حد و پیوستگی مهندس رزمگیر

1-میل کردن یعنی چه ؟

منظور از این که مثلا میگوییم xبه 2 میل میکند این است که x به عدد 2 بسیار بسیار بسیار نزدیک میشود ولی هرگز دستش به عدد 2 نمیخورد ! در ریاضی ما این مفهوم را با نماد $x \to 2$ نشان میدهیم .

2-منظور از حد چیست ؟

ما همیشه یک تابع بهمون میدادن و میگفتن که اگر به جای x هاش عدد مثلا 2 بزاریم حاصل تابع چند میشه . امسال قضیه فرق میکنه . قضیه اینه که امسال میخوایم ببینیم وقتی که x بسیار بسیار بسیار به 2 نزدیک میشه خود تابع به چه عددی بسیار بسیار بسیار نزدیک میشه ؟!!!

3-آیا میتوان به یک عدد که در دامنه تابع نیست بینهایت نزدیک شد (میل کرد)؟

گاهی آره گاهی نه !!

فرض کنین یه تابع داریم که دامنه آن همه اعداد به جز 2 باشن . (یعنی 2 تو خالی باشد) .

در این صورت میشه بسیار بسیار به 2 نزدیک شد .

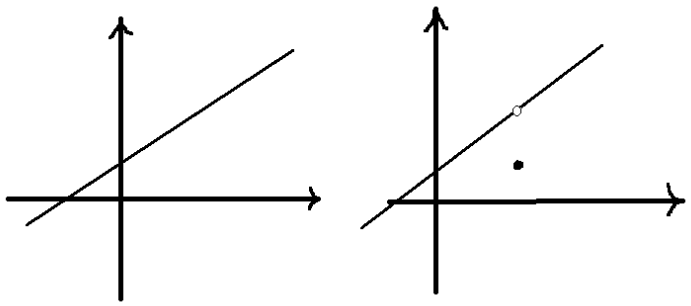
اما حالا فرض کنین دامنه یک تابع همه اعداد به جز بازه 1 تا 3 باشن . یعنی از عدد 1 تا 3 (که 2 هم اون بینشون هست) در دامنه وجود ندارند .

آیا به نظر شما میشه به عدد 2 بسیار بسیار بسیار نزدیک شد ؟ مسلمه که نه . چون ما حتی نمیتونیم به خود 1 برسیم یا به خود 3 برسیم . پس هیچ جوری نمیشه به 2 بسیار بسیار نزدیک بشیم (میل کنیم) !!

4- آیا حد یک تابع با مقدار آن تابع در آن نقطه برابر است ؟

نه لزوما ! به دو تا شکل زیر نگاه کنید تا به تفاوت پی ببرید . در شکل سمت چپ $f(2) = 3$ و حد تابع هم در این نقطه هم میشود 3 .

اما به شکل راستی نگاه کنید ! $f(2) = 1$ ولی حد تابع در نقطه 2 میشود 3 !!



5 – وقتی میگیم x به 2 نزدیک میشه از کدوم طرف داریم نزدیک میشه ؟ از سمت 3 (اعداد بیشتر از 2) ؟ یا از سمت عدد 1 (اعداد کمتر از 2) ؟ باید مشخص بشه !!

اگه بخواهیم بگیم از سمت عددهای بیشتر داریم به 2 نزدیک میشیم یه علامت + بالای 2 میزاریم و میگوییم حد راست تابع در 2 و مینویسیم :

اگه هم بخواهیم بگیم از سمت عددهای کمتر داریم به 2 نزدیک میشیم یه علامت - بالای 2 میزاریم و میگوییم حد چپ تابع در 2 و مینویسیم :

پس فرق میکنه که از کدوم طرف داریم نزدیک میشیم .

