تعریف آمار: آمار مجموعه‌ای از روش‌ها و تکنیک‌های علمی است که به کمک آن یکسری ارقام آماری را جمع‌آوری، مرتب و خلاصه کرده به صورت عددی و هندسی نمایش می‌دهیم و کمیت‌های لازم را محاسبه می‌کنیم (آمار توصیفی) و نتایج حاصل را تجزیه و تحلیل می‌کنیم (آمار استنباطی)

جامعهٔ آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیایی است که دارای حداقل یک ویژگی مشترک باشند
مثال) جامعهٔ نمرات ریاضی یک کلاس، جامعهٔ پرسنل یک شرکت (درآمد ماهیانه)

تعریف سرشماری: اگر تک تک اعضای یک جامعهٔ آماری مورد بررسی قرار گیرد سرشماری گوییم.

مشکلات سرشماری: 1) خطای زیاد. 2) زمان بر 3) هزینه بر. 4) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه. 5. از بین رفتن جامعه در برخی موارد.

نمونه: زیرمجموعه‌ای از جامعهٔ آماری است که بتواند ویژگیهای جامعهٔ آماری را توضیح کند.

داده‌های آماری: در مطالعهٔ اعضای نمونه یا جامعه یک سری اعداد و ارقام حاصل می‌شود که داده‌های آماری نامیده می‌شود.

انواع داده‌های آماری:

گسسته (ناپیوسته، جدا): اگر ارقام آماری به صورت صحیح باشد داده‌های گسسته می‌گویند که معمولاً در نتیجهٔ شمارش بدست می‌آید.
مثال) تعداد کارکنان یک شرکت تولیدی.

پیوسته: اگر ارقام آماری به صورت اعشاری باشد و در آن صورت دادهٔ آماری پیوسته نامیده می‌شود که معمولاً در نتیجهٔ سنجش با ابزاری خاص بدست می‌آید. وزن، زمان، دما، گنجایش، قد و ...

مثال) نوع هر یک از داده‌های زیر را تعیین کنید. 1) میزان درآمد ماهیانه کارکنان یک شرکت
پیوسته
2) مقاومت ترانزیستور (چون مقدار با اعشار است)
پس پیوسته می‌باشد

Subject:
Year. Month. Date.

دامنهٔ تغییرات: اختلاف بیشترین و کمترین دادهٔ آماری.

$R = x_{max} - x_{min} +$ تقریب اندازه گیری → معمولاً می دهیم

تقریب اندازه گیری: اختلاف بین دو داده (خطا)

تنظیم داده های آماری: الف) بصورت سری: اگر تعداد داده های آماری کمتر باشد برای مرتب کردن داده های آماری کافی است آنها را از کوچک به بزرگ یا بزرگ به کوچک مرتب کنیم

7, 23, 24, 7, 29, 16, 24

از کوچک به بزرگ 7, 7, 16, 23, 24, 24, 29

ب) بصورت تعدیدی (در جدول): 1) حالت اول: اگر تعداد داده های آماری بیشتر باشد ولی تنوع داده ها کمتر باشد. از این روش استفاده می کنیم.

25, 30, 25, 30, 33, 25, 30, 33, 25, 40, 30, 41, 41, 30, 33, 30, 25, 41, 30

تعداد داده زیاد و تنوع کم

x_i	ستون علائم	فراوانی f_i
25	$\boxed{/}$	5
30		7
33		3
40		1
41		3

$\sum f_i = n \rightarrow$ تعداد داده

19

2) حالت دوم: اگر تعداد داده ها زیاد و تنوع داده ها نیز زیاد و دامنهٔ تغییرات نیز زیاد باشد در اینصورت از تنظیم داده ها بصورت جدول فراوانی طبقه بندی شده یا کلاس بندی استفاده می شود

ارتباط بین تعداد کلاس، فاصله و دامنهٔ تغییرات

$$C = \frac{R}{K}$$

$K \rightarrow$ تعداد کلاس یا طبقه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: اگر در محاسبه کسر صفحه قبل خارج قسمت به صورت اعشاری باشد در آن صورت قسمت اعشاری را حذف و به قسمت صحیح یک واحد اضافه می‌کنیم.

فراوانی یا فراوانی مطلق

طبقات (a_i - b_i)	f_i	L_i	L_i'	c_i	x_i	f_i'	f_i''	F_i
20 - 24	4	19.5	24.5	5	22	0.08	8%	4
25 - 29	4	24.5	29.5	5	27	0.08	8%	8
30 - 34	6	29.5	34.5	5	32	0.12	12%	14
35 - 39	8	34.5	39.5	5	37	0.16	16%	22
40 - 44	7	39.5	44.5	5	42	0.14	14%	29
45 - 49	8	44.5	49.5	5	47	0.16	16%	37
50 - 54	8	49.5	54.5	5	52	0.16	16%	45
55 - 59	5	54.5	59.5	5	57	0.1	1%	$\boxed{50}$

تقریب 1

$n = 50$

تعداد کلاس = 8

امکان دارد مساوی نباشد

$\boxed{\Sigma f_i' = 1}$

n

جمع فراوانی تراکمی در انتها برابر با n

حد پایین $= L_i$ حد بالا $= L_i'$

حدود واقعی: (کرانه، مرز)

$L_i = a_i -$ نصف تقریب

$L_i' = b_i +$ نصف تقریب

فاصله طبقات $c_i = b_i - a_i + 1$

مراکز کلاس یا نماینده کلاس $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ یا $x_i = \frac{L_i + L_i'}{2}$

فراوانی نسبی $f_i' = \frac{f_i}{n}$

درصد فراوانی نسبی $f_i'' = f_i' \times 100$

فراوانی تراکمی یا تجمعی F_i: $i = 1 \quad F_1 = f_1$ ؛ $i > 1 \quad F_i = f_i + F_{i-1}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مسائل مانند کلاس بصورت زیر سؤال می شود. مثلاً در جدول فوق چه تعداد عدد 22 وجود دارد؟ $x_i = 22 \to F_i = 4$ پس 4 تا وجود دارد.

