www.icivil.ir

پرتال جامع دانشجویان و مهندسین عمران

ارائه کتابها و جزوات رایگان مهندسی عمران

بهترین و برترین مقالات روز عمران

انجمن های تخصصی مهندسی عمران

فروشگاه تخصصی مهندسی عمران

تیرها

تیرها، عناصری هستند که در برابر خمش ناشی از اعمال بار مقاومت می‌کند. اغلب تیرها میله‌های منشوری بلندند و بار معمولاً عمود بر محور میله وارد می‌کنند.

تردیدی نیست که تیر مهمترین عنصر سازه‌ای است. بنابراین درک اساسی نظری طراحی تیر اهمیت بسزایی دارد. برای تحلیل قابلیت‌های باربری تیر، ابتدا باید شرایط تعادل کل تیر و هر بخش از آن را که جداگانه درنظر گرفته می‌شود، تعیین کنیم. سپس باید روابط بین نیروهای حاصل و مقاومت داخلی تیر برای تحمل این نیروها را بدست آوریم. بخش اول این تحلیل، مستلزم کاربرد اصول استاتیک است. بخش دوم شامل مشخصه‌های اصطکاکی ماده است و معمولاً در درس مقاومت مصالح یا مکانیک جامدات بررسی می‌شود.

انواع نیرهایی که در تیر ایجاد می‌شود:

۱. نیروی محوری
۲. نیروی برشی
۳. نیروی خمشی
۴. نیروی پیچشی

نیروی محوری تیرها به گونه‌ای اتفاق می‌افتد که تیر در یک قاب خمشی قرار داشته باشد و نیروهایی که به ستون قاب وارد می‌شود، آن را به صورت افقی به تیر منتقل می‌کند و نیروی محوری یک حالت فشاری به تیر وجود می‌آمد. نیروی محوری در تیرها کمتر بررسی می‌شود، چون در تیرها نیروی قالب، نیروهای برشی و خمشی هستند.

بررسی تیرها در حالت برشی و خمشی

تیرها علاوه بر تحمل فشار و کشش که بدیهی‌ترین حالت تحمل بار در اعضای آن می‌باشد، می‌توانند در برابر خمش و برش نیز مقاومت کنند. این در اثر را در شکل زیر نشان می‌دهیم. نیروی V را نیروی برشی، کوپل M را لنگر خمشی می‌گویند. این آثار معرف مولفه‌های برداری برآیند نیروهای وارد بر مقطع عرضی تیر است.

نیروی برشی V و لنگر خمشی M را درنظر می‌گیریم که از نیروهای وارد بر تیر، در یک صفحه ناشی می‌شود. قراردادهای مربوط به مقادیر مثبت نیروهای برشی V و لنگر خمشی M که در شکل زیر نشان داده شده‌اند.

با توجه به اصل کنش و واکنش، مشاهده می‌شود که V و M، روی دو مقطع جهت‌های معکوس دارند. غالباً بدون محاسبه نمی‌توان گفت که نیروی برشی و لنگر خمشی در مقطعی خاص، منفی یا مثبت‌اند. به این دلیل توصیه می‌شود که M و V را

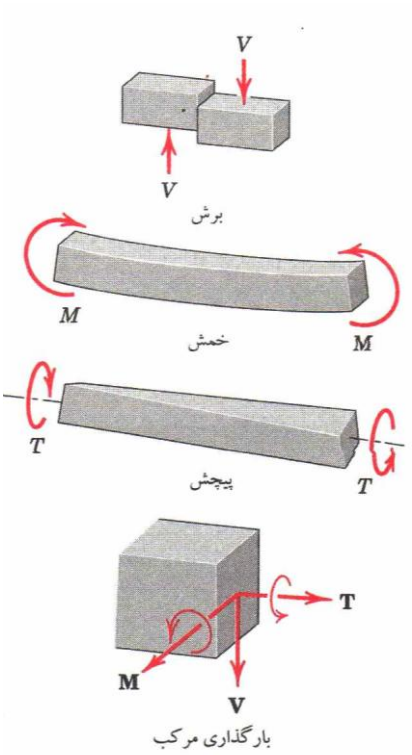
روی نموردار جسم آزاد با جهت مثبت نشان دهیم و صبر می‌کنیم تا علامت جبری مقادیر محاسبه شده، جهت واقعی آنها را نشان دهد.

برای بهتر فهمیدن و درک بهتر، تعبیر فیزیکی کوپل خمشی M، تیری مطابق شکل زیر درنظر می‌گیریم که توسط دو لنگر مثبت مساوی و مخالف که بر دو سر آن وارد می‌کنیم، خم شده است. مقطع تیر را (H تیر آهن بال پهن) با جان بسیار باریک و بال‌های ضخیم فرض می‌کنیم. در این تیر می‌توانیم از باری که جان بسیار باریک بال‌های ضخیم فرض کنیم. همچنین می‌توانیم از باری که جان کوچک تحمل می‌کند، در مقایسه با بارهایی که در بار آن تحمل می‌کنند، چشم‌پوشی کنیم. مشاهده می‌شود که بال بالایی تیر کوتاهتر و تحت فشار است و بال پایینی طویلتر و تحت کشش است. برآیند این دو نیرو، یکی کششی و دیگری فشاری، در هر مقطع، تیر کوپلی است که مقدار آن با لنگر خمشی در آن مقطع برابر است. اگر تیری با مقطعی به شکل دیگر را با همین ترتیب بارگذاری کنیم، توزیع نیرو در مقطع تیر متفاوت خواهد بود، اما کوپل برآیند تغییر نمی‌کند.

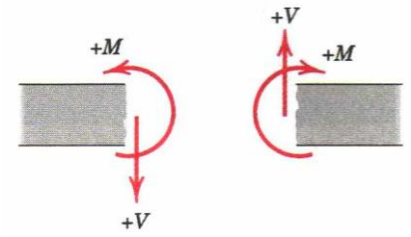
نمودارهای لنگر برشی و خمشی

تغییرات نیروی برشی V و لنگر خشمی M در طول تیر اطلاعات لازم برای تحلیل طرح تیر فراهم می‌کند. به ویژه اندازه ماکزیمم لنگر خمشی معمولاً نخستین عاملی است که در طراحی یا انتخاب تیر درنظر گرفته می‌شود و مقدار مکانی آن را باید تعیین کرد. بهترین شیوه نمایش تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی، شیوه ترسیمی است و با ترسیم عبارت‌های بدست آمده برای V و M بر حسب فاصله روی تیر، نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر بدست آید.

