

تحلیل ابعادی و لختی دورانی

امیر آقامحمدی*

روشی برای محاسبه لختی دورانی بعضی از اجسام ارائه می شود که در آن فقط از تحلیل ابعادی و قضیه محورهای موازی استفاده می شود.

لختی $I = \alpha Ml^2$ می گیریم. برای میله ای با همان چگالی ولی با طول $2l$ ، لختی دورانی به همان شکل قبل نوشته می شود. فقط باید به جای جرم میله $2M$ ، و به جای طول آن $2l$ گذاشت؛ α همان ثابت قبلی است. پس لختی دورانی میله به طول $2l$ حول مرکز جرمش

$$I = \alpha(2M)(2l)^2 = 4\alpha Ml^2 \quad (4)$$

است. اما میله به طول $2l$ از دو میله به جرم M و طول l تشکیل شده است، که لختی دورانی هر یک از میله ها حول مرکز جرمش αMl^2 است. با استفاده از قضیه محورهای موازی [۲]، لختی دورانی هر یک از میله های کوچکتر حول مرکز جرم میله به طول $2l$ را به دست می آوریم. در این صورت لختی دورانی میله به طول $2l$ می شود

$$I = 2 \left(\alpha Ml^2 + \frac{Ml^2}{4} \right) \quad (5)$$

با مقایسه روابط ۴ و ۵ مقدار α به دست می آید. نتیجه آن که لختی دورانی میله ای همگن به جرم M و طول l

$$I = \frac{Ml^2}{12} \quad (6)$$

است. البته این نتیجه را با انتگرال گیری مستقیم (رابطه ۱) هم می شد به سادگی به دست آورد. پس سراغ مثالهای پیچیده تری می رویم. ساده ترین

تحلیل ابعادی، اگر بتوان پارامترهای دخیل در مسئله را به درستی تشخیص داد، روشی ساده ای برای یافتن رابطه ای بین کمیت های فیزیکی مربوط به مسئله به دست می دهد. در ساده ترین حالت، رابطه بین این کمیتها تقریباً به طور کامل نتیجه می شود و فقط یک ثابت بی بعد باقی می ماند [۱]. اما مواردی پیدا می شود که با افزودن اندکی فیزیک به تحلیل ابعادی می توان آن ثابت بی بعد را هم یافت. به این روش، مثلاً می توان لختی دورانی بعضی از اجسام را به دست آورد.

لختی دورانی هر جسم حول یک محور از تعریف

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

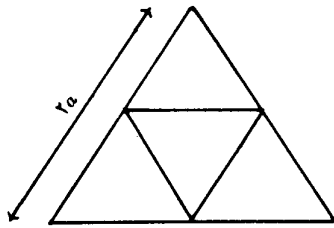
به دست می آید [۲]. در اینجا r فاصله از محور مورد نظر است. برای یافتن این کمیت باید یک انتگرال (احیاناً چند گانه) را محاسبه کرد. نتیجه به شکل

$$I = ML^2 \quad (2)$$

است، که در آن M جرم جسم و L کمیتی با بعد طول است. یکی از پارامترهای طول جسم را a می گیریم. در این صورت

$$I = \alpha Ma^2 \quad (3)$$

که α ثابتی بی بعد است. با این مقدمات، سراغ لختی دورانی میله ای همگن به جرم M و طول l می رویم. لختی دورانی این میله حول مرکز جرمش را * دانشگاه الزهراء و پژوهشگاه دانشهای بنیادی.



شکل ۱.

سه تا مثلثهای کوچک از مرکز جرم مثلث بزرگ یک سوم میانه مثلث بزرگ، $a/\sqrt{3}$ است. پس

$$16\alpha Ma^2 = 3(\alpha Ma^2 + \frac{Ma^2}{3}) + \alpha Ma^2 \quad (14)$$

که از اینجا $\alpha = 1/12$ به دست می آید.

