

۱. ماشین حساب آقای جمالی (به متن درس رجوع کنید) را روشن کرده‌ایم. به ترتیب از چپ به راست، چه دکمه‌هایی را باید فشار دهیم تا هر یک از عبارتهای جبری زیر، در صفحه نمایش دیده شود؟

الف) -1 ب) $-3x$ ج) $x+2$ د) $2x-1$ ه) $x(x-1)$ و) x^2-2x-1

۲. جدول زیر را کامل کنید.

عبارت جبری	جبر بیانی
	قرینه مجموع عددی با یک برابر با همان عدد است.
	مجموع قرینه عددی با یک برابر با همان عدد است.
$ x -1 = \frac{1}{x}$	
$3(a+1)$	
	یکی بیشتر از ریشه سوم عددی
	ریشه سوم یکی بیشتر از عددی برابر با مجذور آن عدد است.
	یکی بیشتر از مجموع توان اول، دوم، سوم، ... و دهم عددی
$(x+1)(x-1)$	

۳. چرا عبارتهای جبری زیر، چند جمله‌ای نیستند؟

الف) $\frac{x^2}{x}$ ب) $(\sqrt{x})^2$ ج) $\sqrt{x^2}$ د) $|x^3|$ ه) x^x و) $(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$

۴. چرا عبارتهای جبری زیر، چند جمله‌ای هستند؟ درجه هر یک را مشخص کنید.

الف) $\frac{x^2+1}{x^2+1}$ (ب) $\sqrt[3]{x^3}$ (ج) $|x^2-3x+1|$ (د) $1-\sqrt{x^4}$

۵. یک چندجمله‌ای را با چندجمله‌ای x^2+1 جمع کرده‌ایم و حاصل چندجمله‌ای x^3-2x^2-1 شده است. آن چندجمله‌ای را پیدا کنید.

۶. در هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک چندجمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل جمع هر سه خانه پشت سر هم مساوی با x شود. چند جمله‌ای که در خانه‌ی * قرار می‌گیرد، چیست؟

$x+1$				*				$x-1$	
-------	--	--	--	---	--	--	--	-------	--

۷. اگر درجه‌ی یک جمله‌ای زیر نسبت به x برابر با ۴، نسبت به y برابر با ۶ و نسبت به z برابر با ۸ باشد، مقادیر a ، b و c را بیابید.

$$\Delta x^a y^b z^c x^b y^c z^a$$

۸. درجه هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را ابتدا نسبت به a ، سپس نسبت به x و در پایان درجه‌ی هر چندجمله‌ای را تعیین کنید.

الف) $2a^5 - 4a^3 x^3 - 7x^4$ (ب) $ax^2 + 2a^3 x - ax^2 + ax$

ج) $(x^2 - ax + 1)(a^2 - ax + 1)$ (د) $ax^2 + a^2 x^2 + b^5$

هـ) $(x+1)(x^2+a)(x^3+a^2)\dots(x^1+a^9)$

۹. درباره‌ی یک جمله‌ای $-\frac{3}{5}x^{\alpha-1}y^{\beta+1}z^\gamma$ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) فرض کنید درجه‌ی این یک جمله‌ای برابر با ۷ باشد. در این صورت حاصل عبارت $\alpha + \beta + \gamma$ چه قدر است؟
 ب) فرض کنید درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به x و y برابر ۱۰ باشد، در این صورت حاصل عبارت $5\alpha + 5\beta$ چه قدر است؟

ج) فرض کنید این یک جمله‌ای را به توان ۲ برسانیم و درجه‌ی عبارت حاصل نسبت به y برابر ۱۸ باشد، در این صورت β چه قدر است؟

۱۰. فاطمه از نتیجه‌ی تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود در لیگ بین مدارس، یک چندجمله‌ای به نام P می‌سازد. در ابتدای فصل $P=1$ است. بعد از هر دیدار اگر تیم برنده شود، چندجمله‌ای P را در x ضرب می‌کند و اگر ببازد، این چندجمله‌ای را در $-y$ ضرب می‌کند و در صورتی که بازی مساوی شود، به این چندجمله‌ای عدد ۱ را اضافه می‌کند. به عنوان مثال اگر نتیجه‌های

تیم به ترتیب بُرد، بُرد، تساوی و باخت باشد، چندجمله‌ای

$$\text{بدست می‌آید. } (1 \times x \times x + 1) \times (-y) = (x^2 + 1) \times (-y) = \boxed{-yx^2 - y}$$

الف) فرض کنید در پایان مسابقه‌ها چندجمله‌ای $x^5y^4 + 2x^3y^2 - y$ بدست آمده است. تعداد برد، باخت و تساوی-های تیم فاطمه را بدست آورید.