نخستین گام در تعیین روابط نیروی برشی و لنگر خمشی، تعیین مقدار واکنش‌های خارجی است که با استفاده از معادله‌های تعادل جسم آزاد کل تیر بدست می‌آید. سپس بخشی از تیر را در سمت راست یا چپ مقطع عرضی اختیاری مجزا می‌کنیم. نمودار آزاد این بخش را می‌کشیم و معادله‌های تعادل را برای آن می‌نویسیم. از این معادله‌ها، عبارت‌هایی برای نیروی برشی V و لنگر خمشی M دارد و به آن در سمت راست یا سمت چپ مقطع، کمتر است. معمولاً کل مساله را ساده‌تر می‌کند. از انتخاب مقطع عرضی به محل وارد شده بار یا کوپل متمرکز منطبق است، خودداری کنید، زیرا چنین مقطعی نقطه ناپیوستگی تغییرات نیروی برشی یا لنگر خمشی است. سرانجام به این نکته مهم می‌رسیم که محاسبه M و V در هر طرف مقطع انتخاب باید با قرارداد مثبت نشان داده شده که در شکل زیر سازگار باشد.

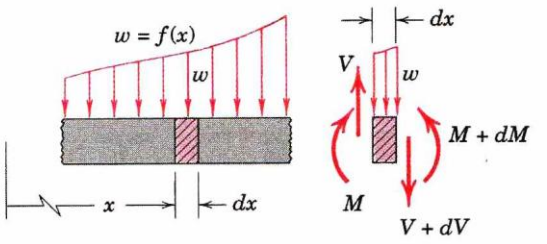


شکل ۵-۲۲



بارگذاری در حالت عام، روابط نیروی برشی و لنگر خمشی

برای هر تیر تحت بارگذاری گسترد می‌توان روابط کلی معینی بدست آورد که در تعیین توزیع نیرو اگر در طول تیر خواهند بود. در شکل زیر بخشی از تیر بارگذاری شده نشان داده شده و در آن جزء dx از تیر مجزا شده است. بار w معرف نیرو به واحد طول تیر است.



در نقطه x نیروی برشی V و لنگر M وارد به جزء و در جهت مثبت نمایش داده شده‌اند. در دیگر جزء با مختص x+dx این کمیت‌ها باز هم با جهت مثبت نشان داده شده است، اما باید آنها را V+dV و M+dM ناحیه زیر را و V و M تغییر می‌کنند.

بار w را می‌توان در طول جزء ثابت فرض کرد. زیرا این طول دیفرانسیل است و اثر تغییر w در حد، در مقایسه با اثر خود w ناچیز است. تعادل این جزء مستلزم آن است که حاصل جمع نیروهای عمودی صفر است. بنابراین داریم:

$$V - wdx - (V + dV) = 0$$

یا

$$W = -\frac{dV}{dx} \qquad (1\text{-}1)$$

در معادله ۱-۱ مشاهده می‌شود که شیب نمودار نیروی برشی باید در همه جا با مقدار بار اعمالی برابر باشد. معادله فوق در هر طرف بار متمرکز صادق‌اند، اما در محل وارد شدن این بار صادق نیستند، زیرا تغییر ناگهانی نیروی برشی سبب ایجاد ناپیوستگی می‌شود.

اکنون می‌توان با انتگرال‌گیری از معادلعه ۱-۱ نیروی برشی V را بر حسب بار w بیان کرد. بنابراین:

$$\int_{V_o}^{V} dV = -\int_{x_o}^{x} wdx$$

یا

$V=V_o+$(منحنی سطح زیر منحنی بارگذاری از x_o تا x)

در این عبارت V_o نیروی برشی در نقطه x_o و V نیروی برشی در نقطه x است. معمولاً جمع بتن مساحت سطح زیر نمودار بارگذاری، راه ساده‌ای برای ترسیم نمودار نیروی برشی است.

تعادل جزء نشان داده شده در شکل زیر ایجاب می‌کند که حاصل جمع لنگر صفر شود. با جمع بتن لنگرها حول ضلع چپ نتیجه می‌شود:

$$M + wdx\frac{dx}{2} + (v + dv)dx - (M - dm) = 0$$

دو M حذف شده و جمله های $w(dx)^2/2$ و dvdx را نیز می‌توان نادیده گرفت، زیر در مقایسه با جمله‌های باقیمانده، دیفرانسیل‌هایی از مرتبه بالاترند. نتیجه می‌شود:

$$V = \frac{dm}{dx} \qquad (2\text{-}1)$$

که نشان می‌دهد نیروی برشی در همه جا با شیب منحنی برابر است. معادله ۱-۲ در هر دو طرف کوپل متمرکز صادق است، اما در محل وارد شدن کوپل صادق نیستند، زیرا تغییر ناگهانی لنگر سبب ایجاد ناپیوستگی می‌شود.

اکنون می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله ۱-۲، لنگر M را بر حسب نیروی برشی V بیان کرد. در نتیجه:

$$\int_{m_o}^{m} dm = \int_{x_o}^{x} Vdx \qquad (3\text{-}1)$$

یا

$M=M_o+$(سطح زیر نمودار نیروی برشی x_o تا x)

در این عبارت M_o لنگر خمشی در نقطه x_o و M لنگر خمشی در نقطه x است. در تیرهایی که لنگر خمشی M_o در نقطه $X_o=0$ به آنها وارد نمی‌شود. لنگر کل در هر مقطع برابر است با سطح زیر نمودار نیروی برشی آن مقطع. معمولاً جمع بتن مساحت سطوح زیر نمودار نیروی برشی آسان‌ترین راه برای ترسیم نمودار لنگر خمشی است. هنگانی که V از صفر می‌گذرد و تابع پیوسته x است و داریم: $\frac{dV}{dx} \neq 0$. لنگر خمشی M مینیمم یا ماکزیمم است، زیرا در چنین نقطه‌ای $\frac{dm}{dx} = 0$، هرگاه V به طور ناپیوسته محور صفر را قطع کند، نیز مقادیر بحرانی M پدید می‌آیند. این وضعیت در تیرهای تحت بار متمرکز مشاهده می‌شود.

