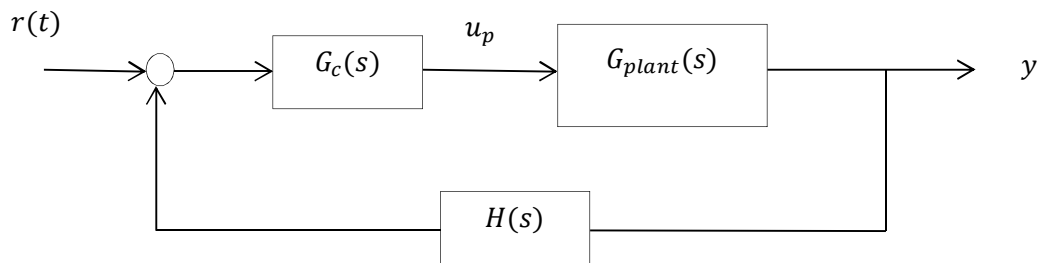


از آنجا که طراحی در مبحث درسی سیستم های کنترل خطی و کاربردهای عمل بسیار مهم است در این بخش سعی شده تا انواع مهم کنترل کننده های خطی به صورتی ساده معرفی و در قالب مثال طراحی گردند. اساس طراحی بر طبق کتاب دکتر ریچارد سی درف است. امیدوارم مطالب این بخش برای دانشجویان عزیز مفید باشد. خواهشمندم هر گونه ایراد و پیشنهادی دارید از طریق وبلاگ به من اطلاع دهید. در انتها نیز از دانشجوی محترم خانم توسلی به خاطر تایپ و رسم شکلها تشکر و قدردانی می نمایم.

در این بخش کنترل کننده‌ها را بر اساس مکان ریشه‌ها طراحی می‌نماییم. یک سیستم کنترل تک ورودی تک خروجی را می‌توان به صورت بلوکی زیر نمایش داد.



$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U_p(s)}$$

$$G_c(s) = \frac{U_p(s)}{E(s)}$$

$G_c(s) \rightarrow$  عموماً تابع کسری گویا

## انواع کنترل کننده‌ها :

۱- کنترل کننده تناسبی :

$$G_c(s) = kp \quad \text{یا} \quad G_c(s) = k$$

۲- کنترل کننده تناسبی - مشتقی :

$$\begin{cases} G_c(s) = k_p + k_D s \\ G_c(s) = k(s + a) \end{cases} \rightarrow G_c(s) = k_D \left( s + \frac{k_p}{k_D} \right)$$

این کنترل کننده یک صفر به تابع انتقال حلقه باز اضافه می‌کند (به بخش تأثیر افزودن صفر به تابع انتقال حلقه باز مراجعه نمایید).

۳- کنترل کننده تناسبی - انتگرالی :

$$\begin{cases} G_c(s) = k_p + \frac{k_I}{s} \\ G_c(s) = \frac{k(s+b)}{s} \end{cases}$$

این کنترل کننده یک قطب به مبدأ و یک صفر در  $-b$  به تابع انتقال حلقه باز اضافه می‌کند.

۴- کنترل کننده تناسبی - مشتقی - انتگرالی :

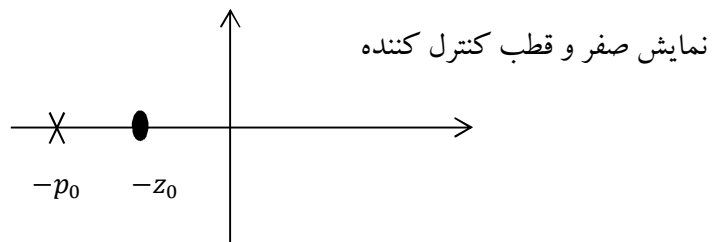
$$G_c(s) = k_p + k_D(s) + \frac{k_I}{s}$$

$$G_c(s) = \frac{k(s+c)(s+d)}{s}$$

این کنترل کننده دو صفر و یک قطب به سیستم حلقه باز اضافه می‌کند.

