بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

آزمون‌های پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

رئیس کمیته نجوم و اخترفیزیک: سیدمحمّدتقی میرترابی

دوره‌ی تابستانه ۱۳۹۸ از تاریخ ۲۲ تیر تا ۱۶ شهریور برگزار شد و تعداد ۵۴ دانش‌پژوه در موضوعات تئوری، تحلیل داده و رصد در ۱۰ آزمون ارزیابی شدند مجموعه‌ای که در اختیارتان قرار گرفته است شامل آزمون‌های برگزار شده طی این دوره به تفکیک مبحث و سهم آن‌ها است. از دانش‌پژوهان این دوره ۱۰ نفر مدال طلا، ۱۵ نفر نقره، ۱۵ نفر برنز و ۱۴ نفر دیپلم افتخار گرفتند.

فهرست مطالب

گروه‌های آموزشی ۳
تاریخ و سهم آزمون‌ها ۴
آزمون‌های تئوری ۵
ثوابت فیزیکی و نجومی ۶
بعضی از روابط مفید ۷
آزمون تئوری ۱ ..... ۸
آزمون تئوری۲ ..... ۱۱
آزمون تئوری۳ ..... ۱۵
آزمون تئوری۴ ..... ۲۱
آزمون‌های تحلیل‌داده ۲۹
آزمون تحلیل‌داده ۱ ..... ۳۰
آزمون تحلیل‌داده ۲ ..... ۳۳
آزمون تحلیل‌داده ۳ ..... ۴۱
آزمون‌های رصد ۴۵
آزمون تئوری رصد ۴۶
آزمون رصد غیرمسلح ۶۳
آزمون رصد مسلح ۷۶
ایستگاه جرم‌گیری ۷۶
ایستگاه صورتواره و دوتایی ۸۰
ایستگاه قطبی و کار با طوقه ۸۷

گروه‌های آموزشی

کیهانشناسی	**دکتر سیدمحمدتقی میرترابی** امیرعلی اختراعی
اخترفیزیک ستاره‌ای	**دکتر رضا رضایی** عرفان بیات
اخترفیزیک کهکشانی	**دکتر لیلا صادقی** هدی پورغلامی
مکانیک آسمانی	**دکتر حسین مصحفی** امیرعلی اختراعی
نجوم کروی	**عباس فروزان‌نژاد**
ابزار رصدی	**دکتر آرش دانش**
تحلیل‌داده‌های نجومی	**دکتر علیرضا وفایی‌صدر - هدی پورغلامی** امیرعلی اختراعی
رصد	**دکتر محمد نیلفروشان - پریماه صفریان** کیانا افضلی - هدی پورغلامی - امین حبیبی - محمدعلی نادمی- عارفه عبقری امیرحسین ستوده‌فر - پارسا عالیان - سینا بلوکی- مهیار عباسی - عماد صالحی امیرعلی اختراعی - فاطمه زرگرباشی - نگین خسروانی‌نژاد – سپیده عبداللهی

تاریخ و سهم آزمون‌ها

تئوری ۱	۱۳۹۸/۵/۶	۱۰٪
تحلیل‌داده ۱	۱۳۹۸/۵/۷	۵٪
تئوری ۲	۱۳۹۸/۵/۸	۱۵/۹٪
تئوری ۳	۱۳۹۸/۵/۲۷	۱۵/۷٪
تئوری ۴	۱۳۹۸/۵/۲۸	۱۸/۴٪
تحلیل‌داده ۲	۱۳۹۸/۵/۳۰	۱۴٪
تحلیل‌داده ۳	۱۳۹۸/۵/۳۱	۶٪
تئوری رصد	۱۳۹۸/۶/۲	۵٪
رصد غیرمسلح	۱۳۹۸/۶/۳	۵٪
رصد مسلح	۱۳۹۸/۶/۴	۵٪

آزمون‌های تئوری

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت گرانش	$m^3 s^{-2} kg^{-1}$	6.67×10^{-11}
c	سرعت نور	ms^{-1}	3.00×10^{8}
h	ثابت پلانک	Js	6.63×10^{-34}
k	ثابت بولتزمان	JK^{-1}	1.38×10^{-23}
σ	ثابت استفان-بولتزمان	$Wm^{-2} K^{-4}$	5.67×10^{-8}
e	بار الکترون	C	1.6×10^{-19}
m_e	جرم الکترون	kg	9.11×10^{-31}
m_p	جرم پروتون	kg	1.67×10^{-27}
a	ثابت تابش	$Jm^{-3} K^{-4}$	7.57×10^{-16}
lyr	سال نوری	m	9.46×10^{15}
pc	پارسک	m	3.09×10^{16}
AU	واحد نجومی	m	1.50×10^{11}
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	1.99×10^{30}
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	6.96×10^{8}
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	3.85×10^{26}
Mg	جرم هسته مگنزیم	m_p	۲۴.۳
Fe	جرم هسته آهن	m_p	۵۶
Si	جرم هسته سیلیکون	m_p	۲۸
$H_.$	ثابت هابل	$kms^{-1} Mpc^{-1}$	۶۹

بعضی از روابط مفید

رابطه شبه قطبی برای بیضی کروی:

$$\tan\rho = \frac{\cos ۲e - \cos ۲a}{\sin ۲a + \sin ۲e\cos\theta}$$

رابطه شبه دکارتی برای بیضی کروی:

$$\cos^۲ u\left(\cos^۲ v\frac{\cos^۲ e}{\cos^۲ a} + \sin^۲ v\frac{\sin^۲ e}{\sin^۲ a}\right) = ۱$$

زاویه پرواز بیضی کروی:

$$\tan\psi = \frac{E\sin\theta}{۱ + E\cos\theta}\cos\rho \quad ; \quad E = \frac{\sin ۲e}{\sin ۲a}$$

چند انتگرال مفید

$$\int \frac{۱}{ax+b}dx = \frac{۱}{a}ln|ax+b|$$

$$\int_{.}^{\infty} e^{-ax^۲}dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > ۰)$$ انتگرال تابع گوسی

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^۲}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > ۰)$$ انتگرال تابع گوسی

$$e^x = \sum_{n=.}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ بسط تیلور

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری ۱

اخترفیزیک ستاره‌ای و کیهانشناسی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

پرسش ۱ : اخترفیزیک ستاره ای؛ ۱۵ نمره [طراح: دکتر رضا رضایی]

آ) ابر مولکولی کروی همگن به جرم M و شعاع R شامل کسر X هیدروژن مولکولی و Y هلیم اتمی است. با توجه به اینکه انرژی تجزیه مولکول هیدروژن $۴.۵\ eV$ است و نیز انرژی یونیزاسیون هیدروژن $۱۳.۶\ eV$ و هلیم $۷۹\ eV$ و با فرض اینکه در حین انقباض گرانشی تمام مولکول‌ها تجزیه و تمام اتم‌ها یونیزه شده‌اند و شعاع جدید $R \gg R'$ است، جرم مولکولی متوسط و دمای متوسط را محاسبه کنید.

ب) عمق نوری پرتوی را که قطر ابر را طی می‌کند بر حسب چگالی متوسط محاسبه کنید.

ج) طی انقباض گرانشی عمق نوری چند برابر شده است؟ با فرض اینکه جرم ابر اولیه ده هزار برابر جرم خورشید و چگالی متوسط آن $۱۰^{-۲۰}\ grcm^{-۳}$ است، مقدار عمق نوری نهایی چقدر است؟

پرسش ۲: کیهان شناسی؛ ۱۰ نمره [طراح: دکتر سیدمحمدتقی میرترابی]

نشان دهید که شرط اینکه شتاب ضریب مقیاس ($\ddot{a}$) مثبت باشد این است که قدر مطلق $\dot{H}$، ($\dot{H} = \frac{dH}{dt}$) از $H^۲$ کوچک‌تر باشد.

پرسش ۳: کیهان شناسی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر سیدمحمدتقی میرترابی]

المان طول در فضای سه بعدی با انحنای مثبت (کروی) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$dl^۲ = dr^۲ + R_۰^۲ \sin^۲\left(\frac{r}{R_۰}\right) d\Omega^۲$$

که در آن $d\Omega^۲ = d\theta^۲ + \sin^۲\theta\ d\phi^۲$ نشان دهنده المان زاویه فضایی و r و θ و ϕ مختصات قطبی کروی در فضای سه بعدی هستند.

آ) به کمک این المان طول حجم کره ای به شعاع a را در این فضا حساب کنید.

ب) نشان دهید برای کره‌های کوچک ($a/R_۰ \ll ۱$) حجم کره در فضای کروی شبیه حجم کره در فضای اقلیدسی است.

توجه: a ضریب مقیاس نیست. فقط نمادی است برای نمایش شعاع کره.

پرسش ۴: اخترفیزیک ستاره ای؛ ۱۵ نمره [طراح: دکتر رضا رضایی]

آ) در یک دوتایی نزدیک یک ستاره حد رُش را پر کرده و ستاره دیگر یک کوتوله سفید است. ماده از نقطه لاگرانژ L_1 با آهنگ ثابت $\dot{m} = m/t$ روی قرص برافزایشی کوتوله سفید می ریزد. اگر توده ماده‌ای به جرم m در زمان t از r_1 به r_2 برسد، تابندگی قرص برافزایشی را تخمین بزنید.

ب) با فرض اینکه قرص برافزایشی شبیه جسم سیاه تابش می کند و مقدار عددی آهنگ افزایش جرم $\dot{m} = 10^{-8}\ M_{sun}/year$ است و مقادیر عددی $r_1 = 10^9 m$ و $r_2 = 10^7 m$ حساب کنید قله تابش قرص در چه ناحیه ای از طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟

ج) چه کسری از انرژی تابیده شده قرص در واحد زمان مربوط به ناحیه بین $10^7 m$ و $2 \times 10^7 m$ است؟ تابش در این منطقه در کدام بخش طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟

پرسش ۵ : کیهان شناسی؛ ۲۵ نمره [طراح: دکتر سیدمحمدتقی میرترابی]

عالمی را در نظر بگیرید که هندسه آن تخت است و با مهبانگ شروع می‌شود ($a_{(t=0)} = 0$) دمای این عالم را با T نشان می‌دهیم. در ابتدا این عالم از ذراتی به جرم m تشکیل شده به طوری که $kT \gg mc^2$ که در آن k ثابت بولتزمان است. در زمان $t = t_{re}$ ناگهان ذرات با هم ترکیب می‌شوند و اتم‌هایی جدید به جرم بزرگتر M می‌سازند به طوری که $kT \ll Mc^2$، به این پدیده بازترکیب گفته می‌شود. تحول زمانی ضریب مقیاس ($a_{(t)}$) را برای زمان های $t > t_{re}$ به دست آورید. توجه کنید با توجه به قید های این مسئله مقدار ضریب مقیاس در زمان حال برابر یک نخواهد بود.

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری۲

اخترفیزیک ستاره‌ای، کیهانشناسی و نجوم کروی

زمان: ۱۸۰ دقیقه

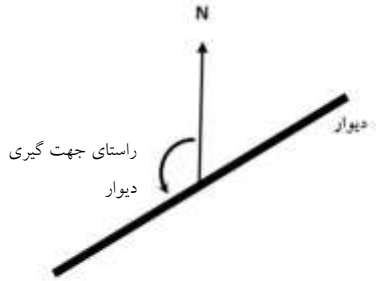
پرسش ۱: نجوم کروی؛ ۲۰ نمره [طراح: عباس فروزان‌نژاد]

در شهری به عرض جغرافیایی ۳۴ درجه شمالی، در ابتدای پاییز در ساعت ۱۶:۳۰ به وقت محلی، مساحتِ سایه‌ی دیواری ۱,۵ برابر مساحتِ دیوار بوده است. (از بیضی بودن مدار زمین صرفنظر کنید!!)

آ) راستای جهت گیری دیوار را بیابید.

ب) مساحت سایه دیوار ۳ ساعت قبل از این چه نسبتی از مساحت دیوار بوده است؟

توجه: راستای جهت گیری دیوار زاویه ایست که از سمت شمال در جهت پاد ساعتگرد تا راستای دیوار اندازه‌گیری می‌شود.



پرسش ۲: اختر فیزیک ستاره ای؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر رضا رضایی]

آ) زنجیر واکنش‌های هسته‌ای PPI را بنویسید و تعداد نوترینوی تولید شده به ازای هر هسته‌ی هلیم را محاسبه کنید.

ب) با تولید هر هسته هلیم مقدار $۲۶MeV$ انرژی آزاد می شود و به هر نوترینو تقریبا یک مگا الکترون ولت انرژی می رسد. بر این اساس تعداد نوترینوهای تولید شده به ازای هر ژول انرژی چقدر است؟

ج) انرژی آزاد شده در یک انفجار ابرنواختری تقریبا به طور کامل (۹۹٪) توسط نوترینو ها حمل می شود. انرژی انفجار را با توجه به ابعاد یک ستاره نوترونی نوعی تخمین بزنید. اگر متوسط انرژی هر نوترینو و پادنوترینو حدود $۲۰\ MeV$ باشد، تعداد نوترینوها و پادنوترینوهای تابش شده به ازای یک ژول انرژی چقدر است؟

د) طی رمبش نهایی یک ستاره نوترونی، نیروی گرانش بر فشار تبهگنی غلبه می کند و ستاره به یک انفجار ابرنواختری می رسد. به عبارت دیگر فشار تبهگنی الکترون‌ها و یون‌ها ناگهان افت می‌کند. با توجه به این شواهد نمونه‌ای از واکنش‌های هسته‌ای را که در این مرحله روی می‌دهند بنویسید.

پرسش ۳: کیهان شناسی؛ ۳۰ نمره [طراح: دکتر سیدمحمدتقی میرترابی]

جهانی را در نظر بگیرید که از ذراتی غیر نسبیتی به جرم m و فوتون هایی یکسان با طول موج λ تشکیل شده باشد. در این جهان فوتون ها با ذرات مادی برهم کنش می کنند و جذب ذرات ماده می شوند. آهنگ انتقال انرژی از فوتون ها به ذرات مادی یعنی میزان انرژی منتقل شده بر واحد زمان بر واحد حجم را با Q نشان می دهیم. می دانیم $Q = A\lambda^{-۶}$ که در آن A ضریب ثابتی است. در اثر این برهم کنش چگالی انرژی فوتون ها به شکل $\varepsilon_r = \varepsilon_{r0}a^{-۵}$ در خواهد آمد که در آن a ضریب مقیاس است. بستگی ضریب مقیاس به زمان ($a_{(t)}$) را در این جهان به دست آورید. جهان را تخت در نظر بگیرید.

پرسش ۴: اخترفیزیک ستاره ای؛ ۲۵ نمره [طراح: دکتر رضا رضایی]

آ) ستاره ای به جرم $M = ۴M_{sun}$ و شعاع $R_۱ = ۴R_{sun}$ را روی رشته اصلی در نظر بگیرید. سرعت زاویه ای ثابت این ستاره $۱۰^{-۵}\,rad/s$ است و جرم متوسط مولکولی آن نیم است. ممان اینرسی ستاره را $\frac{۱}{۲}MR^۲$ در نظر بگیرید. دمای متوسط و دما در مرکز و فشار در مرکز ستاره را با فرض $\rho_c = ۱۰۰\bar{\rho}$ محاسبه کنید. ρ_c و $\bar{\rho}$ به ترتیب چگالی در مرکز ستاره و چگالی متوسط هستند.

ب) طی مراحل تحولی ستاره به یک ستاره نوترونی به شعاع بیست کیلومتر تبدیل می شود. از اتلاف جرم طی مراحل تحولی چشم پوشی کنید. دمای متوسط ستاره نوترونی را محاسبه کنید.

ج) با توجه به رابطه فشار تبهگنی الکترونهای نسبیتی $P_e = ۰.۱۲\frac{hc}{m_p^{\frac{۴}{۳}}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۴}{۳}}\rho^{\frac{۴}{۳}}$ و اینکه در مرکز ستاره نوترونی $\rho_c = ۵۰\bar{\rho}$ است، فشار مرکز ستاره نوترونی را محاسبه کنید.

د) در هر یک از دو حالت بالا (ستاره رشته اصلی و ستاره نوترونی)، فشار تابشی را با فشار مرکز ستاره مقایسه کنید.

ه) نسبت انرژی دورانی به انرژی گرمایی ستاره نوترونی را حساب کنید.

پرسش ۵: کیهان شناسی؛ ۱۵ نمره [طراح: دکتر سیدمحمدتقی میرترابی]

عالمی تخت و ماده غالب را در نظر بگیرید. فاصلهٔ ما از نقطه ای با انتقال به سرخ z در این عالم هم اکنون چقدر است.

پرسش ۶: اخترفیزیک ستاره ای؛ ۲۵ نمره [طراح: دکتر رضا رضایی]

کوتوله سفیدی به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه در مرکز ستاره چگالی مرکزی ۵,۹۹ برابر چگالی متوسط است و فشار مرکزی به شکل $P_c = ۰.۷۷GM^{۲}R^{-۴}$ است، و نیز رابطه فشار تبهگنی الکترون به شکل زیر است.

$$P_e = ۰.۰۴۸۵\frac{h^{۲}}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}}\rho^{\frac{۵}{۳}}$$

آ) رابطه بین جرم و شعاع این کوتوله سفید را به دست آورید.

ب) با فرض اینکه انرژی جنبشی هر ذره $\frac{۳}{۲}k_BT$ است، دمای متوسط کوتوله سفید را بر حسب جرم محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کمترین دمایی که در آن چرخه هیدروژن سوزی کامل می شود $T_{min} = ۱.۵ \times ۱۰^{۶}K$ باشد. در این صورت کمینه جرم یک کوتوله سفید را تخمین بزنید.

