به نام آفریدگار آسمان ها

حرکات در منظومه شمسی

نگارنده: محمد رضا حسن پور

ویرایش و بازبینی: سید حسین هاشمی

دی ماه ۹۲

پیشگفتار

می توان گفت یکی از مهمترین و تاریخی ترین مباحث نجوم، بحث حرکت های اجرام در منظومه شمسی است. از جمله اولین سوال هایی که ذهن منجمان قدیم را به خود مشغول می کرد، حرکات سیارات و ماه و خورشید بود و می خواستند با طرح نظریه هایی این حرکات را توجیه کنند.به خصوص حرکات عجیبی که سیارات از خود نشان می دادند.

منجمان یونانی برای حل این مسائل نظرات مختلفی ارائه می دادند. از این میان دو نظریه مشهور تر و مقبول تر بود و با مشاهدات تطابق بیشتری داشت.آریستارخوس منجم یونانی معتقد بود خورشید در مرکز جهان است و زمین و سایر سیارات به دور آن در گردش هستند. او توانست با همین نظریه بسیاری از پیچیدگی های حرکت سیارات را توضیح دهد. اما فلاسفه یونانی که نسبت به مادر خود ،زمین، متعصب بودند، عقیده داشتند زمین در مرکز عالم است و خورشید و سیارات و ستاره ها هر کدام در فلک هایی گرد زمین می چرخند. از این جمله می توان افلاطون و بطلمیوس را نام برد. برای اثبات حرفشان نیز دلیل خوبی داشتند. می گفتند اگر زمین حرکت کند باید ستاره ها نیز (به دلیل پدیده اختلاف منظر) تغییر مکان داشته باشند. اما تغییری در مکان ستاره ها دیده نمی شد.

چون زور فلاسفه در آن زمان ها بیشتر بود و می توانستند با روش های بحث فلسفی بقیه را متقاعد کنند، نظریه خورشید مرکزی کم کم اعتبار خود را از دست داد. بعلاوه با ظهور دین مسیحیت و قدرت یافتن کلیسا ها در غرب، تا قرن ها کسی جرئت نمی کرد نظریه ای مخالف ارائه دهد.

البته باید گفت نظریه زمین مرکزی با وجود این که اساساً اشتباه بود، طوری توسعه یافته بود که خیلی از مشاهدات را توجیه می کرد. از این مهمتر، دانشمندان تا قرن ها بر اساس همین نظریه بسیاری از پدیده ها را پیش بینی می کردند.

دانشمندان اسلامی اکثراً همان نظریات یونانیان و به خصوص کتاب المجسطی نوشته بطلمیوس را قبول داشتند.اما در این میان بعضی نیز نظریه زمین مرکزی را غلط می دانستند.حتی استرلاب هایی نیز بر این اساس ساختند.اما از قرن ۱٦ میلادی به بعد، نجوم اسلامی کمرنگ شد و از آن به بعد دانشمندان غربی راه را ادامه دادند.

پیش از شروع

بررسی های ما در این نوشته،از لحاظ تاریخی، شامل نظریه خورشید مرکزی کپرنیک و مشاهدات گالیله و تیکو براهه در نهایت قوانین کپلر می شود. اما پا را از این فراتر نمی گذاریم و با نیوتون کاری نداریم. سیب هنوز بر درخت است!

در این نوشته سعی می کنیم به جای تجزیه و تحلیل های هندسی، در مواقع لزوم از بردار ها استفاده کنیم. استفاده از بردار ها در بسیاری از موارد حل مسائل را ساده تر و سریع تر می کند.

به عنوان پیش زمینه ای برای بحث اصلی، نیاز است مطالبی گفته شود:

قانون اول کپلر:

سیارات در مدار های بیضوی حول خورشید می گردند. خورشید در یکی از کانون های بیضی قرار دارد.

اصل این قانون زیاد برای ما مهم نیست. چون بیضوی بودن مدارات بحث را پیچیده می کند. از طرفی می دانیم خروج از مرکز مدار سیارات (به جز عطارد) آنقدر کوچک است که می توان آن را دایره فرض کرد. پس بدون هیچ مشکلی می توانیم از شکل ساده این قانون استفاده کنیم: سیارات در مدار های دایروی به دور خورشید می گردند.خورشید در مرکز دایره است.

یک مشکل دیگر، میل مداری سیارات است.می دانیم صفحه مداری سیارات نسبت به یکدیگر زاویه دارند. اما این زاویه نیز آن قدر کوچک است (کمتر از ۱۰ درجه) که می توان از آن صرف نظر کرد. پس این ساده سازی را نیز در نظر می گیریم. یعنی فرض می کنیم سیارات در صفحه مدار زمین (صفحه دایره البروج) قرار دارند.

پس از این ساده سازی ها چند تعریف مهم ارائه می کنیم.

تقسیم بندی سیارات:

هشت سیاره منظومه شمسی را به دو دسته سیارات داخلی و خارجی تقسیم می کنیم.عطارد و زهره داخلی و مریخ و مشتری و زحل و اورانوس و نپتون خارجی هستند. زمین هم که زیر پای ماست!

مقارنه و مقابله:

مقابله فقط در مورد سیارات خارجی به کار می رود. هنگامی که یک سیاره خارجی در نزدیک ترین فاصله از زمین باشد، در حالت مقابله قرار دارد.

مقارنه سیارات خارجی حالتی است که نسبت به زمین در آن طرف خورشید باشند.یعنی در دور ترین فاصله از زمین.

درباره سیارات داخلی، دو مقارنه داریم.مقارنه علیا و مقارنه سفلی.یا مقارنه داخلی و خارجی.مقارنه داخلی هنگامی است که سیاره بین زمین و خورشید باشد. و مقارنه خارجی هنگامی است که خورشید بین زمین و سیاره باشد. (این مورد مثل مقارنه سیارات خارجی است.)

در مورد ماه نیز مقارنه و مقابله داریم. ماه نو که نزدیک خورشید است در مقارنه است.و ماه بدر که آن طرف زمین است در مقابله قرار دارد.

تربیع:

تعریف تربیع برای سیارات داخلی و خارجی متفاوت است.اما در هر دو مورد یک مثلث یکسان در نظر می گیریم. اگر زمین،خورشید و سیاره را با خط به هم وصل کنیم مثلثی به دست می آید. (این مثلث تقریبا تمام بحث ما در این نوشته است!)

در حالت تربیع باید این مثلث قائم الزاویه باشد. در تربیع سیارات داخلی زاویه رأس سیاره قائمه است.اما در تربیع سیارات خارجی زاویه رأس زمین قائمه است. به زاویه راس زمین در اصطلاح کشیدگی سیاره گفته می شود.

برای ماه هم تربیع داریم. مثل سیارات خارجی ،تربیع ماه وقتی اتفاق می افتد که زاویه رأس زمین (کشیدگی ماه) ۹۰ درجه باشد. این حالت تقریبا در روز های هفتم و بیست و دوم هر ماه اتفاق می افتد.یعنی وقتی که هلال ماه نصفه است.اولی تربیع اول و دومی تربیع دوم نام دارد!!

شروع بحث

حرکت نسبی: بحث زمان ها:

یکی از مباحث مهم، مسئله حرکت نسبی دو جسم است.یعنی یک جسم حرکت دیگری را چگونه می بیند! چرا این مسئله برای ما مهم است؟ واضح است. چون هر جرمی را که از روی زمین مشاهده کنیم در واقع حرکت آن نسبت به زمین را می بینیم.اما در محاسبات مربوط به حرکت در منظومه شمسی (از جمله به کار بردن قوانین نیوتون و کپلر) ما به حرکت مطلق سیارات (حرکت نسبت به خورشید) نیاز داریم.

اولین چیزی که لازم است در مورد حرکت سیاره بدانیم، دوره تناوب مداری آن است. اما نمی توان مستقیماً آن را اندازه گیری کرد. باید حرکت زمین را نیز در نظر بگیریم.پس به رابطه ای بین دوره تناوب ظاهری (نسبی) سیاره، دوره تناوب زمین و دوره تناوب حقیقی سیاره نیاز داریم.

بیایید سری به گالیله بزنیم ببینیم چه نظری در مورد حرکت نسبی دارد. گالیله حرکت های اجسام نسبت به یکدیگر را بررسی کرد و روابطی بین مکان و سرعت نسبی به دست آورد که ما آن ها را با نام تبدیلات گالیله ای می شناسیم.این تبدیلات به طور کلی به این شکل هستند:

$$\overrightarrow{A_{\text{نسبی}}} = \overrightarrow{A_{\text{حقیقی}}} - \overrightarrow{A_{\text{ناظر}}}$$

که A می تواند مکان یا سرعت باشد (توجه کنید.با نیوتون کاری نداریم.پس شتاب را بررسی نمی کنیم).نکته مهم این است که A باید بردار باشد.یعنی رابطه بالا رابطه ای برداری است و به صورت برداری معنا دارد.