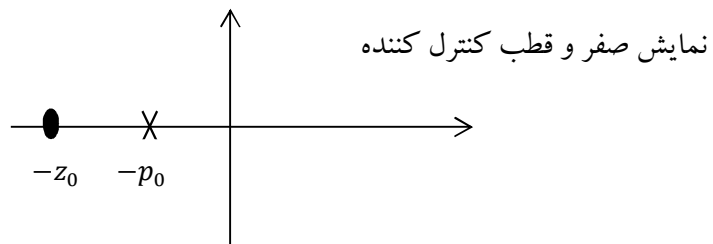
۵- کنترل کننده پیش فاز :

$$G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$$



۶- کنترل کننده پس فاز (*Lag*) :

$$G_p(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$$



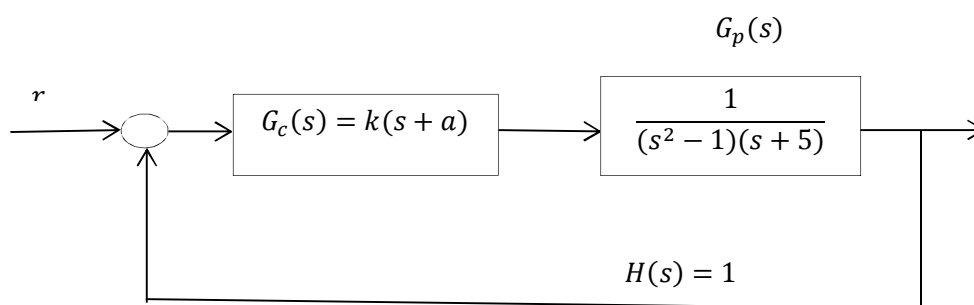
۷- کنترل کننده پیش فاز - پس فاز :

$$G_c(s) = \frac{k(s + z_{0lead})(s + z_{0lag})}{(s + p_{0lead})(s + p_{0lag})}$$

در این بخش ابتدا یک کنترل کننده تناسبی مشتقی و سپس کنترل کننده های پیش فاز و پس فاز به طور کامل طراحی می گردد.

مثال : سیستمی با فیدبک واحد و تابع انتقال  $G_p(s)H(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s+5)}$  را در نظر بگیرید. همان طور که می بینید سیستم حلقه باز ناپایدار است. با استفاده از جبران ساز  $PD$  (تناسبی - مشتقی) سیستم را پایدار کنید به طوری که برای قطب های غالب سیستم داشته باشیم:

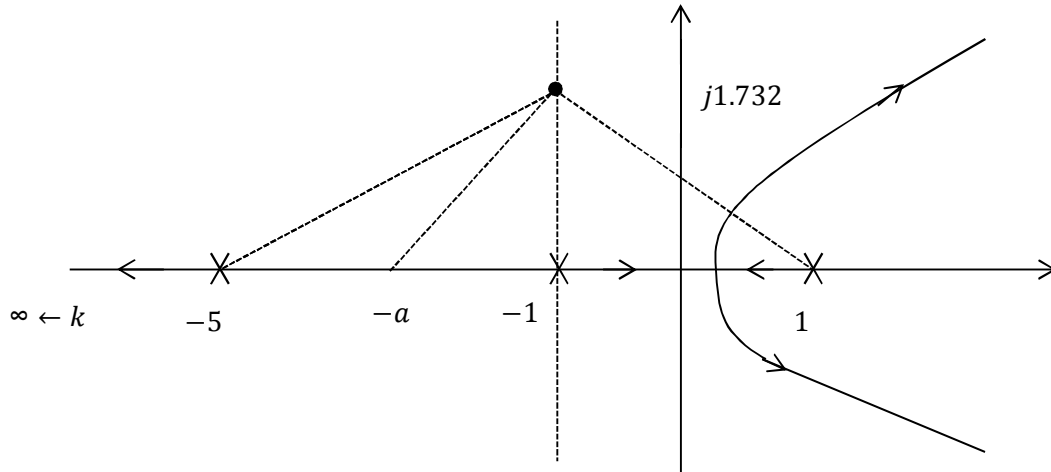
$$\xi = 0.5 \quad \text{و} \quad \omega_n = 2$$



در واقع باید  $k$  (بهره کنترل کننده) و  $s = -a$  (صفر کنترل کننده) را طوری تعیین کنیم که قطب های غالب سیستم دارای  $\xi = 0.5$  و  $\omega_n = 2$  باشند.

