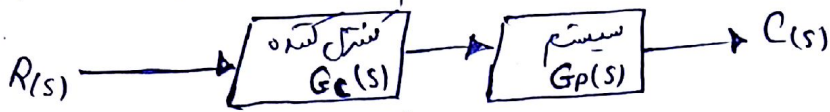


در طراحی و تحلیل سیستمهای کنترل باید اهداف کنترل زیر را در نظر گرفت.

۱) پایدار کردن سیستم ۲) کاهش اثر اغتشاشی در خروجی ۳) تبعیت کردن خروجی از ورودی

۴) بهبود پاسخ حالت گذرا و خطای حالت ماندگار ۵) کاهش حساسیت سیستم در برابر تغییرات و عدم قطعیت پارامترهای آن.

با توجه به سافت‌های کلی که در بخش‌های قبل بحث شد، اگر سیستم فیدبک نداشته باشد حلقه باز است و به شکل زیر خواهد بود.



حال اگر بخواهیم شرط تبعیت کردن خروجی از ورودی را روی آن پیاده کنیم یعنی $C(s) = R(s)$ داریم:

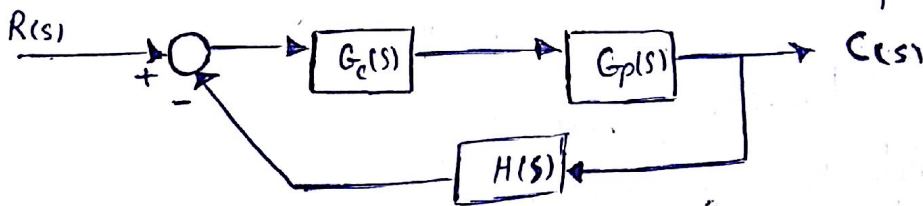
$$R(s) G_c(s) G_p(s) = C(s) \xrightarrow{\times R(s)^{-1}} G_c(s) G_p(s) = C(s) \times R(s)^{-1} = I$$

پس نتیجه می‌گیریم که کنترل کننده باید معکوس پلانت باشد.

حال آن که هر پلنت (سیستم) معکوس پذیر نیست، یعنی با کنترل حلقه باز نمی‌توان شرط تبعیت

خروجی از ورودی را برای سیستم پیاده نمود به نوعی کنترل حلقه باز به دلیل عدم اطلاع کنترلر از خروجی سیستم شرط‌های دیگری نیز نمی‌تواند پاس کند. پس به فکر سیستم کنترل هستیم که کنترل کننده از خروجی

مطلع باشد از این رو سیستم‌های فیدبک داریم معنی ندارد که به شکل زیر می‌باشد.



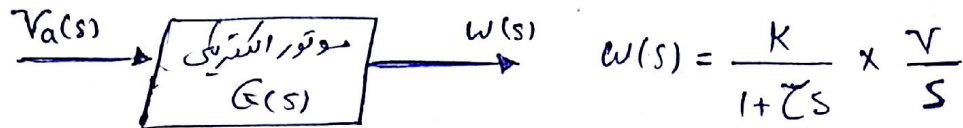
اگر سیستم کنترل فوق بدون فیدبک باشد به عبارت دیگر بهره‌کن حلقه باز آن به صورت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s) H(s)}$$

که نرم فیدبکی یعنی $\frac{1}{1 + G_c(s) G_p(s) H(s)} < 1$ باشد آن‌گاه فیدبک بهره سیستم را افزایش می‌دهد و غیر این صورت کاهش می‌دهد.

فیدبک اگر به صورت مناسب طراحی گردد می تواند سیستم را در حالت حلقه باز پایداریست را پدیدار نهد و طراحی بد آن حتی ممکن است سیستم پایداری را نابود کند. منظور از پایداری در این سطح همین اثر به ورودی سیستم یک ورودی محدود به هم خروجی آن نیز محدود شود. به طور کلی ورودی محدود - خروجی محدود.

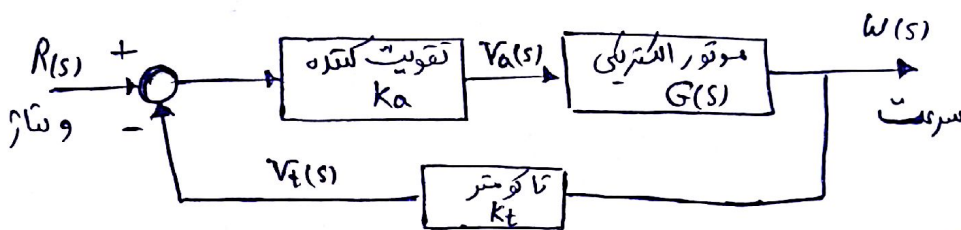
اثر فیدبک روی پاسخ حالت گذرا :
مثال : یک موتور الکتریکی کنترل شونده با جریان آرمیچر را در نظر بگیرید با فرض تابع تبدیل $G(s) = \frac{k}{1+\tau s}$ و ورودی $V_a = V/s$ پاسخ خروجی آن را محاسبه کنید. (از دو حالت حلقه باز و حلقه بسته)



$$\omega(s) = \frac{k}{1+\tau s} \times \frac{V}{s}$$

$$\omega(s) = \frac{\tau k V}{1+\tau s} + \frac{k V}{s} \Rightarrow \omega(t) = k V (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

باتوجه به $\omega(t)$ اگر چه بزرگ باشد - پاسخ گذرا خواهد بود و این صحه فقط به نوع انتخاب موتور بستگی خواهد داشت پس برای کنترل بهتر نیاز به یک کنترل حلقه بسته داریم و با اعطای کتان محضرت به نام تاکومتر با توجه به سرعت زاویه ای موتور و ولتاژ متناسب با آن ایجاد کردن و آن را با ورودی سربلین کنیم.



