پاسخ‌های تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی یکم و دوم ـ ترکیبیات شمارشی مقدماتی و ابزارهای معمول ترکیبیاتی

۱. برای آن که دو مهره‌ی اسب، یک‌دیگر را تهدید کنند، باید در دو گوشه‌ی مقابل از یک زیرجدول ۳×۲ باشند. انتخاب این زیرجدول $۷ \times ۶ + ۶ \times ۷$ حالت دارد و قرار دادن این دو مهره در گوشه‌ی مقابل ۲×۲ حالت دارد. پس در کل $۲ \times ۲ \times ۷ \times ۶ \times ۲$ حالت داریم.

۲. ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $F_{۲n}$ است.

$g(n)$ را برابر با مقدار خواسته شده در نظر می‌گیریم. داریم $g(۱) = ۱$ و به ازای $n > ۱$:

$$
\begin{aligned}
g(n) &= ۱ \times g(n-۱) + ۲ \times g(n-۲) + \ldots + (n-۱) \times g(۱) + n \\
&= g(n-۱) + \Big(g(n-۲) + \ldots + g(۱)\Big) + \Big(۱.g(n-۲) + \ldots + (n-۱).g(۱) + (n-۱)\Big) + ۱ \\
&= g(n-۱) + \Big(g(n-۲) + \ldots + g(۱)\Big) + g(n-۱) + ۱ \\
&= ۲g(n-۱) + \Big(g(n-۲) + \ldots + g(۱)\Big) + ۱ \\
&= ۲g(n-۱) + g(n-۲) - g(n-۲) + \Big(g(n-۲) + \ldots + g(۱)\Big) + ۱ \\
&= ۲g(n-۱) - g(n-۲) + \Big(۲g(n-۲) + g(n-۳) + \ldots + g(۱) + ۱\Big) \\
&= ۲g(n-۱) - g(n-۲) + g(n-۱) \\
&= ۳g(n-۱) - g(n-۲)
\end{aligned}
$$

حال به استقرا روی n ثابت می‌کنیم $g(n) = F_{۲n}$ است. برای پایه‌ی استقرا داریم $F_۲ = ۱ = g(۱)$ و $g(۲) = ۳ = F_۴$. فرض کنید حکم به ازای $n-۱, n-۲$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. داریم:

$$
\begin{aligned}
g(n) &= ۳g(n-۱) - g(n-۲) \\
&= ۳F_{۲n-۲} - F۲n-۴ \quad \text{طبق فرض استقرا} \\
&= ۲F_{۲n-۲} + F_{۲n-۳} \\
&= F_{۲n-۲} + F_{۲n-۱} \\
&= F_{۲n}
\end{aligned}
$$

و حکم استقرا ثابت می‌شود.

۳. ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۲n$ است.

ابتدا مثالی برای $k = ۲n - ۱$ ارائه می‌دهیم که هیچ چهار خانه با خاصیت گفته شده نداشته باشد. به ازای هر $۱ \leq i < n$ خانه‌های ستون i را با رنگ i رنگ کنید؛ سپس هر یک از خانه‌های ستون آخر را به یک رنگ جدید در بیاورید. هر چهار خانه که تقاطع دو سطر و دو ستون باشند، دو خانه‌ی هم‌ستون دارند که در ستون آخر نباشند. این دو خانه هم‌رنگ هستند؛ بنابراین چهار خانه‌ی گفته شده خاصیت سوال را ندارند. ■

حال ثابت می‌کنیم به ازای هر رنگ‌آمیزی با $۲n$ رنگ، چهار خانه‌ی گفته شده یافت می‌شود. گرافی دوبخشی و کامل بسازید که هر رأس بخش یکم آن متناظر با یک سطر و هر رأس بخش دوم آن متناظر با یک ستون باشد. یال بین رئوس متناظر هر سطر و هر ستون را به رنگ خانه‌ی تلاقی آن‌ها در بیاورید.

ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف، دوری دارد که رنگ تمام یال‌های آن متفاوت باشد. از آن‌جایی که از هر رنگ، دست کم یک یال داریم، می‌توانیم به ازای هر رنگ دقیقن یک یال آن را در نظر بگیریم. زیرگرافی $۲n$ رأسی با $۲n$ یال به دست می‌آید که حتمن دور دارد (مطابق مطالب کلاس گراف). یال‌های این دور نیز متفاوت هستند؛ زیرا از هر رنگ دقیقن یک یال در نظر گرفتیم. پس حکم این قسمت ثابت می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم دوری به طول چهار وجود دارد که رنگ تمام یال‌های آن متفاوت باشد. فرض کنید $v_۱v_۲\dots v_{۲p}$ کوچک‌ترین دور در گراف باشد که یال‌های آن ناهم‌رنگ هستند. اگر $۲p = ۴$ باشد که حکم ثابت شده است؛ در غیر این صورت یال $v_۱v_۴$ را در نظر بگیرید. اگر این یال با هیچ یک از یال‌های $v_۱v_۲, v_۲v_۳, v_۳v_۴$ هم‌رنگ نباشد، دور $v_۱v_۲v_۳v_۴$ حکم ما را ثابت می‌کند؛ در غیر این صورت این یال با هیچ یک از یال‌های $v_۴v_۵, v_۵v_۶, \dots, v_{۲p}v_۱$ هم‌رنگ نیست. پس یال‌های دور $v_۴v_۵\dots v_{۲p}v_۱$ ناهم‌رنگ هستند و طول این دور، کم‌تر از طول دور در نظر گرفته شده است که با فرض ما تناقض دارد.

پس ثابت کردیم دوری به طول چهار با یال‌های ناهم‌رنگ وجود دارد. کافی است دو سطر و دو ستون متناظر چهار رأس این دور را در نظر بگیریم. حکم مسئله ثابت می‌شود. ■

۴. ابتدا با استقرای ضعیف ثابت می‌کنیم می‌توان نواحی ایجاد شده را با سیاه و سفید رنگ کرد؛ طوری که هر هر دو ناحیه‌ی مجاور (در ضلع)، ناهم‌رنگ باشند. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱$ را در نظر می‌گیریم. یک طرف خط را سیاه و طرف دیگر را سفید می‌کنیم و حکم برقرار می‌شود. فرض کنید حکم به ازای $n - ۱$ خط درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n خط نیز درست است. خط n ام را در نظر نگیرید و نواحی ایجاد شده با $n - ۱$ خط

دیگر را طبق فرض استقرا رنگ‌آمیزی کنید. حال خط n ام را اضافه کرده و رنگ تمام نواحی یک طرف آن را عوض کنید. هر دو ناحیه‌ی مجاور که در یک طرف خط جدید هستند، قبلن ناهم‌رنگ بوده و ناهم‌رنگ می‌مانند. دو ناحیه‌ی مجاور نیز که در دو طرف خط جدید هستند، در مرحله‌ی قبل یک ناحیه بوده‌اند. در این مرحله این ناحیه به دو ناحیه تقسیم شده و رنگ یکی از آن‌ها عوض شده است. پس این حالت نیز مشکلی ندارد. ■

حال حکم اصلی مسئله را ثابت می‌کنیم. ابتدا ناحیه‌ها را به شکل گفته شده با سیاه و سفید رنگ کنید. سپس عدد هر ناحیه را برابر با تعداد رئوس آن ناحیه در نظر بگیرید و در انتها اعداد تمام ناحیه‌های سیاه را منفی کنید. تمام اعداد ناصفر هستند و قدرمطلق آن‌ها از n بیش‌تر نیست. حال یک سمت یک خط دل‌خواه در نظر بگیرید. هر رأسی که به طور کامل در این سمت قرار دارد، باعث اضافه شدن $+۱$ به دو ناحیه و اضافه شدن -۱ به دو ناحیه‌ی دیگر می‌شود. هر رأس روی خط مذکور نیز باعث اضافه شدن $+۱$ به یک ناحیه و -۱ به یک ناحیه‌ی دیگر از این سمت خط می‌شود. پس مجموع اعدادی که ناحیه‌های این سمت دارند، برابر ۰ است و حکم مسئله ثابت می‌شود. ■