$$G'_p(s) = \frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)}$$

$$\Delta(s) = 1 + G'_p(s) = 0$$



رسم مکان سیستم بدون جبران ساز:

نقطه شکست:  $\frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} [(s^2-1)(s+5)] = 0$

$$\frac{d}{ds} [s^3 + 5s^2 - s - 5] = 0$$

$$3s^2 + 10s - 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-5 \pm \sqrt{25+3}}{3} \rightarrow \begin{cases} s = 0.09 \\ s = -3.43 \end{cases}$$

به دست آوردن مکان قطب غالب سیستم با توجه به  $\xi = 0.5$  و  $\omega_n = 2$ :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2} = -0.5 \times 2 \pm j \times 2 \times \sqrt{1-0.5^2}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j1.733 \rightarrow \text{مکان قطب غالب}$$

قطب مطلوب: باید مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده از این نقطه باید عبور کند.

- برای تعیین  $k$  و  $a$  از شرط اندازه و فاز در قطب غالب استفاده می کنیم:

ابتدا باید مکان  $a$  را از شرط فاز تعیین کنیم:

(تعیین مکان صفر کنترل کننده  $(s = -a)$ )

$$\angle G_c \cdot G_p(s = s^*) = 180$$

$$\angle \frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)} = 180$$

$$\angle(s+a) - [\angle(s-1) + \angle(s+1) + \angle(s+5)] = 180$$

$$\theta_a - [\theta_1 + \theta_{-1} + \theta_{-5}] = 180$$

$$\theta_1 = \pi - \tan^{-1} \left( \frac{1.733}{2} \right) = 139.1^\circ$$

$$\theta_{-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{-5} = \tan^{-1} \frac{1.733}{4} = 23.41$$

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{1.733}{|a-1|}$$

$$\rightarrow \tan^{-1} \frac{1.733}{|a-1|} - [139.1 + 90 + 23.41] = 180$$

$$\rightarrow \tan^{-1} \frac{1.733}{|a-1|} = 180 + [252.51]$$

$$\tan^{-1} \frac{1.733}{|a-1|} = 72.51$$

$$\rightarrow \frac{1.733}{|a-1|} = \tan^{-1} 72.51 \rightarrow a = 1.55$$

شرط اندازه :

$$\frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)} = 1$$

$$\frac{k \cdot l_a}{l_{-1} \times l_1 \times l_{-5}} = 1 \rightarrow k = \frac{l_{-1} \times l_1 \times l_{-5}}{l_a}$$

$$l_{-1} = 1.733$$

$$l_{-5} = \sqrt{4^2 + 1.733^2}$$

$$l_1 = \sqrt{2^2 + 1.733^2}$$

$$l_a = \sqrt{1.733^2 + 1.55^2}$$

$$k = 1$$

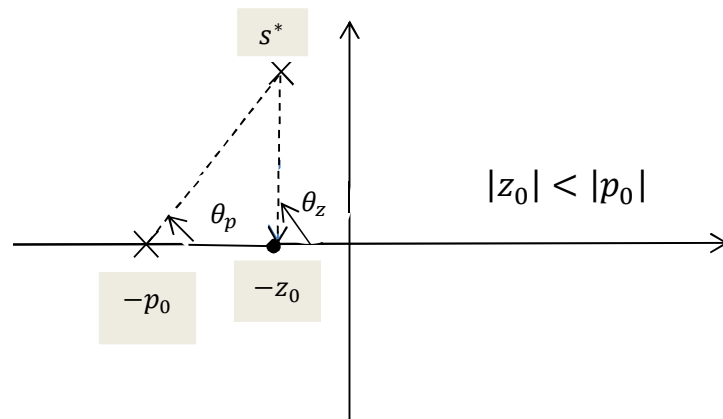
$$G_c(s) = 11(s + 1.55)$$

### طراحی جبران سازهای پیش فاز و پس فاز :

طراحی جبران ساز پیش فاز (*lead*)