ب) کدام یک از چندجمله‌ای‌های $x^2y^2 - xy$ و $x^2y^2 + xy + 1$ می‌تواند مربوط به نتایج بازی در لیگ باشد؟
۱۱. وقتی یک چندجمله‌ای را به شکل مجموعی از تک جمله‌ای‌ها بنویسیم که هر دو شرط زیر را داشته باشد، می‌گوییم این چندجمله‌ای را به شکل **استاندارد** نوشته‌ایم:

(۱) هیچ دو تک جمله‌ای با هم متشابه نباشند.

(۲) درجهٔ تک جمله‌ای‌ها به ترتیب از بزرگ به کوچک باشد.

فرض کنید چندجمله‌ای $x(x+1)(x-2)(x+3)$ را به صورت استاندارد نوشته‌ایم. در این صورت ضریب جمله‌های x^3 و x را در آن پیدا کنید.

۱۲. در این سوال روشی اختراع کرده‌ایم تا به وسیله آن دو چندجمله‌ای P و T را مقایسه کنیم. فرض کنید هر یک از P و T مجموع یک یا چند تک جمله‌ای بر حسب x هستند. ابتدا P و T را به شکل **استاندارد** می‌نویسیم. سپس ضریب تک جمله‌ای با بزرگ‌ترین درجه را در هر دو مقایسه می‌کنیم. هر چندجمله‌ای که ضریب بزرگ‌تری داشت، بزرگ‌تر است. اگر این ضریب برابر بود، ضریب جمله با درجه کوچکتر را مقایسه می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. به عنوان مثال برای دو چندجمله‌ای $P = 2x + x^3 + 1$ و $T = x^3 - 1 + 4x$ داریم:

$$T = x^3 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad P = x^3 - 2x + 1$$

پس می‌توان گفت $P < T$ است. زیرا $4 < -2$ است. با توجه به این روش به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) چندجمله‌ای‌های زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$\left(x^2 + 1\right)(x + 1), \quad -x^3 + 2x - x^2, \quad 5x^2 + x$$

ب) فرض کنید برای چندجمله‌ای‌های P, T, A و B بدانیم $P < T$ و $A < B$ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A + P < B + T$ است؟

ج) فرض کنید برای چندجمله‌ای‌های P, T, A و B بدانیم $P < T$ و $A < B$ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \times P < B \times T$ است؟

۱۳. در چندجمله‌ای زیر ضریب جمله x^{99} را بدست آورید.

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+99)(x+100)$$

۱۴. حاصل عبارات زیر را به شکل یک چندجمله‌ای استاندارد بنویسید.

$$(1) \quad (3x - 2)^2 \quad (2) \quad (2x^2 - x)^2 \quad (3) \quad (xy - 1)^2 \quad (4) \quad (x - \sqrt{2})^2$$

$$(x^2 - \sqrt{8})(x^2 + 2\sqrt{2}) \quad (7) \quad (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) \quad (8) \quad (a - \sqrt{2} + 1)^2 \quad (9)$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 \quad (10) \quad (x + y - 2z)(x - y - 2z) \quad (11)$$

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) \quad (12) \quad (x + y)^2 - (x - y)^2 \quad (13)$$

۱۵. جای خالی را طوری پر کنید تا تساوی های زیر، اتحاد باشند.

$$\dots + 8x + 1 = (\dots + \dots)^2 \quad (ب) \quad x^2 + 4x + \dots = (x + \dots)^2 \quad (الف)$$

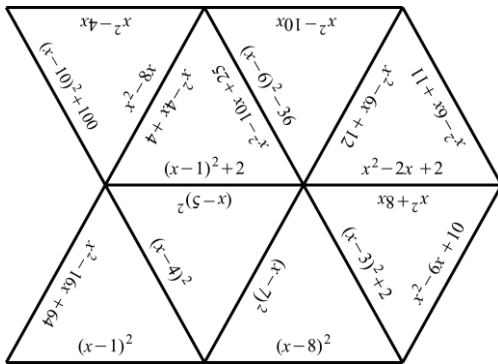
$$4x^2z^2 - 8xyz^2 + \dots = (\dots + \dots)^2 \quad (د) \quad x^2 + \dots + 3 = (x + \dots)^2 \quad (ج)$$

$$\dots + x + 1 = (\dots + \dots)^2 \quad (و) \quad \dots + 2xyz + \dots = (\dots + \dots)^2 \quad (ه)$$

