پاسخ‌های تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی هشتم و نهم ـ توابع مولد

۱. آ) می‌دانیم $(۱-x)^{\frac{-۱}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ و جمله‌ی شامل x^r در آن طبق بسط ارائه شده در کلاس برابر $(-x)^r\binom{\frac{-۱}{۲}}{r}$ است که مقدار ضریب در آن

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{-۱}{۲}\times\frac{-۳}{۲}\times\ldots\times\frac{-(۲r-۱)}{۲}}{r!}\times(-۱)^r\\
=&\frac{۱\times ۳\times\ldots\times(۲r-۱)}{۲^r\times r!}\\
=&\frac{۱\times ۲\times\ldots\times(۲r)}{۲^r\times ۲^r\times r!}\\
=&\frac{(۲r)!}{۴^r r! r!}\\
=&\frac{۱}{۴^r}\binom{۲r}{r}
\end{aligned}$$

می‌باشد.

ب) تمام ضریب‌ها در دنباله‌ی ضرایب تابع مولد $\frac{۱}{۱-x}$ برابر ۱ است. از طرفی اگر ضریب x^i در دنباله‌ی ضرایب تابع مولد $\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ برابر a_i باشد، ضریب x^n در ضریب دو تابع مولد $\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ و $\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ برابر $b_n = a_n a_۰ + a_{n-۱}a_۱+\ldots+a_۰ a_n$ خواهد بود. پس از آن‌جایی که

$$b_n = \sum_{i=۰}^{n}\frac{۱}{۴^i}\binom{۲i}{i}\times\frac{۱}{۴^{n-i}}\binom{۲(n-i)}{n-i} = ۱$$

با ضرب طرفین در ۴^n داریم:

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{۲i}{i}\binom{۲(n-i)}{n-i} = ۴^n$$

۲. انتخاب ۴ عضو متوالی به شکل گفته شده متناظر با یک افراز مرتب از عدد طبیعی $n-۴$ به ۵ تکه است که تکه‌های یکم و می‌توانند تهی هم باشند. تابع مولد این مسئله برابر

$$(۱+x+x^۲+\ldots)(x+x^۲+\ldots)(x+x^۲+\ldots)(x+x^۲+\ldots)(۱+x+x^۲+\ldots) = \frac{x^۳}{(۱-x)^۲}$$

است. باید ضریب x^{n-4} را در این تابع مولد بیابیم که برابر ضریب x^{n-7} در دنباله‌ی ضرایب تابع مولد $\frac{1}{(1-x)^5}$ است. این مقدار نیز طبق بسط ارائه شده در کلاس برابر

$$\begin{aligned}
&\binom{-5}{n-7}\times(-1)^{n-7}\\
=&\frac{(-5)\times(-6)\times\ldots\times\Big(-5-\big((n-7)-1\big)\Big)}{(n-7)!}\times(-1)^{n-7}\\
=&\frac{(n-3)!}{(n-7)!4!}\\
=&\binom{n-3}{4}
\end{aligned}$$

۳. در کلاس، تابع مولد دنباله‌ی ضرایب $a_i = i^2$ را ساختیم و تابع $g(x)=\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-x}$ به دست آمد. حال اگر این تابع را در تابع $\frac{1}{1-x}$ ضرب کنیم، ضریب x^i در آن برابر $b_i=\sum_{j=1}^{i} j^2$ می‌شود. این تابع مولد برابر $\frac{3x}{(1-x)^3}+\frac{5}{(1-x)^2}$ است که با بسط دادن، ضریب x^n در آن برابر $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}$ خواهد شد (بسط دادن و محاسبات به خواننده واگذار می‌شود). پس:

$$b_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۴. فرض کنید $F(x)$ یک تابع مولد باشد که ضریب x^n در آن برابر عدد فیبوناچی n ام باشد. داریم:

$$\begin{cases}
F(x) &= F_0+F_1x^1+F_2x^2+\ldots\\
xF(x) &= F_0x+F_1x^2+F_2x^3+\ldots\\
x^2F(x) &= F_0x^2+F_1x^3+F_2x^4+\ldots
\end{cases}$$

پس:

$$\begin{aligned}
F(x)\big(1+x-x^2\big) &= F_0+F_0x+F_1x+(F_0+F_1-F_2)x^2+(F_1+F_2-F_3)x^3+\ldots\\
&=0+0x+1x+0+0+\ldots\\
&=x
\end{aligned}$$

پس $F(x)=\frac{x}{(1+x-x^2)}$ و با روش گفته شده در کلاس و نوشته $F(x)$ به صورت $\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$، مقدار صریح F_n برابر $\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$ به دست می‌آید (محاسبات و انجام روش به خواننده واگذار می‌شود).

توجه: α,β ریشه‌های معادله‌ی $1+x-x^2=0$ هستند.

۵. اگر $A(x),B(x)$ به ترتیب توابع مولد دنباله‌ی ضرایب a_n,b_n باشند، داریم:

$$\begin{cases} A(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots \\ B(x)=0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots \\ 2xA(x)=2x+2a_1x^2+2a_2x^3+\dots \\ 4xB(x)=4b_1x^2+4b_2x^2+\dots \\ -4xA(x)=-4x-4a_1x^2-4a_2x^3+\dots \\ -6xB(X)=-6b_1x^2-6b_2x^2+\dots \end{cases}$$

پس:

$$\begin{aligned}(1+2x)A(x)+4xB(x)&=1+(a_1+2)x+(a_2+2a_1+4b_1)x^2+(a_3+2a_2+4b_2)x^3+\dots\\ &=1\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}B(x)-4xA(x)-6xB(x)&=(b_1-4)x+(b_2-4a_1-6b_1)x^2+(b_3-4a_2-6b_2)x^3+\dots\\ &=0\end{aligned}$$

با استفاده از دو معادله‌ی بالا توابع $A(x)=\frac{1-6x}{(1-2x)^2}$ و $B(x)=\frac{4x}{(1-2x)^2}$ به دست می‌آید. حال داریم:

$$A(x)=(1-6x)\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)(2x)^r,\qquad B(x)=4x\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)(2x)^r$$

از روی این روابط، ضرایب صریح $a_n=(n+1)\times 2^n-6n\times 2^{n-1},b_n=4n\times 2^{n-1}$ به دست می‌آید.