تابع انتقال یک جبران ساز *lead* به صورت زیر است :

$$G_c(s) = k \frac{s + z_0}{s + p_0}$$

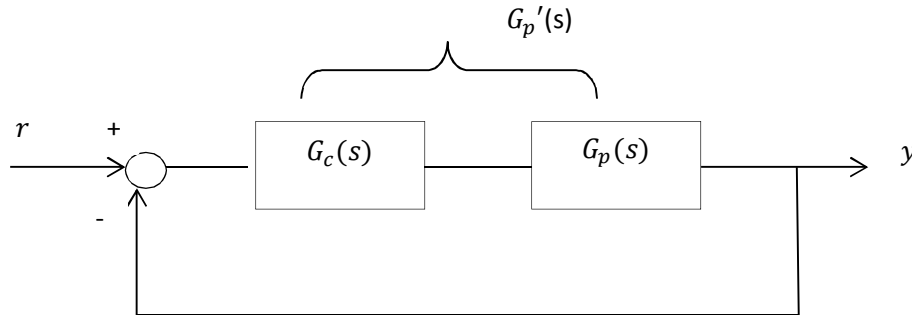


اگر  $s^*$  نقطه ای از مکان باشد  $\theta_{z_0} > \theta_{p_0}$  خواهد بود. بدین ترتیب:

$$\angle G_c(s) = \angle \frac{k(s + z_0)}{(s + p_0)} = [\angle(s + z_0) - \angle(s + p_0)]$$

$$\angle G_c(s) = \theta_{z_0} - \theta_{p_0} > 0$$

بنابراین کنترل کننده پیش فاز، فاز مثبتی به سیستم در  $s^*$  می‌دهد.



$$G_p'(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$$

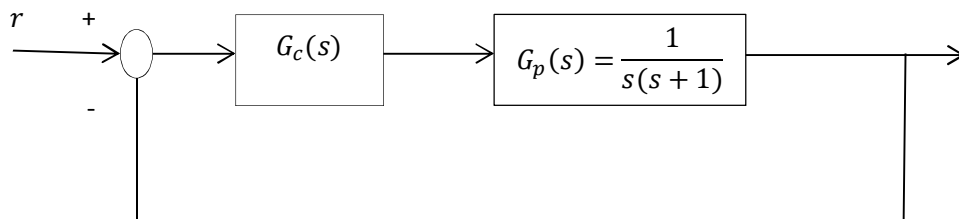
$$\angle G_p'(s) = \angle G_c(s) \cdot G_p(s) = \angle G_c(s) + \angle G_p(s)$$

مثال: سیستم کنترل فیدبکی زیر را در نظر بگیرید:

کنترل کننده را به گونه ای طراحی کنید که  $t_s \leq 4 \text{ sec}$  و  $\%MP < 37\%$  باشد.

الف) نشان دهید که کنترل کننده تناسبی  $G_c(s) = k$  نمی‌تواند خواسته های مسئله را برآورده سازد.

ب) کنترل کننده پیش فازی به صورت  $G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$  برای رسیدن به خواسته های مسئله را طراحی کنید.



حل : ابتدا محل قطب مطلوب (قطب حلقه بسته سیستم که خواسته های مسئله را برآورده می سازد) را به دست می آوریم

$$\%MP \leq \%37 \rightarrow 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 37$$

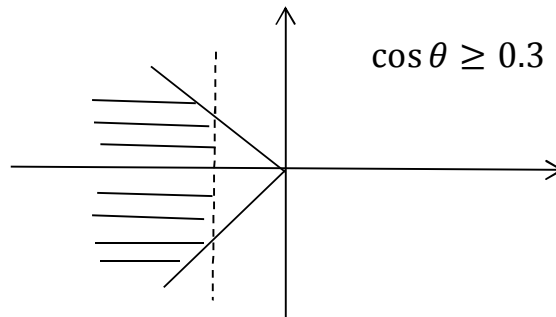
$$\rightarrow e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.37 \rightarrow \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} < \ln 0.37 \rightarrow \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} < -1 \rightarrow \frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} > 1$$

$$\xi\pi > \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\pi^2\xi^2 > 1-\xi^2 \rightarrow (\pi^2+1)\xi^2 > 1 \rightarrow \xi^2 > \frac{1}{\pi^2+1}$$

$$\rightarrow \xi^2 > 0.09 \rightarrow \xi > 0.3 \rightarrow \xi = \cos\theta \rightarrow \cos\theta \geq 0.3$$

$$t_s \leq 4 \rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \rightarrow \xi\omega_n > 1$$