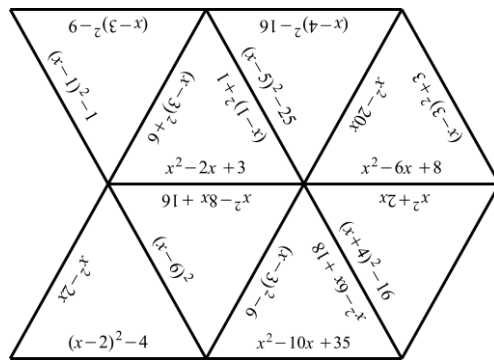
$$\dots + 2x + 3 = (\dots + \dots)^2 \quad (ز)$$

۱۶. شکل های «الف»، «ب»، «ج» را از روی خطوط، برش دهید و با مثلث های بریده شده شکل «د» را بسازید به شرطی

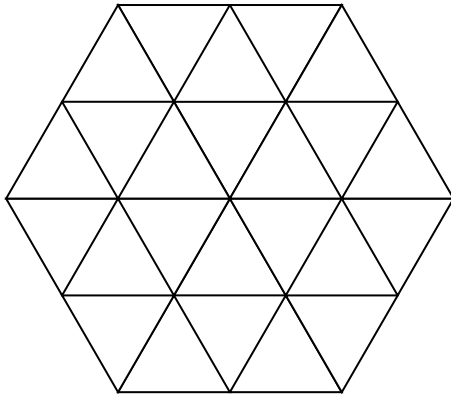
که هر دو ضلع به هم چسبیده با هم متحد باشند.



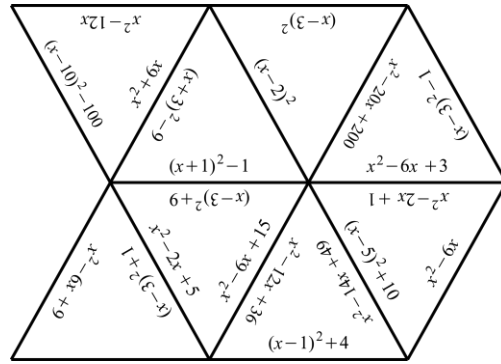
(ب)



(الف)



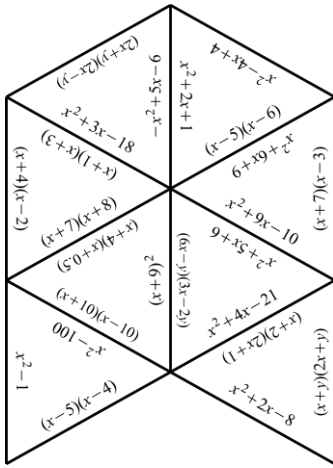
(د)



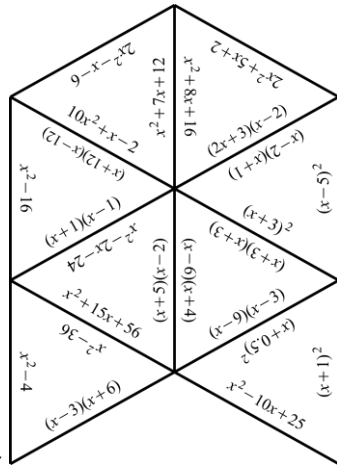
(ج)

۱۷.

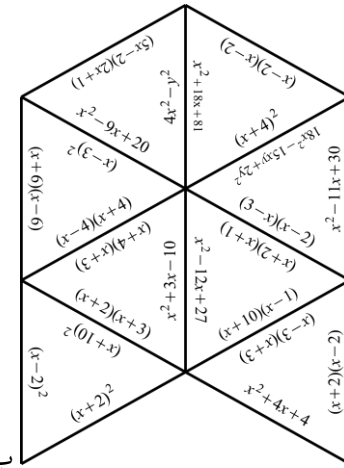
مانند سؤال قبل پازل زیر را حل کنید.



(ج)



(ب)



(الف)

۱۸. آیا می‌توان a ، b و c را طوری یافت که تساوی‌های زیر یک اتحاد باشند؟

(الف) $(2x+1)(ax^3+bx+1) = cx^5 + 2x^4(x+1) + 3x+1$

(ب) $a(x-2)^4 + b(2x-5) - c(x+1) = x^2 - 3x + 3$

(ج) $x^5 - 10x^3 + 7x^2 - 6x + 3 = (x^2 + ax - 2)(x^3 - 3x^2 + x - 2) + bx - c$

(د) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = (3x-1)(9x^2 - ax + b) + c$

۱۹. توان چهارم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ را محاسبه کنید.