با توجه به معادله ۱-۱ و ۱-۲، مشاهده می‌شود که درجه V بر حسب x یک رتبه بالاتر از درجه w است. به علاوه درجه M بر حسب x نیز یک مرتبه بالاتر از درجه V است. در نتیجه درجه M بر حسب x دو مرتبه بالاتر از w است. پس برای تیری که باری مانند $w=x$ بر آن وارد می‌شود که بر حسب x از درجه اول است. نیروی برشی V درجه دو لنگر خمشی M درجه سه خواهد بود.

معادله‌های فوق را می‌توان با هم تلفیق کرد و معادله زیر را بدست آورد:

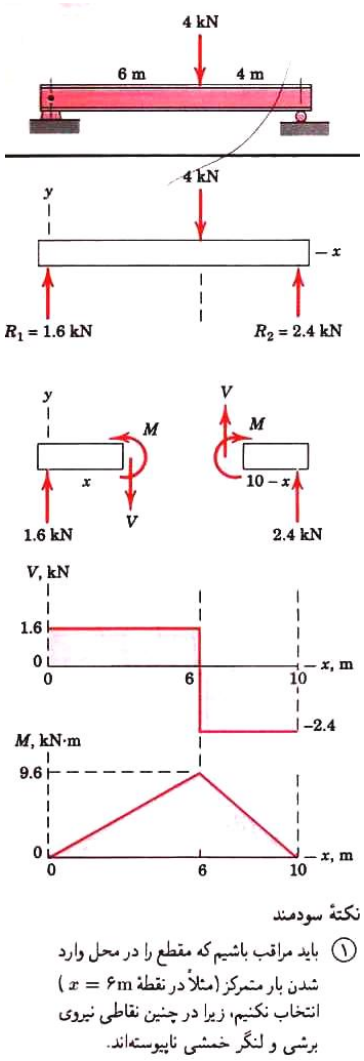
$$\frac{d^2m}{dx^2} = -w \qquad (3\text{-}1)$$

بنابراین هرگاه w تابع معلوم x باشد، لنگر M را می‌توان با دوبار انتگرال‌گیری بدست آورد. به شرط آنکه هر بار حدود انتگرال‌گیری بدرستی محاسبه شود. این روش هنگامی بکار می‌آید که w تابع پیوسته باشد. وقتی تیر در بیش از یک صفحه خم شود، می‌توان در هر صفحه تحلیل جداگانه انجام داد و نتایج را به صورت برداری با هم ترکیب کرد.

مسائل

مساله اول: مطلوب است تعیین و توزیع نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر ساده ناشی از بار متمرکز 4KN.

حل: با استفاده از نمودار جسم آزاد کل تیر، واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم که عبارتند از:



نکتهٔ سودمند

① باید مراقب باشیم که مقطع را در محل وارد شدن بار متمرکز (مثلاً در نقطهٔ $x = 6\text{m}$) انتخاب نکنیم، زیرا در چنین نقاطی نیروی برشی و لنگر خمشی ناپیوسته‌اند.

R_1=1.6KN, R_2=2.4KN

سپس مقطعی از تیر به طول x را مجزا می‌کنیم و روی نمودار آزاد آن نیروی برشی V و لنگر خمشی M را با جهت مثبت نمایش می‌دهیم. از شرایط تعادل نتیجه می‌شود:

$$\left[\sum f_y = 0\right] \quad 1.6 - V = 0 \quad V = 1.6KN$$
$$\left[\sum mR_1 = 0\right] \quad m - 1.6x = 0 \quad m = 1.6x$$

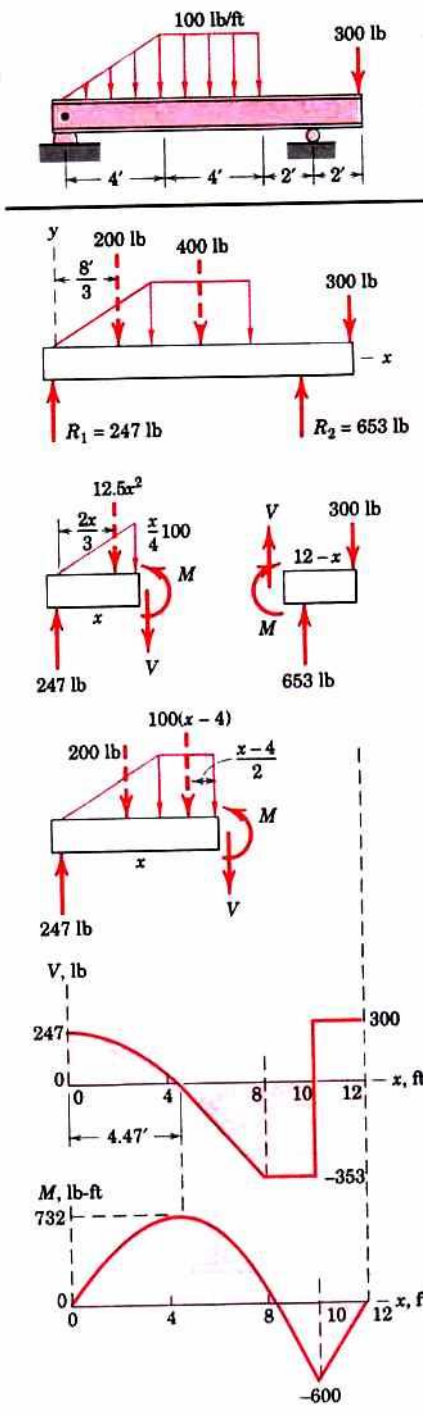
این مقادیر V و m در حدود همه مقاطع تیر، واقع در سمت چپ بار 4KN صادق‌اند. سپس مقطعی از تیر مجزا می‌کنیم که در سمت راست بار 4KN واقع در سمت راست است و V و M را با جهت مثبت روی نمودار آزاد این بخش از تیر نشان می‌دهیم.