برای به دست آوردن یک قطب مطلوب  $\xi\omega_n = 2$ ,  $\xi = 0.4$  انتخاب می کنیم

$$\xi\omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = \frac{2}{\xi} = \frac{2}{0.4} \rightarrow \omega_n = 5$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

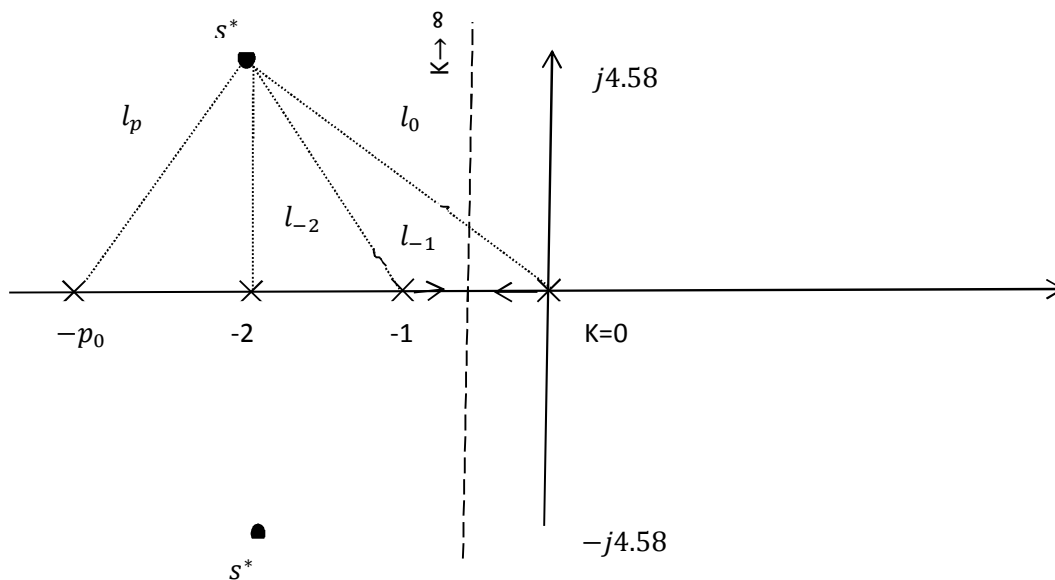
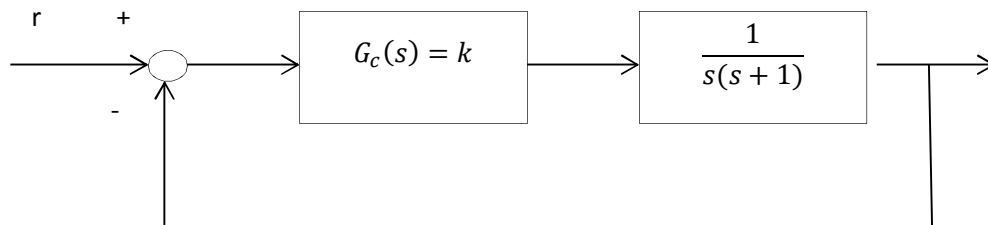
$$s_{1,2} = -2 \pm j5\sqrt{1-(0.4)^2}$$

$$\text{قطب مطلوب } s_{1,2}^* = -2 \pm j4.58$$



یعنی آنکه باید مکان هندسی سیستم جبران شده از  $s^*$  بگذرد.

الف) ابتدا برای سیستم جبران ساز تناسبی  $G_c(s) = k$  در نظر می گیریم:



همراه با کنترل کننده تناسبی  $k$  نمی توان به خواسته مسئله رسید چون مکان از روی  $s^*$  نمی گذرد.