6-آیا ممکنه از یک سمت بشه به عدد مثلا 2 نزدیک شد و از یک سمت نه ؟

آره ! مثلا در تابع $y = \sqrt{x-2}$ دامنه برابر است با : $x \geq 2$

یعنی اعداد کمتر از 2 تعریف نمیشند . پس هرگز نمیشه از سمت چپ (کمتر) به 2 نزدیک شد . توی اینجور سوالا اگه گفته شد حد تابع در 2 چند است منظور این است که خودتون باید تشخیص بدین از سمت راست منظور بوده .

7- تعریف کتاب درسی برای حد چگونه است ؟

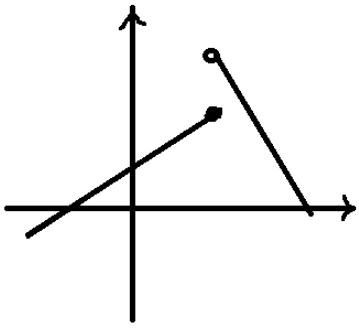
برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مفهوم جمله بالا این است که اگر x را به بسیار بسیار به a نزدیک کنیم ، f(x) به اندازه دلخواه به L نزدیک میشود .

8- آیا ممکن است حد چپ و راست در یک نقطه برابر نباشند ؟

بله ! مثل شکل زیر . حد راست و چپ هر کدام یک مقدار متفاوت شده است .



9-کی میتوانیم بگوییم یک تابع در یک نقطه حد دارد ؟

اگر تابع در آن نقطه هم حد چپ داشت هم حد راست و هر دوی این حد ها با هم برابر باشند میگوییم این تابع در این نقطه حد دارد و مقدار آن برابر با همان مقدار مشترک این دو حد است .

10-منظور از همسایگی یک نقطه مثلا 2 چیست ؟

خیلی خودمونی و راحت بخوام بگم اینجوری میشه : یک کوچولو اینورتر و یک کوچولو اونورتر از نقطه 2 !!! خودتونُ جای عدد 2 بزارین ، ببینین میتونین یه کوچولو (خیلی خیلی کوچولو) سمت راست یا چپ قدم بزارین ؟ نمیافتین ؟

اگر نمیافتین پس همسایگی 2 تعریف شده . اما اگه پرت شدین از هر طرف ، همسایگی برای اون طرف تعریف نشده !

مثلا برای تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ همسایگی 2 تعریف شده ؟
نه ! چون نه خود عدد 2 و نه حتی یه کوچولو اینورتر یا اونورترش توی دامنه تابع نیست .

11- " خیلی کوچولو " را در ریاضی با چه علامتی نشان میدهند ؟

ازین به بعد ما قرارداد میکنیم که به جای کلمه " یه کوچولو " از حرف ε که خوانده میشود : اِپسیلُن استفاده میکنیم . به عبارتی ε کوچکترین عدد مثبت است !

12 - ایا در همسایگی یک عدد مثلا 2 باید خودِ عدد 2 هم عضو باشد ؟

نه لزوما ! میتونه باشه میتونه نباشه .
اگر عدد 2 هم شامل همسایگی باشه میگیم همسایگی 2 ، اگر خود 2 نباشه میگیم همسایگی محذوف (حذف شده) 2 !
تعاریف کتاب درسی هم در زیر برایتان آورده ام :

شرط آن که بتوان از حد یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت گوییم تابع در اطراف a تعریف شده است.

بازه های به صورت $(a-\delta\ ,\ a+\delta)$ را که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می نامند.

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

به طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

11 - اگر دو تا تابع f و g در همسایگی محذوف a بر هم منطبق باشند . آیا حد این دو تابع در آن نقطه برابر است ؟ (سوال کتاب درسی) حتما ! اثبات از طریق برهان خلف !(خودتون زحمتش بکشید!!)