$$\frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a K_t G(s)} \quad , \quad R(s) = \frac{V}{s} \Rightarrow \Omega(s) = \frac{K_a V \left(\frac{k}{1+\tau s} \right) \times \frac{1}{s}}{(1+\tau s)s + K_a K_t k}$$

$$\Rightarrow \Omega(s) = \frac{K_a k V}{(1+\tau s)s + K_a K_t k} = \frac{K_a k V}{\tau s^2 + s + K_a K_t k}$$

$$\Rightarrow \omega(t) \approx \frac{V}{K_t} \left[1 - \exp\left(-\frac{K_a K_t k}{\tau} t\right) \right]$$

از این رو کثر $K_a K_t k$ بهرامتی می تواند تأثیرات مثبت زمانی را کنترل کند.

اثر فیدبک روی حساسیت :

در یک سیستم تغییرات فزونی ناشی از تغییر یک پارامتر حساسیت سیستم نسبت به آن پارامتر نامیم.

مفهوم رابطن حساسیت :
فرض شد f تابعی از متغیر α باشد $f = f(\alpha)$ اگر α به اندازه $\Delta\alpha$ تغییر کند آنگاه f نیز به اندازه Δf تغییر خواهد کرد و حساسیت f نسبت به تغییرات α به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_{\alpha}^f = \frac{\Delta f / f}{\Delta \alpha / \alpha} = \frac{\Delta f}{\Delta \alpha} \frac{\alpha}{f} \quad \text{یا} \quad S_{\alpha}^f = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{f}$$

مثال ۱۱، حساسیت سیستم کنترلی حلقه باز زیر را نسبت به $G_p(s)$ محاسبه کنید.

$$R(s) \rightarrow \boxed{G_c(s)} \rightarrow \boxed{G_p(s)} \rightarrow C(s) \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = G_c(s) G_p(s)$$

$$\Rightarrow S_{G_p(s)}^T = \frac{\partial T}{\partial G_p} \times \frac{G_p}{T} = G_c(s) \times \frac{G_p}{G_c(s) G_p(s)} = 1$$

این رابطه بیان می کند که حساسیت یک سیستم کنترلی حلقه باز نسبت به پلانت ۱۰۰٪ است

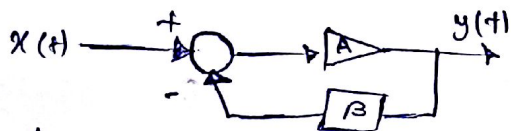
مثال ۱۲، حساسیت سیستم کنترلی حلقه بسته با تابع تبدیل $T(s) = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c H}$ را نسبت به $G_p(s)$ محاسبه کنید

$$S_{G_p}^T = \frac{\partial T}{\partial G_p} \times \frac{G_p}{T} = \frac{G_c(1 + G_p G_c H) - G_c H G_p G_c}{(1 + G_p G_c H)^2} \times \frac{1 + G_p G_c H}{G_c}$$

$$= \frac{1 + G_p G_c H - G_c H G_p}{1 + G_p G_c H} = \frac{1}{1 + G_p G_c H}$$

با توجه به این رابطه اگر $G_p G_c H \gg 1$ باشد آنگاه $S_{G_p}^T = 0$ یعنی حساسیت سیستم کنترلی

به G_p از بین می رود.
مثال ۱۳، در تقویت کننده فیدبکی شکل زیر با فرض $A = 1000$ و $\beta = 0.099$ یک تغییر ده درصدی در بهره A ستانم با چه تغییری در بهره حلقه بسته T خواهد بود.



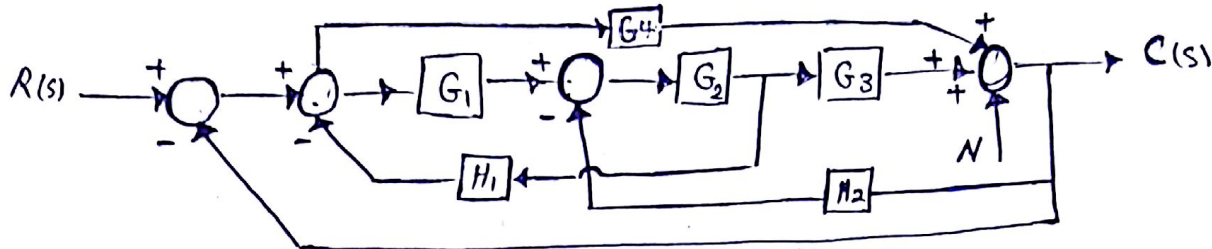
$$T = \frac{A}{1 + A\beta} \Rightarrow S_A^T = \frac{\Delta T / T}{\Delta A / A}$$

$$S_A^T = \frac{\partial T}{\partial A} \times \frac{A}{T} = \frac{1 + A\beta - \beta A}{(1 + A\beta)^2} \times \frac{1 + A\beta}{A} \times A = \frac{1}{1 + A\beta}$$

$$\Rightarrow S_A^T = \frac{1}{1 + A\beta} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta A / A}{1 + A\beta} = \frac{0.1}{1 + 99} = 0.1\%$$

الترتیب برائے نمایش و فہرست:

مثال ۱۱: در صورتی که زیر شرط عدم وابستگی فروص C به سیدال N را بدست آورده.