تعادل ایجاب می‌کند که:

$$\left[\sum f_y = 0\right] \quad V + 24 = 0 \qquad V = 2.4KN$$
$$\left[\sum mR_2 = 0\right] \quad -(2.4)(10-x) + m = 0 \qquad m = 2.4(10-x)$$

این نتایج فقط در حدود مقاطعی از تیر صادق‌اند که در سمت راست بار 4KN واقع‌اند. این مقدارهای V و M را مطابق با شکل ترسیم می‌کنیم. ماکزیمم لنگر خمشی در جایی ایجاد می‌شود کخه جهت نیروی برشی تغییر می‌کند. وقتی از نقطه x=0 شروع می‌کنیم و در امتداد مثبت x پیش می‌رویم، مشاهده می‌کنیم که لنگر M برابر است با مساحت زیر سطح نمودار.

مساله ۲: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر بارگذاری شده مطابق شکل را ترسیم کنید. اگر M ماکزیمم و فاصله آن x، از انتهای سمت چپ تیر را تعیین کنید.



حل: با درنظر گرفتن برآیند بارهای گسترده که روی نمودار آزاد کل تیر نشان داده شده است، می‌توان واکنش در تکیه‌گاه‌ها را تعیین کرد. نخستین بخش تیر را از روی نمودار آزاد و در فاصله $0<x<4f_t$ تحلیل می‌کنیم. از جمع بتن نیروهای عمودی و لنگرها مدل مقطع نتیجه می‌شود.

$$\left[\sum f_y = 0\right] \qquad V = 247 - 12.5x^2$$

$$\left[\sum m = 0\right] \qquad M + \left(12.5x^2\right)x/3 - 247x = 0 \qquad M = 247x - 417x^3$$

این مقدارهای V و M در فاصله $0<x<4f_t$ صادق‌اند و در نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در این فاصله ترسیم می‌شوند. از نمودار آزاد قطعه‌ای از تیر در فاصله $4<x<8f_t$ شرط تعادل در امتداد عمودی و حاصل جمع لنگرها مدل مقطع نتیجه می‌شود.

$$\left[\sum f_y = 0\right] \qquad V + 100(x-4) + 200 - 247 = 0$$

$$\left[\sum M = 0\right] \qquad M + 100(X-4)\frac{x-4}{2} + 200[x - 2/3(4)] - 247x = 0$$

$$M = -267 + 447x - 50x^2$$

این مقدارهای V و M را روی نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در فاصله $4(x)5f_t$ نمایش می‌دهیم. تحلیل بقیه تیر را از روی نمودار آزاد بخشی از تیر ادامه می‌دهیم که در سمت راست مقطعی واقع در فاصله بعدی قرار دارد. شایان ذکر است که V و M را با جهت مثبت نمایش داده‌ایم. از جمع بتن نیروها در امتداد عمودی و جمع بتن لنگرها طول این مقطع نتیجه می‌شود.

$$V = -353lb, \qquad M = 2930 - 353x$$

این مقدارهای V و M را روی نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در فاصله $5(x)10f_t$ نمایش دهیم. آخرین فاصله را می‌توان با چشم بررسی کرد. نیروی برشی ثابت و برابر 300lb+ است و لنگر خمشی از رابطه خط مستقیم پیروی می‌کند و از مقدار صفر در سمت راست تیر شروع می‌شود.

لنگر ماکزیمم در نقطه $x=4.47f_t$ ایجاد می‌شود که در آن منحنی نیروی برشی محور صفر را قطع می‌کند. اندازه M با قرار دادن مقدار M در فاصله دوم به ازای این مقدار x بدست می‌آید. بنابراین لنگر max برابر است با:

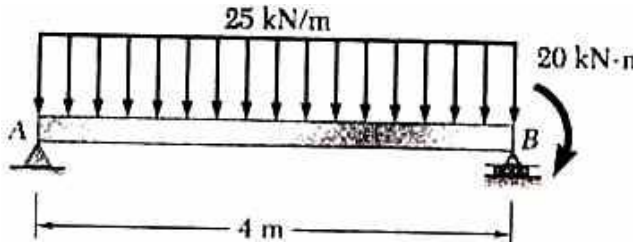
$M=732lb\text{-}f_t$

مانند قبل که تغییر M تا هر مقطع، با حساسیت سطح زیر نمودار نیروی برشی تا آن مقطع برابر است. مثلاً برای $x<4f_t$ داریم:

$$\left[Dm = \int V d_x\right] \qquad M - 0 = \int_0^x \left(247 - 12.5x^2\right) d_{\bar{X}}$$

$$M = 247x - 4.17x^3$$

مثال ۳: برای تیر بارگذاری نشان داده شده، الف) نمودارهای برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. ب) بارگذاری محل حداکثر قدرمطلق گشتاور خمشی را تعیین کنید.



$\delta_{max} = B*4-100*2-20=0 \qquad b=55KN$

$\sum f_x = Ax = 0$

$+\uparrow \sum f_Y = 0 \qquad A_y+55-100=0 \qquad A_y=+45KN$

نمودار برش

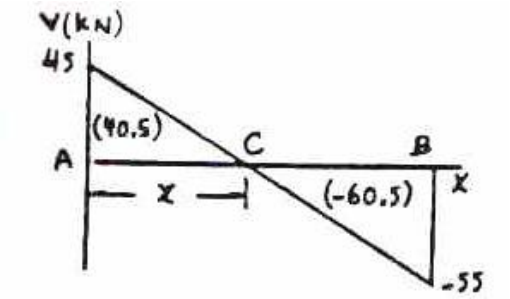
در نقطه A:

$V_A=A_y=+45KN$

برای تعیین نقطه C جابجایی که V=0 است، می‌نویسیم:

$V_C-V_A=-Wx$

$0-45=-25x \rightarrow \qquad x=108m$

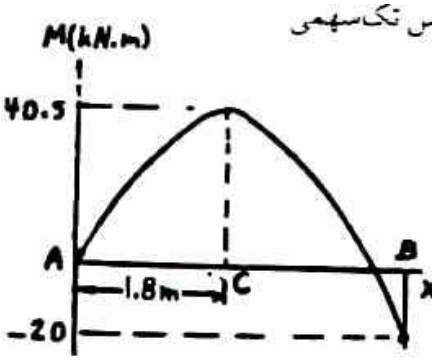


گشتاور خمشی

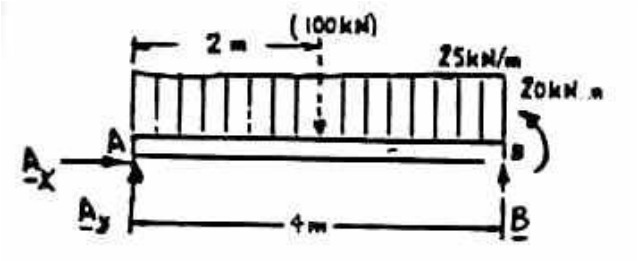
در نقطه A: $M_A=0$

در نقطه B: $M_B=-20KN.M$

$|m|_{max}=40.5KN.m$



مثال ۴: برای تیر بارگذاری نشان داده شده: الف) نمودار برش و خمش را رسم کنید. (با فرض کوپل 20KN.m وارد بر B). ب) بزرگی و محل حداکثر قدرمطلق را تعیین کنید.