مثال 2) چه نسبتی از اعداد بین 25 و 29 است. همان فراوانی نسبی $0.08 = \frac{4}{50}$

مثال 3) چه تعداد از داده‌ها بزرگتر یا مساوی 29.5 است؟

روش اول $8+5$ استفاده از f_i

روش دوم $50-37$ استفاده از فراوانی تجمعی یا تراکم

نمودارهای آماری:

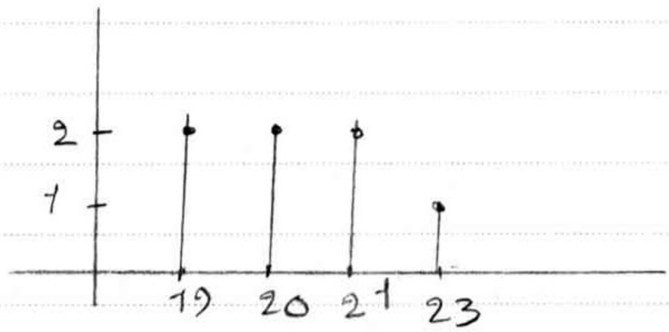
جهت نمایش هندسی داده‌های آماری از نمودارها استفاده می‌کنیم.

انواع نمودار:

1) نمودار میله‌ای یا خطی: معمولاً برای نمایش داده‌های گسسته بکار می‌رود.
روی محور افقی مقادیر xها و روی محور عمودی فراوانی مطلق قرار می‌گیرد.

مثال: نمودار میله‌ای داده‌های زیر را رسم کنید. 19, 21, 21, 19, 23, 20, 20
19, 19, 20, 20, 21, 21, 23

x_i	F_i
19	2
20	2
21	2
23	1



2) نمودار دایره‌ای: معمولاً برای داده‌های گسسته بکار می‌رود. به تعداد مقادیر xها دایره را به قطاع‌هایی تقسیم می‌کنیم.

سهم هر قطاع برحسب درجه $= \frac{f_i}{n} \times 360$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) برای جدول فراوانی زیر نمودار دایره‌ای را رسم کنید.

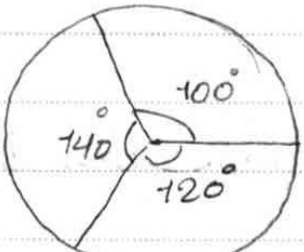
خانوارها	کم جمعیت	جمعیت متوسط	پرجمعیت
f_i	50	70	60

$n = \sum f_i = 50 + 70 + 60 = 180$

کم جمعیت $= \frac{50}{180} \times 360 = 100^\circ$

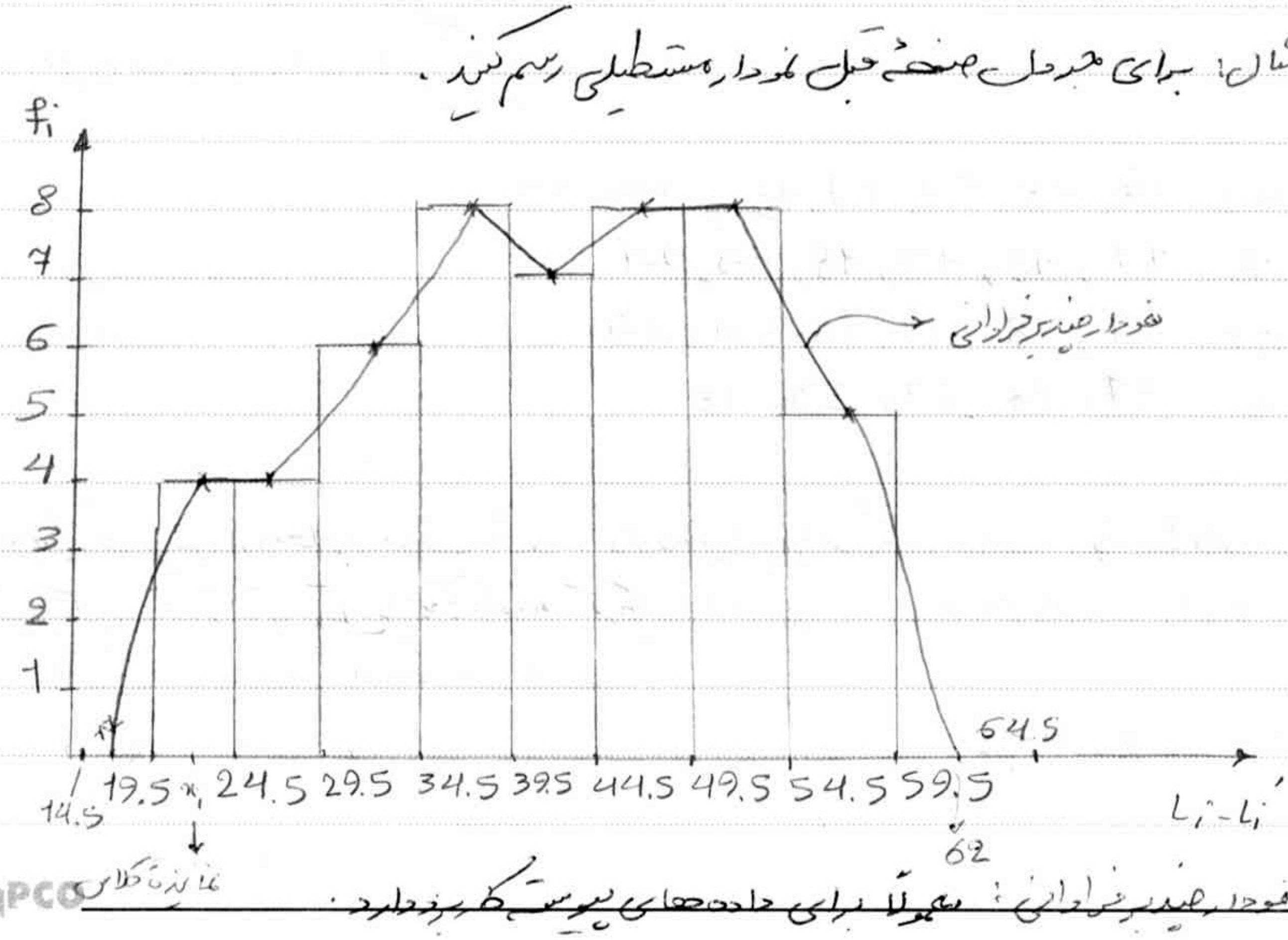
جمعیت متوسط $= \frac{70}{180} \times 360 = 140^\circ$

پرجمعیت $= \frac{60}{180} \times 360 = 120^\circ$



پ) هیستوگرام یا نمودار مستطیلی: معمولاً برای داده‌های پیوسته بکار می‌رود که به تعداد طبقات مستطیل خواهیم داشت. قاعدهٔ هر یک از مستطیل‌ها برابر طول حدود واقعی است $(L_i - L_i')$ محور عمودی برابر فراوانی.