اگر آن جایی که T مساوی باشد

$T = T_N + T_R$ → زمان نه نویز
 $R=0$ ← زمان نه صفربه

برای حل این مسئله ابتدا SFG، C ، و نوشته و تابع تبدیل $\frac{C(s)}{N(s)}$ را بدایه لغز در نظر بگیریم.

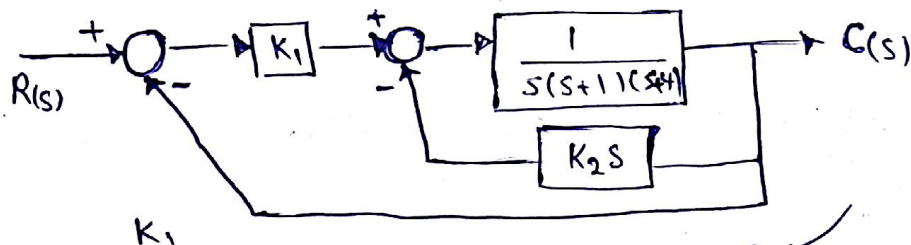
$$P_1 = 1, \Delta_1 = 1 - (-H_1 G_1 G_2) = 1 + H_1 G_1 G_2 \Rightarrow \frac{T}{N} = \frac{1 + H_1 G_1 G_2}{\Delta} = 0$$

$$1 + H_1 G_1 G_2 = 0$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اثر فیدک روس صفرو قصب :

مثال ۱۱ در سیستم کنترل شش زیر k_1 و k_2 را همان تعیین کنید که دو قطب سیستم در $s = -2$ قرار گیرند.



فلا ابتدا تابع تبدل لک سیستمر و محاسن شمر:

$$\frac{K_2 s + (s(s+1)(s+4))}{K_1 + K_2 s + (s(s+1)(s+4))} = \frac{K_1}{s(s+1)(s+4) + K_2 s + K_1}$$

اگر جزو اھم مقام تبدیل ما دو رشتہ در $s = -2$ داسے پلڈ ہیں معادلہ میں شخصہ ما باہر عامل

$(s+2)^2$ داسے پلڈ داریم: $\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + (4+k_2)s + k_1$ میں داریم.

$$\begin{array}{r} s^3 + 5s^2 + (4+k_2)s + k_1 \\ s^3 + 4s^2 + 4s \\ \hline s^2 + k_2s + k_1 \\ s^2 + 4s + 4 \\ \hline (k_2-4)s + k_1-4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} s^2 + 4s + 4 \\ s + 1 \end{array} \right.$$

صف اولی باید باقیه نه تقسیم رو برود برابر
 صف اولی باید باقیه نه تقسیم رو برود برابر

$$\begin{cases} k_2 - 4 = 0 \\ k_1 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k_1 = k_2 = 4}$$

صف اولی باید باقیه نه تقسیم رو برود برابر

فصل 6، پایداری سیستم‌های کنترل خطی
 به عنوان یک مفهوم اولیه پایداری در یک سیستم بیان می‌شود که اگر تغییرات در ورودی، شرایط اولیه یا پارامترهای سیستم رخ دهد، به تغییرات بزرگی در خروجی منجر نشود.

انواع پایداری:

پایداری مطلق: معیاری کیفی از پایداری است و بیانگر پایداری بودن و یا ناپایداری سیستم است.

پایداری نسبی: معیاری کمی از پایداری است و بیانگر میزان پایداری سیستم‌های پایداری است.

پایداری به طور مطلق: اگر سیستمی به ازای تمام مقادیر یک پارامترش پایداری باشد آن را سیستم پایداری به طور مطلق گویند و پایداری به طور نسبی: اگر سیستمی به ازای محدوده‌ای از مقادیر یک پارامترش پایداری باشد آن را سیستم پایداری نسبی گویند.

در این بحث سه نوع پایداری داریم که در باره‌ی آن بحث می‌کنیم 1) BIBO 2) محاسباتی 3) داخلی

1) در شرایط اولیه صفر هرگاه به ازای ورودی کراندار خروجی کراندار باشد سیستم را پایداری BIBO گویند.

$$\forall t, \exists \mu_1, \mu_2 \text{ s.t.: } |r(t)| \leq \mu_1 \Rightarrow |c(t)| \leq \mu_2$$

1-1 پایداری BIBO و پاسخ ضرب:

$$c(t) = \int_0^t g(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

$$|c(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) r(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| |r(t-\tau)| d\tau \leq \int_0^t |g(\tau)| \mu_1 d\tau \leq \mu_1 \int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

$$|r(t)| \leq \mu_1 \Rightarrow |c(t)| \leq \mu_1 \int_0^t |g(\tau)| d\tau$$

سپ برای آن که $|c(t)| \leq \mu_2$ می‌باید $\int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq \mu_2 / \mu_1$

تعریف: سیستمی با پاسخ ضربه $g(t)$ پایداری BIBO است اگر و تنها اگر پاسخ ضربه سیستم مطلقاً

انتهی‌گرا باشد. یعنی $\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau < \infty \Leftrightarrow$ پایداری BIBO

از آن جایی که پاسخ ضربه یک سیستم LTI در شرایط اولیه صفر معادل با تابع تبدیل آن است از این شرایط می‌توان بیان مفهوم پایداری در تابع تبدیل یا بهره‌ی سیستم استفاده کرد و به تعینایی جابجایی رسید.