بر می گردیم به بحث سیارات.حرکت سیارات دایره ای است. مکان و سرعت آن ها در مدار هر لحظه تغییر می کند (از نظر برداری) اما می دانیم در حرکت دایره ای یک چیز همواره ثابت است: سرعت زاویه ای (یا به طور معادل: دوره تناوب واقعی سیاره)

حال بیایید تبدیل گالیله ای را به کار ببریم.

$$\vec{\omega}_{\text{نسبی}} = \vec{\omega}_{\text{حقیقی}} - \vec{\omega}_{\text{ناظر}}$$

توجه داریم که سرعت زاویه ای نیز برداری است! طبق قرار داد، اگر از بالا به یک سیستم نگاه کنیم هر جسمی که پاد ساعتگرد بچرخد سرعت زاویه ای آن در جهت مثبت قرار دارد.جهت مثبت را در راستای عمود بر صفحه دوران (اینجا صفحه منظومه شمسی) و به سمت بالا در نظر می گیریم.

فرض می کنیم هر دو جسمی که می خواهیم بررسی کنیم (مثلا دو سیاره) پاد ساعتگرد می چرخند. همان چیزی که در مورد همه سیارات می دانیم.پس می توانیم علامت بردار را از بالای ω ها برداریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{T_{\text{سیاره}}} - \frac{2\pi}{T_{\text{زمین}}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{سیاره}}} - \frac{1}{T_{\text{زمین}}}$$

S از کجا آمد؟ ما یک سرعت زاویه ای نسبی برای حرکت دو سیاره نسبت به هم تعریف کردیم که برابر بود با $\frac{2\pi}{S}$. ما به S دوره تناوب هلالی می گوییم. در ادامه به اهمیت آن پی خواهیم برد. برای مثال، پس از یک دوره تناوب هلالی (که یک سال هلالی برای سیاره مورد نظر نامیده می شود) وضعیت دو سیاره دقیقاً به حالت اول باز می گردد.

یک مشکل: ممکن است از رابطه، S را منفی به دست آوریم.مثلا در مورد سیارات خارجی و یا جسمی که خلاف جهت زمین می چرخد. چه کنیم؟ مشکلی نیست. S چیزی است که ما تعریف کرده ایم. پس می توانیم قدر مطلق S را در نظر بگیریم! در مقدار آن هیچ تاثیری ندارد.

پس به طور کلی:

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_{\text{جسم}}} \pm \frac{1}{T_{\text{ناظر}}}\right|$$

که علامت مثبت برای دو چرخش خلاف جهت و منفی برای دو چرخش هم جهت انتخاب می شود.

قبل از هر کاری لازم است بدانیم S چیست؟ یک بیان این طور است: S مدت زمانی است که سیاره از دید ناظر(زمینی) به مکان اولیه اش در زمینه ستارگان برگردد. مثلا امروز سیاره ای را کنار ستاره قلب اسد می بینیم.بعد از چند روز دوباره سیاره کنار همین ستاره قرار می گیرد. به این مدت زمان دوره تناوب هلالی می گویند.

بیان دیگری برای S می تواند این طور باشد: مدت زمانی که طول می کشد دو سیاره به وضعیتی مشابه قبل باز گردند. مثلا الان یک سیاره در حالت مقابله با زمین قرار دارد.پس از مدت S دوباره سیاره به حالت مقابله می رسد.

مثال:

دوره تناوب مداری سیاره مریخ تقریباً ۱.۸۸ سال است.

الف: دوره تناوب هلالی مریخ چقدر است؟

ب: مریخ در هر دور گردش زمین چقدر عقب می افتد؟

پ: فاصله دو مقابله و دو مقابله مریخ چقدر است؟

ت: فاصله دو مقابله و دو مقارنه متوالی مریخ چقدر است؟

حل:

الف: می دانیم مریخ (و بقیه سیارات) پاد ساعتگرد دور خورشید می گردد.پس با استفاده از رابطه به دست می آوریم:

$$S = 2.135 \quad \text{سال}$$

این عدد یعنی چه؟

فرض کنید از حالت مقابله شروع کنیم. زمین از مریخ سریعتر حرکت می کند. وقتی زمین یک دور می زند، مریخ در مکان قبلی قرار ندارد.پس زمین همچنان دنبال مریخ می رود. زمین یک دور دیگر نیز می زند.ولی هنوز به مریخ نرسیده.کمی دیگر باید حرکت کند تا دوباره به حالت مقابله برسد. ادامه را ببینید.

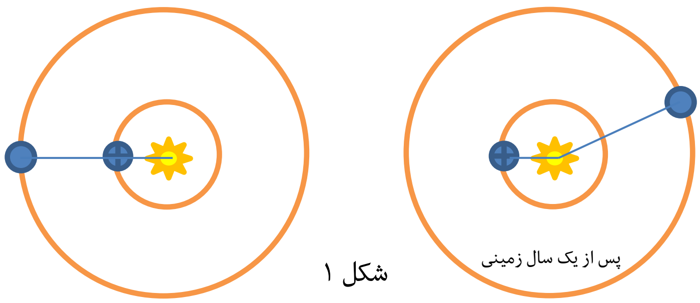
ب: سوال زاویه ای را می خواهد که مریخ باید طی کند تا یک دور کامل بزند. به جای آن ما زاویه مشخص شده در شکل ۱ را محاسبه می کنیم.یک تناسب ساده کافی است:

$$\frac{360}{T_{\text{مریخ}}} = \frac{\theta}{T_{\text{زمین}}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 191°30'$$

چی شد؟ گفتیم مریخ در یک دوره تناوب زمین چه زاویه ای را طی می کند.

و زاویه مورد نظر سوال: $360 - 191°30 = 168°30'$

این یعنی زمین پس از یک دور، حدود ۱۹۰ درجه با مریخ اختلاف زاویه پیدا می کند. به همین ترتیب می توان حساب کرد که پس از دو بار گردش زمین هنوز زمین ۲۳ درجه عقب تر از مریخ است. و تقریباً پس از ۰.۱۳۵ سال (۵۰ روز) مقابله رخ می دهد.



شکل ۱

پ: همان طور که گفتیم دوره تناوب هلالی، فاصله زمانی بین دو وضعیت یکسان است.پس فاصله دو مقابله یا دو مقارنه متوالی همین ۲.۱۳۵ سال است.

ت: باز هم از تناسب استفاده می کنیم.اما این بار به شکلی دیگر:

$$\frac{360}{S} = \frac{180}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{S}{2}$$

در اینجا فرض کردیم مثلا زمین ثابت باشد. پس از دید زمین، مریخ با دوره تناوب S دور خورشید می گردد.فاصله دو مقابله و مقارنه متوالی ۱۸۰ درجه است. پس زمان بین آن ها نیز نصف دوره تناوب هلالی است.

مثال بالا وضعیت بسیار ساده ای از حرکت نسبی بود. حالت های پیچیده تر با درک درست ما از مفهوم حرکت نسبی به راحتی حل می شوند. در ادامه این وضعیت ها را نیز خواهیم دید.

دوران انتقالی و وضعی زمین:

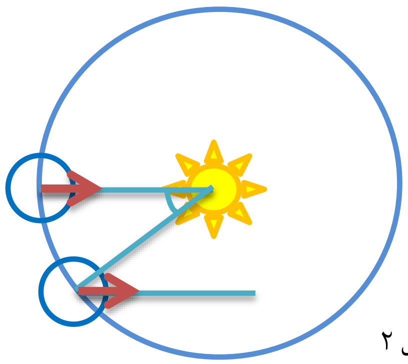
بحث مهم دیگر، رابطه دوران های زمین است. می دانیم زمین هر ۲۳ ساعت و ۵٦ دقیقه دور خود می چرخد. خورشید هر ۲٤ ساعت دور زمین می چرخد (به وضعیت قبلی نسب به زمینه ستاره ها بر می گردد) چرا؟

کافیست رابطه دوره تناوب هلالی را به کار ببریم:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{وضعی}}} - \frac{1}{T_{\text{انتقالی}}}$$

می دانیم زمین هر ۳٦٥.۲٥ روز[1] (۲٤ ساعته) دور خورشید می چرخد. S برابر ۱روز است (مدت زمان حرکت خورشید نسبت به زمین). با محاسبه ساده می بینیم که دوره تناوب حرکت وضعی زمین ۰.۹۹۷۲ روز یا ۲۳ ساعت و ٥٦ دقیقه و ٤ ثانیه به دست می آید.

اما چرا؟! چرا این دو مقدار تفاوت دارند؟ از شکل می توان فهمید:



شکل ۲

در حالت اول، خورشید از دید ناظر زمینی در حالت عبور قرار دارد.وقتی زمین یک دور، دور خودش می چرخد، در مدارش حول خورشید نیز جابجا می شود. به همین دلیل، خورشید را در حال عبور نمی بینند.باید چند دقیقه صبر کند تا به وضعیت قبلی برسد.