د) با توجه به اینکه ترکیب شیمیایی کوتوله سفید هلیم است و فرض اینکه انرژی هر ذره $\frac{۳}{۲}k_BT$ است، رابطه تابندگی کوتوله سفید با دمای ستاره را بنویسید و آهنگ سرد شدن آن را بدست آورید.

ه) با سرد شدن کوتوله سفید در یک مرحله انرژی الکترواستاتیک (کولنی) با انرژی جنبشی ذرات برابر می شود. دمای بحرانی برای رسیدن به این مرحله را برحسب چگالی ستاره محاسبه کنید.

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری ۳

زمان: ۱۸۰ دقیقه

پرسش ۱ : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

ذره‌ای به جرم m تحت نیروی مرکزی زیر حرکت می‌کند:

$$\vec{F} = -m\gamma^{۲}\left(\frac{۴}{r^{۳}} + \frac{a^{۲}}{r^{۵}}\right)\hat{r}$$

که γ و a ثوابت مثبتی هستند. در ابتدا ذره در فاصله‌ی a از مرکز نیرو قرار دارد و با زاویه‌ی قائمه نسبت به بردار شعاعی با سرعت $\frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}a}$ حرکت می‌کند.

آ) معادله قطبی مسیر را بدست آورده و رسم کنید. (۱۰ نمره)

ب) زمان لازم برای رسیدن ذره به مرکز نیرو را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

پرسش ۲: اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۳ نمره [طراح: دکتر لیلا صادقی]

آ) روش اندازه گیری جرم یک خوشه کهکشانی را با استفاده از قضیه ویریال شرح دهید.
فرض یا فرض‌های اولیه (۲ نمره) - روابط ریاضی (۱۲ نمره)

ب) آیا کمیت‌هایی که در رابطه محاسبه جرم بدست آورده‌اید بطور مستقیم از رصد بدست می‌آیند؟ اگر نه، آن ها را با چه کمیت‌های قابل رصدی می‌توان جایگزین کرد؟ (۳ نمره)

ج) دو نوع ساختار کهکشانی را مثال بزنید که برای محاسبه آنها نمی توان از قضیه ویریال استفاده کرد. در هر مورد دلیل آن را توضیح دهید. (۶ نمره)

پرسش ۳ : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

اگر در سامانه‌ی خورشیدی ذرات غباری با چگالی ρ بطور یکنواخت پخش شده باشند، به نیروی گرانش خورشید وارد بر سیاره‌ای به جرم m یک نیروی اضافی که مرکزگرا و جاذب است به اندازه زیر وارد می‌شود:

$$F' = -\frac{۴\pi G\rho}{۳}mr$$

آ) اگر جرم خورشید M باشد، سرعت زاویه‌ای چرخش سیاره را در مدار دایره‌ای به شعاع $r_.$ بیابید. (۵ نمره)

ب) سپس بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک شعاعی حول $r_.$ را بیابید. (۵ نمره)

ج) نشان دهید اگر F' نسبت به نیروی گرانش خورشید بسیار کوچک باشد، مدار سیاره تقریبا یک بیضی خواهد بود که محور بزرگ آن با سرعت زاویه‌ای زیر تقدیم می‌کند: (۵ نمره)

$$\omega_p = ۲\pi\rho\left(\frac{Gr_.^۳}{M}\right)^{۰.۵}$$

د) سیاره‌ای در معرض این نیروی اضافی در جهت سرعت زاویه‌ای تقدیم می‌کند یا خلاف جهت سرعت زاویه‌ای؟ (۵ نمره)

پرسش ۴: مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

در این مسأله می‌خواهیم بیشترین زمانی که یک دنباله‌دار می‌تواند در مدار زمین باقی بماند را محاسبه کنیم.

آ) زمان لازم برای توصیف یک کمان از یک سهمی که تحت نیروی مرکزی $f = \frac{k}{r^۲}$ واقع در کانون است را بیابید با فرض این‌که از انتهای محور آغاز کنیم. (۱۰ نمره)

ب) یک دنباله‌دار در یک مسیر سهموی در صفحه مدار زمین حرکت می‌کند. مدار زمین را دایره‌ای در نظر بگیرید. نشان دهید بیشتر زمانی که دنباله‌دار می‌تواند درون مدار زمین باقی بماند کسرِ $\frac{۲}{۳\pi}$ از یک سال زمینی است. (۱۰ نمره)

پرسش ۵: اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۵ نمره [طراح: دکتر لیلا صادقی]

در نزدیکی مرکز کهکشان راه شیری جمعیتی از ستارگان وجود دارند که حول سیاهچاله پرجرم هسته کهکشان می‌چرخند. فاصله تقریبی آن ها از مرکز در حدود ۰,۰۰۵ (پنج هزارم) پارسک است و می توان از این ستاره‌ها برای اندازه گیری فاصله منظومه شمسی تا مرکز کهکشان استفاده کرد. فرض کنید جرم سیاهچاله مرکزی تقریباً $۱۰^۶$ برابر جرم خورشید باشد و اثر گرانشی جرم دیگری به اندازه سیاهچاله مهم نباشد.

آ) با محاسبه نشان دهید که آیا طول عمر انسان برای رصد یک دور کامل مدار این ستاره‌ها کافی است؟ (۳نمره)

ب) فرض کنید رصدی از این نوع انجام شده است و دیده شده که ستاره بر روی یک مدار بیضوی با نسبت محوری $\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲}$ حرکت می‌کند. اگر ما دقیقاً محل قرارگیری سیاهچاله را ندانیم، توضیح دهید چگونه می‌توان از اندازه‌گیری سرعت شعاعی استفاده کرد تا بفهمیم آیا ستاره در فضای سه بعدی مداری تقریباً دایروی دارد یا خیر. (۳ نمره)

ج) اگر مدار دایروی باشد (که در واقعیت نیست) چه زاویه‌ای را با راستای دید ما می‌سازد؟ (۳ نمره)

د) با فرض دایروی بودن مدار، نشان دهید گستره زاویه‌ای مدار و دوره تناوب چه رابطه‌ای با فاصله ما تا سیاهچاله دارند؟ (۳ نمره)

ه) با استفاده از داده‌های بدست آمده در بخش‌های قبلی، چگونه جرم سیاهچاله را محاسبه می‌کنید؟ (۲ نمره)

پرسش ۶: نجوم کروی؛ ۱۵ نمره [طراح: عباس فروزان‌نژاد]

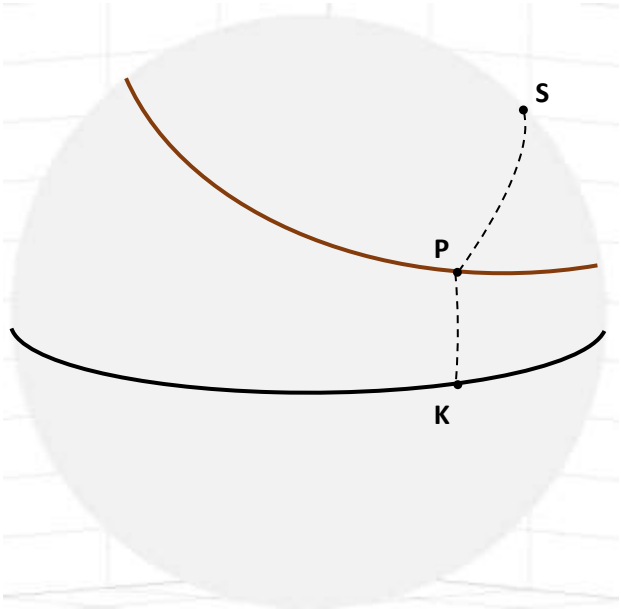
یک شکل هندسی را بر روی صفحه این چنین تعریف می کنیم:

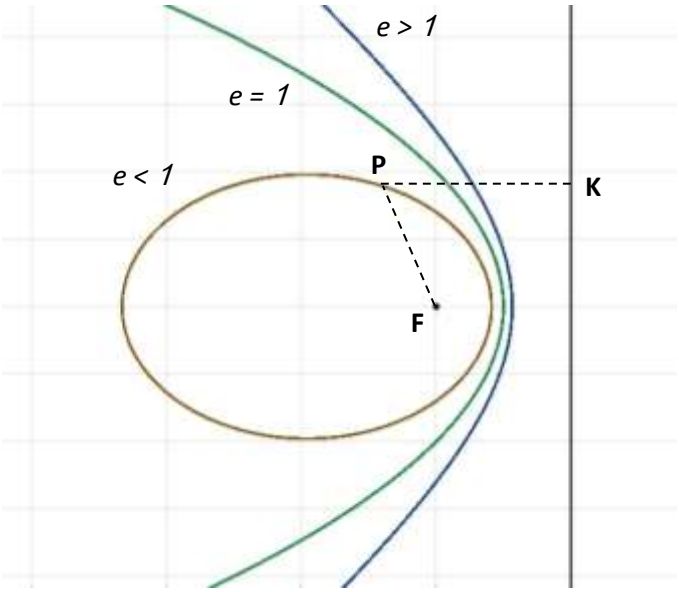
«مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از یک نقطه به فاصله آنها از یک خط مقداری ثابت است»

$$\frac{PF}{PK} = e$$

می توان نشان داد این شکل هندسی، همان مقاطع مخروطی (بیضی، سهمی و هذلولی) است. با دانستن این مطلب به بخش الف پاسخ دهید.

آ) نشان دهید برای بیضی $e < ۱$ و برای هذلولی $e > ۱$ میباشد.





اکنون به طور مشابه بر روی کره، شکلی را این چنین تعریف میکنیم:

«مکان هندسی نقاطی از کره که نسبت سینوس فاصله آنها از یک نقطه به سینوس فاصله آنها از یک دایره عظیمه مقداری ثابت است»

$$\frac{\sin PS}{\sin PK} = \varepsilon$$

ب) نشان دهید این شکل یک بیضی‌کروی است.

توضیح دهید چرا در صورتی که ε بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک باشد، شکل همچنان بیضی‌کروی خواهد بود؟

پرسش ۷: اختر فیزیک کهکشانی؛ ۱۱ نمره [طراح: دکتر لیلا صادقی]

کهکشانی را با تابع جرم اولیه (IMF) زیر برای ستاره‌های با جرم $۰.۱ < M < ۲۰M_{\odot}$ در نظر بگیرید:

$$dN/dM \propto M^{-۲}$$

آ) برای یک جمعیت جوان ستاره‌ای رابطه میان نور تولید شده در هر بازه جرمی (dL/dM) بر حسب تابعی از جرم چگونه است؟ (۲ نمره)

ب) رابطه میان درخشندگی کل تابش شده توسط ستاره‌های پرجرم تر از جرم M با M به چه شکل است؟ و در چه جرمی درخشندگی، نصف مقدار درخشندگی کل است؟ (۵ نمره)

ج) با فرض اینکه جرم ستاره‌ها با زمان به این شکل تغییر می‌کند $(M \propto t^{-۱/۳})$ وقتی ستاره‌ها می‌میرند (اول جوان‌ترها) درخشندگی کل تابش شده از ستاره‌های رشته اصلی چگونه با زمان تغییر می‌کند؟ (۴ نمره)

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری۴

زمان: ۲۳۵ دقیقه

پرسش ۱ : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر لیلا صادقی]

کهکشانی را در نظر بگیرید که در زمان $t = ۰$ تابع توزیع زیر را دارد:

$$f(r,v) = \frac{\sigma^۲}{۲\pi G r^۲} \frac{exp[-\frac{۱}{۲}(\frac{v_x^۲}{\sigma_x^۲} + \frac{v_y^۲}{\sigma_y^۲} + \frac{v_z^۲}{\sigma_z^۲})]}{(۲\pi\sigma^۲)^{۳/۲}}$$

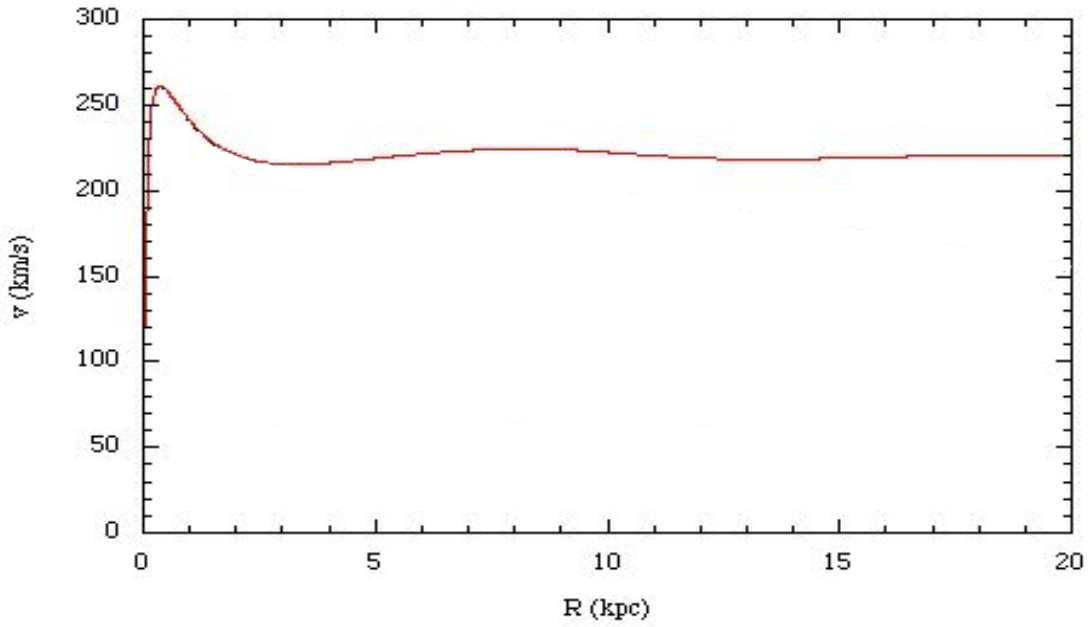
که در آن $\sigma = ۱۰ km/s$ و $\sigma_z^۲ = \frac{۱}{۶}\sigma^۲$ و $\sigma_y^۲ = ۳\sigma^۲$ و $\sigma_x^۲ = ۲\sigma^۲$

آ) چگالی و پتانسیل گرانشی آن را برحسب تابعی از شعاع بنویسید. (۶ نمره)

ب) اگر در زمان $t = ۰$ سیستم را رها کنیم آیا این کهکشان در حالت تعادل است؟ آیا تابع توزیع بدون تغییر باقی می‌ماند؟ پاسخ خود را شرح دهید. (۲ نمره)

راهنمایی: معادله پیوستگی برای این سیستم به این شکل است $\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}f + \vec{\nabla}\Phi\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$

ج) فرض کنید منحنی چرخش این کهکشان به شکل زیر باشد (که در واقع نیست). منحنی جرمی کهکشان را بر حسب تابعی از شعاع رسم کنید. پله‌های شعاعی را مطابق با منحنی چرخش بگیرید و جرم را بر حسب جرم خورشید گزارش کنید. (۱۲نمره)



پرسش ۲ : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۳۲ نمره [طراح: دکتر لیلا صادقی]

منحنی چرخش یک کهکشان بیضوی رصد شده با رابطه تحلیلی زیر به خوبی برازش[۱] می‌شود:

$$v_{(R)} = ۲۰۰\left(۱ - e^{-\frac{R}{R.}}\right)\ km/sec$$

که در آن R فاصله شعاعی از مرکز کهکشان، و $R.$ ثابتی است با مقدار kpc ۴ (فرض کنید کهکشان از لبه دیده می‌شود و لذا سرعت های دوپلری بیشینه هستند)

آ) مقدار جرمی که داخل فاصله kpc ۱۶ از مرکز کهکشان قرار دارد را در واحد $M_{\odot}$ تخمین بزنید. (۴ نمره)

ب) نشان دهید که در فواصل نزدیک به مرکز کهکشان ($R \ll ۴kpc$) فرکانس زاویه ای ، تقریباً ثابت است. (حل تحلیلی نمره کامل و حل عددی نصف نمره را می‌گیرد) (۷ نمره)

ج) دوره تناوب ستاره‌های نزدیک مرکز را در واحد سال بدست آورید. (۳ نمره)

د) برای فواصل دور، منحنی چرخش تقریباً به مقدار ثابتی میل می‌کند. فرض کنید ماده گرانشی که این منحنی را بوجود آورده است با تقارن کروی حول مرکز سیستم قرار گرفته است و نمایه چگالی آن برای فواصل $R \gg ۴kpc$ ، $\rho_{(R)} \propto R^{-\alpha}$ است. مقدار α را طوری بدست آورید که منحنی چرخش در این فواصل تخت باشد. (۴ نمره)

ه) منحنی چرخش کهکشان را از مرکز تا فاصله ۴۰ کیلوپارسک با پله‌های ۵ کیلوپارسکی رسم کنید. با رسم سه منحنی تقریبی بر روی این نمودار سهم بالج، دیسک و هاله کهکشان را نشان دهید. (۱۴ نمره)

---

[۱] fit

پرسش ۳: مکانیک سماوی؛ ۸ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

یک موشک را در نظر بگیرید که وقتی خالی از سوخت است دارای جرم m_r است و سوختی به اندازه جرم m_f می‌تواند حمل کند. وقتی که سوخت موشک می‌سوزد با سرعت خروجی v_e نسبت به موشک خارج می‌شود. نرخ سوختن سوخت موشک ثابت است و کل زمان سوختن برابر T_b است. در این بخش از گرانش صرف‌نظر کنید و فرض کنید موشک در فضایی به دور از دیگر اجرام حرکت می‌کند.