12 - از روی شکل و نمودار توابع که راحت میشه فهمید یک تابع در یک نقطه فرضی حد داره یا نه ، اما اگر به ما نمودار ندادند و ضابطه تابع را دادند چی ؟

چند تا حالت هست که تک تک اونها رو برای شما میگم :

ساده ترین توابع : اگر ضابطه تابع شما به صورت چند جمله ای بود ($y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$)یا نمایی بود ($y = ax^n$) یا sin , cos بود ،

حد تابع با مقدار تابع در اون نقطه برابر هست . یعنی برای محاسبه حد کافیه عدد را به جای x ها قرار بدین .

اگر دو تا تابع با هم جمع و تفریق و ضرب یا تقسیم شده بودن میشه اول از هر کدوم حد گرفت بعد حاصل حدشون رو با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم (در صورتی که مخرج 0 نشه !) کرد . یعنی :

اگر برای دو تابع f و g داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه:

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = L_1 - L_2$

پ) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = L_1 L_2$

ت) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ **(در این قسمت باید** $L_2 \neq 0$ **)**

همینطور اگه تابعی در قدر مطلق یا رادیکال بود یا به توان رسیده بود :

$$\lim_{x\to a} f^n(x) = L^n$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cL$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

15 -اگر تابع f در همسایگی نقطه a تعریف شده بود و حد هم داشت ، آیا تابع $\frac{1}{f}$ حتما در نقطه a حد دارد ؟ چرا ؟ (سوال کتاب درسی)

اره . فقط به شرطی که حد f در x=a ، 0 نشود . چون در این صورت تعریف نشده میشود .

اگر $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$ آنگاه $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)}$

16 - آیا محاسبه حد همه توابع به همین راحتی ست و با جایگذاری عدد در تابع حد به دست می آید ؟

مسلما نه ! اگه اینگونه بود در دوران دبستان و راهنمایی پروندش بسته شده بود !! مثلا خیلی از اوقات ما به توابعی بر میخوریم که به صورت $\frac{f}{g}$ هستند . و حد f و g هر دو در آن نقطه فرضی 0 میشود . یعنی پاسخ حد میشود $\frac{0}{0}$!! تموم شد ؟ لابد میگید خوب اینکه میشه تعریف نشده و جواب این جور سوالات همیشه میشه تعریف نشده ! اما یادتون باشه در بحث حد همون اولش گفتم که ما بسیار بسیار نزدیک به یه عدد میشیم ولی به خود اون عدد نمیرسیم . پس حالا که میگم میشه $\frac{0}{0}$ منظور اینه که یه عدد بسیار بسیار نزدیک به صفر به یه عدد بسیار بسیار نزدیک به صفر تقسیم شده . خوب ! حالا پاسختون چیه ؟ فکر نکنم دیگه بگید تعریف نشده !!

چون ما دیگه با خودِ 0 سروکار نداریم ، با یه عدد بینهایت نزدیک به صفر سر و کار داریم . اما هنوز جوابمون نگرفتیم !!

17 - بالاخره $\frac{0}{0}$ در حد چه معنی میده و جوابش چجوری باید تعیین کنیم ؟

بستگی داره که خودِ 0 باشه که بهش ازین به بعد میگیم 0 مطلق یا یه عدد بسیار بسیار نزدیک به 0 (مثلا 0.00000000000000000001) که بهش از این به بعد میگیم 0 حدی !

حالا به نظر شما جواب هر کدوم از این کسرها چی میشه ؟

پس همه حالات مشخصه جواب به جز حالت 0حدی به 0حدی .

18 - حدهایی که به $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ میرسند را چگونه حل کنیم ؟

به اصطلاح میگیم باید رفع ابهام کنیم . یعنی این کسر یه جوابی داره ولی ما هنوز ازش بیخبریم . چکار کنیم ؟

19 -روشهای رفع ابهام $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ چی هستند ؟

گاهی باید از اتحادها اسفاده کنیم . مثلا اتحاد مزدوج . گاهی از اتحادهای مثلثاتی . گاهی هم ارزی و ....

