پاسخ های تشریحی آزمون هفتگی شماره ۲ – قسمت ۱

۱ آبان ۹۳- درس هندسه

سوال ٤١:

گزینه‌ی «۱»

$$\hat{A}_۱ < \hat{A}_۲ \Rightarrow ۹۰-\hat{B} < ۹۰-\hat{C} \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$$

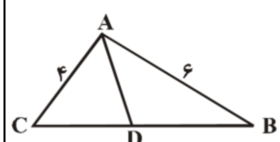
در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، کوچک‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر و بالعکس. در نتیجه:

$$AC > AB$$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

سوال ٤٢:

گزینه‌ی «۳»



چون AD نیمساز است، پس:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{۶}{۴}$$

از طرفی دو مثلث ABD و ACD ارتفاع مشترک دارند. پس نسبت مساحت آنها برابر با نسبت قاعده‌شان است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{BD}{DC} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABD}} = ۶K, S_{\overset{\Delta}{ACD}} = ۴K$$

$$\xrightarrow{\text{از صورت سؤال}} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ACD}} = ۱۰K = ۲۰ \overset{K=۲}{\Rightarrow} S_{\overset{\Delta}{ABD}} = ۱۲$$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌ی ۱۳)

سوال ٤٣:

گزینه‌ی «۱»

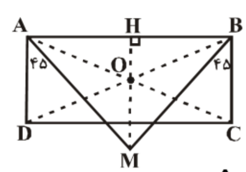
$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله‌ی } n\text{اُم} = ۲^{۲n} \times ۳ \xrightarrow{n=۲} ۲^۴ \times ۳ = ۳a + ۱۵$$

$$۳a + ۱۵ = ۴۸ \Rightarrow ۳a = ۳۳ \Rightarrow a = ۱۱$$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۸ و ۹)

سوال ٤٤:

گزینه‌ی «۴»



اگر H وسط AB باشد، سه نقطه‌ی M و O (محل برخورد قطرها) و H در یک امتداد و MH بر AB عمود است. (چرا؟)

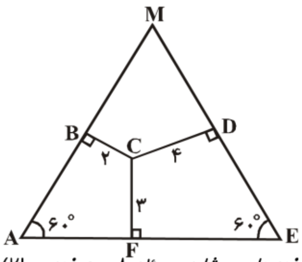
در مثلث قائم‌الزاویه BMH، چون $\hat{B} = ۴۵^\circ$ پس این مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، در نتیجه $MH = HB = ۴$. از طرفی $OH = \frac{۳}{۲}$ پس $MO = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲}$.

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

سوال ٤٥:

گزینه‌ی «۳»

AB و DE را امتداد می‌دهیم و محل برخورد آنها را M می‌نامیم، نقطه‌ی C داخل مثلث متساوی‌الاضلاع AME قرار دارد، مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاعش برابر ارتفاع مثلث یا $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ضلع آن می‌باشد، پس:



$$BC + CD + CF = \frac{AE\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲ + ۴ + ۳ = \frac{AE\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{۱۸}{\sqrt{۳}} = ۶\sqrt{۳}$$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های مشابه مسئله ۸- صفحه‌ی ۲۱)

سوال ٤٦:

گزینه‌ی «۴»

طبق قضیه‌ی نیمسازها داریم:

$$x + y > ۸ \Rightarrow x + \frac{۵}{۳}x > ۸ \Rightarrow \frac{۸}{۳}x > ۸ \Rightarrow x > ۳$$

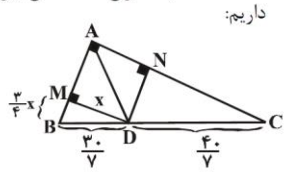
$$y < x + ۸ \Rightarrow \frac{۵}{۳}x < x + ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۳}x < ۸ \Rightarrow x < ۱۲$$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

سوال ٤٧:

گزینه‌ی «۲»

AMDN یک مربع است. ضلع این مربع را x می‌گیریم. طبق قضیه‌ی نیمسازها داریم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{۳}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{BMD} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{۳}{۴}x$$

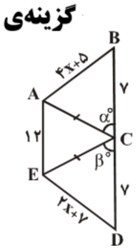
فیثاغورث: $x^۲ + (\frac{۳}{۴}x)^۲ = BD^۲ \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۷}$

طول AN با MD برابر است و $\frac{۲۴}{۷}$ واحد است.

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

سوال ٤٨:

گزینه‌ی «۲»



$$\left.\begin{array}{l} AC = CE \\ BC = CD \\ \hat{\alpha} > \hat{\beta} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه‌ی لولا}} AB > DE$$

$$\Rightarrow ۴x + ۵ > ۲x + ۷ \Rightarrow ۲x > ۲ \Rightarrow x > ۱$$

$$ABDE \text{ محیط} = ۱۲ + ۱۴ + ۴x + ۵ + ۲x + ۷ = ۶x + ۳۸$$

طبق شرط $۱ < x$، به‌ازای $x = \frac{۷}{۶}$ محیط ABDE عدد صحیح و دارای کم‌ترین مقدار ۴۵ است.