الف) معادله‌ای برای شتاب موشک به صورت تابعی از زمان بر حسب کمیت‌های t ، m_f ، m_r ، v_e ، T_b و دیگر ثوابت فیزیکی بدست آورید. (۴ نمره)

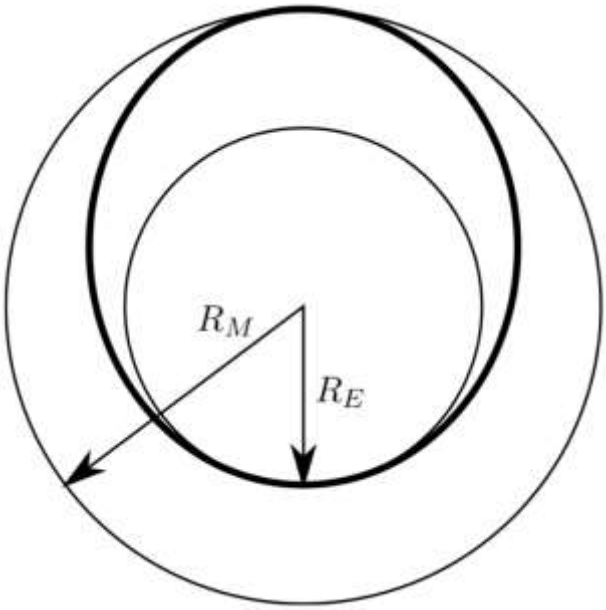
ب) با فرض این‌که موشک از حال سکون حرکت می‌کند، سرعت نهایی آن را بر حسب پارامترهای مسأله و ثوابت فیزیکی محاسبه کنید.(۴ نمره)

پرسش ۴: مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

سیاره‌ای دارای مداری با خروج از مرکز زیاد به دور خورشید می‌گردد که خروج از مرکز آن برابر با $e = ۱ - \alpha$ است که $\alpha \ll ۱$ می‌باشد. زمانی‌که سیاره در بیشترین فاصله از خورشید قرار دارد، با یک دنباله‌دار کوچک که در راستای مماس حرکت می‌کند برخورد می‌کند (سرعت سیاره و دنباله‌دار در یک راستا است). برخورد کاملا غیر کشسان است، و دنباله‌دار به سیاره می‌چسبد و تکانه پایسته است. کمترین میزان انرژی جنبشی دنباله‌دار برای آن‌که مدار سیاره را به مدار سهموی تبدیل کند چقدر است؟

پرسش ۵: مکانیک سماوی؛ ۱۲ نمره [طراح: دکتر حسین مصحفی]

یک فضاپیما حرکت خود را در یک مدار دایره‌ای به دور خورشید و بسیار نزدیک به زمین آغاز می‌کند و قصد دارد در یک مدار دایره‌ای به دور خورشید قرار گیرد که بسیار نزدیک به مریخ است. این فضاپیما انتقال را در یک مدار بیضوی مطابق شکل انجام می‌دهد. فضاپیما این کار را با یک سرعت ضربه اولیه نزدیک زمین با اندازه‌ی Δv_1 و سپس یک سرعت ضربه ثانویه نزدیک مریخ با اندازه‌ی Δv_2 انجام می‌دهد. فرض کنید این سرعت‌های ضربه‌ای به صورت لحظه‌ای اعمال می‌شود و از تغییر جرم پیشران فضاپیما به دلیل کم شدن سوخت صرف‌نظر کنید. همچنین از گرانش زمین و مریخ چشم‌پوشی کنید اما گرانش خورشید را جدی بگیرید! فرض کنید زمین و مریخ هر دو در مدارهای دایره‌ای با شعاع‌های R_E و $R_M = \frac{R_E}{\alpha}$ به دور خورشید می‌گردند. سرعت مداری زمین و مریخ را نیز v_E و v_M در نظر بگیرید.



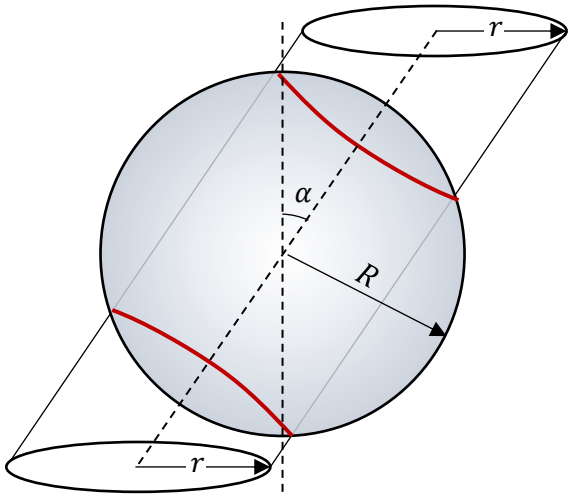
آ) سرعت ضربه‌ای مورد نیاز برای تغییر از مدار دایره‌ای به بیضوی یعنی Δv_1 را بر حسب v_E و α به دست آورید. (۴ نمره)

ب) سرعت ضربه‌ای مورد نیاز برای تغییر از مدار بیضوی به دایره‌ای یعنی Δv_2 را بر حسب v_E و α به دست آورید. (۴ نمره)

ج) اگر از سمت خورشید نگاه کنیم، جدایی زاویه‌ای بین زمین و مریخ در زمان پرتاب فضاپیما از زمین تا رسیدن به مریخ چقدر است؟ جواب را بر حسب α بیان کنید. (۴ نمره)

پرسش ۶: نجوم کروی؛ ۳۰ نمره [طراح: عباس فروزان‌نژاد]

آ) نشان دهید مقطع مشترک یک استوانه کج به شعاع r با زاویه محور α و یک کره به شعاع R، بیضی‌کروی میباشد. نیم قطر بزرگ (a) و نیم فاصله دو کانون (e) را برای بیضی کروی بر حسب α، r و R بدست آورید.



اکنون سیاره‌ی زحل را به همراه حلقه هایش تصور کنید که خورشید در حال تابیدن به سمت آن است و سایه‌ای از حلقه‌ها بر روی سیاره ایجاد کرده است.

شعاع زحل $R_\oplus$ ۹.۴۵ میباشد و حلقه‌های آن از شعاع $R_\oplus$ ۱۱.۷ تا شعاع $R_\oplus$ ۲۱.۴ از مرکز زحل گسترده شده‌اند. دوره تناوب حرکت وضعی زحل $۱۰^h:۴۰^m$ است و هر سالِ زحلی (دوره تناوب مداری) ۲۹.۵ سال زمینی است.

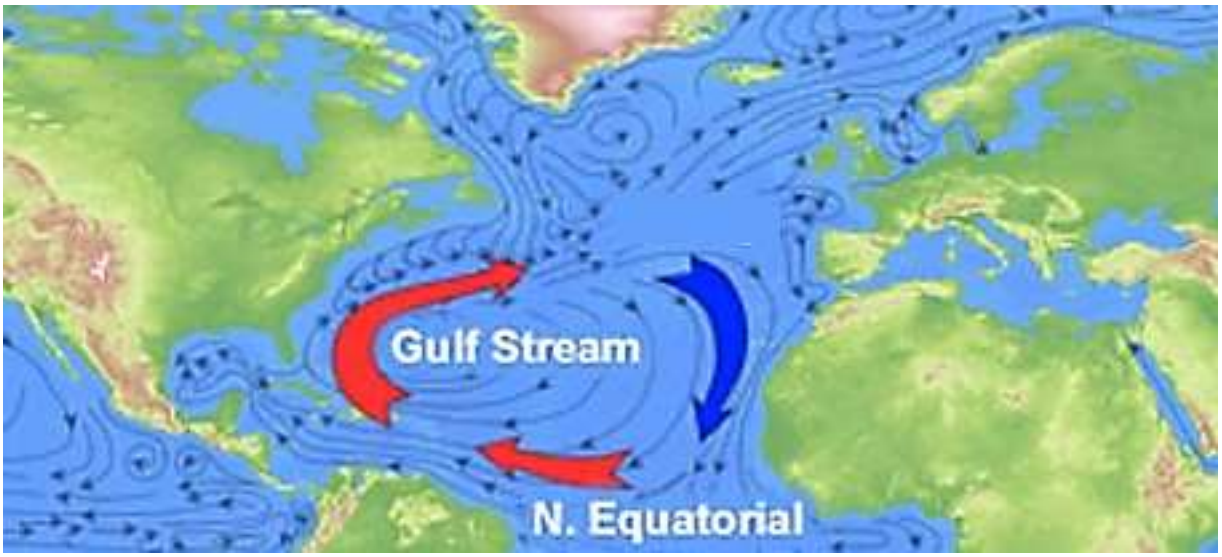
ب) در صورتی که میل خورشید □۲۰− باشد، در چه بازه‌ای از عرض جغرافیایی، طلوع خورشید پشت حلقه‌هاست؟

ج) ناظری را در بازه‌ی قسمت قبل در نظر بگیرید که خورشید را در کل روز پشت حلقه ها می بیند مگر لحظات کوتاهی در هنگام ظهر. عرض جغرافیایی این ناظر را بیابید.

د) هنگام غروب خورشید، فاصله‌ی نقطه‌ای از حلقه‌ها که خورشید پشت آن است را تا مرکز زحل بر حسب $R_\oplus$ محاسبه کنید.

پرسش ۷: نجوم کروی؛ ۳۵ نمره [طراح: عباس فروزان‌نژاد]

جریان گلف استریم یک جریان آبی در اقیانوس اطلس میان قاره‌ی اروپا و آمریکای شمالی است. این جریان در طول تاریخ کره‌ی زمین نقش بسیار مهمی در تحولات آب و هوایی و معتدل سازی هوای شمال غرب اروپا داشته است. علت تشکیل این جریان آن است که آب‌های نواحی استوایی به علت زاویه تابش خورشید دمای بیشتری نسبت به آب‌های نواحی شمالی‌تر دارند؛ به همین جهت جریان‌های همرفتی شکل میگیرند که آب‌های نواحی استوایی را رو به شمال و آب‌های شمالی‌تر را رو به جنوب حرکت می‌دهد. در ادامه با حضور نیروی کوریولیس این جریان‌های آبی در یک مسیر بسته و ساعتگرد قرار میگیرند که می توان نشان داد مسیر این جریان‌های آبی بیضی‌کروی است. در نقشه زیر شمای کلی و نادقیقی از این جریان را مشاهده می‌کنید.



در گذشته مردمان این منطقه از جریان آب گلف استریم برای انتقال محموله و پیام استفاده میکردند. اگر چه جریان گلف استریم در آن زمان به علت تغییرات محیطی شکل متفاوتی داشته است (همچنان بیضی‌کروی بوده است) اما مردم نامه‌های خود را در بطری‌هایی گذاشته و به صورت بسته بندی شده به داخل آب میگذاشتند تا بسته به همراه جریان آب حرکت کند و به مقصد برسد.

طبق اسناد تاریخی این گونه انتقال پیام بیشتر بین شهر $Lisbon$ در پرتغال با مختصات $\left(۹.۲^{\circ}W \text{ و } ۳۸.۷^{\circ}N\right)$ و شهر Vik در ایسلند با مختصات $\left(۱۹.۰^{\circ}W \text{ و } ۶۳.۴^{\circ}N\right)$ رایج بوده است.

همچنین با مراجعه به نقشه‌های به جا مانده از آن زمان موفق شدیم مکان یکی از کانون‌های مسیر بیضی‌کروی گذرنده از این دو شهر را بدست آوریم که مختصات آن $\left(۲۱.۰^{\circ}W \text{ و } ۵۵.۰^{\circ}N\right)$: $F_۱$ می‌باشد. جستجو برای پیدا کردن کانون دیگر این بیضی‌کروی تا کنون بی‌نتیجه مانده است. اما بررسی‌های فیزیکدانان مشخص کرده است که اندازه‌ی قطر بزرگ این بیضی‌کروی برابر با ۴۲° می‌باشد.

آ) با توجه به اطلاعات داده شده، مختصات کانون دیگر بیضی کروی را به دست آورید. (در بین مکان‌های محتمل، غربی ترین نقطه را انتخاب کنید)

ب) با بررسی فیزیکی مساله متوجه میشویم که مسیر حرکت محموله بر روی محیط بیضی کروی با رابطه زیر است.

$$\tan\frac{M}{۲} = \frac{cos(a+e)}{cos(a-e)}\tan\frac{\theta}{۲}$$

که در آن $M = \frac{۲\pi t}{T}$، t زمان و T برابر با دوره تناوب جریان گلف استریم است. از طرفی می‌دانیم دوره تناوب این جریان حدوداً برابر با ۲۰۰ روز است. همچنین در رابطه بالا a نیم قطر بزرگ، e نیم فاصله دو کانون و θ زاویه از حضیض است. این رابطه حول کانون $F_۱$ می‌باشد.

حال با توجه به اطلاعات داده شده مدت زمانی که محموله از شهر $Lisbon$ به شهر Vik می‌رسد را به دست آورید.

ج) مردم در شهر Vik منتظر رسیدن محموله هستند. آنها هنگام نظاره به افق در چه سمتی باید منتظر محموله‌ها باشند؟

آزمون‌های تحلیل داده

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تحلیل‌داده ۱

زمان: ۹۰ دقیقه

پرسش ۱: (۵ نمره از ۲۵ نمره) [طراح: دکتر رضا رضایی]

با طیف سنجی یک متغیر قیفاووسی می‌توانیم دمای ستاره را در فازهای مختلف محاسبه کنیم. دو خط طیفی FeI ۷۰۹.۰ nm و HeI ۱۰۸۳.۰ nm را رصد می‌کنیم. چون این دو خط در لایه های مختلفی از جو ستاره شکل می گیرند، دما و سرعت تلاطم مشابهی ندارند. بر این اساس ابتدا باید رصد های دیگری انجام دهیم تا سرعت تلاطم را در دو لایه محاسبه کنیم و سپس با فرض ثابت بودن سرعت تلاطم در هر لایه تغییرات دما را بررسی کنیم. پهنای پنجره طیف سنج سه دهم کیلومتر بر ثانیه است.

آ) برای محاسبه سرعت تلاطم در لایه ای از جو ستاره که خط آهن در آن شکل می گیرد، خطهای FeI ۷۰۹.۰nm و SiI ۱۰۸۲.۷nm را که در لایه های مشابهی تشکیل می‌شوند همزمان رصد کردیم و نیم پهنا در نصف ارتفاع برای آهن ۵۷.۸ $m\AA$ و برای سیلیکون ۱۰۱.۲ $m\AA$ به دست آمده است. بر این اساس سرعت تلاطم را برای خط آهن حساب کنید.

ب) مشابه همین کار را برای خط هلیم انجام می‌دهیم. برای این کار خط‌های HeI ۱۰۸۳.۰ nm و MgI ۵۱۷.۰ nm را رصد می کنیم. نیم پهنا در نصف ارتفاع خط هلیم ۳۴۳.۵ $m\AA$ و برای خط مگنزیوم ۱۴۲.۶ $m\AA$ است. سرعت تلاطم برای خط هلیم را با این داده‌ها محاسبه کنید

ج) حال با دانستن سرعت تلاطم در هر لایه از جو و استفاده از جدول داده ها که نیم پهنا در نصف ارتفاع را برای هر خط مشخص می کند، دمای متناسب با هر خط را در هر فاز حساب کنید و در دو نمودار جداگانه رسم کنید.

د) با فرض اینکه تابش ستاره مشابه جسم سیاه است، برای هر خط نسبت تابندگی بیشینه به کمینه را محاسبه کنید.

ه) نمودار اختلاف دمای دو خط را بر حسب فاز رسم کنید. متوسط اختلاف دما چند کلوین است؟

جدول داده‌ها

نیم پهنا در نصف ارتفاع خط هلیم$(m\text{Å})$	نیم پهنا در نصف ارتفاع خط آهن$(m\text{Å})$	فاز
۳۵۱.۲	۵۸.۴	۰.۰
۳۴۷.۵	۵۸.۱	۰.۱
۳۴۵.۱	۵۷.۸	۰.۲
۳۴۴.۰	۵۷.۶	۰.۳
۳۴۱.۹	۵۷.۲	۰.۴
۳۳۹.۴	۵۶.۸	۰.۵
۳۳۶.۳	۵۶.۳	۰.۶
۳۴۱.۲	۵۶.۹	۰.۷
۳۴۳.۶	۵۷.۴	۰.۸
۳۴۸.۲	۵۸.۲	۰.۹

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تحلیل‌داده ۲

زمان: ۲۷۰ دقیقه

پرسش ۱: (۷,۵ نمره از ۲۵ نمره) [طراح: هدی پورغلامی]

منحنی چرخش کهکشان از دیدگاه جدید!

در یک اکتشاف جدید از کهکشان‌های آسمان، کهکشانی به شکل دیسک دایروی پیدا کرده‌ایم. در مرز دیده شده از این کهکشان، خوشه‌هایی وجود دارند که با استفاده از ستارگان متغیر آن‌ها، فاصله‌ی کهکشان Mpc ۸.۴ محاسبه شده است. در جدول۱، مختصات سماوی این خوشه‌ها را مشاهده می‌کنید.