$+\uparrow \sum M_A = 0: \qquad B*4-100*2+20=0 \qquad \rightarrow \qquad B=45KN$

$\sum f_x = 0 \qquad A_x = 0$

$\sum f_y = 0 \qquad A_y + 45 - 100 = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_y = +55kn$

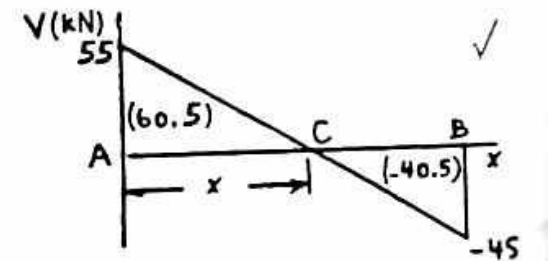
نیروی برش

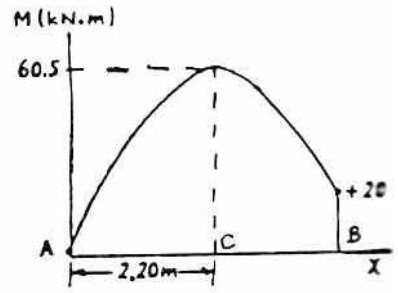
$V_A = A_y = +55KN$

برای تعیین نقطه C جابجایی که V=0 است، می‌نویسیم:

$V_C - V_A = -w_x$

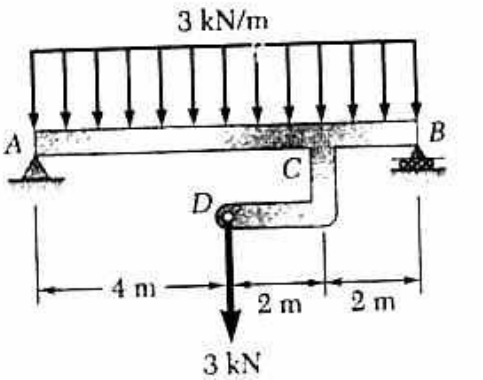
$0-55 = -25x \quad \rightarrow \qquad x = 2.2$





مثال ۵: الف) نمودار برشی و گشتاور خمشی را برای تیر AB رسم کنید.

ب) بزرگی و محل حداکثر قدرمطلق گشتاور خمشی را تعیین کنید.



حل: عکس العمل‌ها در تکیه‌گاه‌ها:

به علت متقارن بودن بارها:

A=B=1/2(3*8+3)

A=B=13.5KN↑

نمودار بار برای AB:

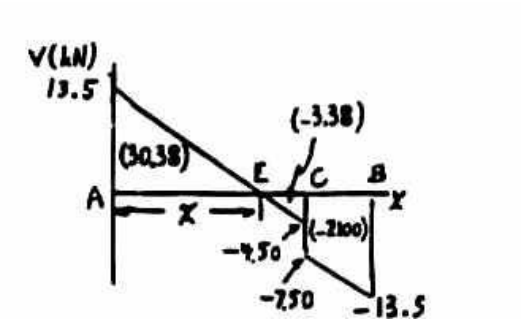
3KN نیرو در D را با یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل در نقطه C جایگزین می‌کنیم.

نمودار برش

در نقطه A: VA=A=13.5KN

برای تعیین نقطه E جایی که V=0 است، می‌نویسیم:

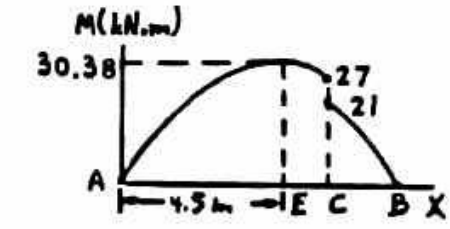
$$V_E - V_A = -w_x$$
$$0 - 13.5 = -3x \qquad \rightarrow \qquad x = 4.5$$



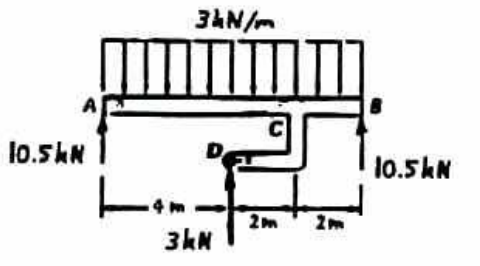
نمودار گشتاور خمشی

در نقطه A: $M_A=0$

با توجه باینکه 6KN.m در نقطه C مربوط به کوپل کم می‌شود.



مثال ۶: مساله قبل را با این فرض حل کنید که نیروی 3KN وارد بر نقطه D رو به بالا باشد.



عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها

به علت تقارن بار

A=B=1/2(3*8-3)

A=B=10.5KN↑

نمودار بار:

نیروی 3KN در D را با یک سیستم کوپل ـ نیروی معادل در C جایگزین می‌کنیم.

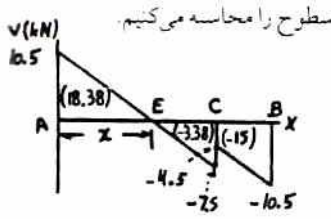
در نقطه A: $V_A=A=10.5KN$

برای تعیین نقطه E جایی که V=0 است، می‌نویسیم:

$$VE-VA=-wx$$

$$0-10.5=-3xx \qquad \rightarrow \qquad x=3.5m$$

سطوح را محاسبه می‌کنیم.

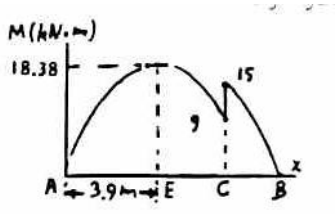


نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: MA=0

باید توجه داشته باشیم 6KN.M در نقطه C مربوط به کوپل اضافه می‌شود.

