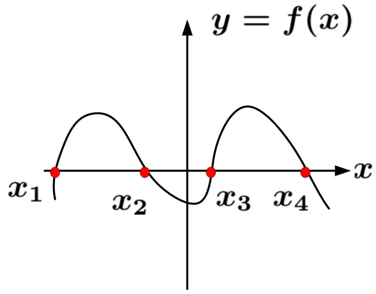

fig7 شکل ۱-۱: محل برخورد با محور x

مجهول یک عدد (نقطه) است اما در معادلات دیفرانسیل، مجهول یک رابطه (تابع) است. فرق اساسی معادلات جبری و معادلات دیفرانسیل همین است [۱].

مثال ۱-۲ معادلات زیر را بررسی کنید [۲].

$$5yx^2 + y^3 e^x - 4 = 0 \tag{1-2}$$
eq11-

$$y^2 + x\int_0^x y(t)dt - 4 = 0 \tag{1-3}$$
eq12-

حل: معادله ۱-۲ از نوع جبری و معادله ۱-۳ از نوع انتگرالی هستند، زیرا اثری از y' یا y'' و یا ... نیست [۲].

۱-۲-۲) معادلات دیفرانسیل معمولی

تعریف ۱-۱ (معادلات دیفرانسیل) هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم [۳].

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل را معمولی نامیده و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDE [1]) می‌نامند [۳].

[1] Partial Differential Equations

ex1 **مثال ۱-۳**

$$y' = ۳ \tag{۱-۴}$$
eq1

$$y'' + ۳(y')^{۲} + \cos x = ۴ \tag{۱-۵}$$
eq2

$$x^{۲}y'''(v'')^{\frac{۳}{۴}} + e^{۴x}\sin y' = y^{۳} + x(y')^{۵} \tag{۱-۶}$$
eq3

$$(y'')^{۳} + x(y')^{\frac{۱}{۲}} + v\sin y' = ۷x^{۲} + ۱ \tag{۱-۷}$$
eq4

$$(y'')^{۳} + ۶(y')^{۴} + ۲x = ۳ \tag{۱-۸}$$
eq5

$$\frac{\partial^{۲}u(x,y)}{\partial x^{۲}} = \frac{\partial^{۲}u(x,y)}{\partial y\partial x} \tag{۱-۹}$$
eq6

$$\frac{\partial^{۲}u(x,y)}{\partial t^{۲}} + \frac{\partial^{۲}u(x,t)}{\partial x\partial t} = ۴x^{۲}t \tag{۱-۱۰}$$
eq7

شماره (۱-۴) الی (۱-۸)، معمولی و شماره‌های (۱-۹) و (۱-۱۰) نسبی هستند [۳].

تعریف ۱-۲ (مرتبه معادله دیفرانسیل) بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم [۳].

در مرجع [۲] اینچنین تعریف شده است: «چنانچه یک معادله دیفرانسیل را برحسب بالاترین مرتبه مشتق موجود، بتوان به صورت یک چندجمله‌ای نوشت، درجه آن چندجمله‌ای را درجه معادله دیفرانسیل می‌گوییم.»

مثال ۱-۴ در مثال ۱-۳ معادله (۱-۴) از مرتبه اول، معادله (۱-۵) از مرتبه دوم، معادله (۱-۶) از مرتبه سوم، معادله (۱-۷) از مرتبه دوم و معادله (۱-۸) از مرتبه دوم می‌باشند [۳].

تعریف ۱-۳ (درجه معادله دیفرانسیل) اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان نسبت به مشتقات موجود در معادله به فرم چند جمله‌ای نوشت، آنگاه توان بالاترین مشتق موجود در معادله را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامند [۳].

مثال ۱-۵ در مثال ۱-۳ معادله (۱-۴) از درجه اول، معادله (۱-۵) از درجه اول، معادله (۱-۶) بدون درجه، معادله (۱-۷) بدون درجه و معادله (۱-۸) از درجه سوم می‌باشند [۳].

با استفاده از تعاریف بالا معادلات را دسته‌بندی می‌کنیم [۳]:

الف) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

ب) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

ج) معادلات دیفرانسیل از مرتبه دلخواه n

تعریف ۱-۴ (معادله دیفرانسیل خطی) اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به گونه‌ای نوشت که شامل هیچ جمله غیرخطی از تابع و مشتقات تابع نباشد، آنگاه آن معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گوییم [۲].

تعریف ۱-۵ (معادله دیفرانسل خطی همگن) یک معادله دیفرانسیل خطی را از نوع همگن گویند، هرگاه تمام جملات آن معادله دیفرانسیل شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد [۲].