جدول ۱

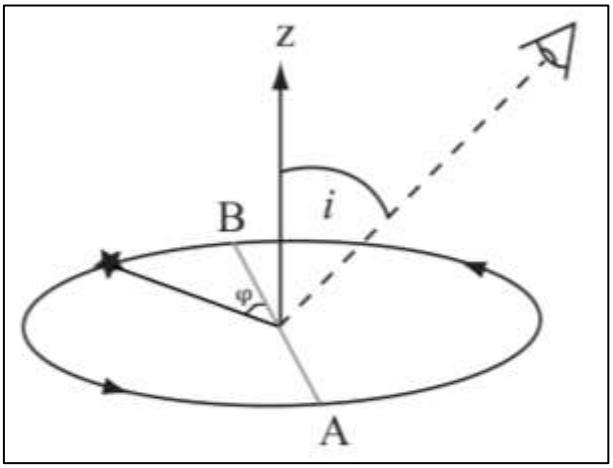
#	$\alpha\ (hour)$	$\delta\ (degree)$
۱	۴۰/۰۵۴۵۲۴	۲۷/۰۰۰۰۰۰
۲	۴۰/۰۴۷۸۴۶	۲۷/۰۱۲۸۲۰
۳	۴۰/۰۳۷۲۹۳	۲۷/۰۲۶۱۱۳
۴	۴۰/۰۱۵۰۹۰	۲۷/۰۴۱۴۵۹
۵	۴۰/۰۰۳۹۶۸	۲۷/۰۴۵۳۵۳
۶	۳۹/۹۹۵۸۸۷	۲۷/۰۴۷۰۱۸
۷	۳۹/۹۸۲۵۶۳	۲۷/۰۴۷۹۰۹
۸	۳۹/۹۶۷۵۰۳	۲۷/۰۴۶۴۱۱
۹	۳۹/۹۵۰۳۵۰	۲۷/۰۴۱۶۶۲
۱۰	۳۹/۹۳۷۶۰۴	۲۷/۰۳۶۰۲۴
۱۱	۳۹/۹۲۳۷۹۰	۲۷/۰۲۷۷۳۸
۱۲	۳۹/۸۸۶۳۱۰	۲۶/۹۹۰۰۵۳
۱۳	۳۹/۸۶۶۶۲۰	۲۶/۹۵۱۴۵۴
۱۴	۳۹/۸۵۹۲۵۷	۲۶/۹۱۸۷۴۲
۱۵	۳۹/۸۶۰۶۱۸	۲۶/۸۸۳۰۴۴
۱۶	۳۹/۸۸۵۰۹۹	۲۶/۸۳۵۹۰۴
۱۷	۳۹/۹۳۲۸۵۲	۲۶/۸۱۵۵۱۱
۱۸	۳۹/۹۶۸۴۰۵	۲۶/۸۲۰۸۱۴
۱۹	۴۰/۰۰۰۰۰۰	۲۶/۸۳۷۴۸۴
۲۰	۴۰/۰۴۱۹۹۲	۲۶/۸۸۴۶۲۸
۲۱	۴۰/۰۵۹۳۶۲	۲۶/۹۲۹۲۵۵
۲۲	۴۰/۰۶۲۳۹۶	۲۶/۹۶۳۹۷۶
۲۳	۴۰/۰۵۸۱۶۶	۲۶/۹۸۹۷۴۴

آ) در پاسخنامه نمودار مختصات این خوشه‌ها در صفحه‌ی آسمان و مرز کهکشان را رسم کنید. (این نمودار از این پس نمودار شماره یک نامیده می‌شود) (۱,۵ نمره)

ب) فرض کنید ستارگان این کهکشان در هرفاصله‌ی شعاعی از مرکز کهکشان سرعت $V(R)$ داشته باشند و کل کهکشان سرعت ذاتی V_{sys} داشته باشد. زاویه‌ی φ را زاویه‌ای روی صفحه‌ی کهکشان تعریف می‌کنیم که مبدا آن محوری است که کهکشان حول آن از دید ما چرخیده‌است (خط AB در شکل فصل مشترک قرص کهکشان با کره سماوی است) و به‌طور پادساعتگرد افزایش می‌یابد (مطابق شکل۱) و i زاویه‌ی میل کهکشان است. ثابت کنید سرعت شعاعی هر نقطه از صفحه‌ی کهکشان از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید: (۰,۵ نمره)

$$V_r = V_{sys} + V(R)\cos(\varphi)\sin(i)$$

شکل ۱



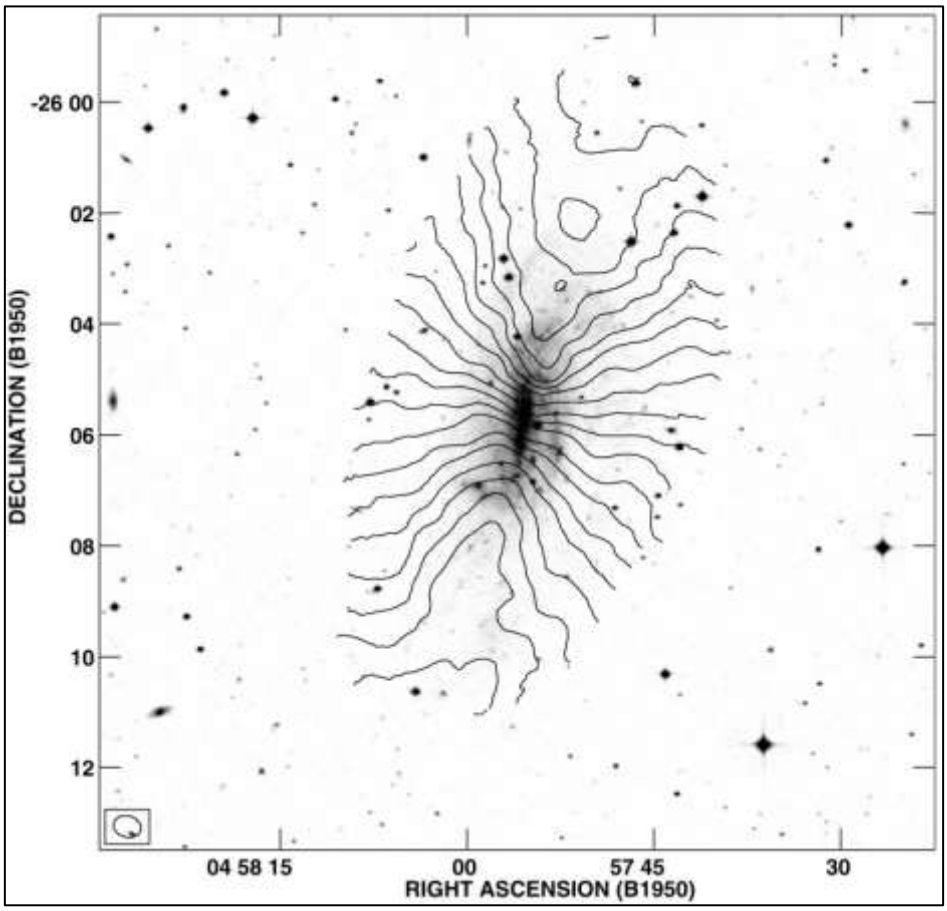
از روی مدل‌سازی تابع پتانسیل و سرعت در این نوع کهکشان برای سرعت مدارهای دایروی به رابطه‌ی زیر رسیده‌ایم:

$$V(R) = (۴۰۰)\frac{\left(\frac{R}{a}\right)}{\left(۱ + \left(\frac{R}{a}\right)^{۲}\right)^{\frac{۳}{۴}}} \quad km/s$$

که در آن : $a = ۳.۶\ kpc$ است.

نمودار عنکبوتی، به نمایش منحنی‌های هم‌سرعتِ شعاعی، روی صفحه‌ی تصویرشده‌ی کهکشان می‌گویند. در شکل۲، نمودار عنکبوتی را برای کهکشان NGC ۱۷۴۴ مشاهده می‌کنید. (این شکل ربطی به روند حل سوال ندارد و صرفا برای نمونه آورده شده است)

شکل ۲



ج) ابتدا ثابت کنید مدل سرعت داده‌شده، دارای یک نقطه‌ی ماکسیمم (V_{max}) در $R = \sqrt{2}a$ است.

سپس در همان نمودار شماره۱، برای این کهکشان نمودار عنکبوتی را به ازای $\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max}\sin(i)}$ های برابر ۰,۲ ، ۰,۴ ، ۰,۶ و ۰,۸ روی کهکشان رسم کنید. برای هر منحنی، تعدادی از داده‌های استفاده‌شده برای رسم را در پاسخنامه وارد کنید. همچنین مکان نقاطی روی کهکشان را که سرعت شعاعی مطلق آن‌ها برابر سرعت سیستم است، نشان دهید.

فرض کنید همه‌ی ستارگان در صفحه‌ی کهکشان و در یک جهت حرکت می‌کنند. این جهت را دلخواه در نظر گرفته و در پاسخنامه ذکر کنید. برای نمایش منحنی سرعت‌های شعاعی مثبت از خط پیوسته و برای سرعت‌های شعاعی منفی از خط‌چین استفاده کنید. (۴ نمره)

د) استدلال کنید برای مدل‌های $V(R) = cte.$ ، $V(R) \propto R$ و $V(R)$ نزولی، نمودار عنکبوتی تقریبا چه شکلی دارد. با استفاده از این مدل‌ها، در نمودار عنکبوتی‌ای که در قسمت قبل رسم کردید، محدوده‌هایی که هرکدام از این مدل‌ها غالب است را نشان دهید. (۰,۵ نمره)

ه) با استفاده از قسمت «د»، منحنی چرخش کهکشان را به‌صورت تقریبی در پاسخنامه رسم کنید. آیا این مدل با منحنی چرخش‌هایی که در گذشته برای کهکشان‌ها دیده‌اید، هم‌خوانی دارد؟ (۰,۵نمره)

و) جرم کل کهکشان چندبرابر جرم خورشید است؟ (۰,۵ نمره)

ثابت هابل را $H_{\cdot} = ۶۸.۷\ km/(s\ Mpc)$ بگیرید.

پرسش ۲: (۶,۵ نمره از ۲۵ نمره) [طراح: سیدمحمدتقی میرترابی، هدی پورغلامی]

توزیع جرمی ماده‌تاریک

به تازگی کهکشانی نسبتا بزرگ کشف شده است که با توجه به درخشندگی سطحی کمی که دارد، دانشمندان حدس می‌زنند که ماده تاریک، بخش مهمی از جرم آن را تشکیل می‌دهد. با مدل‌سازی و داده‌گیری‌های انجام‌شده، توانسته‌ایم قدر سطحی و سرعت چرخش در چند فاصله از مرکز کهکشان را اندازه‌گیری کنیم که نتایج آن را در جدول۱ مشاهده می‌کنید.

جدول ۱

#	$R(kpc)$	$\mu\left(\frac{mag}{arcsec^2}\right)$	$V(km/s)$
۱	۰/۰۶۸	۲۱/۰۰۴	۸۹/۲۱۳
۲	۰/۵۴۱	۲۲/۱۶۴	۱۳۶/۶۱۲
۳	۱/۸۲۶	۲۳/۳۲۵	۱۷۸/۵۴۲
۴	۴/۳۲۸	۲۴/۴۸۵	۲۱۱/۶۶۴
۵	۸/۴۵۳	۲۵/۶۴۵	۲۴۶/۵۱۹
۶	۱۴/۶۰۷	۲۶/۸۰۶	۲۸۹/۸۱۸
۷	۲۱/۲۶۳	۲۷/۷۳۴	۳۳۲/۷۱۵
۸	۳۲/۰۹۱	۲۸/۸۹۴	۳۹۲/۹۷۳
۹	۴۴/۵۳۰	۲۹/۹۳۸	۴۵۴/۳۶۸

از قانون تجربی سرسیک می‌دانیم که روشنایی سطحی کهکشان‌های دیسکی رابطه‌ای به شکل زیر دارد که در آن، R_e شعاع موثر، یا شعاعی است که درخشندگی داخل آن شعاع، نصف مقدار کل است. همچنین I_e درخشندگی سطحی کهکشان در شعاع موثر است. (درخشندگی سطحی، به صورت درخشندگی در هر واحد سطح یا $I = \frac{dL}{dA}$ تعریف می‌شود.)

$$I(R) = I_e e^{-b\left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]}$$

که برای این نوع کهکشان $n = 3$ است.

آ) رابطه‌ی بالا را برحسب قدر سطحی بازنویسی کنید. فرض کنید μ_e قدر سطحی متناظر با روشنایی سطحی I_e می‌باشد و مقدار آن برابر $\mu_e = 26\ mag/arcsec^2$ است. (۰,۲۵ نمره)

ب) در یک نمودار مناسب به انتخاب خود، μ برحسب R را طوری رسم کنید که منحنی حاصل به صورت خط باشد. سپس با برازش خط مناسب و استفاده از روش کمینه مربعات، ثوابت R_e و b را به همراه خطایشان بدست آورید. (۱,۷۵ نمره)

محاسبه‌ی خطا برای قسمت‌های بعد لازم نیست.

ج) رابطه‌ای انتگرالی برای درخشندگی تا شعاع R بدست آورید.

در جدول پیوست، مقدار این انتگرال برای مقادیر مختلف x (به‌صورت تعریف شده) داده شده‌است. با استفاده از این جدول درخشندگی (بر حسب درخشندگی خورشید) را برای فواصل داده‌شده در جدول۱ بدست آورید و در پاسخنامه بنویسید. (۲ نمره)

د) می‌دانیم برای این نوع کهکشان، رابطه‌ی درخشندگی با جرم روشن (ستاره‌ها) به صورت $\frac{L(R)}{L_\odot} = ۰.۰۲۵ \frac{M_B(R)}{M_\odot}$ می‌باشد. مقادیر جرم روشن را برای فواصل قسمت قبل بدست آورده و در پاسخنامه بنویسید. (۰,۵ نمره)

ه) با استفاده از سرعت‌های داده‌شده در جدول۱، جرم کهکشان تا هرشعاع را بدست آورید و در پاسخنامه بنویسید. سپس جرم ماده‌تاریک را تا هر شعاع بدست آورده و در پاسخنامه بنویسید. (۰,۵ نمره)

و) می‌دانیم چگالی ماده‌تاریک در این کهکشان از رابطه‌ای به‌صورت

$$\rho = \frac{\rho_.}{r^\alpha}$$

$(\alpha > ۰)$ پیروی می‌کند. ثوابت $\rho_.$ و α را بدست آورید. (۱,۵ نمره)

مقادیر مورد نیاز:

قدر مطلق خورشید: ۴,۸۳

ثابت گرانش: $G = ۶.۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$

$$F(x;\alpha) = \int_{.}^{x} \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-۱} e^{-y} dy$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)!$$

	α									
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.6320	0.2640	0.0800	0.0190	0.0040	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.8650	0.5940	0.3230	0.1430	0.0530	0.0170	0.0050	0.0010	0.0000	0.0000
3	0.9500	0.8010	0.5770	0.3530	0.1850	0.0840	0.0340	0.0120	0.0040	0.0010
4	0.9820	0.9080	0.7620	0.5670	0.3710	0.2150	0.1110	0.0510	0.0210	0.0080
5	0.9930	0.9600	0.8750	0.7350	0.5600	0.3840	0.2380	0.1330	0.0680	0.0320
6	0.9980	0.9830	0.9380	0.8490	0.7150	0.5540	0.3940	0.2560	0.1530	0.0840
7	0.9990	0.9930	0.9700	0.9180	0.8270	0.6990	0.5500	0.4010	0.2710	0.1700
8	1.0000	0.9970	0.9860	0.9580	0.9000	0.8090	0.6870	0.5470	0.4070	0.2830
9		0.9990	0.9940	0.9790	0.9450	0.8840	0.7930	0.6760	0.5440	0.4130
10		1.0000	0.9970	0.9900	0.9710	0.9330	0.8700	0.7800	0.6670	0.5420
11			0.9990	0.9950	0.9850	0.9620	0.9210	0.8570	0.7680	0.6590
12			1.0000	0.9980	0.9920	0.9800	0.9540	0.9110	0.8450	0.7580
13				0.9990	0.9960	0.9890	0.9740	0.9460	0.9000	0.8340
14				1.0000	0.9980	0.9940	0.9860	0.9680	0.9380	0.8910
15					0.9990	0.9970	0.9920	0.9820	0.9630	0.9300

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تحلیل‌داده ۳

زمان: ۹۰ دقیقه

پرسش ۱: (۶ نمره از ۲۵ نمره) [طراح: علیرضا وفایی صدر]

فرض کنید میزان درخشندگی سطحی یک کهکشان مارپیچی را در فواصل مختلف از مرکز آنها در رصدهای مختلف به شرح زیر است. (واحد داده‌ها اختیاری است)

رصد اول

r	I	error
0.0498	2,851.7503	21.4431
0.0695	2,380.3585	13.4725
0.0970	2,052.6371	25.9921
0.1353	1,505.7303	42.5917
0.1889	1,318.8918	53.6306
0.2636	916.9997	80.7550
0.3679	1,065.1732	31.3478
0.5134	480.5023	28.1698
0.7165	328.1725	10.5424
1.0000	211.4380	18.0805

رصد دوم

r	I	error
0.0498	2,775.6950	49.5298
0.0695	2,449.7728	46.1750
0.0970	1,854.5801	6.6762
0.1353	1,526.0567	7.2893
0.1889	1,364.9964	14.0266
0.2636	872.7204	33.6829
0.3679	822.0273	10.2018
0.5134	560.5012	11.8198
0.7165	572.1500	22.5322
1.0000	328.2900	25.5976

رصد سوم

r	I	error
0.0498	2,945.6142	12.1356
0.0695	2,377.2111	48.7825
0.0970	1,884.9580	32.0584
0.1353	1,502.2740	3.4252
0.1889	1,131.2861	60.8621
0.2636	973.9710	1.8319
0.3679	652.7160	40.8658
0.5134	268.6288	1.7304
0.7165	376.3815	3.9352
1.0000	255.0997	60.4152

مدل $I(r) = ۲۴۴e^{\frac{\ln(r)}{R}}$ را به عنوان اولین مدل برای آن پیشنهاد می‌کنیم.

