زنگ حل مساله: (هفته‌ی پنجم)

☺. یک اتاق به شکل مستطیل را با تعدادی فرش به شکل مستطیل پوشانده‌ایم (فرش‌ها روی هم نیستند). ثابت کنید مجموع عرض فرش‌ها کمتر از عرض اتاق نیست (عرض، ضلع کوچکتر مستطیل است).

☺. ثابت کنید جایگشتی از اعداد ۱ تا n وجود دارد که میانگین هیچ دو عددی میان آن دو نباشد.

😐. $n \geq 3$ نقطه روی صفحه وجود دارد. هیچ سه نقطه ای روی یک خط نیستند. نقطه ای را "خوب" مینامیم که مجموع فواصل ان تا همه نقاط کمینه باشد. ثابت کنید دقیقا یک نقطه خوب وجود دارد.

☺. n لامپ روی یک خط قرار داده‌ایم. همگی بجز لامپ اول در ابتدا خاموش هستند. در هر مرحله اگر لامپی با همسایه‌هایش در مرحله قبل در یک وضعیت بود در این مرحله خاموش می‌شود و درغیر این صورت روشن می‌شود. ثابت کنید بینهایت n داریم که بالاخره همه‌ی لامپ‌ها خاموش می‌شوند و بینهایت n داریم که هرگز همه لامپ‌ها خاموش نمی‌شوند.

☹. P عددی فرد و اول است. چند زیرمجموعه‌ی P عضوی از مجموعه {1, 2, . . . , 2P} وجود دارد که مجموع اعضایش بر P بخش پذیر باشد؟

☺.بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، یک زوج ضلعی رسم کرده ایم که اضلاع آن یکی درمیان عمودی هستند. در ضمن در حین رسم این چندضلعی، همه اضلاع عمودی از پایین به بالا رسم شده اند. ثابت کنید این چندضلعی خودش را قطع کرده است.

راهنمایی: از اکسترمال استفاده کنید. ضلع‌های عمودی‌ای را در نظر بگیرید که کمترین X و بیشترین X را داشته باشند.

این اضلاع چه ویژگی‌ای دارند؟

فطر آمده خوردنی فراوان بخورید　　پیتزا و کباب و مرغ بریان بخورید

دزدانه اگر در رمضان می خوردید　　شوال رسیده پس نمایان بخورید ☺

☹. تعدادی کارت داریم که روی هرکدام یکی از اعداد ۱ تا n نوشته شده است و مجموعشان $k \times n!$ است. ثابت کنید می‌توان این کارت‌ها را به k دسته افراز کرد که مجموع اعداد هر دسته برابر $n!$ شود.

حل: از استقرا استفاده می‌کنیم.

پایه: به ازای $n=1$ تمامی اعداد برابر ۱ هستند و در نتیجه هر دسته برابر با یک کارت خواهد بود.

گام: کارت‌هایی را که اعداد آنها برابر n نیستند جدا کنید. در هر مرحله n تا از آنها را برداشته و طبق لم می‌توان تعدادی از آنها را انتخاب کرد که مجموعشان بر n بخشپذیر باشد. چون هر کارت عددی بین ۱ تا $n-1$ دارد، مجموع هر دسته عددی بین n تا $n(n-1)$ خواهد بود. در نهایت تمامی کارت‌ها دسته‌بندی شده‌اند به صورتیکه مجموع هر دسته بر n بخشپذیر است.

حال هر دسته را یک کارت در نظر بگیرید (عدد هر کارت برابر مجموع اعداد آن دسته تقسیم بر n است). در نتیجه عدد هر کارت بین ۱ تا $n-1$ است و مجموع کارت‌ها برابر با $k \times (n-1)!$ است. در نتیجه شرایط فرض استقرا برای $n-1$ وجود دارد و می‌توان کارت‌ها را به k دسته با مجموع برابر تقسیم کرد. با بازسازی مسئله (جایگزینی دسته‌ها به جای کارت‌های جدید) حکم اصلی مسئله اثبات می‌شود.