مثال ۱-۶ درباره معادلات دیفرانسیل زیر بحث کنید [۲].

$$x^{۳}y'' + y'^{۴} - ۴x = ۰ \tag{۱-۱۱}$$ eq8

$$(x-۱)y'' + \cos y \sin y'' - ۴y = x^{۲} \tag{۱-۱۲}$$ eq9

$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}} - x\frac{\partial u}{\partial x} + y^{۳}\frac{\partial u}{\partial y} - ۴x = ۰ \tag{۱-۱۳}$$ eq10

حل: معادله ۱-۱۱، یک معادله دیفرانسیل است. به واسطه وجود ترم y'' مرتبه معادله ۲ می‌باشد. به واسطه وجود ترم $y'^{۴}$ معادله غیرخطی است. درجه این معادله دیفرانسیل به دلیل وجود ترم $(y'')^{۱}$، درجه اول است.

معادله ۱-۱۲، یک معادله دیفرانسیل است. مرتبه این معادله دیفرانسیل به دلیل وجود ترم y'' مرتبه دوم است. به واسطه وجود ترم‌های $\sin y''$ و $\cos y$ از نوع غیرخطی است. چون برای تشخیص درجه معادله باید به سراغ درجه توانی بالاترین مشتق رفت و نیز در این مثال بالاترین مرتبه مشتق y'' است، که بواسطه آن که ترم y'' به صورت $\sin y''$ به کار رفته است. پس معادله فاقد درجه است.

معادله ۱-۱۳، معادله دیفرانسیل از نوع مشتقات جزئی است. مرتبه این معادله به واسطه ترم $\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}$ مرتبه ۲ است. معادله از نوع خطی است، چون فرم غیرخطی از u ندارد. معادله غیرهمگن است (کافی است عبارتی را ببینیم که u نداشته باشد). درجه ندارد (چون معادله از نوع مشتقات جزئی است).

۱-۳) تشکیل معادله دیفرانسیل

دسته منحنی $y = F(x,c)$ را بررسی می‌کنیم. c مقدار ثابت است. به ازای مقادیر مختلفی که c اختیار می‌کند، منحنی‌های بیشماری رسم خواهد شد [۳].

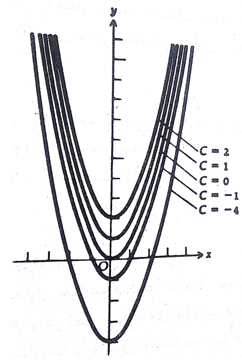

fig1 شکل ۱-۲: مثال ۱-۷

ex4 **مثال ۱-۷** دسته منحنی $y = x^۲ + c$ را رسم کنید [۳].

ex5 **مثال ۱-۸** دسته منحنی $y = cx$ را رسم کنید [۳].

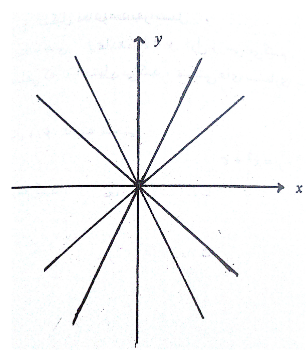

fig2 شکل ۱-۳: مثال ۱-۸

ex6 **مثال ۱-۹** دسته منحنی $y = cx^۲ + ۲$ را رسم کنید [۳].

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که پارامتر ثابت c را نداشته و $y = F(x, c)$ جواب آن معادله باشد. این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواهد بود. برای این منظور باید پارامتر c را در دستگاه زیر حذف

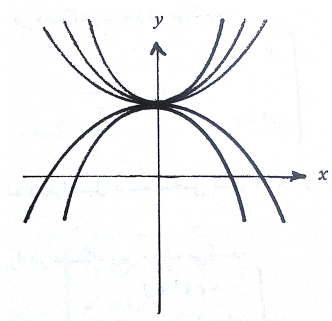

fig3 شکل ۱-۴: مثال ۱-۹

کرد [۳]:

$$\begin{cases} y = F(x,c) \\ y' = F'_x(x,c) \end{cases}$$

مثال ۱-۱۰ معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۱-۷ را پیدا کنید [۳].

حل: پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم [۳].

$$\begin{cases} y = x^{۲} + c \\ y' = ۲x \end{cases}$$

چون معادله دوم دستگاه به c بستگی ندارد پس جواب مطلوب $y' = ۲x$ خواهد بود [۳].

مثال ۱-۱۱ معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۱-۸ را پیدا کنید [۳].

حل: پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم [۳].

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

مثال ۱-۱۲ معادله دیفرانسیل دسته منحنی مثال ۱-۹ را پیدا کنید [۳].

حل: پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم [۳].

$$\begin{cases} y = cx^{۲} + ۲ \\ y' = ۲cx \Rightarrow c = \dfrac{y'}{۲x} \end{cases}$$

در معادله اول دستگاه به جای c مقدار می‌گذاریم:

$$y = \frac{y'}{۲x}x^{۲} + ۲ = \frac{۱}{۲}y'x + ۲$$

مثال ۱-۱۳ معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت c در دسته توابع $y = c\sin 2x + \cos 2x$ را مشخص کنید [۲].