مثال: برای جدول صفحهٔ قبل نمودار مستطیلی رسم کنید.



نمودار چندبر فراوانی: معمولاً برای داده‌های پیوسته بکار می‌رود.

چه روشی برای رسم نمودار چند بر فراوانی وجود دارد؟

روش اول: نقاط (x_i , f_i) را توسط خطوط مستقیم به هم وصل می‌کنیم (x_i ها نماینده کلاس)

روش دوم: x_i یا نماینده کلاس را پیدا می‌کنیم و با آن رسم می‌نماییم.

روش سوم: در نمودار مستطیلی وسط مستطیل‌ها را توسط خطوط به هم وصل می‌کنیم.

تذکر: اگر در نمودار چند بر فراوانی تعداد داده‌ها زیاد و طول طبقات کوچکتر باشد، در آن صورت طول اضلاع چند بر فراوانی کوچکتر و به یک منحنی میل می‌کند که به آن منحنی فراوانی گوییم.

پارامترهای مرکزی:

مد: داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد.

مثال) در موارد زیر مد را تعیین کنید.

الف) 17, 18, 17, 17, 18, 24, 23 — مد = 17

ب) 17, 18, 17, 18, 19, 24 — مد = 17, 18

ج) 17, 18, 17, 18, 24, 24 — مد ندارد

د) 17, 18, 24, 23, 19 — مد ندارد

میانه: از بین داده‌های مرتب شده، داده‌ای میانه است که درست در وسط داده‌ها قرار بگیرد. در واقع حداقل 50% داده‌ها کوچکتر یا مساوی میانه و 50% داده‌ها بزرگتر یا مساوی میانه است. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد.

$M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$ میانه اگر داده فرد باشد.

مثال) میانه را در داده‌های زیر تعیین کنید.

تعداد داده زوج → مرتب

$24, 17, 23, 16, 23, 18, 17 \rightarrow 16, 17, 17, 18, 23, 23, 24$

M_e

$M_e = \frac{7+1}{2} = 4$

میانه اگر تعداد داده‌ها زوج باشد.

$M_e = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}$

مثال) میانه را برای داده‌های زیر محاسبه کنید: $24, 14, 23, 14, 20, 22, 23, 20$

$14, 14, 20, 20, 22, 23, 23, 24$

$M_e = \frac{x_{\frac{8}{2}} + x_{\frac{8}{2}+1}}{2}$

$M_e = \frac{20+22}{2} = \frac{42}{2} = 21$

میانگین:

میانگین حسابی: میانگین را برای جامعه با نماد μ و برای نمونه با نماد $\bar{X}$ نمایش می‌دهند

برای داده‌های سری $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

برای داده‌های غیر سری $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$

مثال) برای داده‌های زیر میانگین را حساب کنید.

$23, 22, 21, 20, 21$

$\bar{X} = \frac{20 + 2\times21 + 22 + 23}{4} = \frac{107}{4}$

مثال) برای جدولی که در اول جزوه داده‌های پیوسته است $\bar{X}$ را پیدا کنید.

مثال) میانگین را پیدا کنید.

طول طبقات $K=5$

	a_i	b_i	f_i	x_i
1	10	12	1	11
2	13	15	2	14
3	16	18	0	17
4	19	21	3	20
5	22	24	1	23
			$n=7$	

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i X_i = \frac{1}{7} \times$

$11\times1 + 14\times2 + 20\times3 + 23\times1 = \frac{122}{7}$

معیارهای پراکندگی:
این پارامترها چگونگی تغییر داده ها را نشان می دهند به عبارت دیگر نشان می دهند داده ها از میانگین یا از همدیگر اختلاف بیشتری دارند یا نه

1) دامنه: دامنه تغییرات: تقریب اندازه گیری

$R = x_{max} - x_{min} +$

10 11 12 12 12 33 23 24 25 13

$R = 33 - 10 + 1 = 24$

تقریب در $10,2 \to 0.1$ در $11.27 \to 0.01$

2) میانگین: انحراف داده ها:

$$D = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{n}$$

نماینده کلاس $L_i = a_i -$ نصف تقریب

تقریب = ۱ ← نصفش 0.5

a_i b_i	f_i	x_i	حدود واقعی	f_i'	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
10 - 14	3	12	9.5 - 14.5	0.3		
15 - 19	2	17	14.5 - 19.5	0.2		
20 - 24	2	22	19.5 - 24.5	0.2		
25 - 29	1	27	24.5 - 29.5	0.1		
30 - 34	2	32	29.5 - 34.5	0.2		

$n = 10$

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\overset{36}{12 \times 3} + \overset{34}{17 \times 2} + \overset{44}{22 \times 2} + \overset{27}{27 \times 1} + \overset{64}{32 \times 2}}{10} = 20.5$$

3) واریانس: واریانس جامعه را با نماد σ^2 و واریانس نمونه را با نماد S_x^2 نمایش می دهیم،

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2 f_i}{n}$$

cm^2

$$S_x^2 = \frac{(12-20.5)^2 \times 3 + (17-20.5)^2 \times 2 + (22-20.5)^2 \times 2 + (27-20.5)^2 \times 1 + (32-20.5)^2 \times 2}{10}$$

4) انحراف معیار: میانگین واریانس به جذر واریانس گویند. cm

5) ضریب تغییرات: از تقسیم انحراف معیار بر میانگین بدست می‌آید آنرا با CV نشان می‌دهند. CV بدون واحد است.

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \qquad \frac{cm}{cm}$$

نظر به اینکه ضریب تغییرات دارای واحد اندازه‌گیری نمی‌باشد پس معیار خوبی برای مقایسه دو گروه با واحدهای اندازه‌گیری مختلف هستند.

