

پرسش نخست ..... (50 امتیاز)  
گراف  $k$ -منتظم و  $n$  راسی داریم که روی هر راس یک چراغ وجود دارد؛ مامیتونیم به این چراغ‌ها آرایش استاندارد بدیم؛ آرایشی استاندارد هست که اگر یک لامپ روشن باشد حداقل یک لامپ خاموش مجاور داشته باشد. (در این سوال اگر ب رو حل کنید کل امتیاز رو میگیرید ☺)

الف) فرض کنید  $k$  زوج باشد ثابت کنید حداقل میتوان  $n - \frac{n \times 2^{n-k-1}}{2^n}$  لامپ را روشن کرد. (30 امتیاز)

ب) در حالت کلی ثابت کنید میتوان حداقل میتوان  $n - \frac{n \times 2^{n-k-1}}{2^n}$  لامپ را روشن کرد. (20 امتیاز)

پرسش دوم ..... (30 امتیاز)  
2000 عدد صحیح از بازه  $[-1000, 1000]$  انتخاب کردیم به طوریکه مجموع این اعداد 1 شده است. ثابت کنید میتوان تعدادی از این اعداد را انتخاب کرد به طوریکه مجموع آن‌ها صفر شود؟

پرسش سوم ..... (20 امتیاز)  
ثابت کنید برای هر  $n$  فرد، تورنمنتی  $n$  راسی داریم که در هر راس آن، درجه‌ی ورودی و خروجی برابر باشد.