مثال: (کتاب درسی) حد تابع $y = \frac{sin\,2x}{sinx}$ در 0 چند میشود ؟

اگر شما به جای x ها 0 قرار دهید میشود $\frac{0}{0}$ که مبهم هست . اما به کمک اتحاد $sin2x = 2sinx.cosx$ به راحتی به جواب میرسیم !

20 -آیا حد $\frac{sinx}{x}$ در 0 هم با روش اتحاد حل میشود ؟

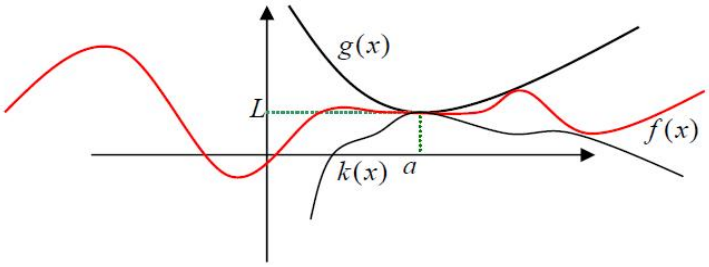
خیر . این یکی داستانش مفصل تر هست و پاسخش 1 میشود . اثبات دقیقتری داره . برای اثبات این حد به یک قضیه دیگه نیاز داریم به اسم : قضیه فشردگی (= ساندویچ !)

21- قضیه فشردگی در حد چیست ؟

به زبون آدمی زاد و خودمونی : اگه یه تابع مثلا fبین دو تا تابع g , k در یک نقطه گیر کرده باشه ، یعنی تحت فشار باشه ، و حد اون دو تا تابع کناری یه چیز باشه حد تابع f (وسطی) هم به اجبار همون میشه !

تعریف رسمی و ریاضیش :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی نقطه ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلا $k(x) \le f(x) \le g(x)$، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می شود $\lim_{x\to a} f(x) = L$.



مثال، حد تابع $x\cos\frac{1}{x}$ را در صفر حساب می کنیم.

از آنجا که $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$ برای مقدارهای مثبت x داریم $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$ و برای مقدارهای منفی x داریم $x \le x\cos\frac{1}{x} \le -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

22- با استفاده از قضیه فشردگی میشه ثابت کرد که $(x \to 0)$

اثبات در کتاب درسی و همه کتابهای موجود در بازار هست و میتوانید مراجعه کنید .

23 - آیا اگر دو تا تابع داشته باشیم و حد دو تاتابع در یک نقطه فرضی را بررسی کنیم و بفهمیم یکی حد داره یکی نداره . اگر این دو تابع را باهم جمع و تفرق کنیم یا ضرب و تقسیم کنیم حاصل حد دارد ؟

فرض کنیم f داره و g نداره .
f+g , f-g , g/f هیچکدام ندارند .
f/g , f.g ممکنه داشته باشن ممکنه نداشته باشن !!
فرض کنیم f نداره و g هم نداره .
F+g , f-g , f.g , f/g , g/f هیچکوم معلوم نیست دارن یا ندارن !!
بهترین حالت اینه که هم fداره هم g داره .
در این حالت f.g , g/f , f/g , f-g , f+g همگی دارن . (در تقسیم حد مخرج صفر نباشه)

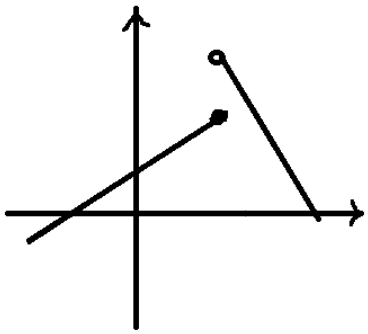
24 - پیوستگی چیست ؟
به زبون خودمونی یعنی تابعی که بریدگی نداره و یکسره به هم وصله .