احتمال:

آزمایش تصادفی: به آزمایشی گفته می‌شود که در آن نتیجه آزمایش قبل از وقوع بطور قطعی مشخص نیست ولی تمام حالات ممکن وقوع مشخص است. مانند پرتاب یک سکه، گروه خونی یک فرد.

فضای نمونه: مجموع تمام حالات ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و با نماد S نشان می‌دهند.

مثال: فضای نمونه مربوط به انداختن یک تاس. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال: فضای نمونه انداختن یک سکه. $S = \{H, T\}$

نکته: تعداد اعضای فضای نمونه را با نماد $n(S)$ نشان می‌دهند.

مثال نکته: فضای نمونه مربوط به انداختن دو سکه را مشخص کنید.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

مثال) تعداد اعضای فضای نمونه مربوط به انداختن n سکه : 2^n

مثال) تعداد اعضای فضای نمونه مربوط به انداختن n تاس 6^n

تعریف پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ای از یک فضای نمونه‌ای را پیشامد تصادفی می‌گوئیم. تعداد پیشامدهای یک فضای نمونه برابر تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه است که آن برابر است با:

$n(S)$) تعداد اعضای فضای نمونه:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 2^6 زیرمجموعه

S دو تاس $= \{$ 36 حالت $\} \rightarrow$ 2^{36} پیشامد

مثال) ظرفی دارای 10 مهره شماره‌دار است. در شرایط یکسان از این ظرف یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه مربوط به این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. همچنین پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

A: پیشامد آنکه مهره انتخاب شده کمتر از 3 باشد.

B: پیشامد آنکه مهره انتخاب شده بیشتر از 6 باشد.

C: 〃 〃 〃 〃 〃 فرد باشد.

D: 〃 〃 〃 〃 〃 〃 مضرب 3 باشد.

E: 〃 〃 〃 〃 〃 〃 مضرب 5 باشد.

فضای نمونه $n(S) = 10$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تعداد پیشامدها 2^{10}

$A = \{1, 2\}$

$B = \{7, 8, 9, 10\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{3, 6, 9\}$

$E = \{5, 10\}$

تعریف احتمال به کمک فراوانی نسبی:

اگر یک آزمایش تصادفی n مرتبه تکرار شود تحت شرایط یکسان و در این n اتفاق به دست آمده f مورد مربوط به پیشامد A باشد در آن صورت نسبت $\frac{f}{n}$ را فراوانی نسبی پیشامد A گویند. در صورتی که n تعداد آزمایشات زیاد باشد در آن صورت $\frac{f}{n}$ به یک عدد ثابت نزدیک می شود که این عدد ثابت را احتمال واقعی پیشامد A گویند و با نماد $P(A)$ نمایش می دهند.

یعنی:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$$

تعریف احتمال به کمک تابع احتمال: اعداد حقیقی فضای نمونه

تابع احتمال تابعی است از فضای نمونه به مجموع اعداد حقیقی یعنی $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$

به عبارت دیگر تابع احتمال تابعی مانند F است که هر پیشامد A را از فضای نمونه به عددی مانند $F(A)$ از اعداد حقیقی چنان نسبت می دهد که در اصول موضوعه زیر

1) $P(S) = 1$ احتمال فضای نمونه ۱

2) به ازای هر پیشامد دلخواه مانند A ، $P(A) \geq 0$

3) اگر A_1 ، A_2 ، ... و A_n پیشامدهای ناسازگار باشند (یعنی اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$

مثال: $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{4, 5, 6\} \longrightarrow A \cap B = \varnothing$

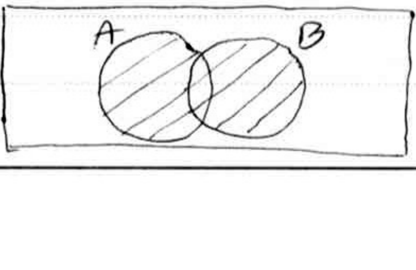
خواص احتمال:

به کمک اصول موضوعه فوق قضایای احتمال به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

1) $P(\varnothing) = 0$

2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ، $\bar{A}$ را متمم پیشامد A گویند و زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

فضای احتمال یکنواخت:

اگر S فضای نمونه و شانس وقوع پیشامدها یکسان باشد. در آن صورت احتمال وقوع پیشامدی مانند A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

که در آن $n(A)$ تعداد اعضای پیشامد A و $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه است.

مثال) در جعبه‌ای 5 مهرهٔ قرمز، 3 آبی، 2 مهرهٔ سفید وجود دارد. یک مهره هم تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه: الف) مهرهٔ انتخاب شده قرمز باشد.

پیشامد A قرمز بودن $n(A) = 5$

$n(S) = 10$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

سکه‌ای را 5 بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل یکبار شیر باشد.

$n(S) = 2^5$

A: پیشامد اینکه حداقل یکبار شیر بیاید

A′: پیشامد اینکه اصلاً شیر نیاید.

0, 1, 2, 3, 4, 5

$\downarrow$ اصلاً شیر نیاید

$\downarrow$ حداقل یکبار شیر بیاید

$A' = \{(TTTTT)\}$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

طبق قضیهٔ 2 $\rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(A') \rightarrow$

$= 1 - \frac{1}{32}$

مثال) احتمال اینکه خانواده‌ای اتومبیل، موتورسیکلت یا هر دو را داشته باشد. به ترتیب برابر 0.61، 0.25، 0.08 است. اگر خانواده‌ای به تصادف انتخاب شود. احتمال آنکه. الف) اتومبیل نداشته باشد. ب) حداقل یکی از آن دو را داشته باشد.

الف) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.61 = 0.39$

PAPCO

ب) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.61 + 0.25 - 0.08$

متغیر تصادفی:

هر متغیر تصادفی x تابع یا عددی است از فضای نمونه ای به مجموعه اعداد حقیقی است.
به هر عضو از فضای نمونه، یک عددی نسبت می دهند. (متغیرهای تصادفی معمولاً را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهند.)