مثال ۱۱: فون شیر $G_1(s) = \frac{1}{s + (j\omega + \sigma)}$ ، پایداری $G_2(s) = \frac{1}{s - (j\omega + \sigma)}$ (در سیستم بیان شده را

برای سید: باز فون شیر $G_1(s) = \frac{1}{s + (j\omega + \sigma)} \xrightarrow{L^{-1}} g_1(t) = e^{-(j\omega + \sigma)t} = e^{-j\omega t} \cdot e^{-\sigma t}$

$$\int_0^{\infty} |g_1(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |e^{-j\omega\tau - \sigma\tau}| d\tau = \int_0^{\infty} |e^{-\sigma\tau}| d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\sigma\tau} d\tau = \left[-\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma\tau} \right]_0^{\infty}$$

$$\int_0^{\infty} |g_1(\tau)| d\tau = -\frac{1}{\sigma} (e^{-\sigma(\infty)} - e^{-\sigma(0)}) = \frac{1}{\sigma}$$

پس پایدار است.

$$G_2(s) = \frac{1}{s - (j\omega + \sigma)} \xrightarrow{L^{-1}} g_2(t) = e^{(j\omega + \sigma)t} = e^{j\omega t} \times e^{\sigma t}$$

$$\int_0^{\infty} |g_2(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} e^{\sigma\tau} d\tau = \frac{1}{\sigma} (e^{\sigma(\infty)} - e^{\sigma(0)}) = \frac{1}{\sigma} \times \infty = \infty$$

پس ناپایدار است.

نکته ۱۱: سیستم پایدار BIBO است اگر و تنها اگر همه ی (سیستم های معادله سطحی یا قطب - های $G(s)$ در نیمه ی چپ صفحه ی S باشند. (همه ی این شروط برای توافقی تبدیل شده و الگواثر شده باشد)
نکته ۱۲: اگر معادله سطحی دارای ریشه مکرر روی محور $j\omega$ باشد، سیستم ناپایدار است.
نکته ۱۳: اگر معادله سطحی دارای ریشه غیر تکرار روی محور $j\omega$ باشد (مثلاً یا پدیده) سیستم دارای پایداری مرزی است. همه ی نکات ذکر شده از تحلیل پاسخ ضربه صورت مثال فوق بدست می آیند.

پایداری مجانبی: اگر پاسخ ورودی $C(t)$ ناهست از هر شرایط اولیه متناهی $C^{(k)}(t_0)$ به ازای $t \rightarrow \infty$ به صفر برسد، سیستم را پایدار مجانبی گویند و در غیر این صورت سیستم را ناپایدار گویند.

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) C^{(k)}(t_0)$$

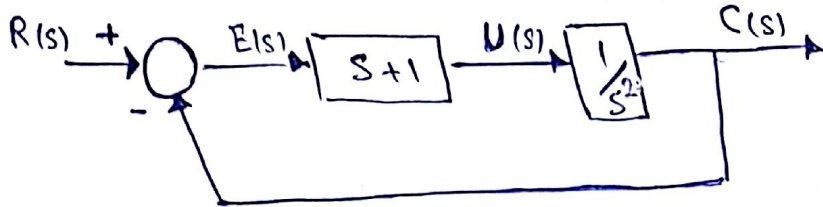
پاسخ ورودی صفر سیستم LTI مرتبه n :

$$|C(t)| \leq M < \infty \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |C(t)| = 0 \quad t \geq t_0$$

شروط پایداری مجانبی:

پایدار داخلی: زمانی پایدار داخلی تعریف می شود که توافقی تبدیل نسبت مروری مرجع و هر خروجی پایدار BIBO باشد. به عبارت دیگر تعریف پایدار سیستم در تمام فضا داخلی سیستم باشد.

مثال ۱۱: پایداری داخلی سیستم زیر را بررسی کنید.



$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{1 + \frac{s+1}{s^2}} = \frac{s^2(s+1)}{s^2+s+1} = \frac{s^3+s^2}{s^2+s+1} \quad \text{ناسره - ناپایدار}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1/s^2}{1 + \frac{s+1}{s^2}} = \frac{s+1}{s^2+s+1} \quad s = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$$

چون ریشه معادله مشخصه دارای قسمت حقیقی منفی است پس $\frac{C(s)}{R(s)}$ پایدار است. از این سیستم فوق دارای پایداری خارجی است ولی پایداری داخلی ندارد.

همواره پیدا کردن ریشه‌ی معادله مشخصه کار آسان نیست از این رو معیاری برای پیدا کردن مکان ریشه‌های معادله مشخصه توسط آقایان رات در انگلستان و هرویتز در آلمان به طور هم زمان پیشنهاد شد. چرا که ما برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم فقط نیاز داریم بدانیم که مکان ریشه‌های معادله مشخصه در کجا قرار می‌گیرد.

$$\Delta(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad \text{فرض کنید:}$$

s^4	a_0	a_2	a_4	نکته: در فرآیند رات می‌توان جملات یک سطر بزرگ عدد مثبت ضرب یا تقسیم نمود.
s^3	a_1	a_3	0	
s^2	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - 0 \times a_2}{a_1}$	0	* شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم، هم علامت بودن تمام عناصر ستون اول آرایه رات می‌باشد، تعداد تغییر علامت‌های ستون اول آرایه رات برابر تعداد ریشه‌های ناپایدار معادله مشخصه است.
s^1	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}$	0	0	
s^0	$\frac{c_1 b_2 - b_1 \times 0}{c_1} = b_2$			

مثال ۱۱ آرایه رات را برای پیدا کردن حله ای زیر تشکیل داده و پایدار آن را بررسی کنید.

$$\Delta(s) = 5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

s^5	5	3	1						
s^4	4	2	1						
s^3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$8 \xrightarrow{\times 4} 2$	-1	8				
s^2	4	1	8						
s^1	$-\frac{3}{2}$	8	$8 \xrightarrow{\times 2} -3$	8	8				
s^0	1								