ب) طراحی کنترل کننده ( $lead$ ):

$$G_c(s) = \frac{k(s + z_0)}{s + p_0}$$

- یک روش شروع طراحی آن است که صفر کنترل کننده ( $-z_0$ ) را قسمت حقیقی قطب مطلوب در نظر بگیریم:

$$\text{قطب مطلوب} = s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{4.58}$$

$$z_0 = -2$$

تعیین  $k$  و  $-p_0$ :

برای محاسبه مکان قطب  $(-p_0)$  از شرط فاز و برای محاسبه بهره از شرط اندازه کمک می گیریم:

شرط فاز:

$$\angle G_c(s) \cdot G_p(s) = 180$$

$$\angle \left( \frac{k(s + z_0)}{(s + p_0)} \cdot \frac{1}{s(s + 1)} \right) = 180$$

$$\angle(s + z_0) - [\angle(s + p_0) + \angle s + \angle(s + 1)] = 0$$

$$\theta_{z_0} - [\theta_{p_0} + \theta_0 + \theta_{-1}] = 180$$

$$\theta_{z_0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \pi - \tan^{-1} \frac{4.58}{2}$$

$$\theta_{-1} = \pi - \tan^{-1} \frac{4.58}{1}$$

$$\theta_{p_0} = \tan^{-1} \frac{4.58}{|p_0 - 2|} \rightarrow p_0 = 5.32$$

برای محاسبه  $k$  با اعمال شرط اندازه در قطب مطلوب داریم:

$$\left| \frac{k(s + 2)}{(s + 5.32)} \cdot \frac{1}{s(s + 1)} \right| = 1$$

$$\frac{k|s + 2|}{|s + 5.32||s||s + 1|} = 1$$

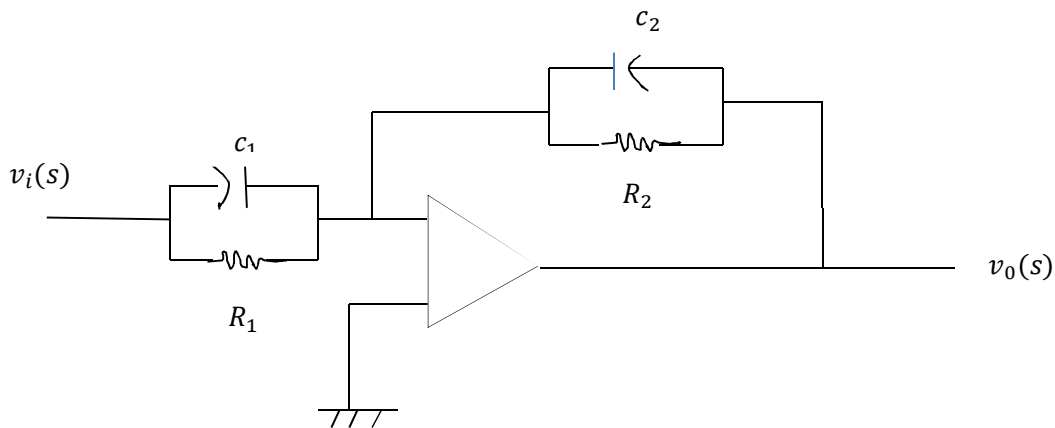
$$\rightarrow k = \frac{l_{p_0} \times l_0 \times l_{-1}}{l_{z_0}} = 28.94$$

$$G_c(s) = 28.94 \times \frac{s + 2}{s + 5.32}$$

تمرین کامپیوتری: کنترل کننده به دست آمده را در محیط *MATLAB* بر روی سیستم اعمال کنید و برآورده شدن شرایط خواسته شده را بررسی نمایید.

### ساخت یک کنترل کننده *lead*(lag) به کمک آپ امپ:

مدار زیر تحقق کنترل کننده های پیش فاز و پس فاز را به کمک مدارهای الکترونیکی شامل آپ امپ نشان می دهد.



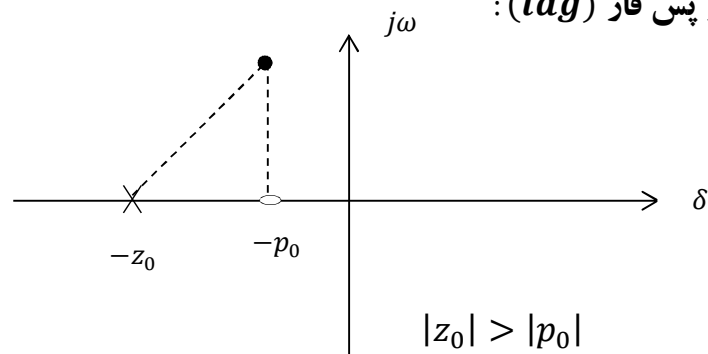
به کمک قوانین ولتاژ و جریان کرشهوف می توان تابع انتقال مدار را به صورت زیر بدست آورد.