آ) با استفاده از رصد اول، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید. (۱ نمره)

ب) داده‌ها و مدل را روی نمودار بکشید. (۱ نمره)

برای مقایسه بین مدل‌ها از نشانگر کیفی برازش ($goodness\ of\ fit.\ \chi^۲$) استفاده می‌شود طوری که

$$\chi^۲ = \sum (y_{model} - y_{observation})^۲$$

این کمیت هر چه کمتر باشد به معنی بهتر بودن مدل پیشنهادی است. زمانی که تعداد پارامترهای آزاد مدل‌های مورد مقایسه یکسان نباشد از تعریف نشانگر کیفی کاهش یافته ($\text{reduced } \chi^۲$) استفاده می‌شود که تعریف آن به شرح زیر است.

$$\chi_\nu^۲ = \frac{\chi}{\nu}$$

طوری که ν تعداد داده‌ها منهای درجات آزادی مدل است.

ج) حال اگر مدل دوم $I(r) = I. \times e^{\frac{\ln(r)}{R}}$ پیشنهاد شود بهترین پارامترهای آن را بیاید. (۱ نمره)

د) با استفاده از نشانگر کیفی کاهش یافته کدام مدل بهتر است؟ (۰,۷۵ نمره)

ه) چگونه می توان χ^2 را تصحیح کرد تا اثرات خطای آزمایش نیز در محاسبات برازش لحاظ شوند؟ فقط رابطه را بنویسید. (۰,۵ نمره)

و) اگر بهترین مقادیر بدست آمده برای رصدهای دوم و سوم به ترتیب به صورت زیر باشند، دلایل تفاوت در بهترین مقادیر بدست آمده را بنویسید. (۰,۷۵ نمره)

$$\frac{۱}{R} = -۰.۶۸۵۱ \qquad I = ۵.۹۴۸۶$$

$$\frac{۱}{R} = -۰.۸۶۰۲ \qquad I = ۵.۵۱۷۴$$

ز) اگر توزیع پارامترهای بدست آمده حول مقدار واقعی (بهترین مقدار پارامترها که توصیفگر میزان درخشندگی سطحی این کهکشان مارپیچی است) گاوسی باشد، مقدار بهینه پارامترها و خطای آنها را با استفاده از بهترین پارامترهای پیدا شده در سه رصد انجام شده را گزارش کنید. (۱ نمره)

آزمون‌های رصد

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون تئوری رصد

زمان: ۱۵۰ دقیقه

۱. جنگ‌های صلیبی (۶۰ نمره) [طرّاح: پارسا عالیان]

همان‌طور که می‌دانید، جنگ‌های صلیبی سلسله جنگ‌هایی میان مسلمانان و مسیحیان بود که به دستور پاپ، برای بازپس‌گیری سرزمین‌های مقدس افروخته شد.

دستور شروع جنگ‌های صلیبی اولین بار در سال ۱۰۹۵ میلادی توسط پاپ اوربان دوم داده شد. پاپ اوربان برای اشاعه‌ی مسیحیت در سرزمین‌های اشغالی تدبیری اندیشید؛ نقشه‌ای از آسمان فقط با استفاده از صلیب درست کنند و با استفاده از آن نقشه به عنوان نقشه‌ی مرجع آسمان، در اذهان مسلمانان نفوذ کرده و موفق شوند سرزمین‌های اشغالی را به‌طور نرم به مسیحیت بگردانند.

فهرستی از ستاره‌های موجود در برخی از این صلیب‌ها در جدول ۱-۱ آمده است.

نام صلیب	خط اول	خط دوم
آنچ	الفرس (α آندرومدا) – مرکب (α فرس اعظم)	منکب (β فرس اعظم) – الجنیب (γ فرس اعظم)
لنگر	عیوق (α ارابه‌ران) – الغول (β برساوش)	میرفک (α برساوش) – النث (β ثور)
شاخه‌ی انگور	کوکب (β دب اصغر) – مغرز (δ دب اکبر)	دبه (α دب اکبر) - رستابان (β اژدها)
مونوگرام کنستانتین	سماک رامح (α عوا) – نکار (β عوا)	سگینوس (γ عوا) – الفکه (α اکلیل شمالی)
عصای مسیح	شدیر (α ذات‌الکرسی) – میرفک (α برساوش)	روچبان (δ ذات‌الکرسی) – الماک (γ آندرومدا)
نیمه-ماه	الدبران (α ثور) – ابطالجوزا (α جبار)	النث (β ثور) – بلاتریکس (γ جبار)
بوتون	جُدَی (α دب اصغر) – الدرامین (α قیفاووس)	الطیس (δ اژدها) – کف (β ذات‌الکرسی)
قطره	دنب (α دجاجه) – البیرئو (β دجاجه)	صدر (γ دجاجه) – نسرواقع (α شلیاق)
نشان پیروزی	الطیر (α عقاب) – انیف (ϵ فرس اعظم)	روتانو (α دلفین) – کیتالفا (α قطعه الفرس)

جدول ۱-۱

آ) صلیب‌هایی از جدول بالا که در نقشه وجود دارند را رسم کنید.

ب) کدام صلیب‌ها به طور کامل، یعنی هیچ یک از ستارگان آن‌ها در نقشه‌ی داده‌شده دیده نمی‌شوند؟

پ) پنج جرم غیرستاره‌ای در مرزهای چهارضلعی عیوق-الدبران-ابط الجوزا-کاستور را روی نقشه به همراه نامشان مشخص کنید.

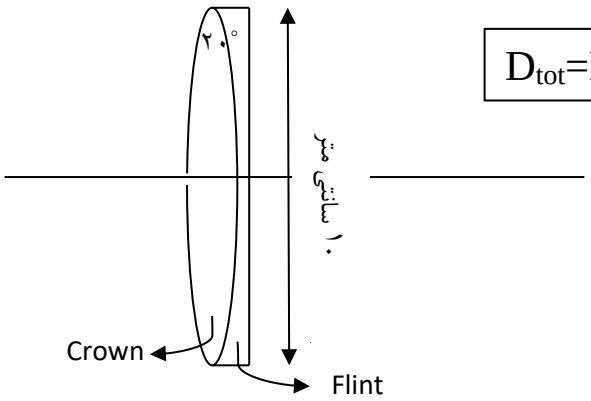
نقشه ۱-۱

۲. عدسی آکروماتیک (۷۰ نمره) [طرّاح: محمّد نیلفروشان]

می دانیم در ساخت عدسی‌های محدب و مقعر با انحناهای مختلف، رابطه‌ی **عدسی ساز** راه گشاست:
در این رابطه D توان عدسی، F فاصله کانونی، n_λ ضریب شکست شیشه برای پرتوهای مختلف و R و R' نیز شعاع‌های انحنای سطوح برخوردی برای نورِ ورودی هستند، که اگر برای ناظری در پشتِ عدسی (جایگاه ناظر) دارای انحنای محدب باشند (+) و اگر انحنا مقعر باشد (−) خواهند بود.

$$D_\lambda \equiv \frac{۱}{F_\lambda} = (n_\lambda - ۱)\left(\frac{۱}{R} - \frac{۱}{R'}\right)$$

اما همانگونه که در تصویر مشاهده می‌کنید، در عدسی‌های آکروماتیک (بدون کژنمایی[۱] رنگی) دو ترکیب مختلف از شیشه ها که عموماً از جنسِ $Crown$ و $Flint$ هستند در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند.
اگر دست یک سازنده‌ی عدسی برای انتخاب جنس و طراحی یک عدسی شیئی برای تلسکوپ‌های شکستی باز باشد و بخواهد مدلی مانند زیر بسازد، در حالی که پارامترهای جنس $Crown$ را می‌داند، پارامترهای مطلوب برای جنس $Flint$ را طی روند زیر محاسبه نمایید.
می‌دانیم عدسی نهایی ۱۰ سانتی متر قطر خواهد داشت و زاویه رأس بخشِ محدب آن نیز مطابق شکل ۲۰° است.



$$D_{tot}=D_{Crown}+D_{Flint}$$

همچنین برای گرفتن بهترین نتیجه یعنی نزدیک‌ترین حالت فاصله کانونی برای پرتوهای آبی $\lambda_B = ۴۴۰\ nm$ و قرمز $\lambda_R = ۶۶۰\ nm$ در این عدسی‌های ترکیبی، لازم است تا معادلات زیر برای ضریب آبه[۲]، که با نماد V_n آن را نشان می‌دهیم، برقرار باشد:

$$\frac{D_۱}{V_۱} + \frac{D_۲}{V_۲} = ۰$$

ضریب آبه برای نشان دادن میزان پراش از یک شیشه بیان می‌شود و برای شیشه‌های $Crown$ و $Flint$ به ترتیب ۶۰ و ۵۰ پیشنهاد داده شده است.

---

[۱] ابیراهی Aberration
[۲] Ernst Abbe

ضریب شکست هر شیشه را می‌توانیم از رابطه‌ی کوشی به دست آوریم که تا تقریب اول به صورت زیر است:

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \cdots$$

اگر برای شیشه‌ای از جنس $Crown$ مقادیر A و B به ترتیب ۱/۵۶۹۰ و ۰/۰۰۵۳ μm^2 باشد:

آ) با نوشتن محاسبات خود در کادر، مقادیر انتخابی A و B برای شیشه ای از جنس $Flint$ را به دست آورده و در جدول مشخص شده بنویسید.

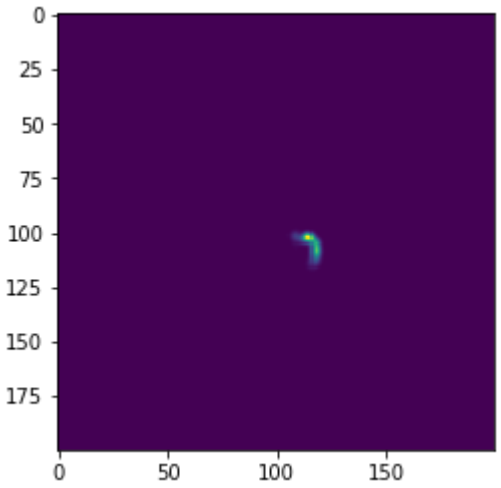
ب) با استفاده از یک عدسی چشمی ۲۵ میلی‌متری روی این تلسکوپ، بزرگنمایی چقدر خواهد بود؟

(برای عدد نهایی در بزرگنمایی، مقادیر تا ۱± واحد نمره کامل دریافت می‌کند)

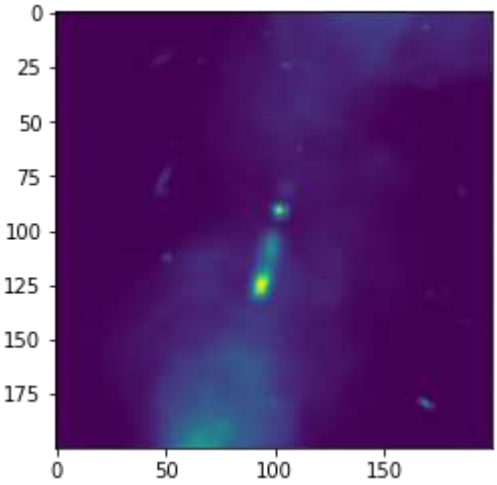
پارامتر A	
پارامتر B	
بزرگنمایی	

۳. پردازش تصویر (۴۰ نمره) [طرّاح: امیرحسین ستوده‌فر]

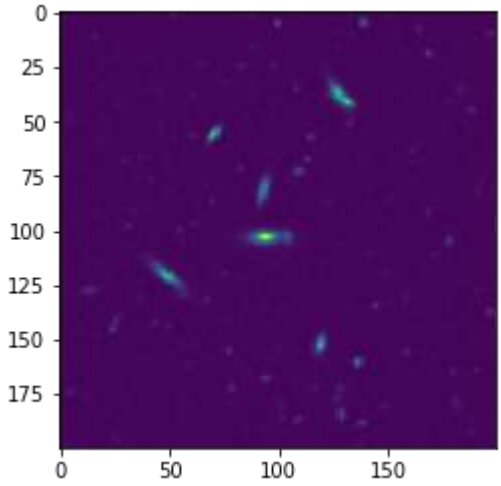
در این سؤال قصد داریم به یکی از کاربردهای پردازش تصویر[۱] برای عکس‌های نجومی بپردازیم. در تصاویر زیر، چند تصویر از اجرام مختلف در آسمان داده شده است:



تصویر ۳-۱



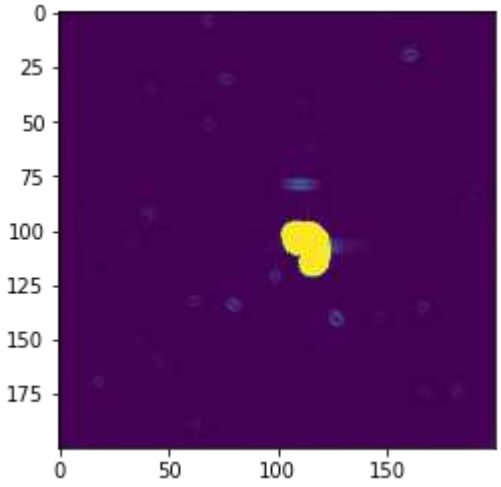
تصویر ۳-۲



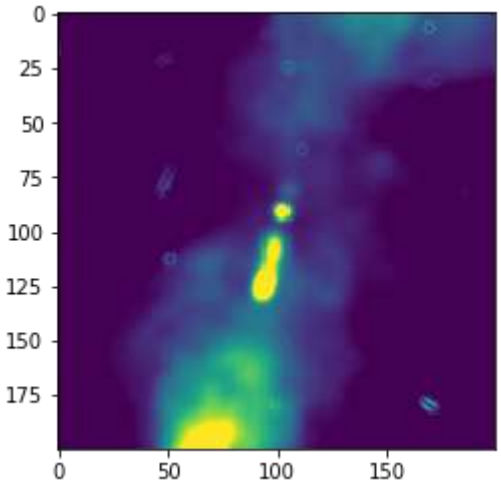
تصویر ۳-۳

[۱] image processing

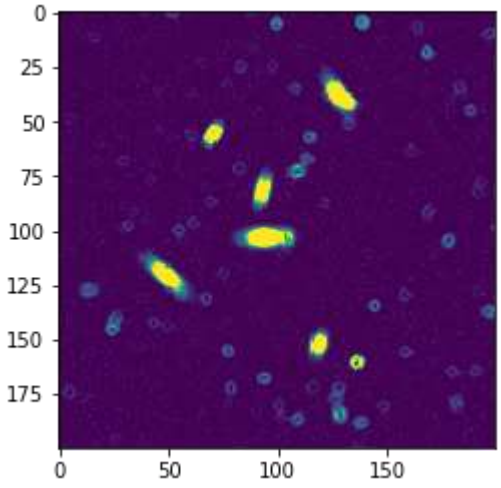
با اعمال فیلتر مناسب بر روی تصاویر و انجام پردازش‌های لازم، تصاویر مورد بررسی به صورت زیر در می‌آیند:



تصویر ۳-۴



تصویر۳-۵



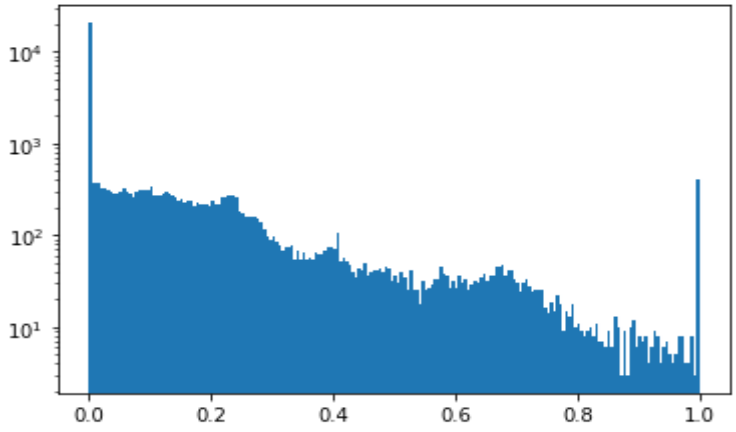
تصویر ۳-۶

مطالعه هیستوگرام[۱] مربوط به این تصاویر در برخی از کاربردها می‌تواند کمک‌کننده باشد. هیستوگرام مربوط به این تصاویر را به صورت زیر محاسبه می‌کنند:

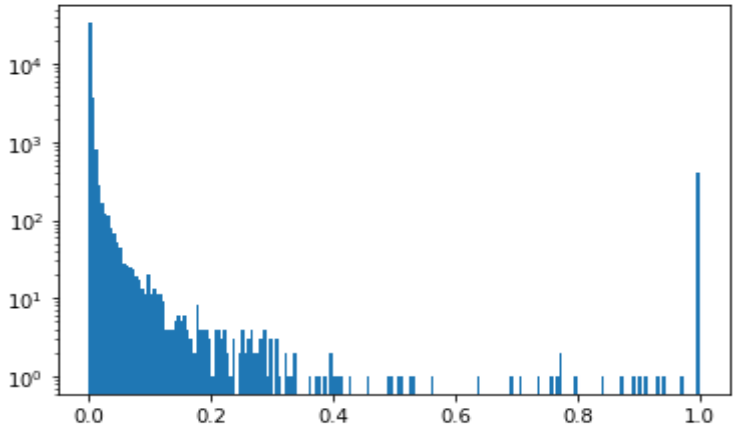
تصویر را به قطعات هم‌اندازه مربع‌شکل کوچک $(pixel)$ تقسیم می‌کنیم. به هریک از این مربع‌ها می‌توان یک مقدارِ شدت روشنایی نسبت داد. نمودار مربوط به تعداد پیکسل‌ها در بازه‌های کوچکِ روشناییِ تصویر را به عنوان هیستوگرام تصویر در نظر می‌گیریم.