دو تغییر علامت پس دو ریشه در نیمه منفی راست داریم

مثال ۱۲ در معادله مشخصه زیر ریشه های پایدار آن را برای بازه مختلف k محاسبه کنید.

$$\Delta(s) = s^3 - 7s^2 + (16+k)s + 5 + 2k = 0$$

s^3	1	(16+k)				
s^2	-7	(5+2k)				
s^1	$-\frac{7(16+k) - (5+2k)}{-7} = \frac{9k + 117}{7}$					
s^0	5+2k					

اگر $k > -2.5$ باشد آن گاه دو ریشه پایدار داریم اگر $-2.5 < k < -13$ سه ریشه پایدار داریم

و اگر $k < -13$ باشد آن گاه یک ریشه پایدار داریم

مثال ۱۳ پایدار ریشه های معادله مشخصه زیر را بررسی کنید.

$$\Delta(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 3s + 3$$

s^5	1	2	3					
s^4	3	6	3					
s^3	$\frac{6\epsilon - 6}{\epsilon}$	2						
s^2	$\frac{6\epsilon - 6}{\epsilon}$	3						
s^1	$(2(\frac{6\epsilon - 6}{\epsilon}) - 3\epsilon) / \frac{6\epsilon - 6}{\epsilon}$							
s^0	3							

* همان طور که دیده می شود در ستون اول جدول رات صفر ظاهر می شود، برای حل این مشکل به جای صفر از ϵ استفاده می کنیم با فرض $\epsilon \ll 1$ و $\epsilon \ll 3$ و مقدار تغییر علامت چهار می شماریم این مقدار را برای $\epsilon > 0$ با N^+ و برای $\epsilon < 0$ با N^- نشان داده و مقدار تغییر علامت کلی را با $N = \min(N^+, N^-)$ می نامیم. $N^+ = 2$ و $N^- = 3$

پس داریم $N = \min(2, 3) = 2$ و دو ریشه پایدار داریم

حالت دیگر وجود دارد که تمامی مخرج‌ها یک‌سره از آرایه راث منفی شود. در این حالت معادله‌ی سطح ریشه‌ها متنوع نسبت به مبدأ دارد دست کم یکی از موارد زیر در معادله وجود خواهد داشت:

الف) معادله یک یا چند جفت ریشه موهومی دارد. $(s = \pm j\beta)$

ب) معادله یک یا چند جفت ریشه حقیقی و مختلف علامه دارد. $(s = \pm \alpha)$

ج) معادله یک یا چند جفت ریشه مزدوج متضاد دارد که نسبت به مبدأ نصف متنوع می‌باشد $(s = \pm \alpha \pm j\beta)$

مثال ۱۱ آرایه راث را در $\Delta(s) = s^6 + 5s^5 + 11s^4 + 25s^3 + 36s^2 + 30s + 36$ پیاده کنید:

s^6 :	1	11	36	36
s^5 :	5	25	30	
s^4 :	6	30	36	
s^3 :	0	0		
s^2 :				
s^1 :				
s^0 :				

همان‌طور که ملاحظه می‌شود سطح s^3 برابر صفر شد پس بانک سطح s^4 معادله‌ی کلی $A(s) = 0$ تشکیل می‌دهیم. و به جای سطح منفی ضرایب $\frac{dA(s)}{ds}$ را قرار داده و آرایه راث را تشکیل می‌دهیم. اگر باز با سطح منفی روبه‌رو شدیم مراحل را دوباره تکرار می‌کنیم و بقیه مثل قبل بررسی می‌شود و اگر ستون اول آرایه راث بدون تغییر علامت باشد باز برای پایدار بودن باید یک کنیم که ریشه‌ها را مکرر بودن آن‌ها را نیز علامت است که درون محور محور ریشه مکرر داریم و اگر نباشد به صورت

s^6 :	1	11	36	36
---------	---	----	----	----

حالتی این پایدار خواهد بود.

s^5 :	5	25	30	
---------	---	----	----	--

s^4 :	6	30	36	$\Rightarrow A(s) = 6s^4 + 30s^2 + 36$
---------	---	----	----	--

s^3 :	24	60	0	$\Leftarrow \frac{dA(s)}{ds} = 24s^3 + 60s$
---------	----	----	---	---

s^2 :	15	36		
---------	----	----	--	--

s^1 :	24			
---------	----	--	--	--

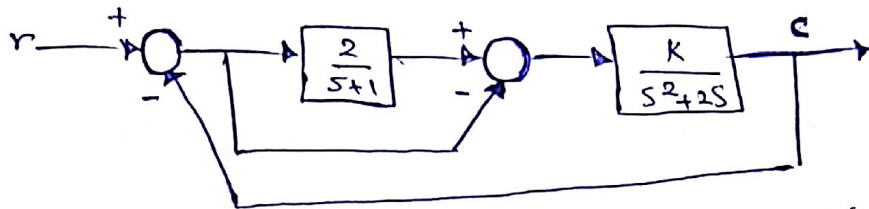
s^0 :	36			
---------	----	--	--	--

برخ نداده تمام ریشه‌ها یا در نیم صفحه‌ی چپ محور مختصات قرار دارند. $A(s) = 6(s^2 + 5)(s^2 + 2)$

پس ۴ ریشه‌ی غیر مکرر درون محور مختصات داریم.

و سیستم به‌طور حسی این پایدار است.

مثال ۱۱ در شکل زیر حدود k برای پایداری سیستم ملحق بسته مقدار است.