[1] از این به بعد هر جا از کلمه **روز** استفاده کردیم، منظور روز متوسط خورشیدی است. به عبارت بهتر، روز کلمه ای اختصاری برای ۲٤ ساعت است.

زاویه مشخص شده در شکل، با تناسب به دست می آید.مقدار آن حدوداً ۰.۹۸ درجه به دست می آید.(تعجب نکنید. مقیاس شکل بسیار بسیار غیر عادی است!!)

مثال:

در حالت های زیر مدت روز خورشیدی را حساب کنید.مقدار عددی دوره تناوب های زمین تغییر نمی کند.

الف: زمین خلاف جهت فعلی دور خودش بچرخد.(جهت دوران وضعی عوض شود)

ب: زمین خلاف جهت فعلی دور خورشید بچرخد.(جهت دوران انتقالی عوض شود)

پ: هر دو دوران زمین برعکس شوند.

حل:

یک سال برابر ۳٦۵.۲۵ روز و یک دوره تناوب وضعی زمین برابر ۰.۹۹۷۲ روز است. (همان طور که قبلا گفته شد، روز فقط به معنی ٢٤ ساعت است.)

الف: رابطه را برای حرکت خلاف جهت می نویسیم:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_{\text{وضعی}}}+\frac{1}{T_{\text{انتقالی}}} \quad \Rightarrow \quad S=23^h52^m$$

خورشید حدود ٤ دقیقه زود تر به نصف النهار می رسد. یعنی اول خورشید به حالت عبور می رسد، پس از ٤ دقیقه، دوران زمین حول خودش کامل می شود!! این مسئله با رسم شکل کاملا مشهود است.

ب: این بار هم با استفاده از همان رابطه به نتیجه مشابه قسمت الف می رسیم.(این از خواص قدر مطلق است که در رابطه دوره تناوب ها استفاده کردیم.)

پ: این حالت مشابه واقعیت حال حاضر است. یعنی خورشید هر ٢٤ ساعت یک بار به حالت عبور می رسد.

مثال:

می دانیم ماه هر ۲۷.۳۲ روز یک بار، به وضعیت قبلی اش نسبت به زمینه آسمان باز می گردد. این را می توانید خودتان مشاهده کنید. یک شب که ماه قابل رویت است، مکان آن نسبت به ستاره های اطراف را یادداشت کنید (بهتر است این کار را روز های اول ماه انجام ندهید.چون پس از حدود ۲۷ روز، ماه به خورشید نزدیک شده و به سختی دیده می شود.) پس از حدود ۲۷ روز و ۸ ساعت خواهید دید ماه دوباره به همین مکان بازگشته است.

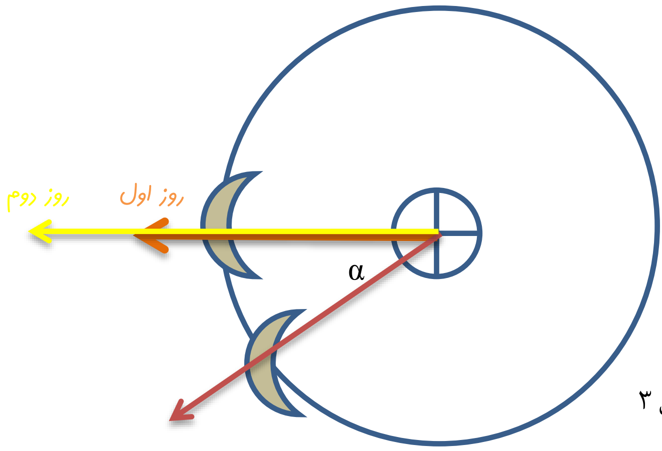
حال محاسبه کنید ماه هر چند روز یک بار به وضعیت مشابهی نسبت به خورشید می رسد؟

حل:

کافیست دوباره همان رابطه را به کار ببریم. اگر کمی تامل کنیم می فهمیم که جهت چرخش ماه دور زمین نیز پاد ساعتگرد است.یعنی هم جهت با دوران انتقالی زمین. یکی از T ها برابر دوره تناوب انتقالی زمین و دیگری دوره تناوب انتقالی ماه است.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{ماه}}} - \frac{1}{T_{\text{زمین}}} \qquad \Rightarrow \qquad S = 29.53$$

این دوره تناوب هلالی ماه است. یک ماه قمری به طور متوسط ۲۹.۵ روز است. به همین دلیل می بینیم که بعضی ماه های قمری ۲۹ روزی و بعضی ۳۰ روزی هستند.(تعداد ۳۰ روزی ها بیشتر است.)



شکل ۳

بیایید ببینیم ماه در هر روز چقدر در زمینه آسمان جابجا می شود. یک راه این است که ابتدا مدت زمان هم خط شدن زمین و ماه را پیدا کنیم.یعنی فاصله زمانی بین دو عبور متوالی ماه از نصف النهار یک ناظر زمینی.دوباره با استفاده از همان رابطه داریم:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{وضعی زمین}}} - \frac{1}{T_{\text{انتقالی ماه}}} \qquad \Rightarrow \qquad S \cong 24^h 50^m$$

این عدد را با تقریب نوشتیم.چون بیضی بودن مدار ماه در این مسئله خیلی تاثیر دارد و ما از آن چشم پوشی کرده ایم.

این یعنی پس از یک دور چرخش زمین دور خود، ماه مقداری عقب افتاده است و زمین باید حدود ۵۰ دقیقه دیگر نیز بچرخد تا ماه به مکان قبلی برسد.حال با یک تناسب ساده، مقدار عقب ماندن ماه را حساب می کنیم:

$$\frac{S - T_{\text{زمین}}}{T_{\text{زمین}}} = \frac{\theta}{360} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \cong 13^{\circ}$$

این عدد را خیلی خیلی با تقریب بیان می کنیم. چون در حقیقت، استفاده از تناسب در اینجا بی اشکال نیست.

راه بهتری برای این قسمت وجود دارد.این که دست به کار شویم و شکل ساده ای رسم کنیم.

با دو بار استفاده از تناسب می توانیم هم زاویه آلفا و هم زمان t را به دست آوریم. این بار هم حواسمان هست که اعداد به دست آمده همه تقریب هستند. جواب به دست آمده به جواب قبلی نزدیک خواهد بود.

این بحث را فعلا همین جا به اتمام می رسانیم. اما در مباحث آینده کاربرد های بیشتری از آن را خواهیم دید.در آخر نیز چند مسئله برای تمرین می آوریم.

حرکت نسبی: بحث مکان ها :

پس از بررسی بحث زمانی در حرکت سیارات وقت آن رسیده که به بررسی مکان سیارات بپردازیم. مشکلی که در بحث زمان داشتیم اینجا نیز وجود دارد. ما روی زمین هستیم. پس هر چیزی که از سیارات اندازه می گیریم نسبت به زمین است. یعنی ما فقط قادریم مکان نسبی سیارات را اندازه بگیریم (اندازه گیری های خارج زمین را بررسی نمی کنیم.)

سیارات را به دو گروه تقسیم کردیم. سیارات داخلی و سیارات خارجی. حرکت سیارات داخلی پیچیدگی زیادی ندارد. می توان به راحتی با راه حل های هندسی، مکان آن ها را مطالعه کرد. در عوض سیارات خارجی حرکت های پیچیده ای دارند. راه های هندسی در مورد حرکات این سیارات ممکن است کمی طولانی باشد. در مورد آن ها از تحلیل های برداری استفاده خواهیم کرد.

سیارات داخلی:

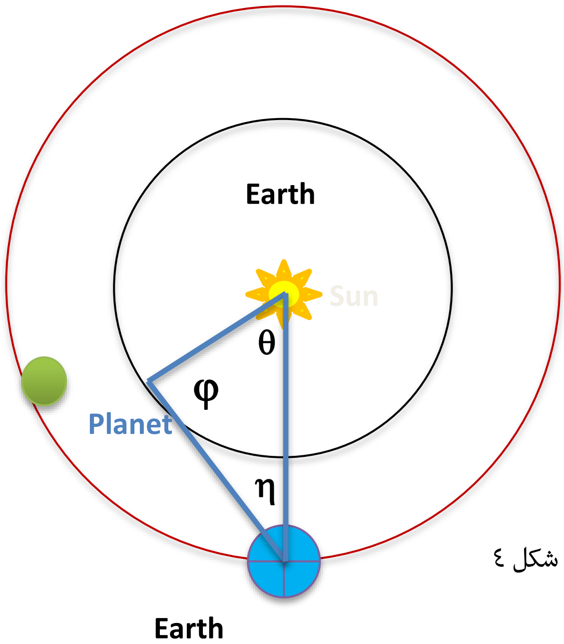
مدار سیارات داخلی کاملا درون مدار زمین قرار دارد.به همین دلیل وضعیت های آنها و حرکت هایشان نسبت به زمین ساده است. بنابراین راه های هندسی در این مورد مفید تر هستند.