[۱] Histogram

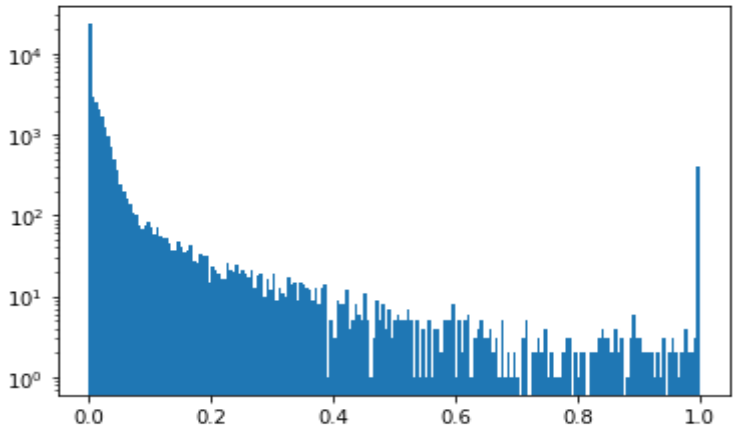
نمودار هیستوگرام به طور کلی درصد فراوانی هر کدام از بازه‌ها را به صورت ستونی نمایش می‌دهد. در تصاویر زیر، محور افقی نمایانگر شدت می‌باشد که نرمالیزه شده است. محور عمودی نیز لگاریتم تعداد را نشان می‌دهد. در تصاویر زیر، هیستوگرام مربوط به تصاویر بالا آورده شده است.



نمودار ۱



نمودار ۲



نمودار ۳

آ) ابتدا در جدول زیر مشخص کنید که هر نمودار مربوط به کدام تصویر است؟

تصویر ۱	تصویر ۲	تصویر ۳

ب) به صورت مختصر و کامل استدلال خود را در کادر زیر بیان کنید.

۴. ربات تیر (۱۰۰ نمره) [طرّاح: پارسا عالیان]

در آینده‌ی بسیار دور، هنگامی که انسان‌ها دیگر توانایی زندگی بر روی سطح زمین را ندارند و از آن فرار می‌کنند، رباتی روی زمین به‌جا مانده که نام آن تیر است. این ربات وظیفه دارد هر شب رأس ساعت دوازده از آسمان عکس بگیرد و برای سفینه‌ی فضایی انسان‌ها ارسال کند، تا شاید آسمان، نشانه‌ای برای برگشتن به سطح زمین به انسان‌ها بدهد.
از آن جایی که این ربات ساخت چین است، صورت‌فلکی‌هایی که در آسمان نشان داده می‌شوند هم صورت‌فلکی‌های چینی می‌باشند. همچنین از آن جایی که ربات چینی است، بعد از گذشت چند سال، دستگاه‌های آن خراب شده‌اند و از تصاویری که می‌گیرد تعداد معدودی به سفینه می‌رسند. سه عکس اخیرِ گرفته شده توسط ربات در ادامه آمده‌اند.

توجه: تمام موارد را در نقشه‌ی اول رسم کنید.

آ) قطب شمال دایره‌البروجی را علامت بزنید.

ب) استوای دایره‌البروجی را رسم کنید.

دوربینی که ربات توسط آن عکس‌برداری می‌کند، همواره به‌سمت سرسو گرفته شده است و تسطیح آن، تسطیح استریوگرافیک است. تمام توضیحات لازم برای این تسطیح انتهای سوال آمده است.

اگر عرض جغرفیایی محلی که ربات عکس را گرفته است $+۵۹/۵^{\circ}$ باشد:

پ) با توجه به سه عکس، دایره‌ی مرکز چرخش را برای ستاره‌ی α دب اصغر به دست آورید؛ محاسبات را در نقشه‌ی دوم انجام دهید و سپس قطب شمال سماوی را تعیین کنید و بر روی نقشه‌ی اول علامت بزنید.

ت) دایره‌ی چرخش قطب شمال سماوی حول قطب شمال دایره‌البروجی را رسم کنید.

ث) این عکس‌ها در چه سالی گرفته شده‌اند؟

ج) استوای سماوی را در این تاریخ رسم کنید.

برای راه حل و انجام محاسبات از کادر زیر استفاده کنید.

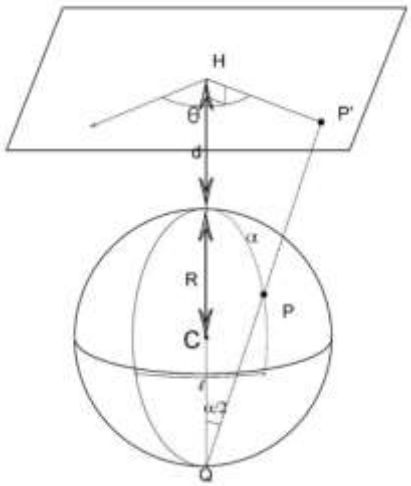
نقشه ۴-۱

نقشه ۴-۲

نقشه ۴-۳

توضیحات تسطیح استریوگرافیک

تصویر زیر چگونگی نگاشته شدن نقطه‌ی نوعی P از روی کره به نقطه‌ی P' تحت این تسطیح را نشان می‌دهد.



در تسطیح استریوگرافیک، ناظر در یک سر قطر (Q) نشسته و تصاویر را بر روی صفحه‌ی بالا می‌بیند. این تسطیح دارای دو ویژگی بسیار مهم است:

۱. دوایر صغیره و عظیمه بر روی صفحه به دایره نگاشته می‌شوند.
توجه کنید که مرکز دایره به مرکز دایره‌ی جدید نگاشته نمی‌شود.
۲. زاویه‌ی بین دوایر عظیمه حفظ می‌شود.

اگر دستگاه مختصاتی در صفحه تعریف کنیم که مرکز آن نقطه‌ی H باشد، همچنین مقدار R را واحد و مقدار d را برابر صفر بگیریم، روابط زیر برای یک دایره‌ی کروی (صغیره یا عظیمه) با مرکزی به میل (یا ارتفاع یا عرض دایره‌البروجی) δ و شعاع θ برقرار است:

$$r = \frac{۲cos\ \delta}{sin\ \delta\ + cos\ \theta} = \text{فاصله‌ی مرکز دایره از مبدأ}$$

$$D = \frac{۲\ sin\ \theta}{sin\ \delta\ + cos\ \theta} = \text{شعاع دایره}$$

$$r_{.} = ۲\ tan\ (۴۵° - \frac{\delta}{۲}) = \text{فاصله مرکزِ واقعی از مبدأ}$$

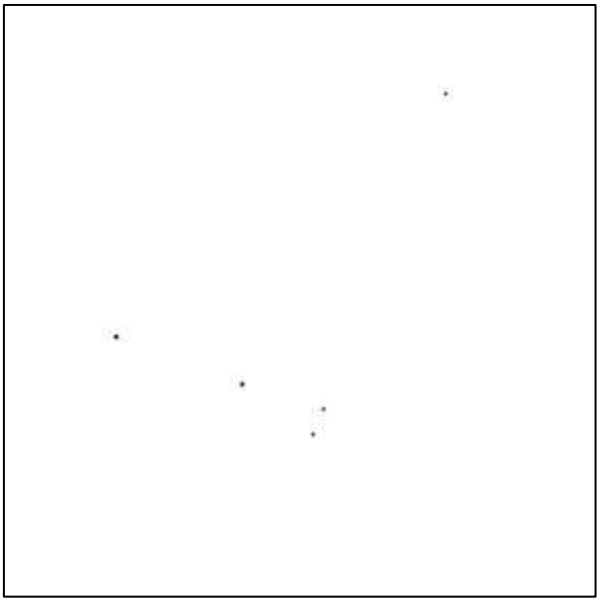
پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون رصد غیرمسلح

زمان: ۱۵۰ دقیقه

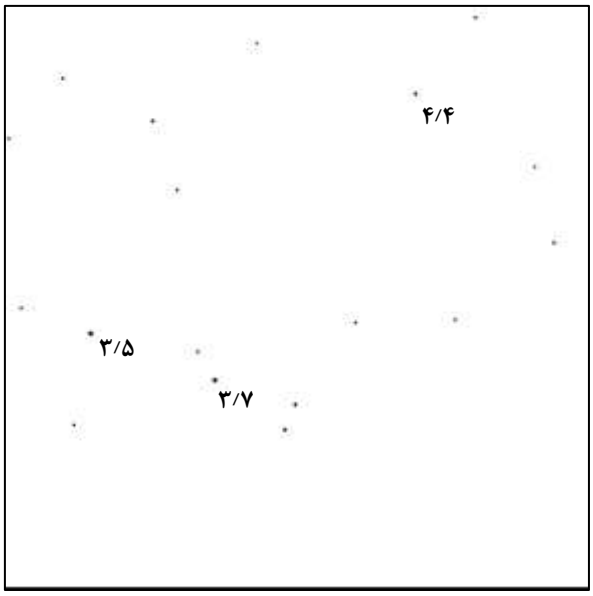
سؤال ۱: (۲۰ نمره) [طرّاح: **پارسا عالیان**]

منجمی در آسمان یک رصدگاه با شرایط نوری نامناسب، تصویر زیر را از صورت‌های فلکی روباهک و تیر ثبت کرده است.



نقشه ۱-۱

حال منجم قصد دارد با استفاده از این تصویر، حد قدری رصدگاه را تخمین بزند.



نقشه ۱-۲

آ) صورت‌های فلکی روباهک و تیر را در شکل مشخص کنید.

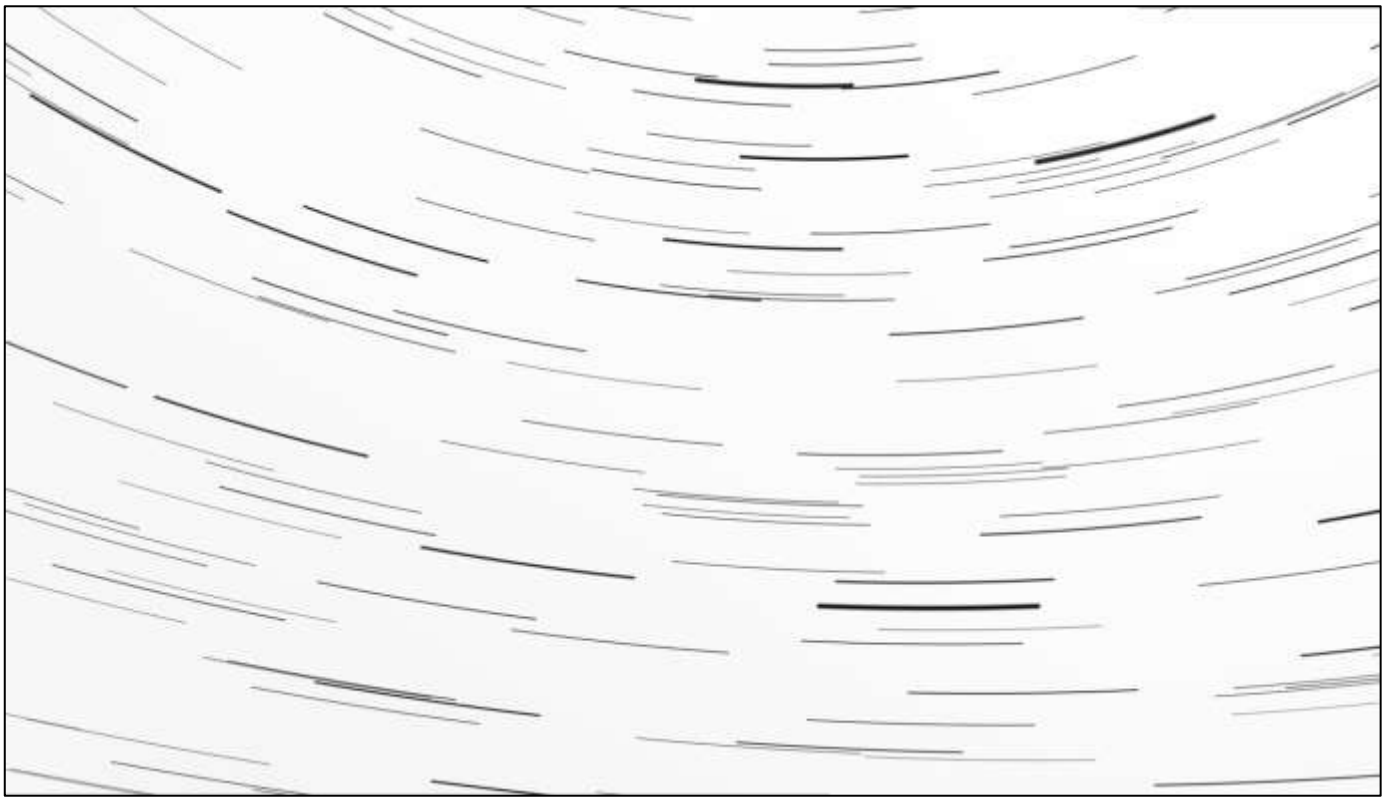
ب) با توجه به قدرهای مشخص شده در شکل، قدر ستارگان عضو بدنه‌ی اصلی صورت‌ها را مشخص کنید.

پ) حد بالایی برای حد قدری آسمان منجم تخمین بزنید.

سؤال ۲: (۸۰ نمره) [طرّاح: پارسا عالیان]

رصدگر سؤال قبلی تصمیم گرفته با نوردهی از آسمان، تصویری با رد ستاره‌ها بیاندازد. تصویر گرفته شده به شکل زیر است:

توجه کنید زاویه‌ها در عکس حفظ نشده‌اند.



نقشه ۲-۱

اما او پس از گرفتن تصویر متوجه شده است که در کمال تعجب نمی‌تواند صورت‌های فلکی موجود در عکس را شناسایی کند و به شما مراجعه کرده است.

آ) چهار صورت فلکی موجود در عکس را در شکل رسم کنید و نام آن‌ها را در کادر زیر بنویسید.

ب) خط استوای سماوی را در عکس مشخص کنید.

پ) به دلیل شرایط نامساعد جوی، تعدادی ستاره در عکس مشخص نیستند. برای دو صورت فلکی به انتخاب خود تعداد ستاره‌های حذف شده را مشخص کنید. (حذف شده از خطوط اصلی صورت فلکی به دلیل حد قدری)

صورت فلکی	تعداد

ت) دو ستاره که از دیگر ستارگان نقشه پرنورتر هستند را نام ببرید.

ث) اختلاف میل این دو ستاره را اندازه‌گیری کنید.

اختلاف میل	

ج) اگر این عکس با همان مقیاسی چاپ شده باشد که رصدگر آن را ثبت است، فاصله کانونی دوربین رصدگر را محاسبه کنید.

چ) مدت زمان نوردهی عکس چقدر است؟

سؤال ۳: (۱۰۰ نمره) [طرّاح: پریماه صفریان]

یکی از روش‌های به دست آوردن قدر حدی شمارش ستارگان داخل مزر مثلث‌هایی خاص در آسمان است؛ که قدر حدی متناظر با تعداد شمارش شده در جدول‌های مانند جدول ۳-۱ آمده است.

آ) برای آسمان بالای سرتان با شمارش ستارگان درون مثلثی به رئوس ستارگان α آندرومدا، α فرس اعظم و γ فرس اعظم و استفاده از جدول ۳-۱ قدر حدی را تخمین بزنید.

توجه کنید که این تعداد در بر گیرنده‌ی ستارگان روی مرزها و ستارگان رئوس مثلث نیز هست.

تعداد ستارگان	قدر حدی	تعداد ستارگان	قدر حدی
۱	۲/۱۱	۸	۵/۶۰
۲	۲/۸۸	۹	۵/۷۹
۳	۳/۰۲	۱۰	۵/۸۰
۴	۳/۷۸	۱۱	۵/۹۸
۵	۴/۹۵	۱۲	۶/۰۱
۶	۵/۱۵	۱۳	۶/۰۷
۷	۵/۵۵	۱۴	۶/۴۰

جدول ۳-۲

قدر حدی:

آسمان یک ناظر فراخورشیدی در سیاره‌ای به فاصله‌ی ۷ پارسک از ما، در ادامه در نقشه‌ی ۳-۱ آمده است. در آسمان این ناظر علاوه بر اجرام منظومه‌اش یک ابرنواختر نیز دیده می‌شود.