$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{+k}{s^2+2s} - \frac{2}{s+1} \frac{k}{s^2+2s} \right) = \frac{(s+1)(s^2+2s) - k(s+1) + 2k}{(s^2+2s)(s+1)} = 0$$

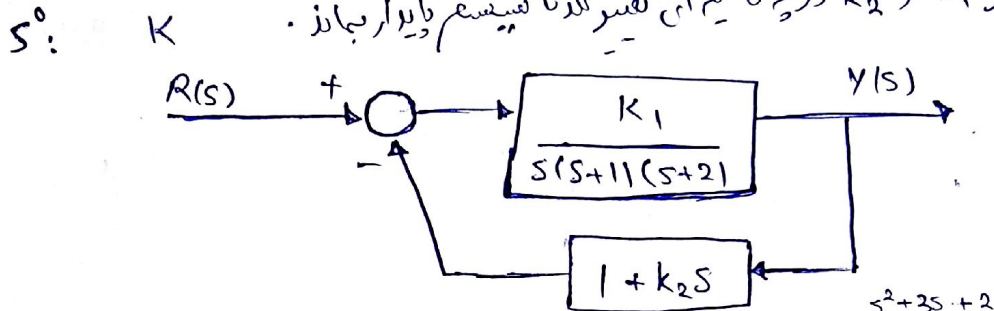
$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s - ks - k + 2k = s^3 + 3s^2 + (2-k)s + k = 0$$

$$s^3: 1 \quad (2-k) \quad k > 0, \quad 6-4k > 0 \Rightarrow k < 3/2$$

$$s^2: 3 \quad k \Rightarrow 0 < k < 3/2$$

$$s^1: 3(2-k) - k = 6-4k > 0$$

مثال ۱۲ در سیستم کنترل شکل زیر k_1 و k_2 درجه نامیه این تغییر انداز سیستم پایداری باشد.



$$\Delta(s) = 1 + \frac{k_1(1+k_2s)}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s(s+1)(s+2) + k_1(1+k_2s) = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k_1k_2s + k_1 = s^3 + 3s^2 + (2+k_1k_2)s + k_1$$

$$s^3: 1 \quad 2+k_1k_2 \Rightarrow 3(2+k_1k_2) - k_1 > 0, \quad k_1 > 0 \quad (1)$$

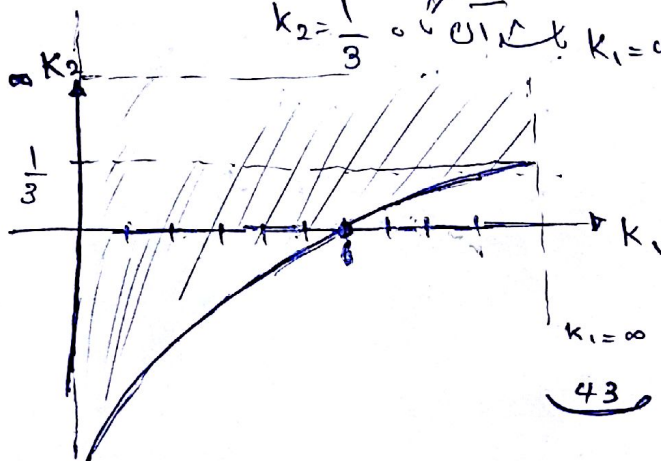
$$s^2: 3 \quad k_1 \quad 6 + 3k_1k_2 - k_1 > 0 \Rightarrow k_2 > \frac{1}{3} - \frac{2}{k_1} \quad (2)$$

$$s^1: \frac{3(2+k_1k_2) - k_1}{3}$$

$$s^0: k_1$$

ابتدا مرزهای پایداری را رسم می‌کنیم اگر $k_1 = 6$ آن‌گاه $k_2 = 0$

اگر $k_1 = 0$ آن‌گاه $k_2 = \infty$ و اگر $k_1 = \infty$ آن‌گاه $k_2 = \frac{1}{3}$



نکته: برای سیستم های مرتبه دوم و سوم نیاز به تشکیل آرایه راث نداریم و می توان از ردایج زیر استفاده کرد.

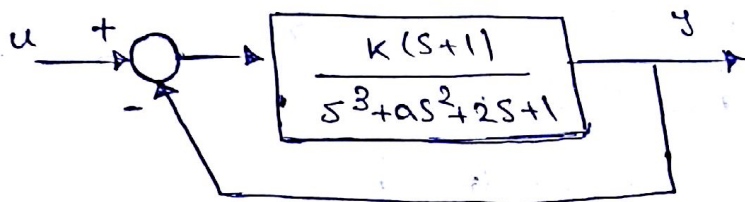
۱) برای پایداری سیستم مرتبه دوم به صورت $a_0 s^2 + a_1 s + a_2$ باید a_i ها همگی مثبت باشند
برای نوسان بودن آن ها نیز باید داشته باشیم $a_2 > 0$ و $a_1 = 0$ و فرکانس نوسانات ما
برابر است با $\omega = \sqrt{a_2}$

۲) برای پایداری بودن سیستم مرتبه سوم با معادله مشخصه $\Delta(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ داریم:

a_i ها همگی مثبت باشند و $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ و برای نوسان بودن $a_i > 0$ و
 $a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$ باشد و فرکانس نوسانات ما و معادله کمکی در این حالت نیز برابر است با

$$a_1 s^2 + a_3 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

مثال: برای مقدار a و k سیستم زیر در فرکانس $2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ نوسان می کند؟