به این ترتیب

$$I = \frac{1}{12} Ma^2 \quad (15)$$

مثال دیگری که کاملاً غیر بدیهی است، مثلثی با اضلاعی به طول a, b, c و $I = \alpha Ma^2$ است. برای این مثلث نیز $I = \alpha Ma^2$ است. بدیهی است که ضریب بدون بعد α به a, b, c و بستگی دارد ولی با مقیاس کردن یکسان آنها تغییر نمی کند. لغتی دورانی مثلثی به طول ضلعهای $2a, 2b, 2c$ برابر $16\alpha Ma^2$ است. با همان روش بالا، نتیجه می شود

$$16\alpha Ma^2 = (\alpha Ma^2 + Md_1^2) + (\alpha Ma^2 + Md_2^2) + (\alpha Ma^2 + Md_3^2) \quad (16)$$

که d_1, d_2, d_3 و فواصل مرکز جرم سه مثلث کوچک جانبی از مرکز جرم مثلث بزرگ اند.

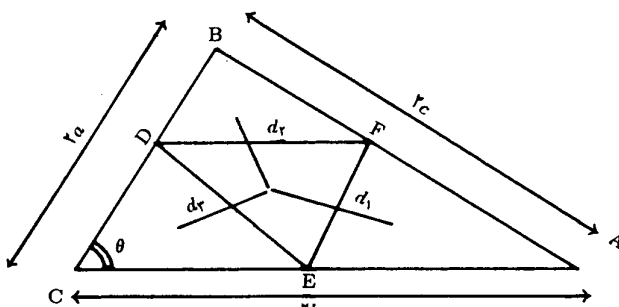
اما $d_i = l_i/3$ که l_i ها طول میانه های مثلث بزرگ اند. پس

$$12\alpha a^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{9} \quad (17)$$

در مثلثهای CBE و CDE (شکل ۲) داریم

$$4a^2 + b^2 - 4ab \cos \theta = l_1^2 \quad (18)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 \quad (19)$$



شکل ۲.

مثال دومی، مربعی همگن به جرم M و طول ضلع l است. لغتی دورانی این مربع حول مرکز جرمش را نیز $I = \alpha MI^2$ می گیریم. برای مربعی با همین چگالی و طول ضلع $2l$ ،

$$I = \alpha(4M)(2l)^2 = 16\alpha MI^2 \quad (7)$$

اما این مربع از چهار مربع به جرم M و ضلع l تشکیل شده است. لغتی دورانی هر یک از میله ها حول مرکز خود αMI^2 است. با استفاده از قضیه محوره های موازی، و با استفاده از رابطه ۷

$$16\alpha MI^2 = 4 \left(\alpha MI^2 + \frac{MI^2}{4} \right) \quad (8)$$

از رابطه ۸ نتیجه می شود $\alpha = 1/6$ ، و لغتی دورانی مربع همگن $I = ml^2/6$ می شود.

حال مستطیلی به ابعاد a و b در نظر بگیرید. لغتی دورانی را به شکل های مختلفی، از جمله $\alpha Ma^2, \beta Mb^2$ ، و ... می توان نوشت. بدیهی است که α, β ، و ... کمتهایی بی بعدند که به a و b بستگی دارند. ولی چون هیچ یک از اضلاع بر دیگری برتری ندارد، قاعداً می توان از هریک از اشکال بالا برای لغتی دورانی استفاده کرد و نتیجه نهایی باید مستقل از انتخاب اولیه باشد. برای مستطیل، لغتی دورانی را $I = \alpha Ma^2$ می گیریم. برای مستطیلی از همان جنس به ابعاد $2a$ و $2b$ ، لغتی دورانی حول مرکز جرم

$$I = 16\alpha Ma^2 \quad (9)$$

است. این مستطیل نیز از چهار مستطیل کوچکتر به ابعاد a و b تشکیل شده است، که فاصله مرکز جرم هر یک از آنها از مرکز جرم مستطیل بزرگ $\sqrt{a^2 + b^2}/2$ است. با تکرار روشی که دیدیم، به رابطه زیر می رسم.

$$16\alpha Ma^2 = 4 \left(\alpha Ma^2 + M \frac{a^2 + b^2}{4} \right) \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{12a^2} \quad (11)$$

اگر از $I = \beta Mb^2$ شروع می کردیم، β می شد

$$\beta = \frac{a^2 + b^2}{12b^2} \quad (12)$$

در هر دو حال، α و β کمتهایی بی بعدند که به a و b بستگی دارند و لغتی دورانی مستطیل حول مرکز جرمش

$$I = M \frac{a^2 + b^2}{12} \quad (13)$$

است.