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

سوال ۴۹:

گزینه‌ی «۲»

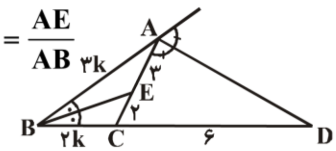
اگر یک رأس از تعداد رأس‌های یک n ضلعی کم شود از تعداد قطرهای آن $n-۲$ قطر کم می‌شود.
اگر به تعداد رأس‌های یک n ضلعی یک رأس افزوده شود به تعداد قطرهای آن $n-۱$ قطر افزوده می‌شود. پس: $n-۲=\frac{۳}{۴}(n-۱)$

$\Rightarrow n=۵ \Rightarrow$ مجموع زوایای داخلی : $(n-۲)\times ۱۸۰=۵۴۰$

(هندسه‌ی۲- مشابه فعالیت ۱-۹- صفحه‌های ۹و ۱۰)

سوال ۵۰:

گزینه‌ی «۳»



$BE \Rightarrow \frac{CE}{BC}=\frac{AE}{AB}$ نیم‌ساز داخلی $\hat{B}$ است.

$\Rightarrow \frac{BC}{۲}=\frac{AB}{۳} \Rightarrow \begin{cases} BC=۲k \\ AB=۳k \end{cases}$

$AD \Rightarrow \frac{CD}{AC}=\frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{۶}{۵}=\frac{۶+۲k}{۳k}$ نیم‌ساز خارجی $\hat{A}$ است.

$\Rightarrow ۹k=۱۵+۵k \Rightarrow ۴k=۱۵ \Rightarrow k=\frac{۱۵}{۴}$

$AB=۳k=۳\times\frac{۱۵}{۴}=\frac{۴۵}{۴}$

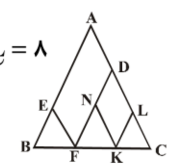
(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

سوال ۵۱:

گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم اگر از هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین به موازات ساق‌ها دو خط رسم کنیم تا ساق‌ها را قطع کند، مجموع پاره‌خط‌های ایجاد شده، برابر طول یک ساق مثلث است.

$\left.\begin{aligned} EF+DF=AB \\ NK+KL=DF \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB=\underbrace{EF}_{۳}+\underbrace{NK+KL}_{۵}=۸$



(هندسه‌ی۲- صفحه‌ی ۲۱)

سوال ۵۲:

گزینه‌ی «۱»

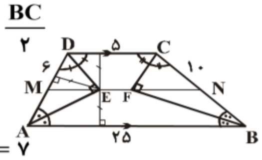
$A\hat{E}D=۱۸۰^\circ-\frac{\hat{A}+\hat{D}}{۲}=۱۸۰^\circ-\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$

هم‌چنین $C\hat{F}B=۹۰^\circ$. از طرفی هر کدام از نقاط E و F از دو قاعده و یک ساق به یک فاصله‌اند. زیرا روی نیم‌ساز زوایا قرار دارند، پس امتداد EF از وسط ساق‌ها می‌گذرد و MN پاره‌خطی است که وسط دو ساق ذوزنقه (DA, BC) را به هم وصل می‌کند و نیز EM و FN میانه‌های نظیر وترند. پس:

$EF=MN-ME-FN=\frac{AB+CD}{۲}-\frac{AD}{۲}-\frac{BC}{۲}$

$=\frac{(AB+CD)-(AD+BC)}{۲}$

$EF=\frac{۲۵+۵-(۶+۱۰)}{۲}=\frac{۳۰-۱۶}{۲}=۱۵-۸=۷$



(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۱۰ و ۲۱)

سوال ۵۳:

گزینه‌ی «۲»

از هر رأس $n-۳$ قطر خارج می‌شود که از شکل زیر مشاهده می‌شود که ۶ قطر دو بار محاسبه می‌شوند.

$۴(n-۳)-۶=۲۲ \Rightarrow ۴n=۴۰ \Rightarrow n=۱۰$

مجموع زوایای داخلی ده‌ضلعی محدب برابر

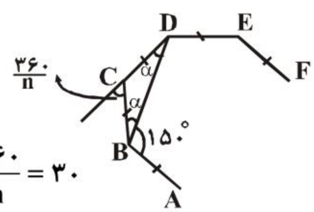
$(۱۰-۲)\times ۱۸۰^\circ=۸\times ۱۸۰^\circ=۴\times ۳۶۰^\circ$

این مقدار، ۴ برابر ۳۶۰° است.

(هندسه‌ی۲- صفحه‌های ۹ و ۱۰)

سوال ۵۴:

گزینه‌ی «۱»



$\frac{۳۶۰}{n}=\alpha+\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰}{n}$

$\alpha+۱۵۰=۱۸۰-\frac{۳۶۰}{n} \Rightarrow \frac{۱۸۰}{n}+\frac{۳۶۰}{n}=۳۰$

$\Rightarrow \frac{۶}{n}+\frac{۱۲}{n}=۱ \Rightarrow \frac{۱۸}{n}=۱ \Rightarrow n=۱۸$

(هندسه‌ی۲- صفحه‌ی ۱۰ مشابه تمرین اول)

سوال ۵۵:

گزینه‌ی «۲»

حداکثر تعداد نقاط برخورد n خط (وقتی که هیچکدام با هم موازی نباشند و هیچ خطی همرس نباشند) برابر است با تعداد انتخاب ۲ خط از n خط، یعنی: $\binom{n}{۲}$ پس حداکثر تعداد نقاط برخورد ۹ خط بدون شرط اضافی برابر $۳۶=\binom{۹}{۲}$ است.

چون ۳ خط با هم موازی هستند، پس $۳=\binom{۳}{۲}$ نقطه کم می‌شود و چون ۳ خط همرس هستند، پس $۲=۱-\binom{۳}{۲}$ نقطه‌ی دیگر نیز حذف می‌شود پس حداکثر تعداد نقاط برخورد برابر است با $۳۱=۲-۳-۳۶$.

(هندسه‌ی۲- صفحه‌ی ۴)