حل:

$$\begin{cases} y - \cos 2x = c\sin 2x \\ y' + 2\sin 2x = 2c\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{y-\cos 2x}{y' + 2\sin 2x} = \frac{c\sin 2x}{2c\cos 2x} \Rightarrow$$

$$2y\cos 2x - 2\cos^2 2x = y'\sin 2x + 2\sin^2 2x \Rightarrow y'\sin 2x - 2y\cos 2x + 2 = 0$$

اگر دسته منحنی به بیش از یک پارامتر بستگی داشته باشد، مانند: $y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن باید n پارامتر را بین $n+1$ معادله، در دستگاه زیر حذف کرد [۳]،

$$\begin{cases} y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y' = F'_x(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y'' = F''_{x^2}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)} = F^{(n)}_{x^n}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

که نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهد بود.

نکته ۱-۳-۱ فرض کنید $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت‌های اختیاری و $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ توابعی معلوم باشند. می‌توان نشان داد که معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های $k_1, k_2, \dots, k_n$، دسته منحنی‌های $y = k_1y_1 + k_2y_2 + \dots + k_ny_n$ به صورت زیر خواهد بود [۲]:

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۱-۱۴ معادله دیفرانسیل نظیر دسته توابع $y = ae^{2x} + bx^2$ که در آن a و b پارامترهای اختیاری می‌باشند را مشخص کنید [۲].

با توجه به نکته ۱-۳-۱ خواهیم داشت: $y_1 = e^{2x}, y_2 = x^2$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{2x} & 2e^{2x} & 4e^{2x} \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{2x}\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$y(4 - 8x) - y'(2 - 4x^2) + y''(2x - 2x^2) = 0$$

مثال ۱-۱۵ معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید [۳]. $y = 2x^2 + c_1x + c_2$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + c_1x + c_2 \\ y' = 4x + c_1 \\ y'' = 4 \end{cases}$$

$y'' = 4$ جواب مطلوب است.

مثال ۱-۱۶ معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را پیدا کنید [3]. $y = (c_1 + c_2x)e^x$

حل. پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = c_1e^x + c_2xe^x \\ y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x \\ y'' = c_1e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم: $y'' - 2y' = -c_1e^x - c_2xe^x$

طرف راست عبارت برابر $-y$ می‌باشد و جواب مطلوب: $y'' - 2y' + y = 0$

تعریف ۱-۶ (جواب معادله دیفرانسیل) هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود [3].

مثال ۱-۱۷ تابع $y = 2e^{-4x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + 4y = 0$ می‌باشد، زیرا از y مشتق می‌گیریم، داریم: $y' = -8e^{-4x}$ با جایگذاری در معادله اصلی داریم [3]: $-8e^{-4x} + 8e^{-4x} = 0$

مثال ۱-۱۸ تابع $y = \cos 2x + \sin 2x$ یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' + 4y = 0$ می‌باشد؛ زیرا مشتق اول و دوم y را می‌گیریم و داریم:

$$y' = -6\sin 2x + 2\cos 2x \qquad y'' = -12\cos 2x - 4\sin 2x$$

با جایگذاری y' و y'' اتحاد برقرار است [3]:

$$-12\cos 2x - 4\sin 2x + 12\cos 2x + 4\sin 2x = 0$$

ex14 **مثال ۱-۱۹** هر یک از توابع $y = -\cos x - 5$، $y = -\cos x + 2$ و $y = -\cos$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y' = \sin x$ می‌باشد و می‌دانیم به طور کلی $y = -\cos x + c$ جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد، که c ثابت دلخواه است [3].

مثال ۱-۲۰ هر یک از توابع $y = xe^x + \frac{۵}{۲}e^x$، $y = xe^x - ۲e^x$ و $y = xe^x + e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد: $y' - y = e^x$ و بطور کلی $y = xe^x + ce^x$ جواب معادله دیفرانسیل می‌باشد که c ثابت دلخواه است [۳].

با توجه به دو مثال بالا خواهیم دید که معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد؛ حتی بی‌نهایت جواب، که همگی تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می‌شوند. چنین جوابی را جواب عمومی می‌نامیم [۳].

توجه: اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ثابت دلخواه خواهد بود [۳].

اگر در مثال ۱-۱۹ بخواهیم جواب را طوری تعیین کنیم که منحنی جواب از نقطه دلخواه $(۰, ۱)$ عبور کند، در جواب عمومی $x = ۰, y = ۱$ قرار می‌دهیم: $۱ = -\cos ۰ + c \Rightarrow c = ۲$ در جواب عمومی $c = ۲$ قرار می‌دهیم [۳]: $y = -\cos x + ۲$

به این جواب، جواب خصوصی گویند [۳].