مثال دیگری که روش انتگرال گیری برای آن پیچیده تر است، مثلث است. مثلث متساوی الاضلاعی به جرم M و طول ضلع a در نظر بگیرید. لغتی دورانی آن حول مرکز جرمش $I = \alpha Ma^2$ است. لغتی دورانی مثلث متساوی الاضلاعی از همان جسم و به طول ضلع $2a$ ، $I = 16\alpha Ma^2$ است. این مثلث از چهار مثلث کوچکتر تشکیل شده است، فاصله مرکز جرم

تنها محاسبه‌ای که در این روش لازم است، به دست آوردن فاصله مرکز جرم اجزای کوچک از مرکز جرم جسم بزرگ است. دایره مثالی است که خاصیت دوم را ندارد.

مربع و مستطیل حالات خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند. برای یک متوازی‌الاضلاع به ابعاد a و b و جرم M

$$I = M \frac{a^2 + b^2}{12} \quad (23)$$

به دست می‌آید. (این را به عنوان تمرین ثابت کنید.) مکعب، مکعب مستطیل، و در حالات کلی‌تر متوازی‌السطوح، و نیز هرم، مثالهایی سه بعدی‌اند که لختی دورانی آنها را می‌توان با این روش محاسبه کرد.

مراجع

1. R Schmidt & K Housen, *The Industrial Physicist* (July 1995) 21-24.

ترجمه این مقاله در شماره ۱ سال ۱۵ مجله فیزیک چاپ شده است.

۲. هر کتاب فیزیک پایه، از جمله فیزیک، هالیدی، رزنیک؛ مرکز نشر دانشگاهی.

که از اینجا $I_y^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ می‌شود. به همین ترتیب I_x^2 و I_z^2 را نیز می‌توان به دست آورد. از اینجا

$$I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (20)$$

و به این ترتیب،

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36a^2} \quad (21)$$

بنابراین لختی دورانی یک مثلث همگن به اضلاع a و b و c و جرم M ، حول محوری عمود بر صفحه جسم که از مرکز جرم مثلث می‌گذرد، می‌شود

$$I = M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36} \quad (22)$$

اما سؤال آخر آنکه این روش در چه مواردی قابل اجرا است. اولاً، توزیع جرم باید همگن باشد. ثانیاً می‌دانیم که با مقیاس کردن شکل جسم، به شکلی متشابه با شکل اولیه می‌رسیم. در صورتی که این شکل جدید را بتوان به تعدادی از شکلهای اولیه (مثلاً در دو بعد، با دو برابر کردن جسم، به چهار شکل متشابه با شکل اولیه) تجزیه کرد، می‌توان از این روش استفاده کرد.

معلم باید

... معلم باید اسم شاگردانش را بداند و قیافه آنها را بشناسد. این برای بعضی معلمها آسان و برای بعضی دیگر بسیار دشوار است، ولی در هر حال ضرورت دارد. من خودم در این مورد متأسفانه ضعیف‌ام و درست نیست به کسی نصیحت کنم، اما دست کم پذیرفته‌ام که باید چنین باشد. یکی از بدترین اشتباهات هاوسمن استاد دانشگاه لندن این بود که به ناتوانی در تشخیص دادن دانشجویانش مباحثات می‌کرد. بخصوص دخترها از این رفتار او متنفر بودند، چون در کلاس درس اشتباهات آنها را با هیجانی که بوی کینه شخصی هم می‌داد به رخشان می‌کشید و آنوقت فردا صبح که در خیابان از کنارشان می‌گذشت انگار نه انگار که قبلاً هم آنها را دیده است.

Gilbert Hight, *The Art of Teaching*, 1950.