$|M|_{max}=18.38KN.m$



مثال ۷: برای تیر بارگذاری نشان داده شده: الف) نمودارهای برشی و گشتاور خمشی را رسم کنید. ب) حداکثر مطلق برش و گشتاور خمشی را حساب کنید.

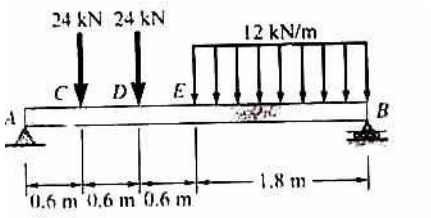
$$+\uparrow \sum M_B=0: 24*3+24*2.4+21.6*0.9-A_y*3.6=0$$

$$A_y=41.4KN$$

$$\sum f_x=0 \qquad \rightarrow \qquad A_x=0$$

نمودار برشی:

در نقطه A: $V_A=A_Y=+41.4KN$

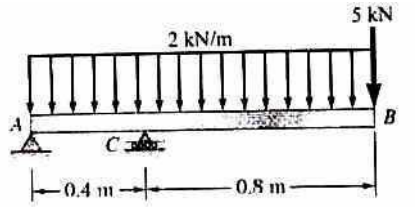


نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: $M_A=0$

$|M|_{max}=35.3KN.m$

مثال ۸: همان صورت مساله قبل است.



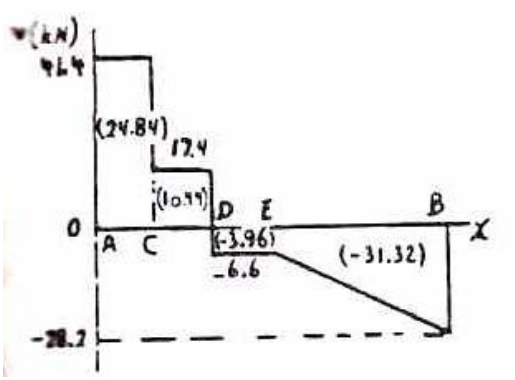
$$+\uparrow \sum M_A = 0 \rightarrow \quad C*0.4-2.4*0.6-5*1.2=0 \rightarrow \quad C=18.6KN$$
$$\sum f_x = 0 : A_X = 0$$

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow \quad Ay+18.6-2.4-5=0 \rightarrow \quad Ay=-11.2KN$$

نمودار برش:

در نقطه A: $V_A=Ay=-11.2KN$

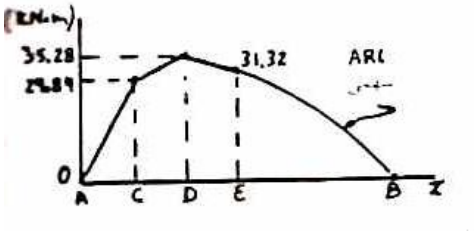
$|V|=Ay=-11.2KN$



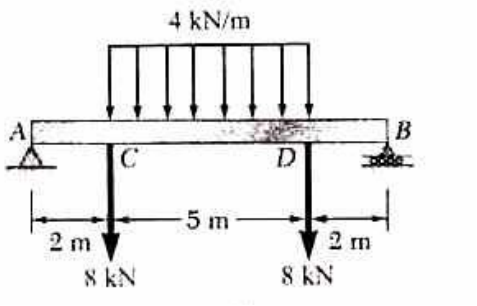
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: $M_A=0$

$|M|_{max}=4.64KN.m$



مثال ۹: برای تیر بارگذاری نشان داده شده: الف) نمودار برش و خمش را رسم کنیم. ب) حداکثر مطلق برش و گشتاور خمش را تعیین کنید.

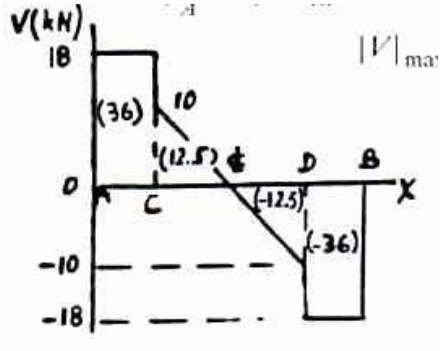


A=B=1/2(بار کل)=1/2(8+8+4/5)KN

A=B=18KN

نمودار برش: $V_A=18KN$

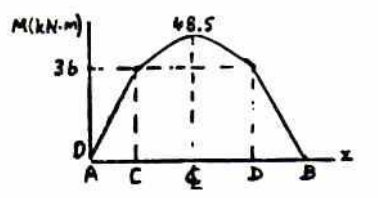
|V|=18KN



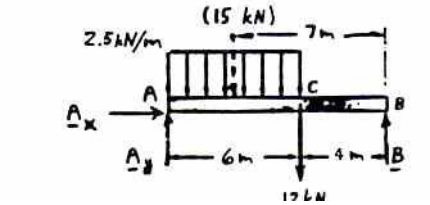
نمودار گشتاور خمش:

در نقطه A: $M_A=0$

$|M|_{max}=48.5KN.m$



مثال ۱۰: همان صورت مثال قبلی



$$\sum f_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 0$$
$$+\uparrow \sum M_B = 0$$
$$12*4+15*7-Ay*10=0 \quad \rightarrow \quad Ay = 15.3KN$$
$$+\uparrow \sum fy = 0 \quad \rightarrow \quad B+15.3-1-12=0 \quad \rightarrow \quad B = 110.7KN$$

نمودار برش

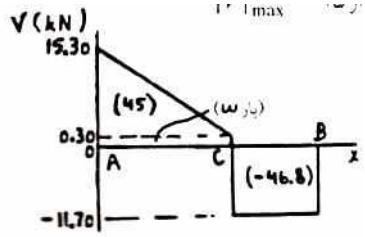
در نقطه A: V_A=Ay=15.3KN

$|V|_{max}$=15.3KN

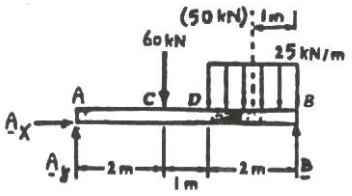
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: M_A=0