مثلثی که قبلا تشکیل دادیم به یاد بیاورید. راس های این مثلث خورشید، زمین و سیاره مورد نظر بود. از این به بعد زاویه های این مثلث را مثل شکل ٤ نام گذاری می کنیم.θ زاویه خورشید مرکزی سیاره است. η همان کشیدگی سیاره است و φ زاویه فاز نام دارد (دلیل نام گذاری را بعداً خواهیم فهمید)

برای شروع کار، قانون سینوس ها برای مثلث مسطحه را می نویسیم ببینیم چه نتیجه ای می دهد:

$$\frac{\sin\theta}{PE} = \frac{\sin\varphi}{SE} = \frac{\sin\eta}{SP}$$

فاصله ها را در منظومه شمسی با واحد نجومی می سنجند. یک واحد نجومی به اندازه فاصله زمین تا خورشید یعنی حدوداً ۱۵۰ میلیون کیلومتر است. ما از این واحد برای محاسبات استفاده می کنیم.پس SE برابر ۱ واحد نجومی است.



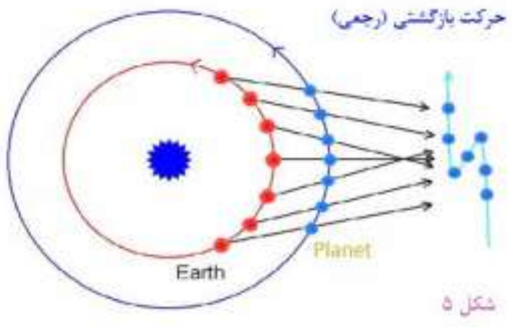
شکل ٤

ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که زاویه φ قائمه باشد.در این حالت ضلع PE بر مدار سیاره مماس است. اگر کمی بیندیشیم می فهمیم در این حالت، زاویه η حداکثر مقدار ممکن را دارد.

بیشترین کشیدگی یعنی چه؟ از دید ما که روی زمین هستیم، سیارات داخلی (زهره و عطارد) دائماً در اطراف خورشید جابجا می شوند. اما فاصله زاویه ای آنها از یک مقدار خاصی بیشتر نمی شود.این مقدار خاص همان بیشترین کشیدگی است. یعنی زمانی که زاویه فاز ۹۰ درجه باشد. برای عطارد این زاویه حدوداً ۲۸ درجه و برای زهره ٤٨ درجه است.

رابطه سینوس ها شکل خیلی ساده ای پیدا می کند:

$\sin\eta_{max} = SP$ برحسب واحد نجومی



چقدر جالب! با اندازه گیری بیشترین کشیدگی سیاره، می توان فاصله آن از خورشید را محاسبه کرد! همچنین اگر در همان مثلث کسینوس زاویه η را بنویسیم، فاصله زمین تا سیاره به دست می آید.

زاویه θ مستقیماً به زمان ارتباط دارد. زمان از طریق این زاویه وارد بحث مکان می شود.

$$\theta = \omega t = \frac{360}{T_P} t$$

t اختلاف زمانی بین زمان مشاهده و زمان مقارنه داخلی است.

در ادامه بحث ها دوباره به روابط بالا احتیاج پیدا خواهیم کرد.این روابط در عین سادگی، همه چیزی است که ما لازم داریم.

سیارات خارجی:

وقت آن رسیده بحث مفصل تری درباره سیارات خارجی داشته باشیم.حرکت این سیارات را می توان دو نوع حرکت دانست.حرکت مستقیم و حرکت بازگشتی (رجعی).البته این حرکت ها از دید ما است که روی زمین هستیم.

هنگام حرکت مستقیم سیاره در طول چند روز از غرب به شرق حرکت می کند.بیشتر حرکت سیارات را این نوع حرکت تشکیل می دهد. هنگام حرکت بازگشتی، سیاره به ظاهر دور می زند، مدتی از شرق به غرب حرکت می کند، سپس دوباره می چرخد و به راه خود ادامه می دهد.

این نوع حرکت از قدیم الایام ذهن منجمان را مشغول کرده بود. بطلمیوس توانست با فلک تدویر خود، این پدیده را توجیه کند.اما این فلک پیچیدگی زیادی دارد. نظریه خورشید مرکزی، این مسئله را بسیار راحت تر می کند.

همان طور که شکل ۵ نشان می دهد، هنگامی که سیاره به مقابله اش نزدیک می شود، حرکت بازگشتی انجام می دهد.دلیل این نوع حرکت، سریعتر چرخیدن زمین است.

می خواهیم حساب کنیم این اتفاق چه زمانی رخ می دهد و چه مدت طول می کشد.اما قبل از آن یک تعریف مهم:

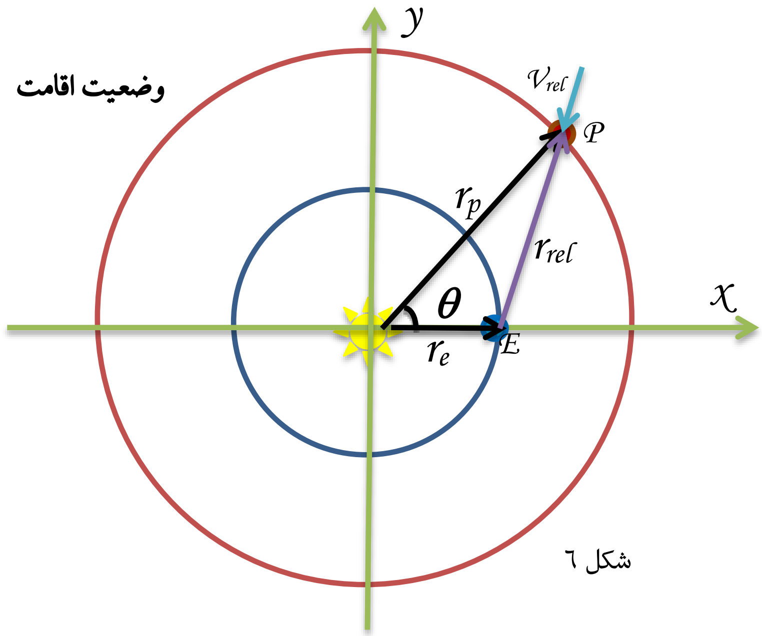
نقطه اقامت: سیاره در حرکت خود در آسمان ناظر، برای مدتی متوقف می شود و حرکتش معکوس می شود.(مستقیم به رجعی یا برعکس) این نقطه را نقطه اقامت می نامند.

سیاره در نقطه اقامت ساکن است. یعنی سرعتش صفر است. کدام سرعت؟ سرعت نسبی! البته سرعت نسبی مماس بر راستای دید. چون در هنگام مقابله، سیاره در ظاهر حرکتی ندارد. در حالی که سرعت شعاعی دارد. (به ما نزدیک یا دور می شود) در ادامه مباحث درباره سرعت مماسی و شعاعی بیشتر صحبت می کنیم.

حال برویم سراغ محاسبات:

دستگاه مختصات دو بعدی xy را روی خورشید قرار می دهیم. دستگاه را طوری قرار می دهیم که جهت محور x آن در لحظه اقامت، روی یکی از سیارات (مثلا زمین) باشد. این کار صرفاً به خاطر ساده سازی انجام می شود.

حال می توانیم بردار های مربوطه را بنویسیم. بردار های مکان دو سیاره را می نویسیم. سپس با مشتق گیری از هر کدام بردار های سرعت را به دست می آوریم.



