پاسخ تشریحی توسط: محمد صادق معتقدی ـ امیر انصاری

۳۱. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x+2=2x \Rightarrow x=2$$

$$f\left(\frac{x}{x+2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)=x$$

با مشتق‌گیری از طرفین تساوی داریم:

$$\frac{2}{(x+2)^2}f'\left(\frac{x}{x+2}\right)+\frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)=1$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{16}f'\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\cos\pi=1 \Rightarrow \frac{1}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right)-\pi=1$$

$$\frac{1}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right)=\pi+1 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=8(\pi+1)$$

۳۲. گزینه ۳ درست است.

ابتدا صورت و مخرج را در e^{2x} ضرب می‌کنیم:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$$

$$e^{2x}=t \Rightarrow 2x=\ln t \Rightarrow 2dx=\frac{1}{t}dt \Rightarrow dx=\frac{1}{2t}dt$$

$$\begin{cases} x=\ln 3 \rightarrow e^{2\ln 3}=t \Rightarrow t=9 \\ x=\ln 2 \rightarrow e^{2\ln 2}=t \Rightarrow t=4 \end{cases}$$

$$I=\int_4^9\frac{t-1}{t+1}\times\frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}\int_4^9\frac{t-1}{t(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int_4^9\left(\frac{-1}{t}+\frac{2}{t+1}\right)dt$$

$$I=\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln t=\ln\frac{t+1}{\sqrt{t}}\Bigg|_4^9$$

$$I=\ln\frac{10}{3}-\ln\frac{5}{2}=\ln\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{2}}=\ln\frac{20}{15}=\ln\frac{4}{3}$$

$$I=\ln 4-\ln 3=2\ln 2-\ln 3$$

۳۳. گزینه ۱ درست است.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1-\cos\sqrt{x}\right)^{\alpha}}$$

چون علت ناسره بودن انتگرال در $x\to 0$ می‌باشد می‌توانیم از هم ارزیهای $x\to 0$ استفاده کنیم.

$$I\simeq\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1-\left(1-\frac{x}{2!}\right)\right)^{\alpha}}\Rightarrow I\simeq\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}}$$

$$I\simeq 2^{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{dx}{x^{\alpha}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha<1 & \Rightarrow \text{همگرا}\\ \alpha\ge 1 & \Rightarrow \text{واگرا}\end{cases}$$

۳۴. گزینه ۳ درست است.

$$A=\left(3+i\sqrt{3}\right)^{n}$$

$$\begin{cases}x=3\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow\quad r=\sqrt{12}\\ \theta=\operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{x} & \Rightarrow\quad \theta=\operatorname{Arc\,tan}\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$A=\left(3+i\sqrt{3}\right)^{n}=\left(\sqrt{12}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{n}=\left(\sqrt{12}\right)^{n}e^{\frac{n\pi}{6}i}$$

$$A=\left(\sqrt{12}\right)^{n}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{Im}A=0\quad\Rightarrow\quad\sin\frac{n\pi}{6}=0$$

چون $\sin k\pi=0$ می‌باشد لذا باید n مضرب 6 باشد که این موضوع فقط در گزینه ۳ رعایت شده است.

۳۵. گزینه ۲ درست است.

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\xrightarrow{x\to x^3}\frac{1}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$$

از طرفین تساوی انتگرال می‌گیریم.

$$A=\int\frac{1}{1+x^3}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

در $x=0$ حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ برابر صفر می‌باشد لذا حاصل $\int\frac{1}{1+x^3}dx$ نیز باید در $x=0$ برابر صفر شود.

$$A=\int\frac{1}{1+x^3}dx=\int\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{1+x}+\frac{Ax+B}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$\frac{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+Ax+Ax^2+B+Bx}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}+A=0 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{3}+A+B=0\\ \frac{1}{3}+B=1 \quad\Rightarrow\quad B=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$A=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{1+x}+\frac{\frac{-1}{3}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{2}{3}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$A=\int\frac{\frac{1}{3}}{1+x}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$A=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$A=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+k$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad A=0-0+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\pi}{6}\right)+k \quad\Rightarrow\quad 0=k-\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad k=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

برای آن‌که این سری به سری صورت مساله تبدیل شود باید داشته باشیم.

$$x^{3n+1}=1 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\int\frac{1}{1+x^3}dx\Big|_{x=1}$$

$$I=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tan}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$I=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc}\tan\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$I=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad I=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

۳۶.گزینه ۱ درست است.

۳۷. گزینه ۴ درست است.