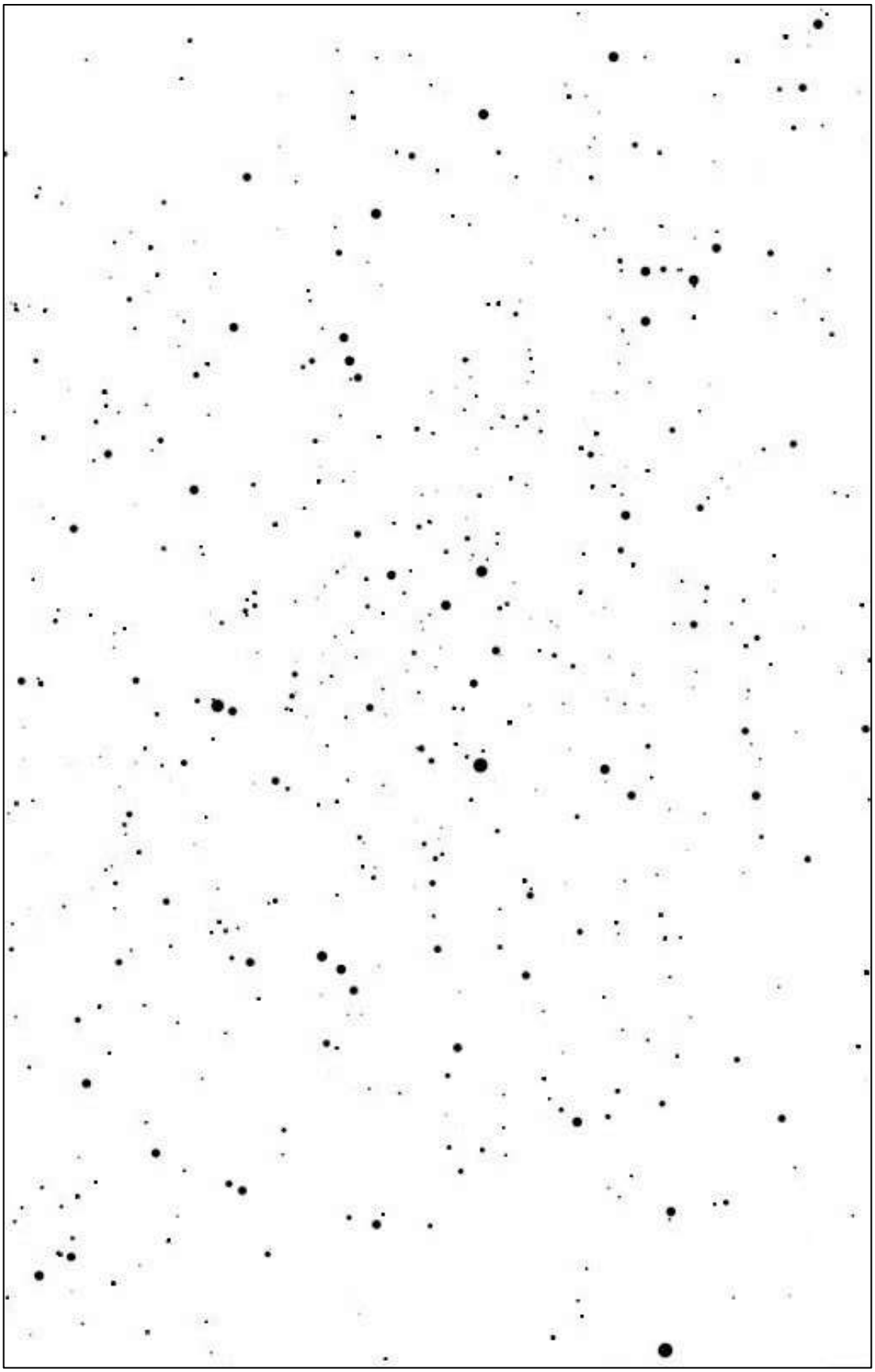
ب) روی نقشه سیارات منظومه‌ی ناظر را با علامت + و ابرنواختر را با ⊙ مشخص کنید.

پ) دایره‌البروج این ناظر را روی نقشه ترسیم کنید و با استفاده از آن عرض دایره‌البروجی ابرنواختر را گزارش کنید.

پ) با فرض این که سیاره دقیقاً در راستای خط واصل ما و ابرنواختر قرار دارد، مختصات (بعد و میل) ستاره‌ی میزبان را ذکر کنید.

بعد	میل

ت) قدر این ابرنواختر در آسمان ناظر فراخورشیدی ۵/۵ و قدر مطلق آن ۱۳- است. با توجه به قدر حدی آسمان بالای سرتان آیا انتظار دارید ابرنواختر در آسمانتان رؤیت‌پذیر باشد؟ دلیلتان را به اختصار در کادر زیر بیاورید.



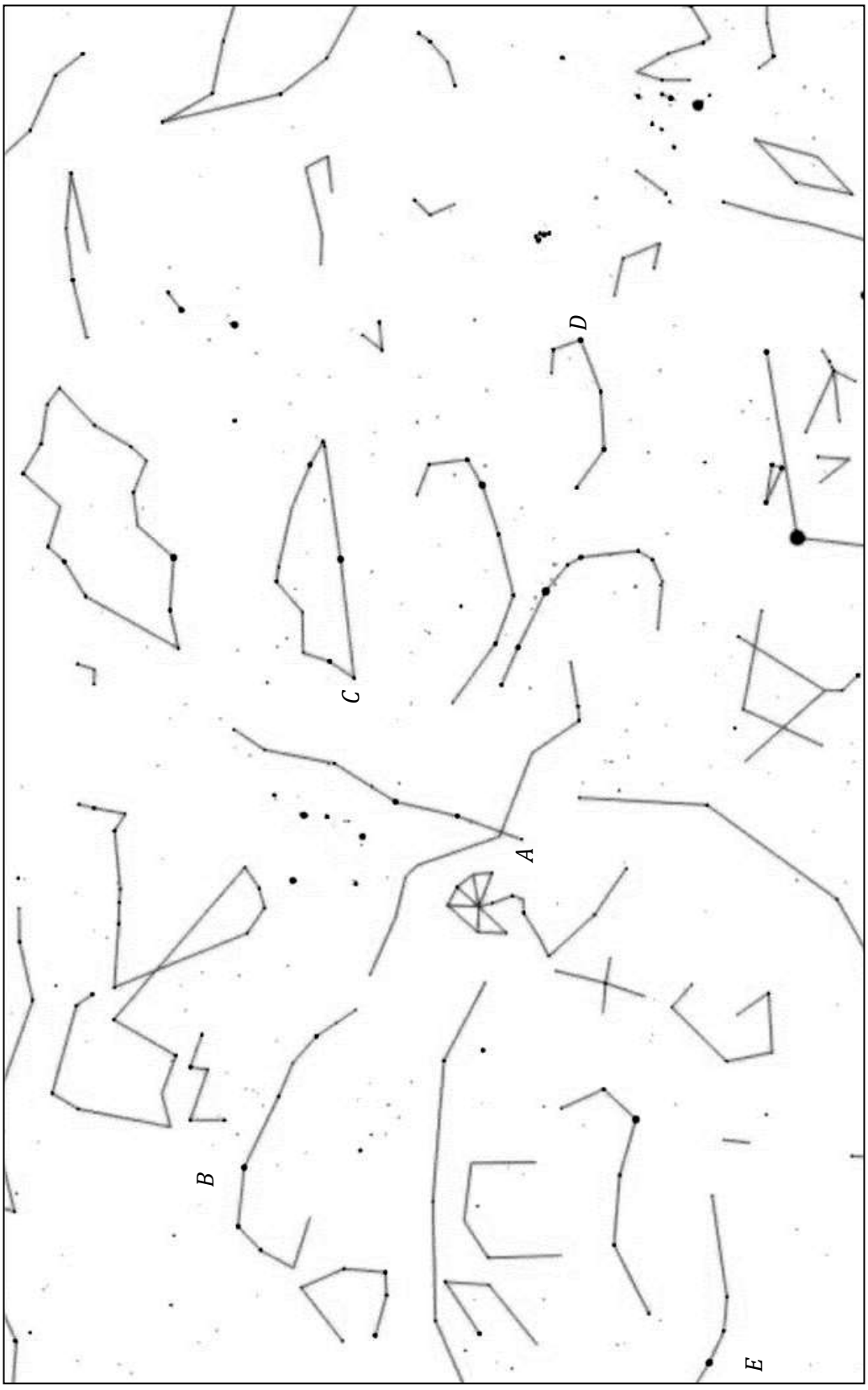
نقشه۳-۱

سؤال ۴: (۳۰ نمره) [طرّاح: محمّدعلی نادمی]

رصدگری در تهران ($\phi = ۳۵/۵^{\circ}$) به صورت اتفاقی مشاهده می‌کند که راه‌شیری عمود بر افقش واقع شده است. LST در آن لحظه برای ناظر چقدر می‌باشد؟

سؤال ۵: (۵۰ نمره) [طرّاح: محمّدعلی نادمی]

در نقشه داده شده، صورت‌های فلکی چینی را مشاهده می‌کنید.



نقشه۵-۱

آ) ۵ ستاره اصلی که در صورت‌های فلکی چینی در خطوط اصلی نیستند را با کشیدن ⊙ دورشان مشخص کنید و نامشان را در جدول زیر بنویسید. این ستارگان می‌باید هم نام مستعار داشته باشند و هم نام بایر.

#	نام بایری ستاره	نام مستعار ستاره
۱		
۲		
۳		
۴		
۵		

جدول ۵-۱

ب) میل ستاره‌های زیر را در جدول وارد کنید.

ستاره	میل
A	
D	
E	

جدول۵-۳

پ) فاصله جفت ستاره‌های زیر را بیابید:

ستاره‌های	فاصله زاویه‌ای
$A-C$	
$E-A$	
$B-D$	

جدول۵-۳

ت) پنج صورت فلکی که در تصویر مشاهده می‌کنید را نام برده و ۳ ستاره α و β و γ هرکدام را در نقشه مشخص کنید.

سؤال ۶: (۶۰ نمره) [طرّاح: پریماه صفریان]

رئوس مثلث تابستانی سه ستاره‌ی پرنور هستند که در فصل تابستان در ساعات اولیه‌ی شب نزدیک به سرسو قرار دارند. ستارگان این مثلث α شلیاق با طول دایره‌البروجی $\lambda = ۲۸۶^\circ$ ،α دجاجه با طول دایره‌البروجی $\lambda = ۳۳۶^\circ$ و α عقاب هستند. مثلث دیگری در آسمان توجه‌مان را جلب کرده است که رئوس آن در جدول ۶-۲ آمده‌اند.

آ) طول دایره‌البروجی را برای ستاره‌ی α عقاب و ستارگان جدول ۶-۲ اندازه‌گیری کنید.
میانگین طول دایره‌البروجی برای ستارگان مثلث تابستانی را به دست آورید.

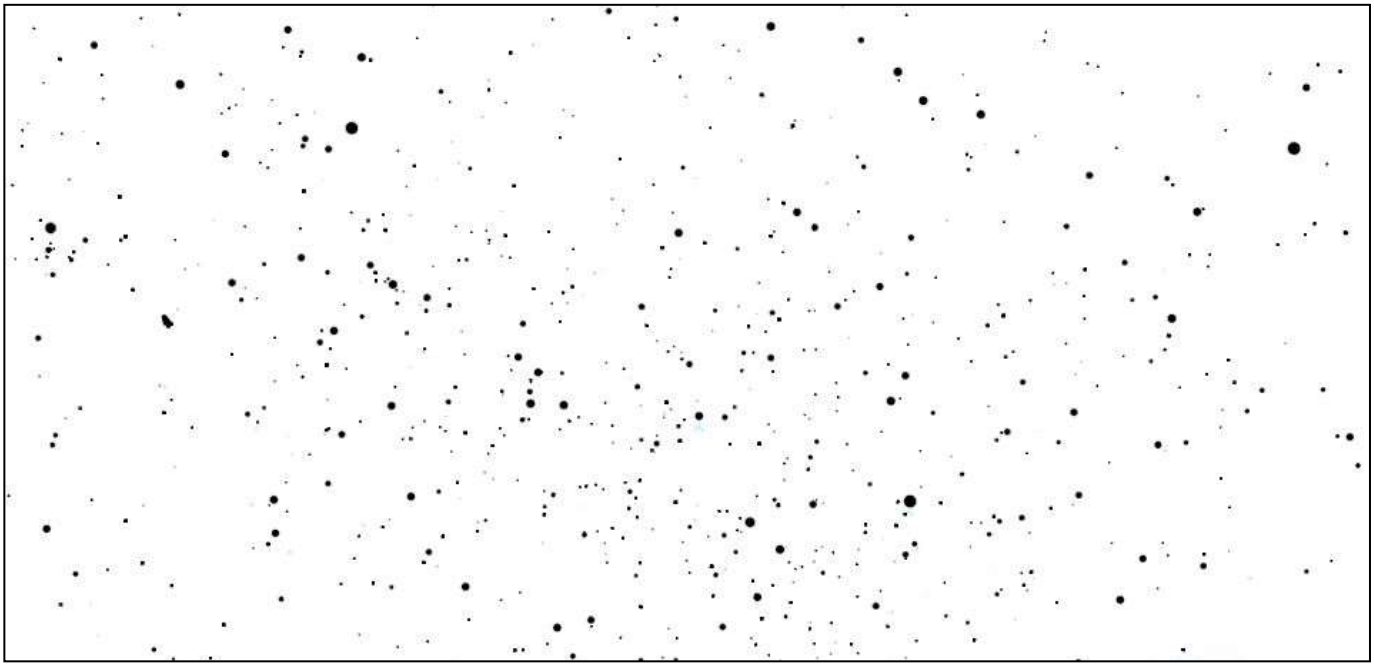
ستاره	طول دایره‌البروجی
عقاب α	

جدول۶-۱

ستاره	طول دایره‌البروجی
الغول	
حمل	
شدیر	

جدول۶-۲

ب) چند سال دیگر مثلث جدول ۶-۲، مثلث تابستانی خواهد بود؟ راه حلتان را به اختصار در کادر زیر بیاورید.
پ) قطب شمال سماوی را برای این زمان روی نقشه‌ی ۶-۱ علامت بزنید.
دوره تناوب حرکت تقدیمی زمین ۲۵۸۰۰ سال است.



نقشه ۱-۶

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون رصد مسلح

ایستگاه جرم‌گیری

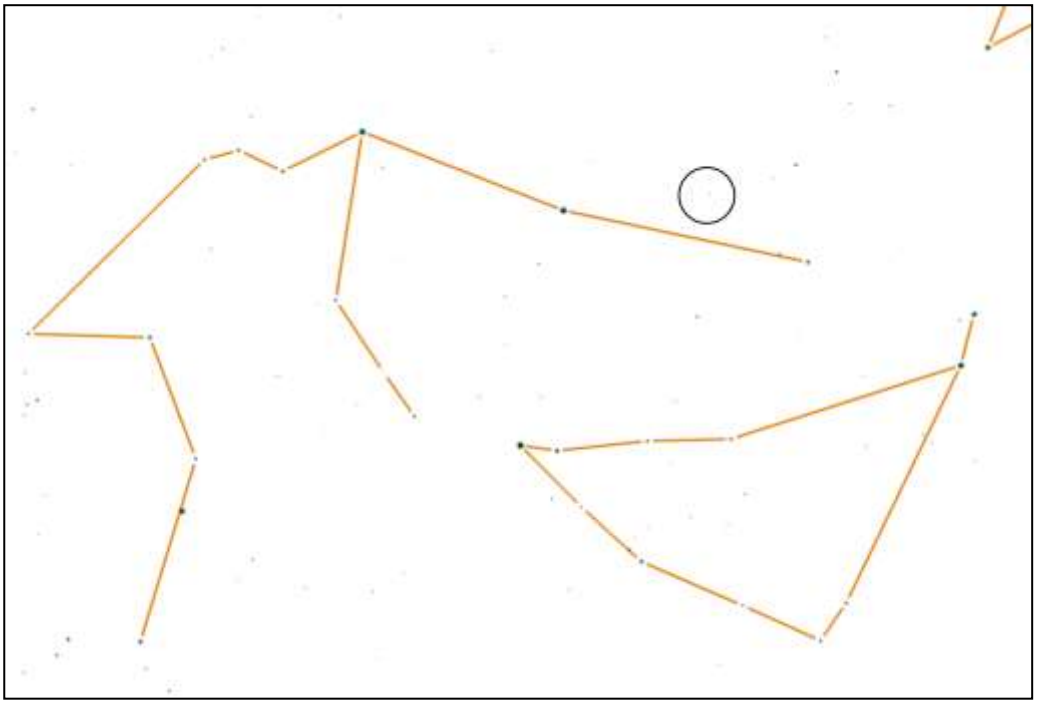
زمان: ۱۳ دقیقه

ایستگاه ۱ (۱۰ نمره) [طرّاحان: محمّد نیلفروشان و محمّدعلی نادمی]

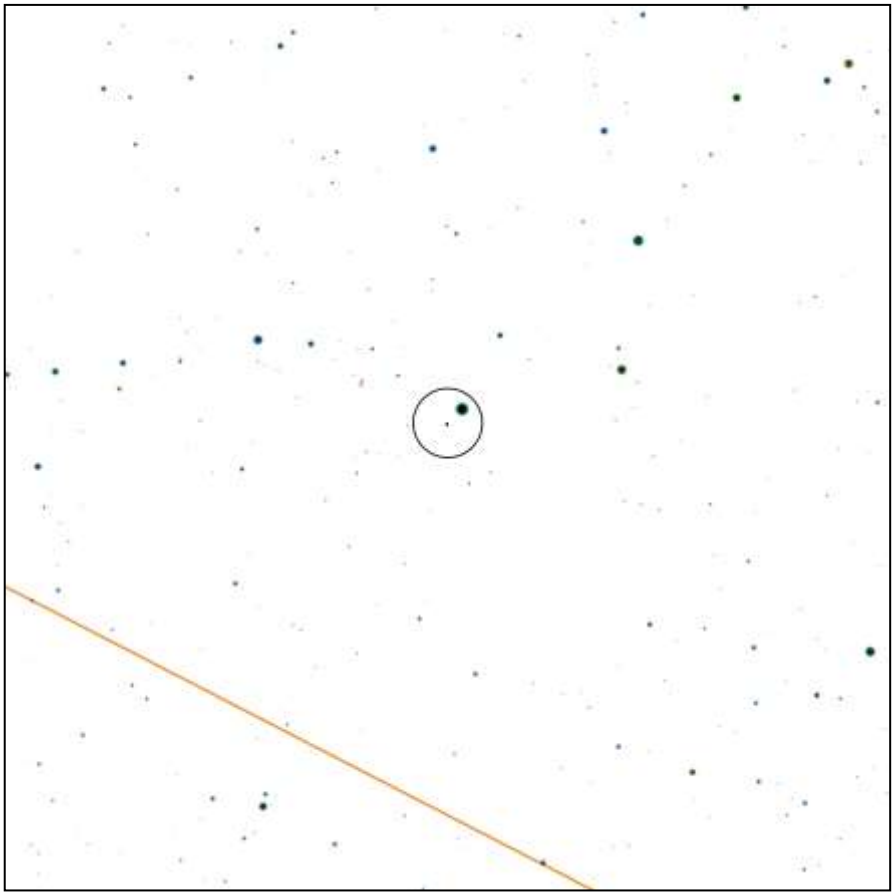
از بین هفت جرم زیر پنج جرم را به دلخواه انتخاب کرده و بگیرید. اجرام شامل اجرام غیر ستاره‌ای از فهرست مسیه و NGC هستند و همچنین یک **سیارک** که سه نقشه‌ی آن در ادامه آمده است.