شکل ٦

$$\vec{r_e} = r_e\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_e} = v_e\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r_p} = r_p \cos\theta\,\hat{\imath} + r_p \sin\theta\,\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_p} = -v_p \sin\theta\ \hat{\imath} + v_p \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

ما در آخر به دو بردار سرعت و مکان نسبی احتیاج داریم. کافیست بردار ها را از هم کم کنیم (تبدیلات گالیله ای را به خاطر آورید)

$$\overrightarrow{r_{rel}} = \overrightarrow{r_p} - \overrightarrow{r_e} = \left(r_p \cos\theta - r_e\right)\hat{\imath} + \ r_p \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_{rel}} = \overrightarrow{v_p} - \overrightarrow{v_e} = -v_p \sin\theta\ \ \hat{\imath} + \ \left(v_p\, cos\ \theta - \ v_e\right)\hat{\jmath}$$

و دست آخر باید شرطی روی این دو بردار قرار دهیم که در یک راستا باشند تا سرعت مماسی صفر شود. دو نوع ضرب برداری داریم.ضرب داخلی دو بردار هم راستا (و هم جهت) برابر ضرب اندازه هر بردار در دیگری است. اما ضرب خارجی این دو بردار، همواره صفر است! پس به نظر می رسد ضرب خارجی بهتر عمل کند.

$$\overrightarrow{r_{rel}} \times \overrightarrow{v_{rel}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \left(r_p \cos\theta - r_e\right) & r_p \sin\theta & 0 \\ -v_p \sin\theta & \left(v_p\, cos\ \theta - \ v_e\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_{rel}} \times \overrightarrow{v_{rel}} = \left(\left(r_p \cos\theta - r_e\right)\left(v_p\, cos\ \theta - \ v_e\right) + v_p r_p \sin^2\theta\right)\hat{k} = 0$$

با کمی مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{r_p v_p + r_e v_e}{r_e v_p + r_p v_e}$$

می توانیم این رابطه را ساده تر کنیم. اما باید کمی هم از نیوتون کمک بخواهیم. طبق روابط مکانیک نیوتونی، سرعت سیارات در مدار های دایره ای به صورت زیر با شعاع مداریشان رابطه دارد.

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

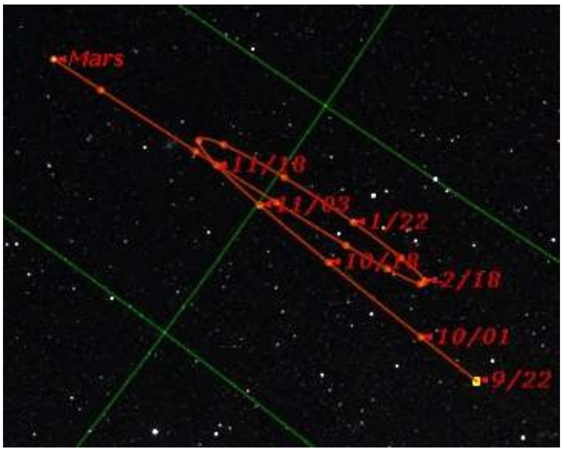
پس می توانیم رابطه ای را که به دست آوردیم، تغییر دهیم و به شکل ساده تر زیر بنویسیم:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r_p r_e}\left(\sqrt{r_p} + \sqrt{r_e}\right)}{r_p^{3/2} + r_e^{3/2}}$$

اگر از واحد نجومی برای فواصل منظومه شمسی استفاده کنیم، رابطه شکل ساده تری پیدا می کند:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r_p}\left(\sqrt{r_p} + 1\right)}{\sqrt{r_p^3 + 1}}$$

پس هنگامی که اختلاف زاویه خورشید مرکزی (θ) دو سیاره به اندازه مقدار بالا باشد، سیاره در وضعیت اقامت قرار دارد. بنابراین، قبل از مقابله نیز وقتی اختلاف زاویه همین مقدار باشد، اقامت دیگری اتفاق می افتد. حال می توانیم بفهمیم چرا سیارات خارجی حرکتی مانند شکل روبرو دارند.



مدتی قبل از مقابله، مریخ می ایستد؛ چند روزی حرکت معکوس انجام می دهد؛ مقابله را پشت سر می گذارد، دوباره می ایستد و باز حرکت مستقیم خود را از سر می گیرد. ما در این نوشته از میل مداری سیارات صرف نظر کرده ایم. شکل نامتقارن بالا به علت میل مداری مریخ است.

حال بیاییم به جزئیات این حرکت بپردازیم.

مدت حرکت معکوس:

مقدار θ را از رابطه بالا داریم. کل زمانی که سیاره در حرکت معکوس قرار می گیرد، زمانی است که زاویه 2θ توسط شعاع های حامل طی شود. با یک تناسب ساده، این مدت زمان به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\Delta t = \frac{S}{360} \times 2\theta$$

که تتا به درجه نوشته می شود.

شاید این سوال برای شما نیز پیش آمده باشد که آیا حرکت بازگشتی باعث طولانی تر شدن مدت دوره تناوب هلالی یک سیاره می شود یا خیر؟ نکته اینجاست که دوره تناوب هلالی کاملاً مستقل از حرکت سیاره است. کافیست به مطالب قبلی بازگردید و ببینید در حین محاسبه S به نوع حرکت سیاره از دید ناظر کاری نداشتیم. پس می توان گفت حرکت بازگشتی جزوی از حرکت نسبی سیاره است و پدیده جدایی نیست.

بقیه جزئیات مربوط به این حرکت را در قالب مثال می آوریم.

مثال:

دوره تناوب هلالی سیاره مریخ ۲.۱۳۵ سال است.

الف: در هر بار که مریخ زمینه آسمان را دور می زند چند بار در وضعیت اقامت قرار می گیرد؟

ب: مریخ چه کسری از زمان طی مسیر را معکوس حرکت می کند؟

حل:

الف: می دانیم نقاط اقامت فقط در اطراف نقطه مقابله قابل مشاهده هستند. به ازای هر مقابله دو نقطه اقامت داریم. در هر سال هلالی یک سیاره، یک مقابله و در نتیجه دو نقطه اقامت داریم.

ب: ابتدا لازم است زاویه تتا بین نقطه مقابله و نقطه اقامت را حساب کنیم.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r_p}\left(\sqrt{r_p}+1\right)}{\sqrt{r_p^3}+1} \xrightarrow{r_p=1.52\ au} \theta = 16°40'$$

مدت حرکت معکوس را به دست می آوریم:

$$\Delta t = \frac{S}{360}\times 2\theta \xrightarrow{S=2.135\ yr} \Delta t \cong 0.2\ yr \equiv 73.0\ \ day$$

پس مریخ حدود ۹ درصد (۰.۲ / ۲.۱٦) از سال هلالی خود را به صورت معکوس حرکت می کند.

در مثال بعدی بحث مهمی مطرح می شود. بررسی شکل ظاهری حرکت بازگشتی سیارات:

مثال:

با توجه به مقادیر عددی که در مثال قبل به دست آوردید:

الف: محاسبه کنید در لحظه اقامت، کشیدگی مریخ چقدر است؟

ب: مسیری که مریخ در آسمان به صورت معکوس حرکت می کند به طور میانگین چند درجه است؟

حل:

الف: برای حل این قسمت باید رابطه ای بین زاویه خورشید مرکزی (θ) و کشیدگی (η) سیاره پیدا کنیم. در مثلث SPE رابطه سینوس ها را می نویسیم:

$$\frac{\sin\varphi}{r_e} = \frac{\sin\eta}{r_p}$$

می دانیم: φ=180-(η+θ) در نتیجه:

$$\frac{\sin(\eta+\theta)}{\sin\eta}=\frac{r_e}{r_p} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\eta=\frac{r_p\sin\theta}{r_e-r_p\cos\theta}$$

با جاگذاری مقدار θ از مسئله قبل خواهیم داشت

$$\eta=-43°40' \equiv \;\; 136°20' \quad , \quad 316°20'$$

از بین دو جواب به دست آمده، $136°20'$ درست است. چون نقطه اقامت در اطراف نقطه مقابله است و از خورشید دور است.

ب: برای حل این قسمت (البته با این روش) باید حرکت خورشید را نیز در نظر گرفت. می دانیم از یک اقامت تا اقامت بعدی حدود ۷۳ روز اختلاف زمانی وجود دارد. خورشید در این مدت زاویه $\gamma=\frac{73}{365.25}\times 360=72°$ را طی کرده است. در نقطه اقامت بعدی، کشیدگی مریخ باز همین مقدار $136°20'$ است. پس:

$$2\eta+\gamma+\Delta=360 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta=15°20'$$

یعنی فاصله زاویه ای بین دو نقطه اقامت حدوداً ۱۵ درجه است.

تا اینجا سعی کردیم خود پدیده حرکت بازگشتی و نقاط اقامت را بررسی کنیم. در مثال زیر با کاربرد نقاط اقامت آشنا می شویم.

مثال:

باز هم سیاره مریخ را این بار بدون توجه به مقادیر به دست آمده در مثال های قبل در نظر بگیرید. از روی مشاهدات رصدی می دانیم وقتی مریخ در اقامت به سر می برد، کشیدگی اش ۱۳۵ درجه است. همچنین فاصله زمانی بین دو اقامت آن حدود ۷۰ روز است. دوره تناوب هلالی مریخ را نیز برابر ۷۸۰ روز به دست آورده ایم.

الف: شعاع مداری مریخ را حساب کنید.

ب: فاصله مریخ تا زمین در لحظه اقامت چقدر است؟

حل:

هدف این قسمت این است که یاد بگیریم چگونه می توان تمام محاسبات را به صورت معکوس انجام داد. این حرکت رجعی ما را با زحمات منجمان قدیمی بیشتر آشنا می سازد. توجه کنید که تمام داده های مثال قابل اندازه گیری اند.