25 - پیوستگی یک تابع در یک نقطه یعنی چی ؟

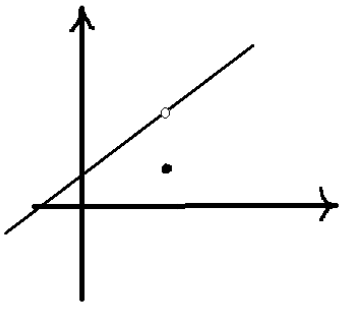
یعنی تابع در آن نقطه هیچگونه بریدگی نداشته باشه و یکسره به هم وصل باشه .

26 -آیا امکان داره یک تابع در یک نقطه حد نداشته باشه ولی پیوسته باشه ؟

به هیچ عنوان ! به شکل زیر نگاه کنید . تابع از سمت راست به 2 نزدیک میشه و از سمت چپ به 1 نزدیک میشه . پس حتما بریدگی داریم . یا به عبارتی پیوسته نیست در اون نقطه .



27 -آیا امکان داره یک تابع در یک نقطه حد داشته باشه (یعنی حد راست و چپش عین هم باشن) ولی باز هم پیوسته نباشه ؟
آره . به شکل زیر نگاه کنین ! حد تابع در نقطه 2 از راست 1- است و از چپ هم 1- است . اما در خودِ 2 بریدگی داریم !



28 - پس چه وقت تابع از نظر ریاضی پیوسته هست ؟

باید حد چپ و راست باهم برابر باشند و مقدار تابع هم در اون نقطه با مقدار این حدهای چپ و راست برابر باشند . تعریف رسمی اون در زیر آوردم :

اگر تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد و حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، گوییم تابع f در a پیوسته است.

نکته : توابع چند جمله ای و نمایی و لگاریتمی و مثلثاتی و رادیکالی در همه نقاط دامنه خود پیوسته هستند .

نکته : اگر تابعی در همه نقاط دامنه اش پیوسته باشد به آن تابع تابعی پیوسته میگوییم .

29- آیا ممکن است یک نقطه در دامنه یک تابع وجود نداشته باشد اما تابع در آن نقطه پیوسته باشه ؟

به هیچ عنوان ! ممکن است حد داشته باشد ، اما یقینا پیوسته نیست علتش هم اینه که مقدار تابع وجود ندارد تا با حد چپ و راست برابر باشد . یعنی در هر صورت بریدگی داریم.

30 - پیوستگی در بازه چه فرقی با پیوستگی در یک نقطه داره ؟

ما در بررسی پیوستگی یک نقطه فقط با همان یک نقطه سر و کار داریم . اما در بررسی پیوستگی در یک بازه با بینهایت نقطه سر و کار داریم . اما چیزی که خیلی مهم هست اینه که همیشه مرزهای بازه را حتما چک کنید . مثلا اگر بازه [a , b] داشتیم . برای بررسی پیوستگی باید پیوستگی راست a و پیوستگی چپ b را چک کنید . چون سمت چپ a و سمت راست b را کاری نداریم .اما برای دیگر نقاط داخل این بازه دقیقا مانند قبل بررسی میکنیم یعنی هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ .

31 - اگر تابع g پیوسته باشه و تابع f در a حد داشته باشه و تابع g(f(a)) تعریف پذیر باشه حد تابع g(f(x)) در a را چگونه محاسبه کنیم ؟

اگر تک تک شرایط بالا برقرار باشند میشه گفت :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

مثال کتاب درسی :

حد تابع $y=\sqrt{\sin x}$ را در $x\to\frac{\pi}{6}$ می یابیم.

دقت کنید اینجا تابع g همان تابع $\sqrt{x}$ است . و تابع f تابع $sinx$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

32 - اگر f , g در نقطه فرضی a پیوسته باشند . تکلیف پیوستگی fog , gof چگونه است ؟

با شرط امکان تشکیل fog و gof این دو تابع پیوسته هستند .

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$$

نکته کلی : اگر g در aپیوسته باشد و f در g(a) پیوسته باشد و تابع fog قابل تشکیل باشد . آنگاه تابع fog در aپیوسته است .