با استفاده از مجموع ریمان خواهیم داشت:

$$I=\lim\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{\pi(i+j)}{n}=\int_0^1\int_0^1\cos\pi(x+y)\,dydx$$

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(x+y)\Big|_0^1\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1(\sin\pi(x+1)-\sin\pi x)\,dx$$

$$I=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{\pi}\cos\pi(x+1)-\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\right)\Big|_0^1$$

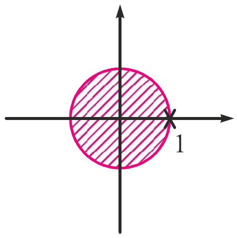
$$I=\frac{1}{\pi^2}(\cos\pi x-\cos\pi(x+1))\Big|_0^1$$

$$I=\frac{1}{\pi^2}((-1-1)-(1+1))=\frac{-4}{\pi^2}$$

۳۸. گزینه ۳ درست است.

$$I=\iint_D\frac{\cos x}{\cos x+\cos y}\,dxdy$$

$$D: x^2+y^2\le 1$$



$$x\rightleftarrows y$$

$$J=\iint_D\frac{\cos y}{\cos x+\cos y}\,dxdy$$

چون ناحیه هم نسبت به x و هم نسبت به y تقارن دارد.

$$I=J\quad\Rightarrow\quad I+J=2I\quad\Rightarrow\quad\iint_D 1\,dxdy=2I$$

$$2I=\pi r^2\quad\Rightarrow\quad 2I=\pi\quad\Rightarrow\quad I=\frac{\pi}{2}$$

۳۹.گزینه ۲ درست است.

$$I=\oint_c f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$C:(x-2)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow \text{دایره}\begin{cases}\text{مرکز}(2,2)\\ \text{شعاع}=1\end{cases}$$

مسیر C و ناحیه داخل آن شامل نقاطی که $x=0$ باشد نمی‌شود لذا تابع داخل انتگرال روی مسیر بسته پیوسته است و می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$P=\frac{-y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad Q=\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$I=\iint_D\left(\left(\frac{-1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\times\frac{-y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\left(\frac{-1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{-y}{x^2}\times\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right)dxdy$$

$$I=\iint_D\left(\frac{-1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)dxdy=0$$

۴۰. گزینه ۴ درست است.

با توجه به قضیه استوکس داریم:

$$Z=4-x^2-y^2$$

$$I=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}dS=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$\vec{F}=(z-y)\hat{i}+(z+x)\hat{j}-(x+y)\hat{k}$$

$$I=\oint_C(z-y)dx+(z+x)dy-(x+y)dz$$

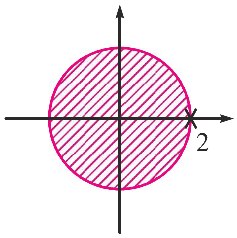
$$C\in Z=0 \Rightarrow dz=0 \Rightarrow I=\oint_C -ydx+xdy$$

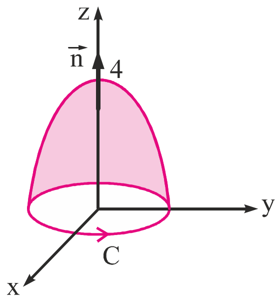
$$\text{قضیه گرین}\ I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 2dxdy$$

$$I=2\times(\text{مساحت ناحیه D})=2\times\pi\times 2^2=8\pi$$

$$C\begin{cases}z=4-x^2-y^2\\ z=0\end{cases} \Rightarrow C:4-x^2-y^2=0$$

$$C:x^2+y^2=4$$





۴۱. گزینه ۲ درست است.

$$y'-\frac{1}{x+1}y=e^{x}(x+1)$$

معادله از نوع مرتبه اول خطی است با $\begin{cases}P(x)=-\dfrac{1}{x+1}\\ Q(x)=e^{x}(x+1)\end{cases}$ لذا

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right\}$$

$$=e^{\int\frac{1}{x+1}dx}\left\{\int e^{x}(x+1)e^{\int\frac{-1}{x+1}dx}dx+c\right\}$$

$$=e^{\ln(x+1)}\left\{\int e^{x}(x+1)e^{-\ln(x+1)}dx+c\right\}$$

$$=(x+1)\left\{\int e^{x}(x+1)\frac{1}{x+1}dx+c\right\}\to$$

$$y=(x+1)\left(e^{x}+c\right)$$

از شرط $y(0)=1$ به دست می‌آید $c=0$ لذا

$$y=(x+1)e^{x}\quad\to\quad y(1)=2e$$

۴۲. گزینه ۲ درست است.