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف، زیرگراف $K_{n+۱}$ دارد. بزرگ‌ترین خوشه‌ی گراف را در نظر بگیرید. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید تعداد رأس‌های این خوشه $c \leq n$ باشد. به تعداد $n-c$ رأس دل‌خواه دیگر در کنار این c رأس بگذارید تا یک زیرگراف n رأسی تشکیل شود. طبق فرض سوال، رأسی خارج از این n رأس وجود دارد که به این n رأس وصل باشد. آن رأس را در کنار c رأس مذکور بگذارید. یک خوشه‌ی $c+۱$ رأسی تشکیل می‌شود که تناقض است؛ زیرا ما بزرگ‌ترین خوشه را در نظر گرفته بودیم. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود. ■

حال حکم اصلی مسئله را ثابت می‌کنیم. یک خوشه‌ی $n+۱$ رأسی در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن n رأس بیرون آن، یک رأس از این خوشه باید وجود داشته باشد که به همه‌ی آن n رأس وصل باشد. این رأس به همه‌ی رئوس دیگر گراف وصل است. پس $\Delta = ۲n$ و حکم ثابت می‌شود. ■

۶. تحت عمل‌های یکم و دوم، چندجمله‌ای $ax^۲+bx+c$ به ترتیب به چندجمله‌ای‌های

$$(a+b+c)x^۲+(۲a+b)x+a$$

و

$$cx^۲+(b-۲c)x+(a-b+c)$$

تبدیل می‌شود. مقدار Δ در این دو معادله به ترتیب برابر

$$(۲a+b)^۲-۴a(a+b+c)=۴a^۲+۴ab+b^۲-۴a^۲-۴ab-۴ac=b^۲-۴ac$$

و

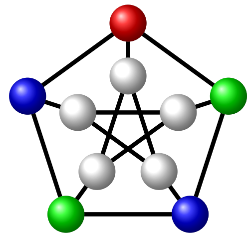
$$(b-۲c)^۲-۴c(a-b+c)=b^۲-۴bc+۴c^۲-۴ac-۴bc-۴c^۲=b^۲-۴ac$$

است. پس مقدار Δ تحت این اعمال ثابت می‌ماند و یک ناورداست. در ابتدا $\Delta=۴$ و در انتها $\Delta=۶۴$ است. پس امکان انجام کار گفته شده وجود ندارد.

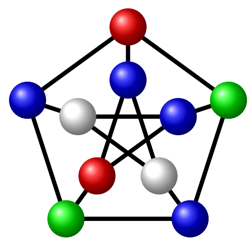
۷. آ) پس از رنگ‌آمیزی دایره‌ی شماره ۱ توسط ببعی، طبق اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که دست کم n قطاع، به آن رنگ در آمده باشد. اگر این رنگ، نارنجی، زرد یا بنفش باشد، به ترتیب کافی است گاوی تمام قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را به رنگ نارنجی، بنفش یا زرد در بیاورد. با این کار در دایره‌ی شماره ۳ دست کم n قطاع نارنجی تولید خواهد شد.

ب) کافی است ببعی در ابتدا از هر رنگ، دقیقن n قطاع را به آن رنگ در بیاورد. فرض کنید پس از آن دایره‌ی شماره ۲ به صورتی توسط گاوی رنگ شود که به ترتیب x، y و $n-x-y$ قطاع به رنگ‌های بنفش، زرد و نارنجی در آمده باشند. ، با در نظر گرفتن تمام $۳n$ حالت چرخش دایره‌ی شماره‌ی ۲ برای ببعی، در مجموع $(x\times n)+(y\times n)+\big((n-x-y)\times n\big)=۳n^۲$ قطاع نارنجی در دایره‌ی شماره‌ی ۳ ایجاد خواهد شد. پس طبق اصل میانگین، حالت چرخشی برای ببعی وجود دارد که در آن حداکثر $n=\lfloor\frac{۳n^۲}{۳n}\rfloor$ قطاع نارنجی در دایره‌ی ۳ ایجاد خواهد شد و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۸. آ) هر طور پنج توپ دور را رنگ کنیم، رنگی وجود خواهد داشت که از آن یک توپ و از هر یک از دو رنگ دیگر دو توپ داریم. انتخاب این رنگ، ۳ حالت دارد. حال شیء را طوری می‌چرخانیم که توپ این رنگ بالا قرار گیرد و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم این رنگ، قرمز باشد. توپ‌های دوری دو رنگ دیگر باید به صورت یک در میان قرار گیرند که ۲ حالت دارد (توپ سمت چپ توپ قرمز، سبز یا آبی باشد). بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید شکل زیر به دست آید:



رنگ توپ پایین متصل به توپ قرمز شکل بالا ۲ حالت دارد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید آبی باشد. در این صورت رنگ دو توپ دیگر به طور یکتا تعیین خواهد شد و مانند شکل زیر، تنها دو توپ باقی می‌ماند که روی هم ۲ حالت دارند. پس کل کار به $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲۴$ حالت قابل انجام است.



ب) مانند روش بالا عمل می‌کنیم؛ با این تفاوت که پس از رنگ شدن توپ قرمز ابتدایی، برای توپ‌های دوری یک حالت خواهیم داشت؛ زیرا دو حالت گفته شده را می‌توان با چرخاندن در فضا به یک‌دیگر تبدیل کرد. پس ۱۲ حالت داریم.

۹. **راه حل ۱**: به استقرای ضعیف روی n مسئله را حل می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n = ۰$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $n = ۰, k = ۰$ تنها ۱ روش داریم که برابر با $\binom{۲\times۰}{۰-۰}$ است و برای $n = ۰, k \neq ۰$ هیچ روشی نداریم که برابر با $\binom{۲\times۰}{۰-k}$ است. حال فرض کنید حکم به ازای $n = m$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = m + ۱$ نیز برقرار است. برای رسیدن به نقطه‌ی $(m+۱, k)$، چهار حالت داریم:

- قبل از گام آخر در خانه‌ی $(m, k-۱)$ هستیم و با گاو به نقطه‌ی نهایی می‌رویم. این روش طبق فرض استقرا $\binom{۲m}{m-k+۱}$ حالت دارد.
- قبل از گام آخر در خانه‌ی (m, k) هستیم و با خر به نقطه‌ی نهایی می‌رویم. این روش طبق فرض استقرا $\binom{۲m}{m-k}$ حالت دارد.
- قبل از گام آخر در خانه‌ی (m, k) هستیم و با قاطر به نقطه‌ی نهایی می‌رویم. این روش طبق فرض استقرا $\binom{۲m}{m-k}$ حالت دارد.
- قبل از گام آخر در خانه‌ی $(m, k-۱)$ هستیم و با شتر به نقطه‌ی نهایی می‌رویم. این روش طبق فرض استقرا $\binom{۲m}{m-k-۱}$ حالت دارد.

پس در کل

$$\left(\binom{۲m}{m-k+۱} + \binom{۲m}{m-k}\right) + \left(\binom{۲m}{m-k} + \binom{۲m}{m-k-۱}\right)$$

حالت داریم که طبق اتحاد پاسکال برابر با

$$\binom{۲m+۱}{m-k+۱}+\binom{۲m+۱}{m-k}=\binom{۲m+۲}{m-k+۱}=\binom{۲(m+۱)}{(m+۱)-k}$$

است و حکم استقرا ثابت می‌شود.

راه حل ۲: می‌دانیم تعداد مسیرهای معمول (مجاز بودن گام بالا یا راست در هر مرحله) از نقطه‌ی $(۰,۰)$ به نقطه‌ی $(n+k,n-k)$ برابر با $\binom{۲n}{n-k}$ است. حال با استفاده از یک تناظر یک به یک بین پاسخ‌های مسئله و پاسخ‌های این مسیرهای معمول، مسئله را حل می‌کنیم.