مثال)

اگر در انداختن یک سکه متغیر تصادفی x مربوط به تعداد شیرها باشد در آن صورت بصورت زیر محاسبه می شود.

$$S = \{ \overset{\text{خط}}{T}, \overset{\text{شیر}}{H} \} \qquad x = 0, 1 \qquad X(T) = 0 \quad X(H) = 1$$

فضای مربوط به متغیر تصادفی : $A = \{ x \mid \underset{\text{(متغیر تصادفی)}}{x} = 0, 1 \}$

مثال) در انداختن دو سکه اگر x مربوط به شانس آمدن شیر باشد. فضای نمونه را تعیین کنید.

$$S = \{ \underset{0}{TT}, \underset{1}{TH}, \underset{1}{HT}, \underset{2}{HH} \}$$

فضای نمونه $A = \{ x \mid x = 0, 1, 2 \}$

$$X(TT) = 0 \qquad X(TH) = x(HT) = 1 \qquad X(HH) = 2$$

تابع چگالی احتمال برای متغیرهای تصادفی گسسته:

فهرستی از متغیرهای تصادفی به همراه احتمالهای مربوط به خود.
در صورتی که تعداد متغیرهای تصادفی کم باشد بصورت جدولی نمایش داده می شود.

$X = x$	x_1	x_2	$x_3 \cdots$	x_n
$P(X = x)$ یا $f_X(x)$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$f_X(x_3)$	$f_X(x_n)$

نکته: در جدول فوق

$$\begin{cases} 1)\ f_X(x) \geq 0 \\ 2)\ \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1 \end{cases}$$

مثال) در پرتاب دو سکه اگر x متغیر تصادفی مربوط به ظاهر شدن شیر باشد.
جدول احتمال آن را بنویسید. $S = \{TT, HT, TH, HH\} \rightarrow n(S)=4$

$X(TT)=0 \quad X(HT)=X(TH)=1 \quad X(HH)=2$

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

ب) احتمال اینکه دو بار شیر بیاید:

$$P(X=2) = f_X(2) = \frac{1}{4}$$

مثال) یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم جدول توزیع احتمال مربوط به آمدن شیر را تعیین کنید.

$S = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$

$n(S) = 2^3 = 8$

$X(TTT)=0, \ X(TTH)=3, \ X(HHT)=3, \ X(HHH)=$

	صفر شیر	1 شیر	2 شیر	3 شیر
X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نکته) در صورتیکه تعداد متغیرها زیاد باشد به صورت ضابطه یک تابع خواهیم نوشت.

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$$ پرتاب 3 سکه

$x = 0, 1, 2, 3$

$\frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3$

$\frac{3!}{2!\,1!} = 3$

نکته: انتخاب n شیء از میان m شیء:

ترکیب $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$

$0! = 1! = 1$

مثال) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی X را برابر مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده شده در نظر می گیریم.

الف) تابع احتمال X را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس بین 6 و 9 باشد را بیابید.

ج) احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر 4 شود را بیابید.

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5),$
$(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (4,3), (5,3),$
$(3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)\}$
$(6,3), (5,4), (6,4), (6,5)$

$n(S) = 6^2 = 36$

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

الف)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ب) $P(6 < x < 9) = P(x=7) + P(x=8) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$

ج) $P(x \leqslant 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$

$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم در هر یک از حالات زیر جدول احتمال متغیر تصادفی مربوط را بنویسید.

الف) اگر متغیر x بیانگر مجموع مقادیر مشاهده شده باشد. در صفحه حل

ب) اگر متغیر x بیانگر ~~مجموع~~ max مقادیر مشاهده شده باشد.

ج) اگر متغیر x بیانگر قدر مطلق تفاضل مشاهده شده باشد.

ب) $(1,1)$ $(1,2)$ $(2,1)$ $(2,2)$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

در (1و1) ماکزیمم 1 است در (1و2) ماکزیمم 2 است

ج) $X=\{0,1,2,3,4,5\}$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

مثال) مقدار ثابت k را چنان تعیین کنید تا $F_X(x)=kx \;,\; x=1,2,\dots,n$ یک تابع احتمال باشد.

$$kx \geq 0 \longrightarrow k \geq 0$$

$$\sum F_X(x)=1 \longrightarrow \sum_{x=1}^{n} kx = 1 \longrightarrow k\sum_{x=1}^{n} x = 1 \longrightarrow$$

$$k\,(1+2+\dots+n)=1 \longrightarrow \frac{kn(n+1)}{2}=1 \longrightarrow k=\frac{2}{n(n+1)}$$

تابع توزیع احتمال:

$$F_X(x)=P(x \leq X)=\sum_{t\leq x} f_X(t)$$

تابع توزیع همان تابع توزیع تجمعی

در جدول احتمال زیر تابع توزیع متغیرهای تصادفی X را بدست آورید.

$X=x$	0	1	2
	0.5	1.5	2.5
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$F(0.5)=P(x\leqslant 0.5)=\frac{1}{4}$$

$$F(1.5)=P(x\leqslant 1.5)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

$$F(2.5)=P(x\leqslant 2.5)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\leqslant x<1 \\ \frac{3}{4} & 1\leqslant x<2 \\ 1 & x\geqslant 2 \end{cases}$$

نکته: معمولاً نمودار تابع توزیع برای متغیرهای گسسته بصورت پله ای می باشد.

مثال) در جدول احتمال زیر ابتدا تابع توزیع را بدست آورده و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

x	0	1	2	3	4
	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0\leqslant x<1 \\ \frac{5}{16} & 1\leqslant x<2 \\ \frac{11}{16} & 2\leqslant x<3 \\ \frac{15}{16} & 3\leqslant x<4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$