جواب خصوصی به این ترتیب بدست می‌آید که جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار می‌دهیم و پارامتر ثابت را تعیین می‌کنیم [۳].

توجه: جواب خصوصی، جوابی است بدون پارامتر و همیشه از جواب عمومی بدست می‌آید. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را ببینید [۳].

ex16 **مثال ۱-۲۱** فرض کنید ماده رادیواکتیویته‌ای داریم و می‌خواهیم بدانیم جرم آن بعد از t ساعت چقدر می‌شود. می‌دانیم که میزان متلاشی شدن متناسب با جرم موجود است. پس اگر فرض کنیم جرم y باشد [۳]:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow Lny = -kt + Lnc \Rightarrow Ln\frac{y}{c} = -kt \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-kt}$$

جواب عمومی $y = ce^{-kt}$ و اگر فرض کنیم در $t = ۰$، گرم $y = ۷$ (شرایط اولیه) داریم: $\Rightarrow ۷ = ce^{۰}$ $c = ۷$ و جواب خصوصی $y = ۷e^{-kt}$ می‌باشد. اگر بخواهیم بدانیم بعد از چه مدتی جرم نصف می‌شود، باید در جواب خصوصی به جای y مقدار $\frac{y}{۲}$ قرار دهیم و t را تعیین کنیم (k ضریب تناسب معلوم است).

تعریف ۱-۷ (جواب غیرعادی) جواب غیرعادی[1] معادله دیفرانسیل، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد [۳].

[1] Singular Solution

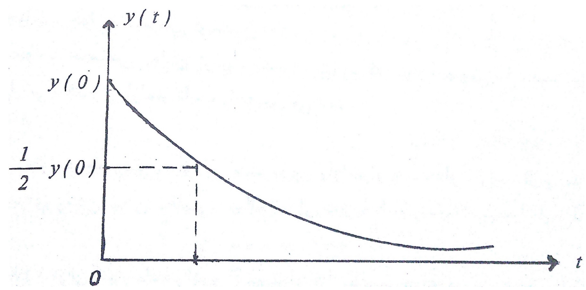

fig4

شکل ۱-۵: مثال ۱-۲۱

ex17 **مثال ۱-۲۲** معادله دیفرانسیل $y^۲(۱+y'^۲)=۴$ دارای جواب عمومی $(x-c)^۲+y^۲=۴$ است که نشان‌دهنده دسته دوایری هستند که مرکز آن‌ها نقاط $(c,۰)$ می‌باشد [۳].

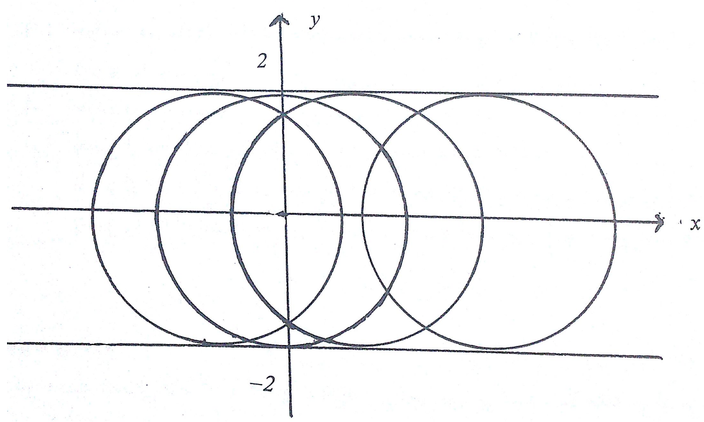

fig5

شکل ۱-۶: مثال ۱-۲۲

دو خط $y=۲$ و $y=-۲$ نیز در معادله صدق می‌کنند که $y=\pm۲$ جواب‌های غیرعادی این معادله می‌باشند.

درباره راه‌های پیدا کردن جواب‌های غیرعادی بعدا صحبت خواهیم کرد.

مثال ۱-۲۳ معادله دیفرانسیل $y=xy'+\frac{۱}{y'}$ دارای جواب عمومی $y=cx+\frac{۱}{c}$ می‌باشد و جواب غیرعادی معادله $y^۲=۴x$ است [۳].

تذکر [۳]:

الف) جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی بدست نمی‌آید.

ب) معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند.

ج) بعضی از معادلات ممکن است دارای جواب عمومی نباشند. مانند $y'^{۲} + ۳ = ۰$ که در مجموعه اعداد حقیقی دارای جواب نیست و معادله $|y'| + |y| = ۰$ تنها دارای یک جواب $y \equiv ۰$ است و جواب عمومی ندارد.