$$G_c(s) = -\frac{z_2(s)}{z_1(s)} = \frac{-c_1}{c_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 c_1}}{s + \frac{1}{R_2 c_2}}$$

if  $R_2 c_2 > R_1 c_1 \rightarrow$  کنترل کننده *lead*

$R_1 c_1 > R_2 c_2 \rightarrow$  کنترل کننده *lag*

طراحی جبران ساز پس فاز (*lag*):



$$G_c(s) = \frac{k(s + z_0)}{(s + p_0)}$$

اگر  $s^*$  نقطه ای از مکان باشد:

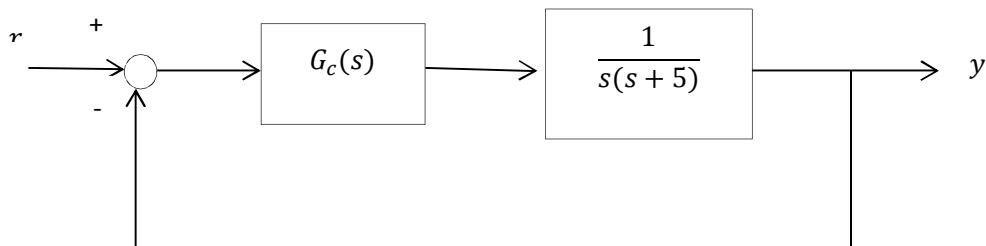
$$\angle G_c(s) = \angle \frac{k(s + z_0)}{(s + p_0)}$$

$$\angle G_c(s) = [\angle(s + z_0) - \angle(s + p_0)]$$

$$\angle G_c(s) = \theta_{z_0} - \theta_{p_0} < 0$$

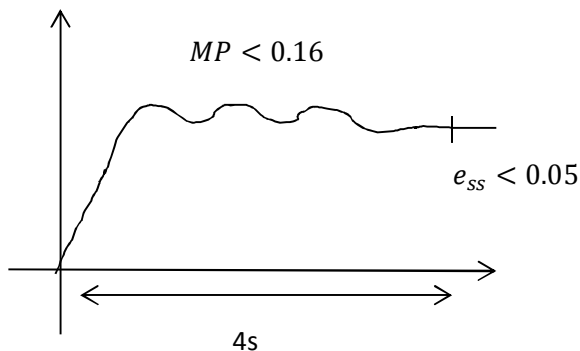
این جبران ساز در نقطه  $s^*$  (قطب مطلوب) به سیستم فاز منفی می دهد. تأثیر مثبت جبران ساز *lag* بر سیستم پایین آوردن خطای حالت دائمی سیستم است. البته فاز منفی که به سیستم می دهد عیب این کنترل کننده است که در مقایسه با مزیت آن قابل چشم پوشی است.

مثال: سیستم کنترل فیدبکی زیر را در نظر بگیرید:



کنترل کننده *lag* را به گونه ای تعیین کنید که پاسخ پله سیستم دارای مشخصات زیر باشد.

$$\begin{cases} \%MP < \%16 \\ t_s < 4 \text{ sec} \\ e_{ss} < 0.05 \end{cases}$$



ابتدا مکان قطب مطلوب (قطبی که در آن مشخصات سیستم برآورده می شود) را به دست می آوریم .