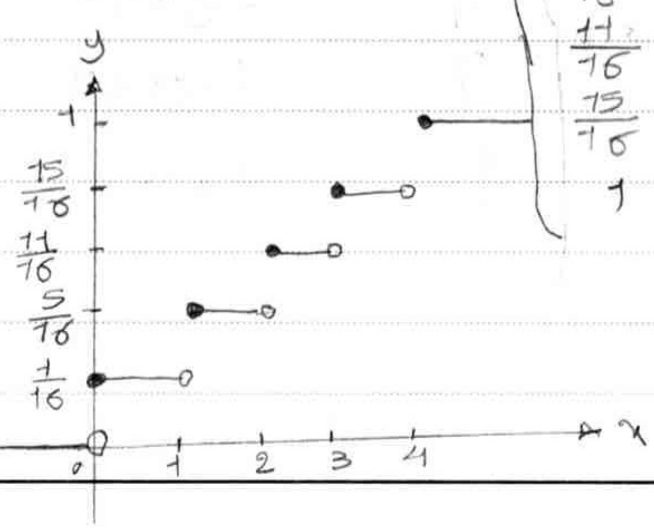
$$P(x\leqslant 0.5)=\frac{1}{16}$$

$$P(x\leqslant 1.5)=\frac{5}{16}$$

$$P(x\leqslant 2.5)=\frac{11}{16}$$

$$P(x\leqslant 3.5)=\frac{15}{16}$$

$$P(x\leqslant 4.5)=1$$



مثال) در تابع احتمال زیر تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید:

$$F_X(x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^x \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

قضیه

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_x(t) = \sum_{t \leq x} \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1}{4} \sum_{t=0}^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^t =$$

$$\sum_{x=r}^{n} a^x = \frac{a^{n+1} - a^r}{a-1} \qquad |a| < 1$$

$$\frac{1}{4} \sum_{t=0}^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 1}{\left(-\frac{1}{4}\right)} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

محاسبه احتمال با استفاده از تابع توزیع:

$$P(x = a) = P(x \leq a) - P(x < a)$$

$$f_X(a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

مثال) در تابع توزیع زیر مطلوب است $P(X = 2) = ?$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

$$f(0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = F(1) - F(1^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = F(2) - F(2^-) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P(x = 2) = \frac{1}{4}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) اگر متغیر تصادفی x با تابع توزیع زیر مشخص شود جدول احتمال را تعیین کنید.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \frac{1}{8} & 2\leqslant x<4 \\ \frac{3}{8} & 4\leqslant x<6 \\ \frac{5}{8} & 6\leqslant x<8 \\ \frac{6}{8} & 8\leqslant x<11 \\ 1 & x\geqslant 11 \end{cases}$$

$F(2)=F(2)-F(2^-)=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$

$F(4)=F(4)-F(4^-)=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$

$F(6)=F(6)-F(6^-)=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}$

$F(8)=F(8)-F(8^-)=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

$F(11)=F(11)-F(11^-)=1-\frac{6}{8}=\frac{2}{8}$

x	2	4	6	8	11
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

مثال) محاسبه برخی از احتمالها توسط تابع توزیع

$F(a)=P(x\leqslant a)$

1) $P(x>a)=1-P(x\leqslant a)=1-F(a)$

در مثال صفحه قبل $P(x>1)=1-F(1)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

2) $P(x\geqslant a)=1-P(x<a)=1-F(a^-)$

$P(x\geqslant 1)=1-P(x<1)=1-P(x\leqslant 0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

PAPCO

$P(x \leq a) = F(a)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P(x \leq b) - P(x \leq a)$

1) $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$

$P(1 < x \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

2) $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a^-)$

$P(1 \leq x \leq 2) = F(2) - F(1^-) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3) $P(a < x < b) = F(b^-) - F(a)$

$P(1 < x < 2) = F(2^-) - F(1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$

4) $P(a \leq x < b) = F(b^-) - F(a^-) =$

$P(1 \leq x < 2) = F(2^-) - F(1^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال) ابتدا تابع احتمال برای X را تعیین کنید و سپس با استفاده از تابع احتمال مقادیر $P(-1 \leq x < 1)$ و $P(-1 < x \leq 1)$ را تعیین کنید.

تابع توزیع

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$F(-1) = F(-1) - F(-1^-) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$F(1) = F(1) - F(1^-) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

تابع احتمال

x	-1	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$P(-1 < x \leq 1) = \underbrace{\frac{2}{3}}_{}$ $P(x=1)$ با جدول $\rightarrow F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3}$

$P(-1 \leq x \leq 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ $\quad P(x=1) + P(x=-1)$

با جدول $\rightarrow F(1) - F(-1^-) = 1 - 0 = 1$

ویژگیهای تابع توزیع:

توزیع احتمالات توأم دو متغیره:

اگر x و y دو متغیر تصادفی باشند توزیع احتمال برای وقوع همزمان آنها بصورت تابع دو متغیره $f_{X,Y}(x,y)$ نشان داده می‌شود که به آن توزیع احتمال توأم X و Y گفته می‌شود
برای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y توزیع احتمال توأم بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

مثال) سکه‌ای را 3 مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر X نمایانگر تعداد شیرهای مشاهده شده در 3 پرتاب و Y نمایانگر تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم باشد توزیع احتمال توأم X و Y را بدست آورید.

$n(S) = 2^3 = 8$ حالت

S	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	TTH	TTT
X	3	2	2	2	1	1	1	0
Y	1	0	1	1	1	0	1	0

پرتاب سوم

(1,1) (1,0)

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
3	0	$\frac{1}{8}$

جدول توزیع احتمال X و Y

ویژگیهای توزیع احتمال دو متغیره یا ویژگیهای تابع احتمال دو متغیره

1) $F_{X,Y}(x,y) \geqslant 0$

2) $\sum_{X}\sum_{Y} F_{X,Y}(x,y) = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) مقدار ثابت K را چنان تعیین کنید که تابع داده شده تابع احتمال توأم دو متغیره باشد.