الف: ابتدا از رابطه زیر θ را حساب می کنیم:

$$\Delta t = \frac{S}{360} \times 2\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 16°10'$$

سپس با داشتن η می توان شعاع مداری را حساب کرد:

$$\tan \eta = \frac{r_p \sin \theta}{r_e - r_p \cos \theta} \qquad \Rightarrow \qquad r_p = 1.46$$

البته این مقدار حدود ۰.٦ واحد نجومی اختلاف دارد. ولی با اطلاعات رصدی ما این خطا قابل قبول است.

ب: با داشتن θ و η می توان φ را محاسبه کرد و سپس از رابطه سینوس ها:

$$\frac{\sin \theta}{d} = \frac{\sin \varphi}{r_e} \qquad \xRightarrow{\varphi = 28°50'} \qquad d = 0.58 \ \text{au}$$

می توانید مقادیر دقیق تر را در نرم افزار استاری نایت ببینید.

در مورد نقاط اقامت مثال گوناگونی می توان مطرح کرد. برای تمرین بیشتر در این مورد می توانید به مسائل آخر درسنامه مراجعه کنید.

طول سماوی سیارات و آهنگ تغییر آن:

بحث آهنگ تغییر، بحثی کلی تر درباره مکان نسبی سیارات است. محاسباتی که در اینجا انجام خواهیم داد برای تمام سیارات و همچنین ماه صدق می کند.

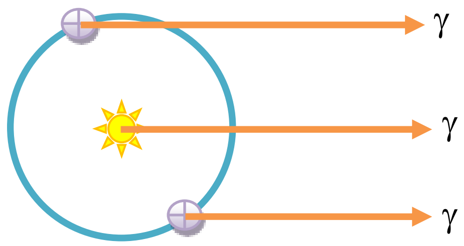
فرض های اولیه را یاد آوری می کنیم:

۱-مدار همه سیارات در صفحه دایره البروج قرار دارد. «از میل مداری صرف نظر می کنیم»

۲-مدار سیارات دایره ای است. «از خروج از مرکز مدار سیارات صرف نظر می کنیم»

برای شروع کار لازم است تعریفی از طول سماوی داشته باشیم.

طول سماوی یعنی فاصله زاویه ای یک سیاره (که فرض کردیم روی دایره البروج است) تا نقطه اعتدال بهاری. می دانیم نقطه اعتدال بهاری، جهتی ثابت در آسمان است[۲]. به عبارت دیگر، اختلاف منظر ناشی از حرکت انتقالی زمین در آن تاثیر ندارد.به شکل زیر دقت کنید:



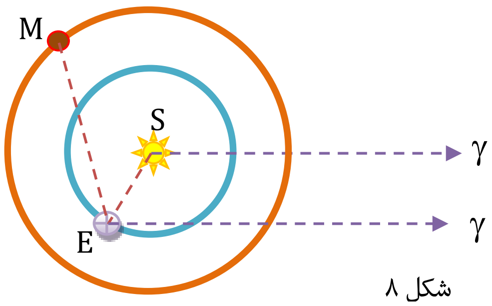
شکل ۷

تفاوتی ندارد از کجا نگاه کنیم. جهت نقطه اعتدال بهاری، جهتی ثابت در آسمان است.در ادامه از این مطلب استفاده خواهیم کرد.

ابتدا مثالی می آوریم تا مشخص شود دنبال چه چیزی هستیم:

مثال:

در شکل زیر، طول سماوی خورشید و سیاره مریخ را نشان دهید:



شکل ۸

می دانیم طول سماوی به صورت پاد ساعتگرد اندازه گیری می شود. (اگر شک کردید می توانید زمین را در مدارش حرکت دهید.با حرکت زمین، طول سماوی خورشید افزایش می یابد.)

بنابراین، طول سماوی خورشید (از دید ناظر زمینی) زاویه $SE\gamma$ است. به همین ترتیب، طول سماوی مریخ،زاویه $ME\gamma$ می باشد.

[۲] آثار حرکت تقدیمی اصلاً وارد بحث ما نمی شوند.

با مثال بالا مسئله تقریبا حل شد! می بینیم که طول سماوی سیاره به طول سماوی خورشید مربوط است. قبلاً هم همین انتظار را داشتیم.در مثال بالا، مریخ از نظر ناظر زمینی در غرب خوشید قرار دارد.بنابراین طول سماوی آن برابر است با:

$$MEγ = SEγ + MES \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \lambda_\odot + \eta_p$$

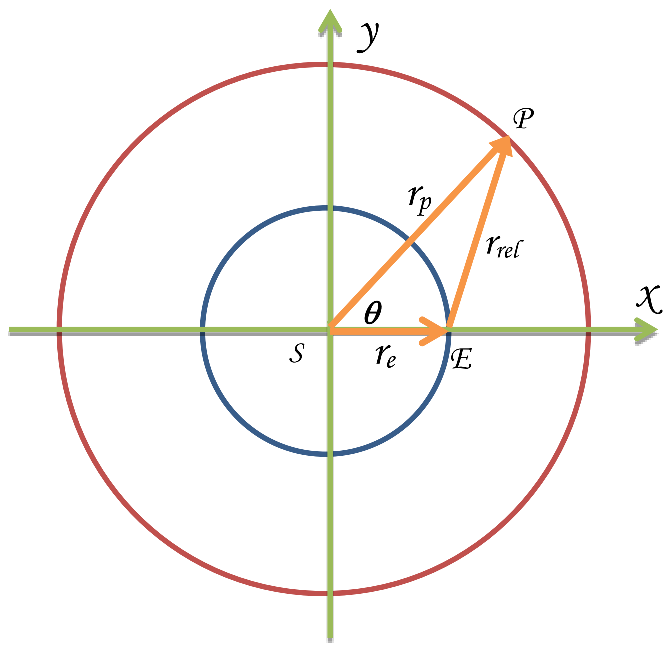
به عبارت دیگر، اگر کشیدگی سیاره غربی باشد، طول سماوی آن مجموع طول سماوی خورشید و کشیدگی سیاره است.

در حالت کلی:

$$\lambda_p = \lambda_\odot \pm \eta_p$$

که علامت مثبت برای کشیدگی غربی و منفی برای کشیدگی شرقی است.

آهنگ تغییر طول سماوی به طور ساده تر همان سرعت مماسی یک سیاره نسبت به ناظر زمینی است. برای محاسبه آن ازبردار ها کمک می گیریم. بردار های مکان زمین و سیاره و همچنین سرعت آنها را برای حالتی که در شکل زیر نشان داده، می نویسیم.



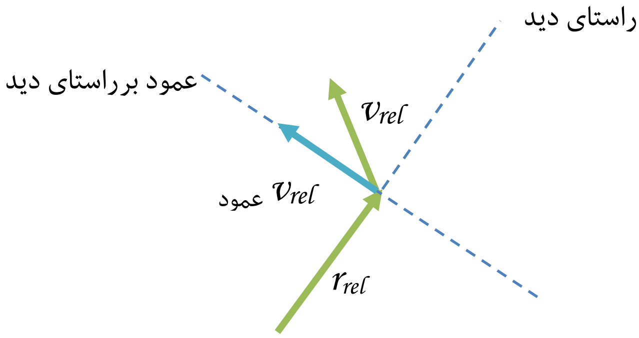
$$\vec{r_e} = r_e\,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_e} = v_e\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r_p} = r_p \cos\theta\,\hat{\imath} + r_p \sin\theta\,\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_p} = -v_p \sin\theta\;\hat{\imath} + v_p \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_{rel}} = \overrightarrow{r_p} - \overrightarrow{r_e} = \left(r_p \cos\theta - r_e\right)\hat{\imath} + \ r_p \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_{rel}} = \overrightarrow{v_p} - \overrightarrow{v_e} = -v_p \sin\theta\ \hat{\imath} + \ \left(v_p\, cos\ \theta - v_e\right)\hat{\jmath}$$

حالا لازم است مولفه مماسی سرعت را به دست آوریم. کافیست مولفه شعاعی را از کل سرعت نسبی کم کنیم. با توجه به شکل زیر:



پس:

$$\overrightarrow{v_\perp} = \overrightarrow{v_{rel}} - \left(\overrightarrow{v_{rel}}.\overrightarrow{r_{rel}}\right)\frac{\overrightarrow{r_{rel}}}{r_{rel}}$$

این رابطه به ظاهر خیلی طولانی و پیچیده است.اما اگر محاسبات لازم را انجام دهیم نتیجه بهتری خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{v_{rel}}.\overrightarrow{r_{rel}} = \sin\theta\left(r_e v_p - r_p v_e\right)$$

$$r_{rel} = d = \sqrt{{r_e}^2 + {r_p}^2 - 2r_e r_p \cos\theta}$$

بهتر است این عبارت ها را در رابطه بالا جاگذاری نکنیم و به صورت جداگانه آنها را حساب کنیم!