- یک پاسخ از مسئله‌ی اصلی را در نظر بگیرید. به ازای هر یک از چهار نوع گام انجام شده، به ترتیب کارهای زیر را در یک صفحه‌ی مختصات دیگر انجام می‌دهیم:
  - رفتن از نقطه‌ی فعلی (i,j) به نقطه‌ی $(i+۱,j)$ و سپس رفتن به $(i+۲,j)$
  - رفتن از نقطه‌ی فعلی (i,j) به نقطه‌ی $(i,j+۱)$ و سپس رفتن به $(i,j+۲)$
  - رفتن از نقطه‌ی فعلی (i,j) به نقطه‌ی $(i+۱,j)$ و سپس رفتن به $(i+۱,j+۱)$
  - رفتن از نقطه‌ی فعلی (i,j) به نقطه‌ی $(i,j+۱)$ و سپس رفتن به $(i+۱,j+۱)$

  به این ترتیب هر پاسخ از مسئله‌ی اصلی، یک مسیر معمول از نقطه‌ی $(۰,۰)$ به نقطه‌ی $(n+k,n-k)$ به ما می‌دهد؛ زیرا در مسئله‌ی عادی اگر به ترتیب x و y بار کارهای ۱ و ۲ را انجام دهیم، $y-x=k$ خواهد بود و در مسئله‌ی مسیر معمول، تعداد گام‌های به سمت بالا $۲k$ بار بیش‌تر از تعداد گام‌های به سمت راست خواهد بود و با توجه به این که در کل $۲n$ گام انجام می‌دهیم، به نقطه‌ی $(n-k,n+k)$ خواهیم رسید.

- حال یک پاسخ از مسیرهای معمول را در نظر بگیرید. دوتا دوتا گام‌ها را دسته‌بندی کنید. به ازای هر دو گام یک دسته، به شکل زیر یک گام از مسئله‌ی اصلی در صفحه‌ی مختصات دیگری انجام می‌دهیم:
  - اگر هر دو گام به سمت راست بود، آن را با یک گام از نوع ۱ متناظر می‌کنیم.
  - اگر هر دو گام به سمت بالا بود، آن را با یک گام از نوع ۲ متناظر می‌کنیم.
  - اگر ابتدا یک گام به سمت راست و سپس یه گام به سمت بالا بود، آن را با یک گام از نوع ۳ متناظر می‌کنیم.
  - اگر ابتدا یک گام به سمت بالا و سپس یه گام به سمت راست بود، آن را با یک گام از نوع ۴ متناظر می‌کنیم.

- از طرفی به وضوح تناظر و تبدیلات انجام شده در بالا دوطرفه و بازگشت‌پذیر است.

بنابراین تناظر گفته شده برقرار و حکم ثابت می‌شود.

۱۰. آ) ادعا می‌کنیم به ازای هر حالت از جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۲n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، دست کم یک جدول معتبر متناظر وجود دارد. هر جواب از معادله را در نظر بگیرید و از سمت چپ سطر پایین شروع کنید و پس از آن سطر بالا را پر کنید. به ترتیب در $x_۱$ خانه، عدد ۱، در $x_۲$ خانه، عدد ۲، و ...در x_n خانه، عدد n را بنویسید. به این ترتیب یک جدول معتبر به دست می‌آید. پس $S_{۱,n}$ از تعداد جواب‌های معادله‌ی گفته شده کم‌تر نیست. پس:

$$S_{۱,n} \geq \binom{۲n-۱}{n-۱} = \frac{(۲n-۱)!}{(n-۱)!n!} = \frac{۱}{۲} \times \frac{(۲n)!}{n!n!} \geq \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n} = C_n$$

و حکم ثابت می‌شود.