$P(X, Y) = K(x+y) \qquad X = 1, 2, 3 \qquad Y = 1, 2, 3$

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$K(1+1)$	$3K$	$4K$
2	$3K$	$4K$	$5K$
3	$4K$	$5K$	$6K$

$2K + 3K + \dots + 6K = 36K$

$36K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{36}$

روش 2) $K(x+y) \geqslant 0 \rightarrow K \geqslant 0$

$$\sum_x \sum_y K(x+y) = 1 \rightarrow K \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{3} (x+y) = 1 \rightarrow$$

$$K \sum_{x=1}^{3} (x+1+x+2+x+3) = 1 \rightarrow K \sum_{x=1}^{3} (3x+6) = 1 \rightarrow$$

$$K(3+6+6+6+9+6) = 1 \rightarrow 36K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{36}$$

مثال) روی سؤال مثال بالا

$P(X, Y) = K(x * y) \qquad X = 1, 2, \dots, n \qquad Y = 1, 2, \dots, m$

$$K \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{m} (x\,y) = 1 \rightarrow K \sum_{x=1}^{n} x\,(1+2+\dots+m) = 1 \rightarrow$$

$$K(1+2+\dots+m)(1+2+\dots+n) = 1 \rightarrow K = \frac{4}{mn(n+1)(m+1)}$$

مثال)

اگر X و Y دارای جدول احتمال توأم زیر باشد مطلوب است تعیین

$P((x+y)<2), \; P((X+Y)\leq 2)$

$X \backslash Y$	1	2	3	$F_X(x)$
0	$1/12$	$2/12$	$1/12$	$4/12$
1	$3/12$	0	0	$3/12$
2	$1/12$	$2/12$	$2/12$	$5/12$
$F_Y(y)$	$5/12$	$4/12$	$3/12$	1

$P((x+1)<2) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{12}$

$P((x+y)\leq 2) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1)$
$= \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$

توزیع حاشیه ای یا توزیع کناری:

$F_X(x) = \sum_Y f(x, Y)$

$F_Y(y) = \sum_X f(X, y)$

مثال) توزیع احتمال زیر را در نظر بگیرید.

$x \backslash y$	-1	0	3	F(x)
2	0.1	0.4	0	0.5
4	0.15	0.2	0.15	0.4
F(y)	0.25	0.6	0.15	

الف) $P(x=2)$

ب) $P(y>x)$

$F(x,y) = (2,-1)(2,0)(2,3)(4,-1)(4,0)(4,3)$

$P(x=2) = \sum_y f_X(2) = 0.1 + 0.4 + 0 = 0.5$

$P(x=4) = \sum_y f_X(4) = 0.15 + 0.2 + 0.15 = 0.4$

$P(y=-1) = \sum_x F_y(-1) = 0.1 + 0.15 = 0.25$

$\vdots$

$P(y>x) = P(2,3) = 0$

$P(x>y) = P(2,-1) + P(2,0) + P(4,-1) + P(4,0) + P(4,3)$
$= 0.1 + 0.4 + 0.15 + 0.2 + 0.15 = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توزیع احتمالات شرطی :

مثال، فرض کنید جدول توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y بصورت زیر باشد :

یادآوری : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\begin{cases} F_{x,y}(x|y) = \dfrac{F_{x,y}(x,y)}{F_Y(y)} \\[2ex] P(X=x \mid Y=y) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{X,Y}(Y|x) = \dfrac{F_{Y,X}(x,y)}{F_X(x)} \\[2ex] P(Y=y \mid X=x) = \dfrac{F(x,y)}{F(x)} \end{cases}$$

حل مثال بالا) مهم

$x \backslash y$	1	2	3	4	$F(x)$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	0	0	0	$\frac{3}{16}$
2	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$
$F(y)$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	

د) $P(X=1 \mid Y \leq 2)$

الف) $P(X=2 \mid y=3)$

ب) $P(X \mid y=3)$

ج) $P(X \leq 1 \mid y=3)$

الف) $P(x=2 \mid y=3) = \dfrac{P(X=2, Y=3)}{P(Y=3)} = \dfrac{\frac{2}{16}}{\frac{3}{16}}$

$P(Y=3) = \sum_{x} F_y(3) = \frac{1}{16} + 0 + \frac{2}{16} = \frac{3}{16}$

ب) $P(X \mid y=3) = \dfrac{P(X, Y=3)}{P(y=3)} = \begin{cases} \xrightarrow{x=0} \dfrac{P(X=0, y=3)}{P(y=3)} = \dfrac{1}{16} \\ \xrightarrow{x=1} \dfrac{P(x=1, y=3)}{P(y=3)} = \dfrac{0}{\frac{3}{16}} = 0 \\ \xrightarrow{x=2} \dfrac{P(x=2, y=3)}{P(y=3)} = \dfrac{\frac{2}{16}}{\frac{3}{16}} \end{cases}$

x	0	1	2
$x(X \mid y=3)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

ج) $P(X \leq 1 \mid y=3) = P(X=1 \mid y=3) + (x=0 \mid y=3) =$

$\dfrac{P(x=1, y=3)}{P(y=3)} + \dfrac{P(x=0, y=3)}{P(y=3)} = \dfrac{0}{3/16} + \dfrac{1/16}{\frac{3}{16}} = \dfrac{1}{3}$

د) $P(X=1 \mid y \leq 2) = \dfrac{P(x=1, y=1)}{P(y \leq 2)} + \dfrac{P(x=1, y=2)}{P(y \leq 2)}$

$P(y \leq ۲) = P(y=1) + P(y=۲)$

$= \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16} + \frac{2}{16}} + \dfrac{0}{\frac{10}{16}} = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{10}{16}} = \dfrac{3}{10}$

مثال (در امتحان می دهد) :

ه) $P(X \leq 1 \mid y \leq 2) =$

$P(X=0 \mid y \leq 2) + P(X=1 \mid y \leq 2) =$

$\dfrac{P(x=0, y=1)}{P(y \leq 2)} + \dfrac{P(x=0 \mid y=2)}{P(y \leq 2)} + \dfrac{P(x=1, y=1)}{P(y \leq 2)} +$

$\dfrac{P(x=1, y=2)}{P(y=1) + P(y+2)} =$

تمرین: تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y بصورت زیر داده شده است.