فقط یک کار دیگرلازم است تا آهنگ تغییر طول سماوی سیاره را به دست آوریم.سرعتی که در بالا به دست آوردیم، سرعت خطی (با واحد متر بر ثانیه) است.در حالی که ما سرعت زاویه ای (با واحد رادیان بر ثانیه) را می خواهیم.کافیست اندازه سرعت خطی را بر فاصله سیاره تا ما تقسیم کنیم.یعنی:

$$\dot{\lambda}_p = \frac{v_\perp}{r_{rel}} = \frac{v_\perp}{d}$$

ظاهراً مسئله خیلی طولانی شد. چاره ای نیست. البته حالتی که ما بررسی کردیم خیلی کلی بوده و برای همه حالت های قرار گیری سیاره به کار می رود. زاویهθ نیز به سادگی با روابطی که قبلاً داشتیم به دست می آید. در سوالات المپیاد معمولاً

حالت های خاصی مثل مقابله یا تربیع بررسی می شوند که به راحتی حتی با تحلیل های هندسی به دست می آیند. به عنوان مثالی از سوالات المپیاد، سوال مرحله دوم نهمین دوره المپیاد کشوری را در قالب مثال بررسی می کنیم.

مثال:

یک جرم کوئیپری در مداری دایره ای و هم صفحه با مدار زمین در فاصله ۴۰ واحد نجومی حرکت می کند.

الف: در حالت مقابله سرعت مماسی ناشی از حرکت خود جسم (حرکت خاصه) را بر حسب ثانیه قوس در ساعت به دست آورید.

ب: در حالت مقابله سرعت مماسی ناشی از حرکت زمین (اختلاف منظر علّی) را بر حسب ثانیه قوس در ساعت به دست آورید.

پ: در حالت تربیع، سرعت مماسی این جرم کوئیپری چقدر است؟

حل:

در این سوال نیازی به تحلیل برداری نداریم.

الف: در این قسمت باید زمین را ثابت در نظر بگیریم و فقط اثر حرکت سیاره را در نظر بگیریم. سرعت سیاره بر راستای دید ما عمود است. پس مسئله خیلی خیلی ساده است!

$$\dot{\lambda}_K = \frac{v_\perp}{d} = \frac{v_K}{d}$$

از نیوتون کمک می گیریم تا سرعت مداری جرم کوئیپری را حساب کنیم:

$$v_K = \sqrt{\frac{GM}{r_K}} = 4.7 \quad km/s$$

فاصله d هم برابر ۳۹ واحد نجومی است.پس:

$$\dot{\lambda}_K = 8.04 \times 10^{-10} \qquad rad/s$$

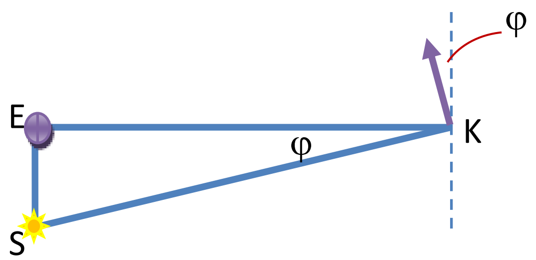
برای تبدیل واحد اینگونه عمل می کنیم:

$$\dot{\lambda}_K = 8.04 \times 10^{-10} \times \frac{206265''}{1\,rad} \times \frac{3600\,s}{1\ \,hr} = 0.594 \quad arcsec/hr$$

ب: باز هم مثل بالا عمل می کنیم.با این تفاوت که اینبار باید تاثیر حرکت زمین را در نظر بگیریم. این معادل این است که جرم کوئیپری با سرعتی معادل سرعت مداری زمین در خلاف جهت فعلی حرکت کند. پس:

$$\dot{\lambda}_K = \frac{v_e}{d} \xrightarrow{v_e=30\ km/s} \dot{\lambda}_K = 5.13 \times 10^{-9} \times \frac{206265''}{1\ rad} \times \frac{3600\ s}{1\ hr} = 3.78 \quad arcsec/hr$$

پ: این حالت در ظاهر کمی پیچیده است.اما ببینیم چطور میشود آن را ساده کرد. در حالت تربیع، سرعت زمین در راستای خط دید زمین-جرم است.پس فقط باعث سرعت شعاعی می شود و تاثیری در سرعت مماسی ندارد. اما سرعت سیاره را می توان مانند شکل زیر تجزیه کرد:



$$\dot{\lambda}_K = \frac{v_\perp}{d} = \frac{v_K}{d} = \frac{4700 \quad \mathrm{m/s}}{\sqrt{40^2-1} \quad au} = 7.83 \times 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_K = 0.58 \quad arcsec/hr$$

به همین راحتی محاسبه شد.این سوال مرحله ۲ بود!!

هلال و فاز:

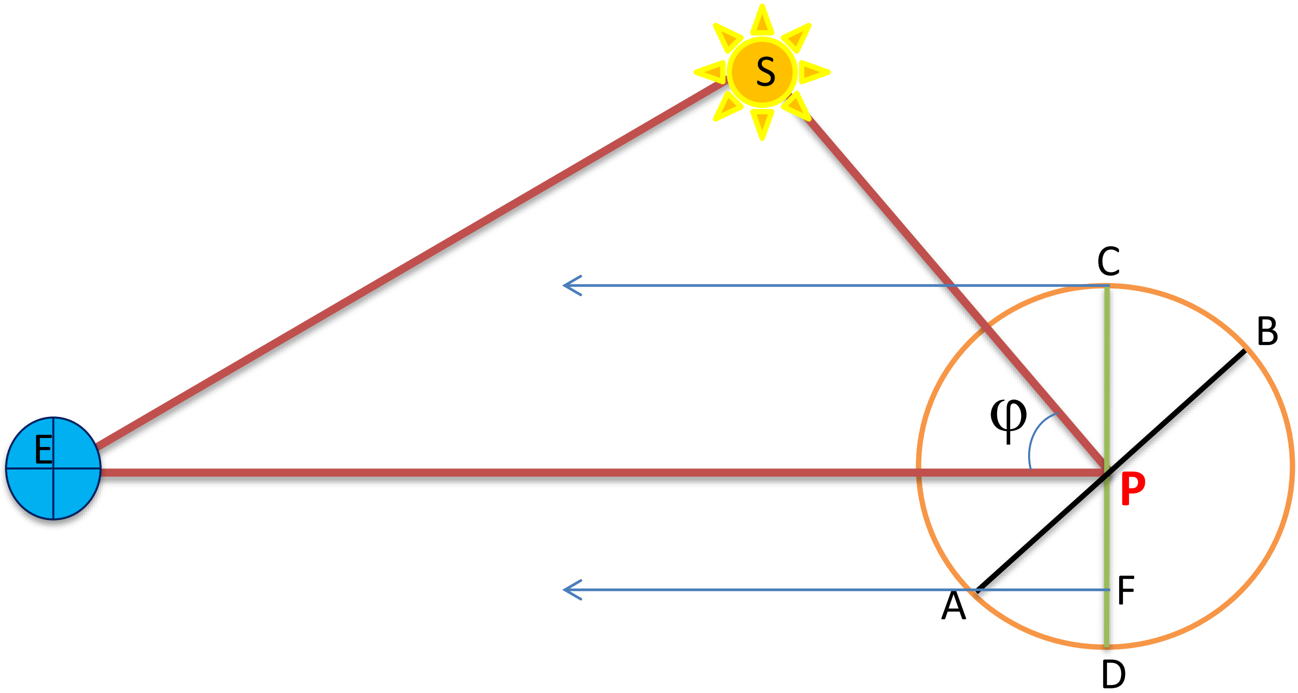
برخی سیارات از درون تلسکوپ به صورت هلال دیده می شود. اما برخی همواره قرص کاملی دارند. می خواهیم ببینیم هلال یک سیاره را چگونه می توان پیش بینی کرد.

برای ادامه کار، به هلال، کمیتی قابل محاسبه نسبت می دهیم. **فاز** سیاره را نسبت قسمت روشن قرص به کل قرص تعریف می کنیم.

حال ببینیم چرا بعضی سیارات هلالی دیده می شوند. شکل زیر سیاره را (با اغراق زیاد) نشان می دهد. قسمتی از قرص توسط خورشید روشن شده است و بخشی از قرص سیاره نیز از زمین قابل مشاهده می باشد.واضح است که بخشی از قسمت قابل مشاهده، توسط خورشید روشن شده است. ما یک نیم کره از سیاره را می بینیم.اما آن را تصویر کرده و به صورت یک دایره تصور می کنیم. در مورد قسمت تاریک و روشن نیز به همین شکل است. کمان ACB از سیاره روشن است. نوری که به ما می رسد شامل نیمی از نیم کره بعلاوه تصویر شده قسمت روشن است. می توان به این صورت ادامه داد:

$$\text{قسمت روشن} = CP + PF = R + R\cos\widehat{APF} = R\,(1+\cos\varphi)$$

$$\text{فاز} = P = \frac{R(1+\cos\varphi)}{2R} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$$



در اصل ما می بایست نسبت مساحت قسمت روشن به مساحت دایره (تصویر شده) را محاسبه می کردیم. اما چون هلال در یک جهت تقارن دارد آن را خطی به دست آوردیم.