ب) تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $۱, ۲, \ldots, ۲n$ در خانه‌های یک جدول $۲ \times n$؛ طوری که هر عدد دقیقن یک بار استفاده شود و از اعداد پایین و چپ‌ش (در صورت وجود) بزرگ‌تر باشد، برابر C_n است. مجموعه ی حالات این مسئله‌ی تعریف شده را A می‌نامیم که $|A| = C_n$. مجموعه‌ی حالات مسئله‌ی اصلی را نیز B در نظر می‌گیریم که $|B| = S_{۲,n}$. حال کافی است یک تناظر درون‌گستر[۱] از B به A برقرار کنیم. نتیجه خواهد شد $|A| \geq |B|$ و بنابراین $C_n \geq S_{۲,n}$ و حکم ثابت خواهد شد.

یک حالت از B در نظر بگیرید. به ازای هر عدد i:

- اگر این دو عدد هم‌سطر بودند، عدد سمت چپ را برابر $۲i - ۱$ و عدد سمت راست را برابر $۲i$ قرار دهید.
- اگر این دو عدد هم‌سطر نبودند، عدد پایین را برابر $۲i - ۱$ و عدد بالا را برابر $۲i$ قرار دهید.

هر حالت از B به یک حالت از A تعریف می‌شود و یک حالت از A حداکثر توسط یک حالت از B ساخته می‌شود. پس یک تناظر درون‌گستر برقرار شده و حکم ثابت می‌شود.

۱۱. ثابت می‌کنیم پاسخ برابر n های به صورت $۴k$ یا $۴k + ۱$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم برای n های به صورت $۴k$ یا $۴k + ۱$ می‌توان کار را انجام داد. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱$ و $n = ۴$ را در نظر می‌گیریم. برای $n = ۱$ که حکم واضح است. برای $n = ۴$

[۱] injective

نیز روشی در صورت سوال ارائه شده است. حال فرض کنید حکم برای $< n$ برقرار باشد و می‌خواهیم حکم را به ازای n ثابت کنیم. ابتدا فرض کنید $n = ۴k$ باشد. ابتدا عنصر ۴ را دوتا دوتا به راست می‌بریم تا به بعد از n برسد. سپس همین کار را به ترتیب با عناصر ۳ و ۲ و ۱ انجام می‌دهیم. این کار قابل انجام است؛ زیرا این اعداد باید از روی اعداد $۵,۶,\dots,n$ رد شوند که تعداد آن‌ها زوج است. جایگشت به $< ۵,۶,\dots,n,۱,۲,۳,۴ >$ تبدیل خواهد شد. از عدد ۵ تا عدد n را طبق فرض استقرا و از عدد ۱ تا عدد ۴ را مطابق صورت سوال وارون می‌کنیم. به این ترتیب جایگشت $n, n-۱, \dots, ۱$ را می‌سازیم و حکم ثابت می‌شود. حال فرض کنید n به صورت $۴k+۱$ باشد. ابتدا عناصر $۲,۳,\dots,n$ را طبق فرض استقرا وارون می‌کنیم؛ سپس عنصر ۱ را دوتا دوتا به راست می‌بریم تا به انتهای جایگشت برسد. به این ترتیب در این حالت نیز حکم ثابت می‌شود. ■

حال ثابت می‌کنیم برای n های به صورت $۴k+۲$ یا $۴k+۳$ امکان این کار وجود ندارد. به ازای هر دو عنصر از جایگشت مانند π_i, π_j که $i < j$، امّا $\pi_i > \pi_j$ باشد، گوییم یک **وارونگی**[2] رخ داده است.

زوجیت تعداد وارونگی‌های جایگشت در حین مراحل ثابت می‌ماند؛ زیرا هنگام انتقال دو واحدی یک عنصر به راست، ترتیب عنصر انتقالی با دو عنصر مذکور عوض خواهد شد و بقیه‌ی ترتیب‌ها تغییر نخواهد کرد؛ پس تعداد وارونگی‌ها به اندازه‌ی $+۲$ یا ۰ یا -۲ تغییر خواهد کرد. در ابتدا تعداد وارونگی‌های جایگشت برابر ۰ و در انتها باید $\binom{n}{۲}$ باشد. پس $\binom{n}{۲}$ باید زوج باشد و n نمی‌تواند به صورت $۴k+۲, ۴k+۳$ باشد. ■

[2] inversion