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & x=0,1,2,3 \quad y=0,1,2 \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$$

مقدار c را تعیین کنید. و احتمالات $P(XY \leqslant 2)$ را محاسبه کنید.
$P(X \leqslant 1 \mid y=1)$

روش اول جهت پیدا کردن c

x \ y	0	1	2	$F_X(x)$
0	0	c	2c	$3c=\frac{1}{10}$
1	c	2c	3c	$6c=\frac{1}{5}$
2	2c	3c	4c	$9c=\frac{3}{10}$
3	3c	4c	5c	$12c=\frac{2}{5}$
$F_Y(y)$	$6c=\frac{1}{5}$	$10c=\frac{1}{3}$	$14c=\frac{7}{15}$	

$\xrightarrow{\text{حاصل جمع همگی}} 30c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{30}$

روش دوم

$$\sum_x \sum_y c(x+y) = 1 \rightarrow \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{2} c(x+y) = 1 \rightarrow$$

$$c\sum_{x=0}^{3} (x+0)+(x+1)+(x+2) = c\sum_{x=0}^{3} 3x+3 =$$

$$c(0+3+3+3+6+3+9+3) = c(30) = 1 \rightarrow c = \frac{1}{30}$$

$$P(XY \leqslant 2) = P(0,0) + P(0,1) + P(0,2) + P(1,0) + P(1,1)$$
$$+ P(1,2) + P(2,0) + P(2,1) + P(3,0) =$$
$$0 + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{17}{30}$$

$$P(X \leqslant 1 \mid y=1) = P(x=0 \mid y=1) + P(x=1 \mid y=1) =$$

$$\frac{P(x=0, y=1)}{P(y=1)} + \frac{P(x=1, y=1)}{P(y=1)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{10}{30}} + \frac{\frac{2}{30}}{\frac{10}{30}} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10}$$

$$= \frac{3}{10}$$

استقلال دو پیشامد:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

استقلال دو متغیر تصادفی X و Y: به ازای هر $\forall\, x, y$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

مثال) فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y دارای جدول زیر باشد آیا X و Y مستقلند:

$x \backslash y$	0	1	2	$F_X(x)$
1	1/13	0	2/13	3/13
2	5/13	1/13	2/13	8/13
3	1/13	0	1/13	2/13
$F_Y(y)$	7/13	1/13	5/13	

$$\begin{cases} P(X=1, Y=0) = \frac{1}{3} \\ P(X=1) \times P(Y=0) = \frac{3}{13} \times \frac{7}{13} = \frac{21}{13} \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{13} \neq \frac{21}{13} \longrightarrow$$

X و Y مستقل نیستند

اگر مساوی باشد ادامه می‌دهیم به ازای تمام x و y ها.

امید ریاضی متغیر تصادفی x:

امید ریاضی متغیر تصادفی x، میانگین حسابی متغیر تصادفی x است و با نماد $E(x)$ یا μ نشان می‌دهند.

$$E(x) = \sum_x x\, f_x(x)$$

مثال) فرض کنید در یک فروشگاه متغیر x نمایانگر تعداد فروش کالای A در طول یک هفته باشد و جدول توزیع احتمال متغیر x بصورت زیر باشد. مطلوب است تعیین $E(x)$

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

$$E(x) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 3.0 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.2 = 2.2$$

امید فروش

2.2 تعداد کالائی است که امید داریم در عرض یک هفته تولید شود.

مثال) فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی x بصورت

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

$$E(x) = \sum x f_X(x) = \sum_{x=1}^{k} x \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{x=1}^{k} x =$$

$$\frac{1}{k}(1+2+\dots+k) = \frac{1}{k}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) = \frac{k+1}{2}$$

امید ریاضی یک تابع:

فرض کنید یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $F_X(x)$ در اینصورت امید ریاضی تابعی مثل $g(x)$ عبارتست از:

$$E(g(x)) = \sum g(x) f_X(x)$$

مثال) فرض کنید x یک متغیر تصادفی و جدول احتمال آن بصورت زیر باشد. مطلوبست تعیین: $E\left[(x-1)^2\right]$

x	-1	0	1	2
$F_X(x)$	0.1	0.1	0.5	0.3

$$E\left[(x-1)^2\right] = (-1-1)^2 \times 0.1 + (0-1)^2 \times 0.1 + (1-1)^2 \times 0.5 + (2-1)^2 \times 0.3 = 0.8$$

امید ریاضی برای تابع دو متغیره X و Y:

(X, Y)

$$E(x) = \sum x f_X(x)$$

$$E(Y) = \sum y F_Y(y)$$

$$E(g(x,y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f_{x,y}(x,y)$$

مثال) اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای جدول توزیع احتمال توأم زیر باشند مطلوب است تعیین $E(x.Y)$ و $E(x)$

$x \backslash y$	-1	0	2	$F_X(x)$
0	$1/12$	$2/12$	$2/12$	$5/12$
1	$1/12$	$4/12$	$2/12$	$6/12$
$F_Y(y)$	$2/12$	$6/12$	$4/12$	

۱۴۴

$$E(X) = \sum x F_X(x) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \sum y F_Y(y) = -1 \times \frac{2}{12} + 0 \times \frac{6}{12} + 2 \times \frac{4}{12} = \frac{6}{12}$$

$$E(xY) = \sum\sum (xy) f_{X,Y}(x,y) = ((0 \times -1) \times \frac{1}{12}) + ((0 \times 0) \times \frac{2}{12}) + 0 \times \frac{2}{12} - 1 \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{4}{12} + 2 \times \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$$

$$E(X+Y) = \sum\sum (x+y) f_{X,Y}(x,y) = (0+(-1)) \times \frac{1}{2} + (0+0 \times \frac{2}{12}$$

مثال) اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای جدول توزیع احتمال توأم زیر باشد. مطلوبست تعیین $E(X^2Y)$

x \ y	-1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
2	$1/12$	$4/12$	$2/12$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ویژگیهای امید ریاضی:

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشد:

1) $E(a) = a$

2) $E(aX) = aE(X)$

3) $E(aX+b) = aE(X) + b$

4) $E(ag(x) + bh(x)) = aE(g(x)) + bE(h(x))$

مثال)

$E[(x-1)^2] = E[(x^2 - 2x + 1)] =$

$E(x^2) - E(2x) + E(1) = E(x^2) - 2E(x) + 1 =$

$1.8 - 2 + 1 = 0.8$

$E(x^2) = \sum x^2 f_X(x) = 0.1 + 0 + 0.5 + 1.2 = 1.8$

$E(x) = \sum x f_X(x) = -0.1 + 0 + 0.5 + 0.6 = 1$

	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.1	0.1	0.5	0.3
$x f(x)$	-0.1	0	.5	0.6
x^2	1	0	1	4
$f(x)$	0.1	0	0.5	1.2

ویژگیهای امید ریاضی:

5) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

6) $E(XY) = E(X)E(Y)$ اگر X و Y دو متغیر مستقل تصادفی باشد.