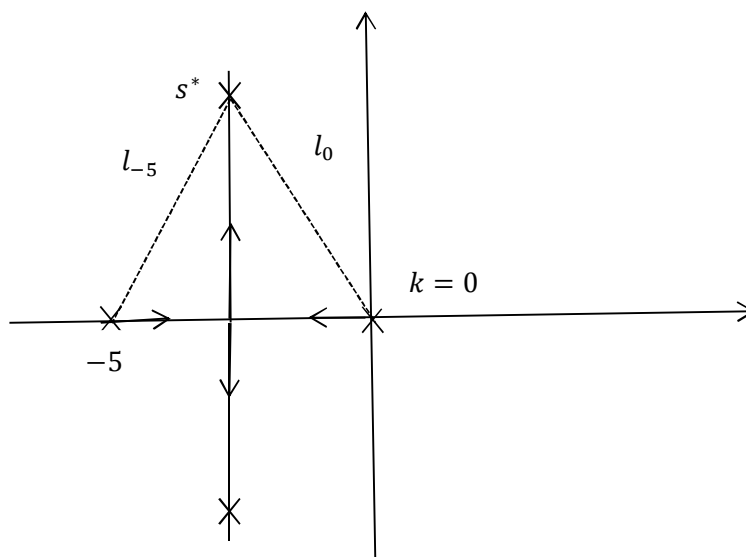
$$\%MP < \%0.16 \rightarrow MP < 0.16$$

$$e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.16 \rightarrow \xi \geq 0.5$$

$$t_s < 4 \text{ sec} \rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \rightarrow \xi\omega_n > 1$$

با انتخاب  $\xi = 0.5$  و  $\xi\omega_n = 2.5$  مکان قطب مطلوب به دست می آید.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$$



باید ببینیم آیا در مکان قطب مطلوب  $e_{SS}$  به مقدار خواسته است. برای این منظور ابتدا بهره سیستم جبران نشده را در  $S^*$  به دست می‌آوریم و به کمک آن  $e_{SS}$  جبران نشده را محاسبه می‌کنیم.

شرط اندازه :

$$\frac{k}{s(s+5)} = 1$$

$$k = s(s+5) = |s| \cdot |s+5| = l_0 \cdot l_{-5} = \sqrt{4.33^2 + 2.5^2} \times \sqrt{4.33^2 + 2.5^2}$$

$$k = 25 \text{ بهره سیستم جبران نشده}$$

طبق تعریف :

$$e_{SS} = \frac{1}{k_v} \text{ سیستم نوع یک}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k}{s(s+5)}$$

$$k_v = \frac{25}{5} = 5$$

$$e_{SS} = \frac{1}{k_v} = 0.2 \text{ جبران نشده}$$

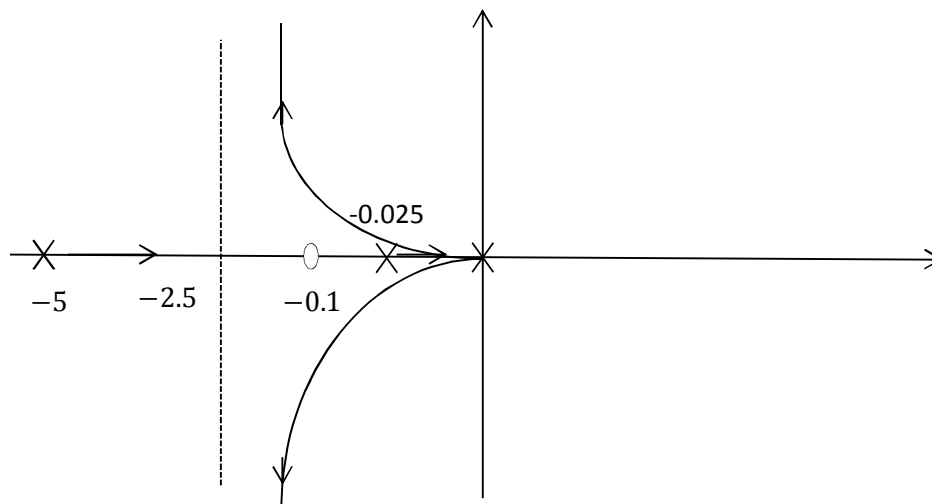
یکی از روش‌های طراحی  $log$  آن است که نسبت  $\frac{z_0}{p_0}$  را برابر نسبت  $\frac{e_{SS} \text{ جبران نشده}}{e_{SS} \text{ جبران شده}}$  در نظر می‌گیرند.

$$\frac{z_0}{p_0} = \frac{0.2}{0.05} = 4$$

حال اگر  $z_0 = -0.1$  انتخاب کنیم  $p_0 = -0.025$  به دست می‌آید بنابراین :

$$G_c(s) = 25 \cdot \frac{s + 0.1}{s + 0.025}$$

$$G'_p(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = 25 \frac{s + 0.1}{s + 0.025} \cdot \frac{1}{s(s + 5)}$$



تمرین : درستی نتایج تحلیل را با استفاده از نرم افزار MATLAB نشان دهید .