معادله مرتبه دوم فاقد x است لذا با جانشینی

$$y'=V(y)\quad\to\quad y''=V'(y)V(y)$$

به معادله زیر می‌رسیم

$$yV'(y)V(y)-V(y)^{2}=0\quad\to\quad V(y)\left(yV'(y)-V(y)\right)=0\quad\to$$

$$\begin{cases}V(y)=0\quad\to\quad y'=0\quad\to\quad \text{با شرط } y'(1)=3 \text{ تطابق ندارد.}\\ yV'(y)-V(y)=0\quad\to\quad y\dfrac{dV}{dy}=V(y)\quad\to\end{cases}$$

$$\frac{dV}{V(y)}=\frac{dy}{y}\xrightarrow{\int}\ln V(y)=\ln y+\ln k\quad\to\quad V(y)=ky\quad\to\quad y'=ky$$

با اعمال شرایط $\begin{cases} y(1)=2 \\ y'(1)=3 \end{cases}$ در $x=1$ به دست می‌آید

$$3=k.2 \quad \to \quad k=\frac{3}{2}$$

لذا

$$y'=\frac{3}{2}y \quad \to \quad \frac{dy}{y}=\frac{3}{2}dx \xrightarrow{\int}$$

$$\ln y=\frac{3}{2}x+c$$

از شرط $y(1)=2$ در $x=1$ به دست می‌آید

$$\ln 2=\frac{3}{2}.1+c \quad \to \quad c=\ln 2-\frac{3}{2}$$

پس داریم:

$$\ln y=\frac{3}{2}x+\ln 2-\frac{3}{2}$$

در $x=3$ نتیجه می‌شود

$$\ln y=\frac{9}{2}+\ln 2-\frac{3}{2} \quad \to \quad y=e^{3+\ln 2}=2e^3$$

۴۳.گزینه ۱ درست است.

$$x=\tan t \quad \to \quad t=\tan^{-1}x \quad \to \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{1}{1+x^2}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right).\frac{dt}{dx}\frac{1}{1+x^2}+\frac{dy}{dt}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{dt}{dx}.\frac{1}{1+x^2}+\frac{dy}{dt}.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{dy}{dt}.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

با قرار دادن این عبارات در معادله دیفرانسیل اولیه به دست می‌آید.

$$(1+x^2)^2\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-2x\frac{dy}{dt}\right)\right)+(1+2x)(1+x^2)\left(\frac{1}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\right)+y=0 \quad \to$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$$

۴۴.گزینه ۳ درست است.

$$P(x)=\frac{3-x}{x} \qquad Q(x)=\frac{-1}{x}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} xP(x)=3=A\\ \lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x)=0=B\end{cases}$$

معادله مشخصه روش فروبینیوس چنین است.

$$r^2+(A-1)r+B=0 \quad \to$$
$$r^2+2r=0 \quad \to \quad r=0\,,-2$$

ریشه کوچکتر $r=-2$ است و برای جواب نظیر این ریشه داریم:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}$$

با قرار دادن این جواب در معادله به دست می‌آید.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)(n-3)a_n x^{n-4}+(3-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)a_n x^{n-3}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-2}=0 \quad \to$$
$$\sum_{0}^{\infty}(n-2)(n-3)a_n x^{n-3}+\sum_{0}^{\infty}3(n-2)a_n x^{n-3}-\sum_{0}^{\infty}(n-2)a_n x^{n-2}-\sum_{0}^{\infty}a_n x^{n-2}=0$$

در دو جمله آخر تبدیل $N-3 \quad \to \quad n-2$ را انجام می‌دهیم

$$\sum_{0}^{\infty}(n-2)(n-3)a_n x^{n-3}+\sum_{0}^{\infty}3(n-2)a_n x^{n-3}-\sum_{1}^{\infty}(N-3)a_{N-1}x^{N-3}-\sum_{1}^{\infty}a_{N-1}x^{N-3}=0$$

و رابطه بازگشتی چنین می‌شود.

$$(n-2)(n-3)a_n+3(n-2)a_n-(n-3)a_{n-1}-a_{n-1}=0 \quad \to$$
$$(n-2)(n-3)a_n=(n-3+1)a_{n-1} \quad \to \quad a_n=\frac{a_{n-1}}{n}$$

۴۵.گزینه ۱ درست است.

$$L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1} \quad \to \quad L\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}dS=\left(\tan^{-1}s\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s} \quad \to$$
$$L\left(e^{-t}\frac{\sin t}{t}\right)=\left(\tan^{-1}\frac{1}{s}\right)\Big|_{s\to s-(-1)}=\tan^{-1}\frac{1}{s+1} \quad \to$$
$$L\left(\int_0^x e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s+1} \quad \to$$
$$L\left(e^x\int_0^x e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\left(\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s+1}\right)\Big|_{s\to s-1}=\frac{1}{s-1}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

راه دیگر:

$$f(x)=e^x\int_0^x\frac{e^{-t}}{t}\sin t\,dt=\int_0^x e^{x-t}\frac{\sin t}{t}dt=e^x*\frac{\sin x}{x}\xrightarrow{L}$$
$$F(s)=L(e^x).L\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{s-1}.\tan^{-1}\frac{1}{s}$$