$|M|_{max}$=46.8KM.m



مثال ۱۱: صورت مساله قبلی

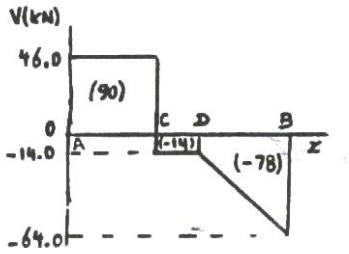


$$\sum f_x = 0 \quad \rightarrow \quad Ax = 0$$
$$+\uparrow \sum M_B = 0 \rightarrow \quad 60*3+50*4-Ay*5=0 \quad \rightarrow \quad Ay = 46KN$$
$$+\uparrow \sum f_y = 0$$
$$B+46-60-50=0 \quad \rightarrow \quad B = 64KN$$

نمودار برش

در نقطه A: V_A=Ay=64KN

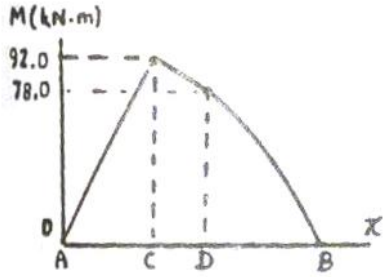
$|V|_{max}$=64KN



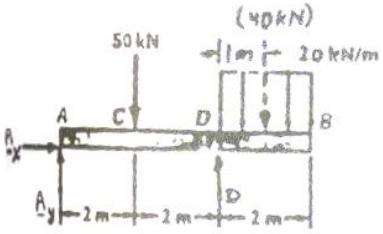
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: $M_A=0$

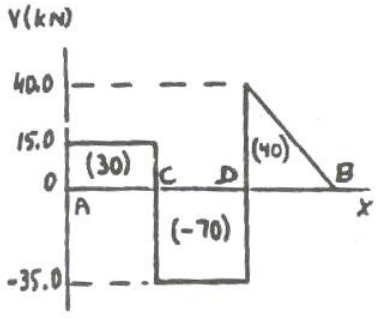
$|M|_{max}=92KN.M$



مثال ۱۲: صورت مساله قبلی:

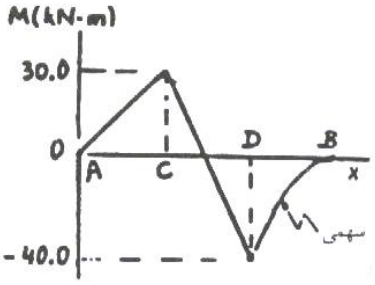


$$\sum f_x = 0 \quad \rightarrow \quad Ax = 0$$
$$+\uparrow \sum M_D = 0 \rightarrow \quad 50*2-40*1-Ay*4=0 \quad \rightarrow \quad Ay = 15KN$$
$$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad \rightarrow \quad D+15-50-40=0 \quad \rightarrow \quad D = 75KN$$

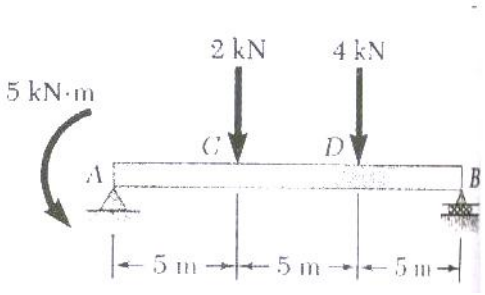


نمودار برش

در نقطه A: $V_A=Ay=15KN$



مثال ۱۳: برای تیر و بارگذاری نشان داده شده: الف) نمودارهای برش و گشتاور خمشی را رسم کنید. ب) حداکثر مطلق برش و گشتاور خمشی را تعیین کنید.



نمودار آزاد: تیر

$$+\uparrow \sum M_B = 0 : 5 + 2*10 + 4*5 - Ay*15 = 0$$

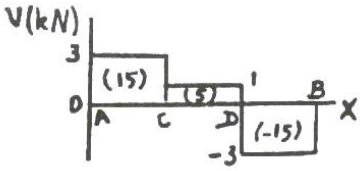
$$Ay = 3kN$$

$$\sum f_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad Ax = 0$$

نمودار برش:

در نقطه A: $V_A = Ay = 3Kn$

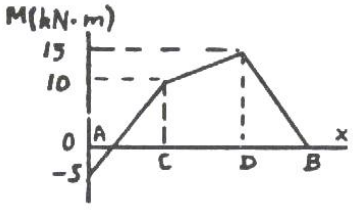
$|V|_{max} = 3kN$



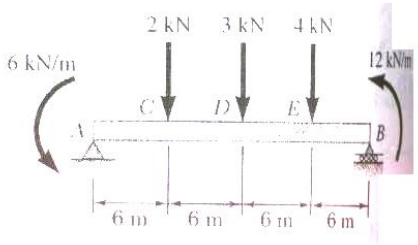
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: $M_A = -5kN.m$

$|M|_{max} = 15kN.m$



مثال ۱۴: همان صورت مساله قبلی



نمودار جسم آزاد:

$$+\uparrow \sum M_B = 0$$

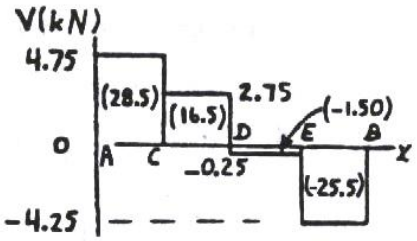
$$6+12+2*18+3*12+4*6-Ay*24=0 \quad \rightarrow \quad Ay=4.75kN$$

$$\sum f_x = 0 \quad , \quad A_x = 0$$

نمودار برش:

در نقطه A: $V_A=Ay=4.75Kn$

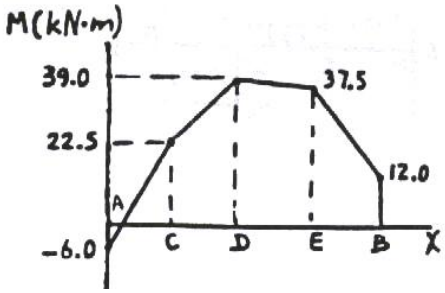
$|V|_{max}=4.75kN$



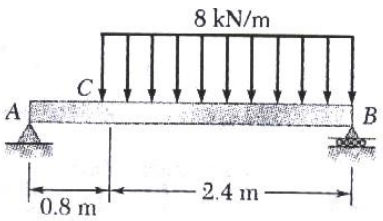
نمودار گشتاور خمشی

در نقطه A: $M_A=-6kN.m$

$|M|_{max}=39kN.m$



مثال ۱۵: صورت مساله قبلی



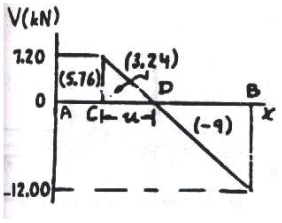
$$\sum f_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_x = 0$$
$$+\uparrow \sum M_B = 0 \; 19.2*1.2 - Ay*3.2 \qquad \rightarrow \qquad Ay = 7.2kN`$$

نمودار برش:

$$V_A = V_e = Ay = 7.2kN$$

برای تعیین نوع D جایی که V=0 است، می‌نویسیم:

$$V_D - V_e = -w_u$$
$$0 - 7.2 = -8u \quad \approx \qquad u = 0.9m$$



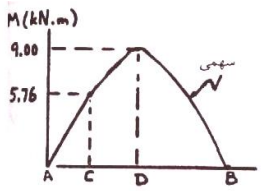
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: $M_A=0$

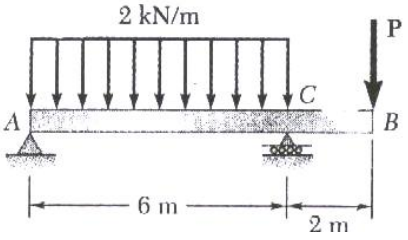
بیشترین مقدار در نقطه D ایجاد می‌شود با:

$A_D=0.8+0.9=1.7m$

$|M|_{max}=9kN.m$



مثال ۱۶: برای تیر بارگذاری نشان داده شده نمودارهای برش و گشتاور خمش را رسم کنیم و بزرگی و محل حداکثر قدرمطلق گشتاور خمشی را تعیین کنید. برای P=6kN است.



$$\sum f_x = 0 \quad \rightarrow \quad Ax = 0$$
$$+\uparrow \sum M_A = 0 \rightarrow \quad C*6 - 12*3 - P*8 = 0 \quad \rightarrow \quad C = 6 + 4/3P$$

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad \rightarrow \quad Ay + (6 + 4/3P) - 12 - P = 0 \quad \rightarrow \quad Ay = 6 - 1/3P$$

الف) P=6kN

نمودار بار:

با قرار دادن به جای P در معادلات ۱ و ۲:

Ay=6-1/3*6=4kN

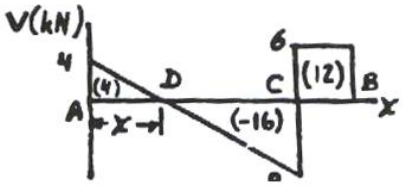
C=6+4/3(6)=14kN

نمودار برش:

V_A=Vy=+4kN

برای تعیین نقطه D جایی که V=0 است، می‌نویسیم:

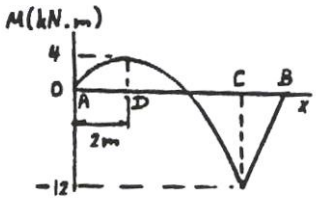
$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 4 = -2x \quad \approx \quad X = 2$$



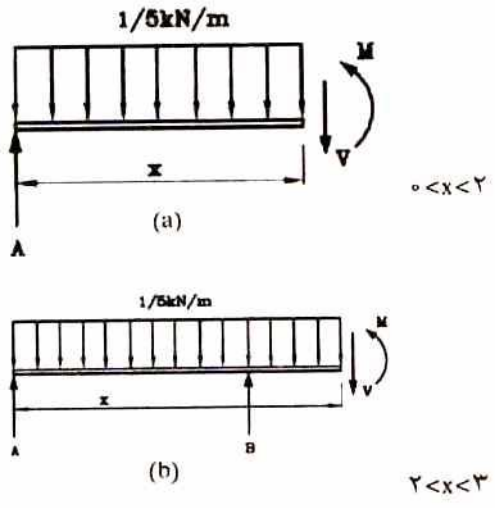
نمودار گشتاور خمشی:

در نقطه A: M_A=0

$|M|_{max}$=12



مثال ۱۷: برای تیر نشان داده شده نمودارهای برش و گشتاور خمشی را رسم کنیم و بزرگی و محل حداکثر قدر مطلق گشتاور خمشی را تعیین کنید.



d فاصله R تا مرکز دستگاه مختصات است.

R=1.5*3=4.5kN, d=1.5m

$\Sigma_{MB}=0$ → -A*2+R*0.5=0 → A=1.125kN

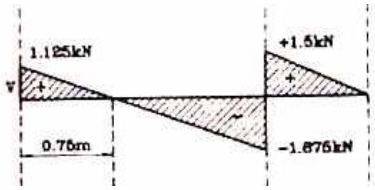
$\Sigma_{MA}=0$ → B*2-R*1.5=0 → B=3.375kN

الف)

0<x<2 → ΣFy=0 → V=1.125-1.5x → V=-1.5x+1.125kN

ب)

2<x<3 → ΣFy=0 → V=1.125-3.375-1.5x → V=-1.5x+4.5kN



الف)

$0\leq x\leq 2$ → $\Sigma M_0=0$ → $M=1.125-(1.5x)x/2$

→ $M=-0.75x^2+1.125x$

ب)

$2\leq x\leq 3$ → $\Sigma M_0=0$ → $M=1.125+3.375(X-2)-(1.5x(x/2)$

→ $M=-0.75x^2+4.5x-6.75$

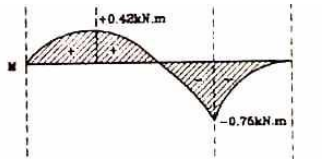
با توجه به روابط فوق، نمودار V و M مطابق شکل ترسیم می‌شود.

M=0 → $-0.75x^2+1.125x=0$

x=0

x=1.125/0.75=1.5m

پس در b=1.5m مقدار M صفر است.



منابع:

استاتیک، فردیناند پی.بیر و ای.راسل جانستون. ترجمه دکتر ابراهیم واحدیان. ۱۳۸۱.

تست دیباگران کاردانی به کارشناسی.

مقاومت مصالح پوپوف