اگر یک بار دیگر رابطه سینوس ها را تکرار کنیم:

$$\sin\varphi = \frac{a}{b}\sin\eta$$

می دانیم زاویه کشیدگی سیارات داخلی محدود است. به توجه به رابطه بالا می بینیم که هر مقداری برای زاویه فاز φ ممکن است. بنابراین این سیارات را می توان در شکل های مختلف هلالی دید.

اما برای سیارات خارجی وضع کمی متفاوت است. فاز این سیارات همواره بیشتر از ۰.۵ است. یعنی همواره بیش از نیمی از قرص این سیارات روشن است. همچنین با توجه به رابطه سینوس ها، برای b های بزرگتر، زاویه فاز کوچک تر می شود. و در نتیجه فاز سیاره به سمت ۱ (هلال کامل) نزدیک می شود.

برای محاسبه هلال ماه، با توجه به شکل ۷ می توان دست به یک تقریب معقول زد. می دانیم فاصله زمین تا ماه در مقایسه با فاصله زمین تا خورشید ناچیز است. بنابراین زاویه خورشید مرکزی θ خیلی کوچک می شود. پس می توان φ و η را مکمل هم فرض کرد و نوشت:

$$P = \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)$$

پس فاز ماه به طور مستقیم با کشیدگی آن رابطه دارد.

مثال:

فاز زهره در بیشترین کشیدگی آن چقدر است؟

حل:

می دانیم هنگام بیشترین کشیدگی، زاویه فاز سیاره (زهره) ۹۰ درجه است. پس فاز در این هنگام ۰.۵ است.

مثال:

در روز دهم ماه قمری، از دید ناظری روی سطح ماه، چند درصد زمین روشن است؟

حل:

می توان از رابطه فاز استفاده کرد و به جای زاویه فاز φ ، چون ناظر روی ماه است، کشیدگی ماه را قرار داد.(چرا؟)

$$P_{earth} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\eta_{moon}\right) \xrightarrow{\eta_{moon} = \frac{10}{29.5} \times 360 = 122^\circ} P_{earth} = 0.23$$

مسائل:

مسئله ۱: در دو روز مختلف سال، کشیدگی و فاز سیاره زهره را اندازه گیری کردیم. کشیدگی در هر دو بار یکسان است. اما فاز زهره در دفعه دوم ۹ برابر دفعه اول است. با توجه به اینکه در تمام این مدت، زهره فقط هنگام غروب آفتاب قابل مشاهده بوده، محاسبه کنید.(ایده سوال از کتاب ستاره شناسی اصول و عمل)

الف: کشیدگی η و فاز P

ب: فاصله زمانی بین دو اندازه گیری

مسئله ۲: فرض کنید در یک لحظه، خورشید ناپدید شود. می دانیم در این حالت، سیارات در یک خط راست با همان سرعت قبلی به حرکت خود ادامه می دهند. در این لحظه، مریخ در چه کشیدگی باشد تا در نهایت به زمین اصابت کند.از آثار گرانشی زمین و مریخ صرف نظر کنید.

مسئله ۳: ثابت کنید عبور زهره از مقابل قرص خورشید از دید ناظران زمینی تقریبا ۸ ساعت به طول می انجامد. قطر زاویه ای خورشید را ۳۲ دقیقه قوس در نظر بگیرید.(سوال از کتاب ستاره شناسی اصول و عمل)

مسئله ٤: می دانیم از یک مقابله سیاره تا مقابله بعدی، مکانِ رخ دادنِ مقابله ها در زمینه آسمان تغییر می کند.

الف: حرکت مکانِ مقابله ها در جهت افزایش طول سماوی است یا در جهت کاهش آن؟

ب: توضیح دهید چرا مقابله ها در یک مکان رخ نمی دهند؟

پ: فاصله بین دو مکان مقابله متوالی سیاره مشتری را محاسبه کنید.

مسئله ٥: وقتی سیاره مریخ در حالت تربیع قرار دارد، موجب اختفای ستاره ای روی دایره البروج می شود. اگر مدت این اختفا ٦.٥ دقیقه باشد، شعاع مریخ را محاسبه کنید. شعاع مداری مریخ ۱.۵۲ واحد نجومی است. میل مداری آن را صفر فرض کنید.

مسئله ٦: مقارنه دو سیاره را زمانی تعریف می کنیم که فاصله زاویه ای آنها در آسمان کمتر از ٤ درجه باشد.

هنگامی که دو سیاره زهره و مشتری به کمترین فاصله زاویه ای از یکدیگر رسیدند، کشیدگی هر دو برابر ١٨ درجه بود. محاسبه کنید مدت مقارنه دو سیاره تقریبا چند روز است.

این اتفاق در تاریخ ٢٢ مرداد سال ١٣٩٣ قابل مشاهده است.

مسئله ٧: سرعت ظاهری (نسبت به ناظر زمینی) سیاره زحل را در حالت های زیر محاسبه کنید. سپس آهنگ تغییر طول سماوی این سیاره را در هر مورد بیابید.

الف: مقابله و مقارنه

ب: تربیع

پ: کشیدگی ١١٠ درجه

سوالات زیر ترکیبی از مباحث این نوشته با نجوم کروی و مکانیک سماوی است.

مسئله ٨: در روز ١٦ مهر ١٣٩٢ فردی ١ ساعت و ١٠ دقیقه پس از غروب خورشید شاهد صحنه زیبای هم نشینی ماه و زهره بود.این منظره به گونه ای بود که خط واصل دو سر هلال ماه از روی زهره می گذشت.(شکل زیر)

این فرد تصمیم می گیرد مشخصات سیاره زهره را محاسبه کند.او ارتفاع ماه را ١٣ درجه و فاز آن را ١٥ درصد تخمین زد. همچنین جدایی زاویه ای ماه و زهره را ٤ درجه اندازه گیری کرد.با داشتن این اطلاعات و با صرف نظر از میل مداری ماه و زهره محاسبه کنید: (عرض جغرافیایی ناظر ٣٥.٢ درجه)

الف: سمت و ارتفاع زهره

ب: بعد و میل زهره

پ: کشیدگی و فاز زهره

می بینیم با چند پارامتر بسیار ساده و قابل اندازه گیری می توان خیلی چیز ها را محاسبه کرد!

مسئله ۹: در روز ۱۷ آذر سیاره زهره در حالت مقارنه داخلی قرار دارد. برای عرض جغرافیایی ۲۰ درجه شمالی، محاسبه کنید بیشترین ارتفاع ممکن این سیاره هنگام غروب خورشید چقدر است و در چه روزی از سال اتفاق می افتد. توجه کنید که در اینجا باید هر دو عامل موثر در بیشینه شدن ارتفاع را در نظر بگیرید.

راهنمایی: می توانید این سوال را به دو قسمت تقسیم کرده و به طور جدا گانه آنها را حل کنید. نتیجه جالب خواهد بود!

مسئله ۱۰: فرض کنید نیروی گرانش، از شکل نیوتونی خود خارج شده و به صورت $\frac{GMm}{r^3}$ در آمده است. فرض کنید در این حالت نیز سیارات در مدار کاملاً دایروی دور خورشید می گردند. حالا حساب کنید:

الف: دوره تناوب سیاره مریخ و دوره تناوب هلالی آن از دید زمین

ب: آیا در این وضعیت باز هم حرکت بازگشتی دیده می شود؟ اگر جواب مثبت است رابطه هایی که درمورد حرکت بازگشتی به دست آوردیم چه تغییری می کنند؟

پ: مدت زمان حرکت بازگشتی مریخ در این حالت چقدر است؟

ت: مسئله ۷ را در این وضعیت حل کنید.

برای علاقه مندان:

تحقیق کنید منجمانی که به نظریه زمین مرکزی معتقد بودند (در راس آنها بطلمیوس) حرکت بازگشتی را چگونه توضیح می دادند؟

آیا بر اساس نظریه زمین مرکزی، اندازه گیری فواصل در منظومه شمسی امکان پذیر است؟

فلک تدویر بطلمیوس چندین قرن به عنوان بهترین توضیح برای حرکات منظومه شمسی پذیرفته شده بود. تحقیق کنید بحث زمان ها (بحث هایی که در این درسنامه داشتیم) در فلک تدویر چگونه مطرح می شدند.

یا حق...