$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{-k(s+1)}{s^3 + as^2 + 2s + 1} \right) = \frac{s^3 + as^2 + 2s + 1 + k(s+1)}{s^3 + as^2 + 2s + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(s) = 0 \Rightarrow s^3 + as^2 + (2+k)s + k+1 = 0$$

$$a > 0, (2+k) > 0, (k+1) > 0 \quad \text{شرط} \quad a_i > 0$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = a(2+k) - k+1 = 0 \Rightarrow 2a + ka - k - 1 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \sqrt{\frac{k+1}{a}} = 2 \Rightarrow k+1 = 4a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + ka - k = -1 \Rightarrow 2\left(\frac{k+1}{4}\right) + k\left(\frac{k+1}{4}\right) - k = -1 \\ \frac{k+1}{4} = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2, a = \frac{3}{4}$$

تعیین پایداری در فضای حالت:

مثال ۱۱ برای یک سیستم با معادلات حالت داده شده زیر شرط پایداری را بدست آورید.

$$\dot{x}_1 = ax_1 + 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - 3x_1 + 2u$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3$$

* برای این که پایداری سیستم رو برابری کنیم باید معادله مشخصه آن را محاسبه کنیم و تحلیل را روی آن انجام دهیم (در حقیقت ضرایب داریم)

$$\Delta(s) = |sI - A| = 0$$

که در آن A ماتریس حالت و I بی ماتریس همانی و u وایتر مجهول می باشد.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |sI - A| = \left| s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s-a & -2 & 0 \\ 3 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times (s+2) \begin{vmatrix} s-a & -2 \\ 3 & s-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (s+2) [(s-a)(s-2) + 6] = (s+2) (s^2 - (a+2)s + (2a+6))$$

$$= s^3 - (a+2)s^2 + (2a+6)s + 2s^2 - 2(a+2)s + 2(2a+6)$$

$$= s^3 - as^2 + 2s + (4a+12) = 0 \quad -a > 0, \quad 4a+12 > 0 \Rightarrow a < 0, \quad a > -3$$

$$\Rightarrow -3 < a < 0 \quad (1)$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \Rightarrow -a \times 2 - (4a+12) > 0 \Rightarrow -2a - 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow -6a - 12 > 0 \Rightarrow a + 2 < 0 \Rightarrow a < -2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1), (2) \Rightarrow -3 < a < -2$$

فصل 7: تحلیل سیستم‌های کنترل در حوزه زمان
در سیستم‌های کنترل، پاسخ‌های حالت و خروجی نسبت به زمان را با پاسخ زمان سیستم تولید می‌کنند.

پاسخ زمان سیستم: پاسخ زمان یک سیستم کنترل پیوسته را با $C(t)$ یا $y(t)$ نمایش می‌دهند و از دو بخش پاسخ گذرا و ماندگار تشکیل شده است. $C(t) = C_{tr}(t) + C_{ss}(t)$ که در آن $C_{ss}(t)$ پاسخ ماندگار یا پاسخ حالت ماندگار

و $C_{tr}(t)$ پاسخ گذرا می‌باشد. پاسخ گذرا هم از گذشت زمان به صفر می‌رسد یعنی $\lim_{t \rightarrow \infty} C_{tr}(t) = 0$

و در نتیجه پاسخ ماندگار از این رفته پاسخ گذرا باقی می‌ماند یعنی $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_{ss}(t)$

سیستم مرتبه اول:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1+Ts} \quad \text{dc بهره} = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) = K \quad (1)$$

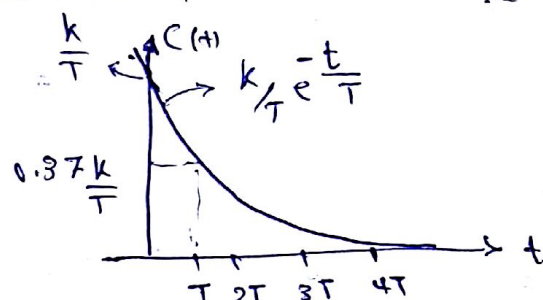
$$1+Ts=0 \Rightarrow s = -\frac{1}{T} \quad (2)$$

← قطب حلقه بسته و T ثابت زمان می‌باشد

پاسخ مقرب برای سیستم مرتبه اول:

$$r(t) = \delta(t) \xrightarrow{L} R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{K}{1+Ts} \xrightarrow{L^{-1}} C(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} u(t)$$



$$r(t) = u(t) \xrightarrow{L} R(s) = 1/s$$

$$C(s) = \frac{K}{1+Ts} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{-KT}{1+Ts} + \frac{K}{s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{\frac{1}{T} + s}$$

$$C(t) = K(u(t) - e^{-t/T} u(t)) = K(1 - e^{-t/T}) u(t)$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = 1 - K(1 - e^{-t/T}) u(t) \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 1 - K$$

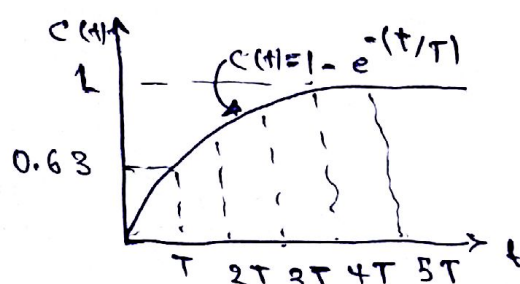
پس اگر $K=1$ خطای حالت ماندگار برابر صفر خواهد شد (برای ورودی پله واحد در سیستم مرتبه اول)

با استرها: ثابت زمانی آمدت زمان به 63٪ مقدار نهایی خود می‌رسد.