۲۰. نشان دهید عدد طبیعی 10000000200000001 مربع کامل است.

۲۱. نشان دهید عدد طبیعی 1000003000003000001 مکعب کامل است.

۲۲. عدد A را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$11 \times 101 \times 10001 \times 100000001 = \frac{A}{9}$$

۲۳. اگر $x + y = 2$ و $xy = -4$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید. ($x > y$)

(الف) $x^2 + y^2$	(ب) $(x - y)^2$	(ج) $x - y$	(د) $x^2 - y^2$
(ه) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$	(و) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$	(ز) $x^4 + y^4$	(ح) $x^4 + y^4$

۲۴. اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ ، مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید.

(۱) $x^2 + \frac{1}{x^2}$	(۲) $x^3 + \frac{1}{x^3}$	(۳) $x^4 + \frac{1}{x^4}$	(۴) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
(۵) $x^3 - \frac{1}{x^3}$			

۲۵. مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید.

(الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(ب) $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$	(ج) $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$	(د) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
----------------------------	------------------------------	-------------------------------------	---

۲۶. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$	(ب) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(ج) $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = 2\sqrt{3} + 1$	(د) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$

۲۷. اعداد زیر را بدون رادیکال مرکب بنویسید. (نمایشی از یک عدد که به صورت رادیکال‌های تو در تو باشد، رادیکال مرکب می‌گوییم)

$$\sqrt[3]{\sqrt{54+30\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\sqrt{54-30\sqrt{3}}} \quad (۲) \quad \sqrt{33-20\sqrt{2}} \quad (۱)$$

۲۸. الف) اعداد a و b را طوری بیابید که $a^2 + b^2 = 2(a+b-1)$.

ب) اعداد a و b را طوری بیابید که $4a^2 + a^2b^2 + 2 = 4a + 2ab$.

ج) اگر a و b اعداد حقیقی باشند که $a^2 + b^2 = ab$ ثابت کنید $a = b = 0$ است.

۲۹. بین ضلع‌های مثلثی رابطه $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ برقرار است. نوع مثلث را تعیین کنید.

۳۰. تساوی‌های زیر را به کمک اتحادها ثابت کنید.

$$(\sqrt{6} - \sqrt{5})^{1000} (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{998} = 11 - 2\sqrt{30} \quad (۲) \quad 29 \times 31 = 899 \quad (۱)$$

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} (2-\sqrt{3}) = 1 \quad (۴) \quad \sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}} = 1 \quad (۳)$$

۳۱. چندجمله‌ای‌های زیر را تا جای ممکن تجزیه کنید. (وقتی یک چندجمله‌ای متحد با حاصلضرب هیچ دو چندجمله‌ای با درجه کمتر نباشد، تجزیه متوقف می‌شود)

$$48x^4y^6 - 12x^6y^4 \quad (۱) \quad x^2 + ax + ab + bx \quad (۲) \quad ab - a + b^2 - b \quad (۳)$$

$$x^4y^2 + 4x^2y^3 + 4x^3y^2 \quad (۶) \quad x^2 - y^2 + \frac{x+y}{2} \quad (۵) \quad ab - a + b - 1 \quad (۴)$$

$$25x^4 - 20x^2 + 4 \quad (۹) \quad 14 - 5b - b^2 \quad (۸) \quad t^2 - 17t + 30 \quad (۷)$$

$$-2(x+1)^2 + 1 \quad (۱۲) \quad \frac{a^2}{16} - \frac{3a}{2} + 9 \quad (۱۱) \quad 3a^2 - a - 2 \quad (۱۰)$$

$$(a+b)^2 - 1 - 2a - 2b \quad (۱۴) \quad (a-1)^3 + 1 \quad (۱۳)$$

۳۲. ثابت کنید چندجمله‌های زیر، قابل تجزیه به چندجمله‌هایی با ضرایب حقیقی نیستند.

$$x^2 y^2 - 2xy + 2 \quad (3) \quad x^2 + 2x + 2 \quad (2) \quad 2a^2 + 1 \quad (1)$$

$$x^2 + 2(x+y) + y^2 + 4 \quad (4)$$

۳۳. عدد p را طوری پیدا کنید که تساوی زیر بر حسب x اتحاد باشد.

$$(x^2 + px + 1)^2 = x^4 + kx^3 + 6x^2 + kx + 1$$

۳۴. عددهای a و b را طوری بیابید که چندجمله‌ای زیر، مربع یک چندجمله‌ای باشد.

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1$$