(2) مدت زمان است پاسخ پله در باند 2٪ یا 5٪

مقدار نهایی قرار گیرد. که با t_s نشان می‌دهند.

$$t_s = 4T$$



۳) یا زمان میز زدن است که به ازای آن مقدار مشخصی خود برسد.

$$0.1K = C(t_{0.1}) = K(1 - e^{-t_{0.1}/T}) \Rightarrow t_{0.1} = T \ln 0.9 \Rightarrow t_n = 2.2T$$

$$C(t_{0.9}) = K \times 0.9 = K(1 - e^{-t_{0.9}/T}) \Rightarrow t_{0.9} = -T \ln 0.1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C(\infty) = C_{ss} = K \quad (4) \text{ مقدار مشخصی :}$$

۴) پاسخ شیب سیستم مرتبه اول :

$$r(t) = t u(t) \rightarrow R(s) = 1/s^2$$

$$C(s) = R(s)T(s) = 1/s^2 \cdot \frac{K}{1+Ts} = \frac{K}{s^2} - \frac{KT}{s} + \frac{KT^2}{1+Ts} \Rightarrow C(t) = K(t - T + Te^{-t/T})u(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -K(t - T + Te^{-t/T})u(t) + t u(t) = t - K(t - T)$$

$$e_{ss} = T \quad \text{حال با فرض } K=1 \text{ داریم}$$

سیستم های مرتبه دوم :

سیستم های مرتبه دوم با به صورت ایده آل سره بدون صفر $T_1(s) = \frac{K}{s^2 + as + b}$ یا به صورت ایده آل سره

$$T_2(s) = \frac{K(s+c)}{s^2 + as + b} \quad \text{با صفر می باشد}$$

سیستم های ایده آل سره بدون صفر را می توان به صورت نرم استاندارد بیان کرده در آن $a = 2\zeta\omega_n$

$$T_1(s) = \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{و } b = \omega_n^2, K = \omega_n^2 \text{ در این صورت داریم :}$$

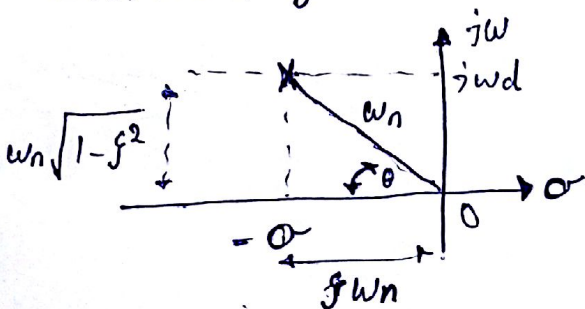
$$T(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} = G_1(s) \quad \text{و فرکانس طبیعی نامیرایی}$$

و نسبت میرایی $\alpha = \zeta\omega_n$ ضریب میرایی و $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس میرایی می باشد.

معادله مشخصه و قطب های سیستم :

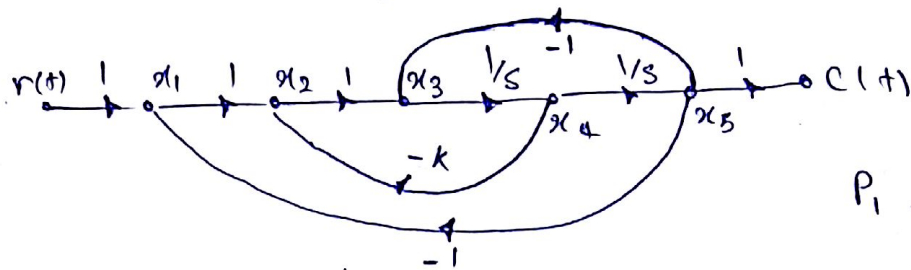
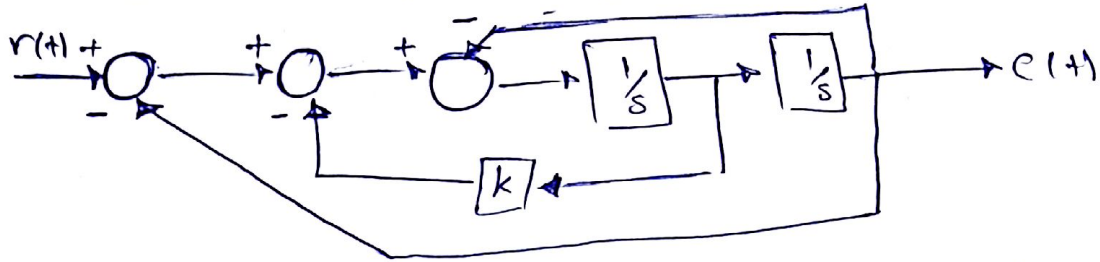
ریشه تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با معادله مشخصه :

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) \quad \text{اگر } \sigma = \alpha \text{ در نظر بگیریم :}$$

مثال: در شکل زیر k را میان بیابید که نسبت میرایی قطب‌های معلوم‌شده برابر 0.707 شود.



$$L_1 = -\frac{1}{s^2}, L_2 = -\frac{k}{s}$$

$$L_3 = -\frac{1}{s^2}$$

$$P_1 = \frac{1}{s^2}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1/s^2}{1 + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{k}{s}} = \frac{1}{s^2 + ks + 2}$$

$$\xi = 0.707 \quad s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\xi \approx \sqrt{2}/2$$

$$\Rightarrow k = 2\xi\omega_n \approx 2 \times \sqrt{2}/2 \times \sqrt{2} = 2$$

با مسغ لپوس سیستم مرتبه دوم استاندارد.