به تأیید رساندن اجرام بیشتر، شامل نمره‌ی امتیازی می‌شود.

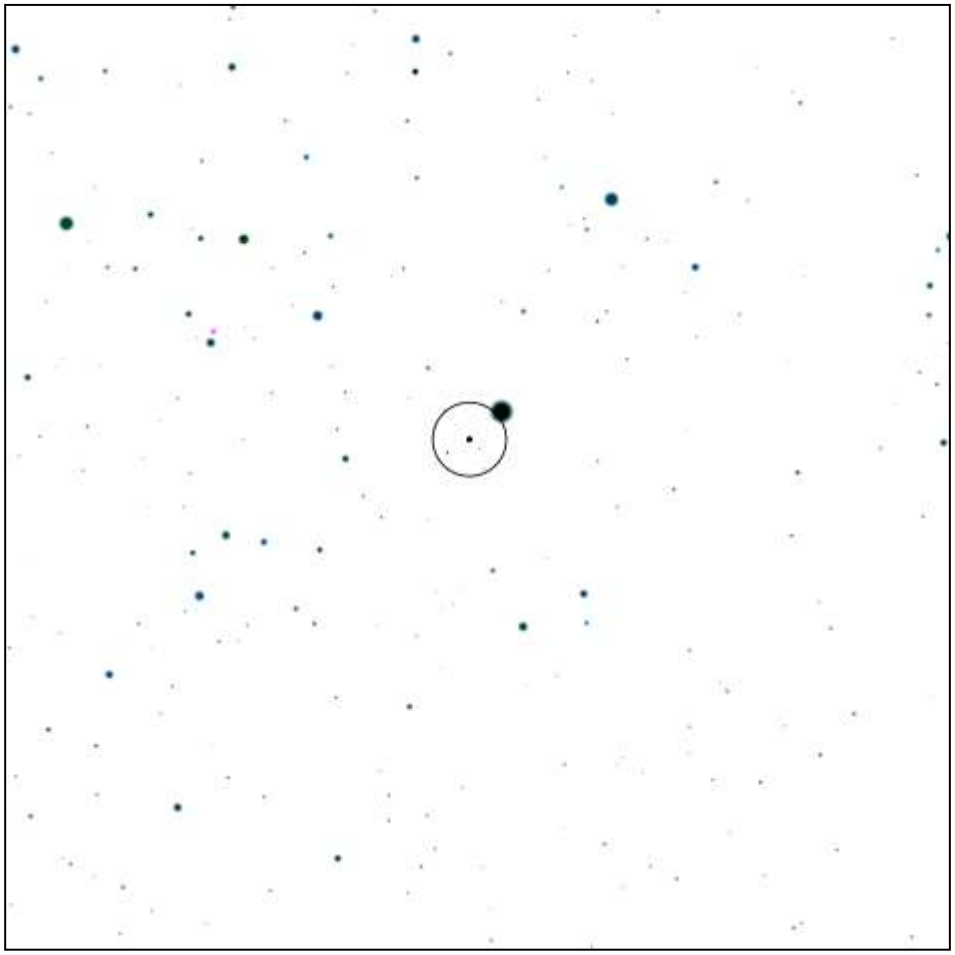
نام جرم	تأیید ناظر (اوّلین اقدام) ۱۰۰٪ نمره‌ی کامل	تأیید ناظر (دومین اقدام) ۸۰٪ نمره‌ی کامل	تأیید ناظر (سومین اقدام) ۵۰٪ نمره‌ی کامل
M۳۹	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
M۲۷	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
NGC ۷۰۲۷	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
M۵۷	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
M۳۰	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
NGC ۶۵۴	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا
سیارک *Eunomia*	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا



نقشه ۲



نقشه ۲



نقشه ۳

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون رصد مسلح

ایستگاه صورتواره و دوتایی

زمان: ۱۳ دقیقه

ایستگاه ۲ (۱۰ نمره) [طرّاح: امین حبیبی]

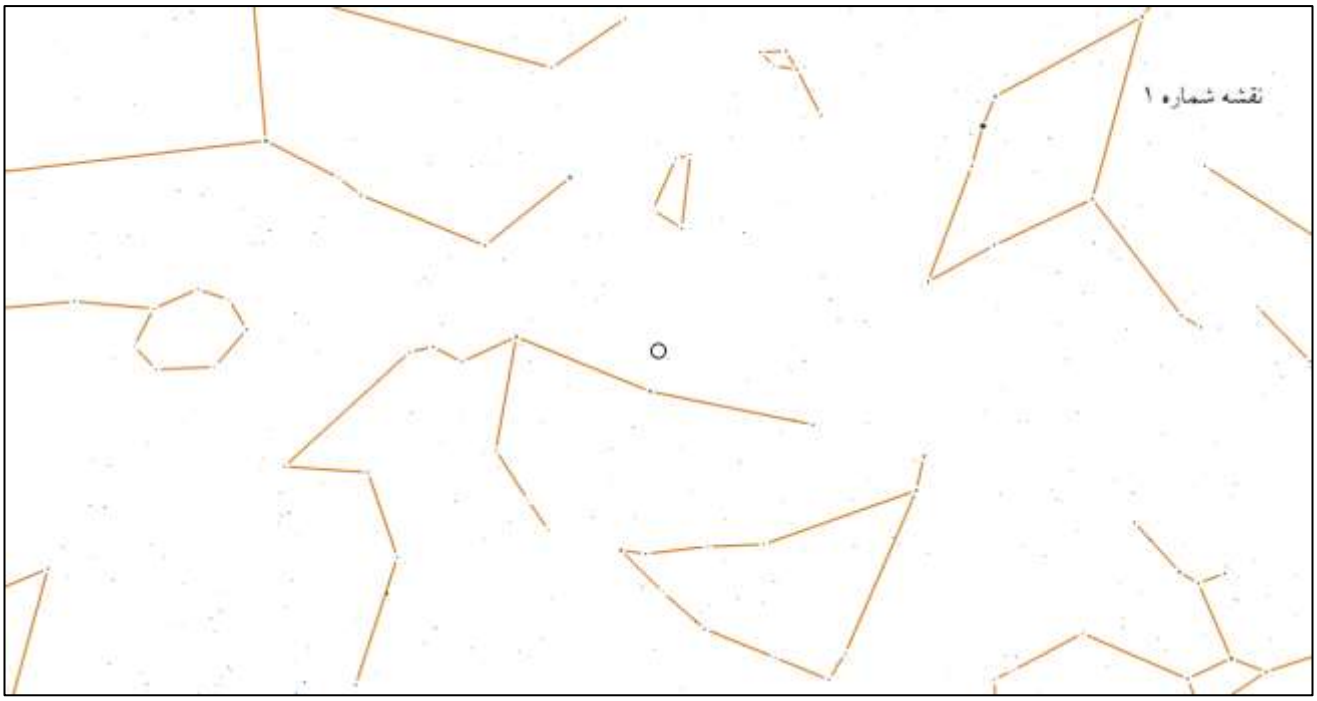
در این ایستگاه یک صورتواره و یک دوتایی به همراه سؤالات مربوط به آن آمده است.

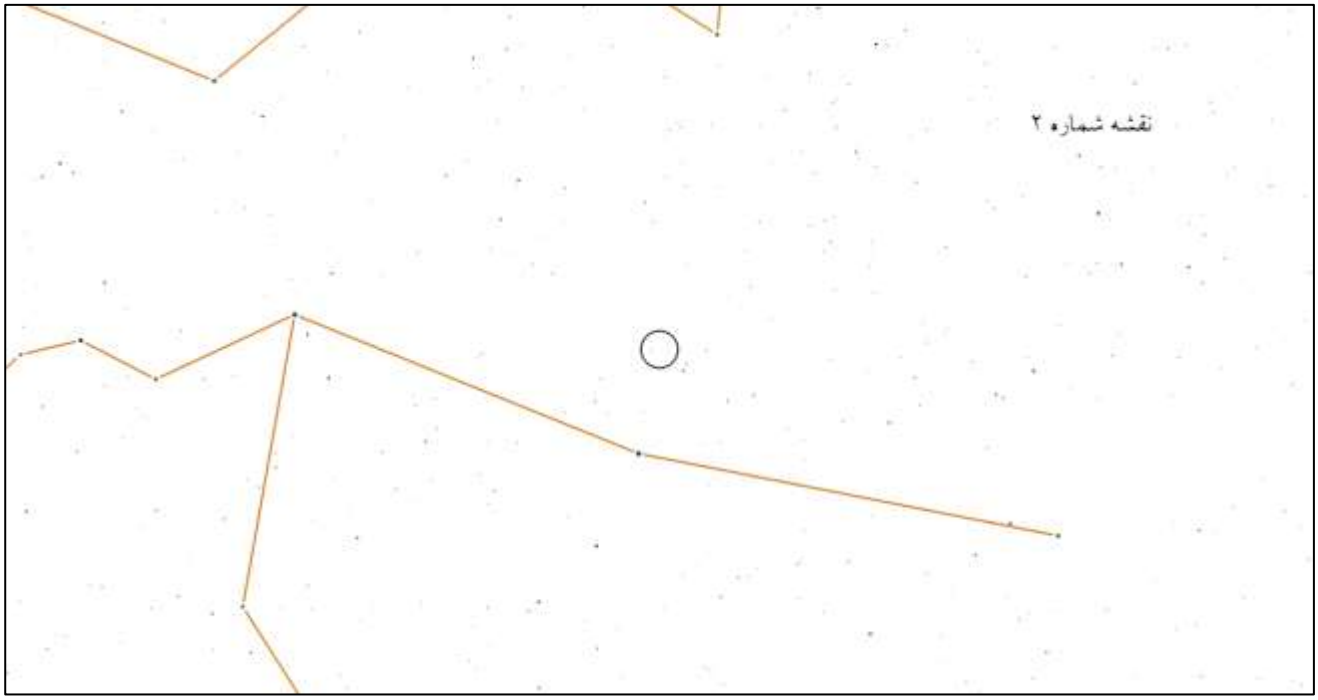
۱) صورتواره: (۷ نمره)

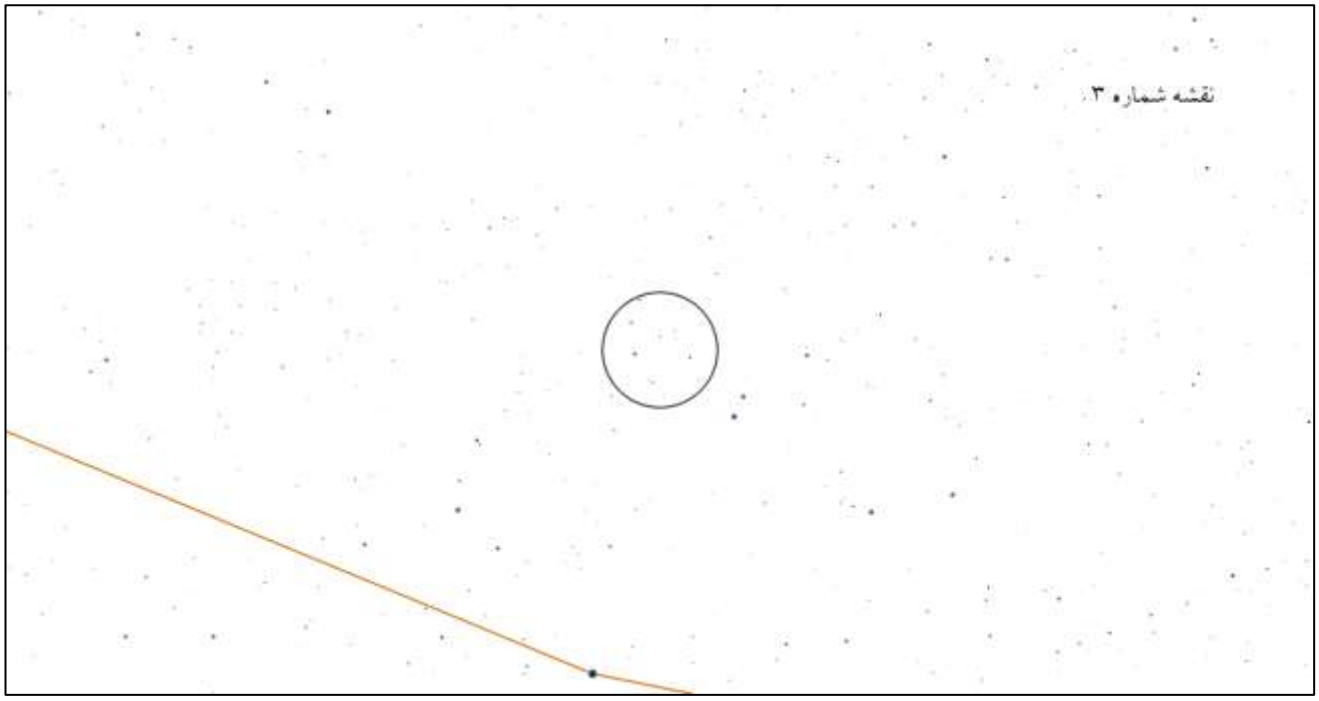
در صفحات بعد نقشه‌ی صورتواره‌ی"زرافه کوچولو" را مشاهده می‌کنید.

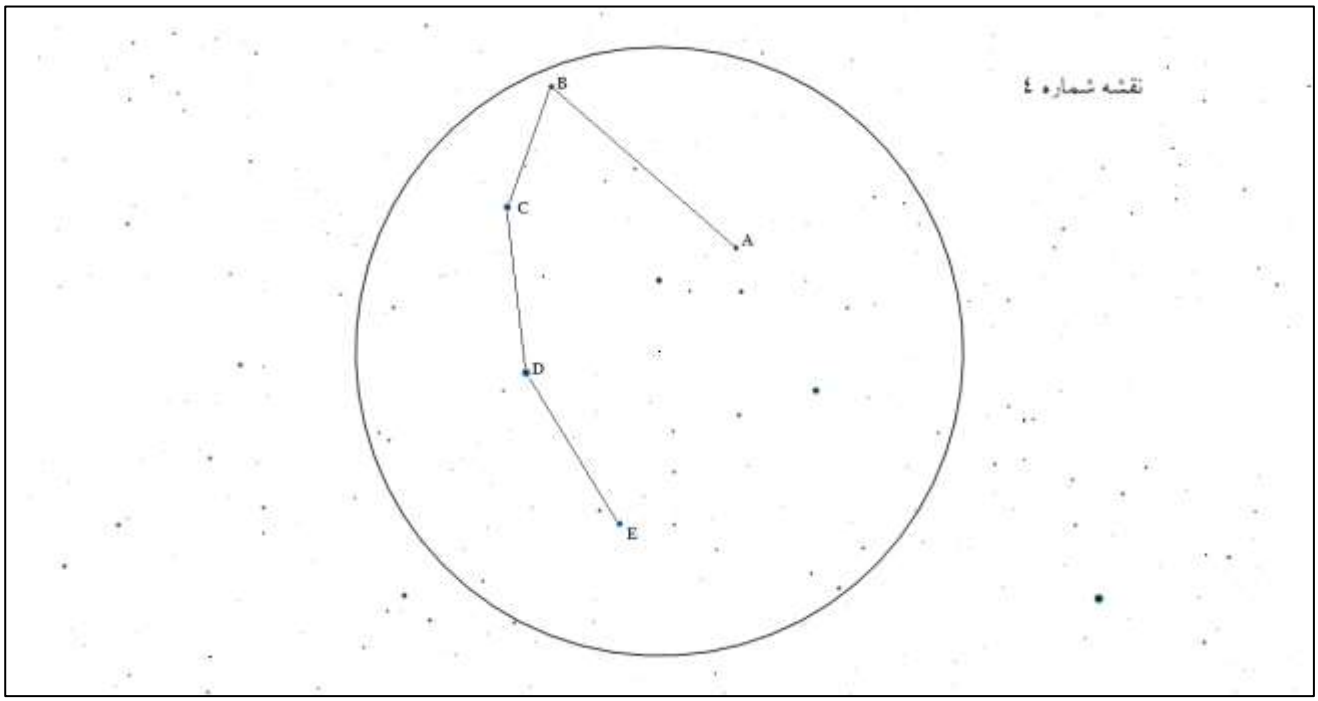
با استفاده از نقشه‌های شماره ۱ تا ۴، صورتواره را در وسط چشمی تلسکوپ به نحوی قرار دهید که تمام ستاره های A تا E در تصویر باشند و سپس از داور ایستگاه بخواهید تا آن را تأیید کند.

می‌توانید از ناظر بخواهید صورتواره را برایتان بیاورد. در این صورت تنها نمره‌ی بخش اول را نمی‌گیرید.




نقشه شماره ۲


نقشه شماره ۳



نام جرم	تأیید ناظر (اوّلین اقدام)	تأیید ناظر (دومین اقدام)	تأیید ناظر (سومین اقدام)
	۱۰۰٪ نمره‌ی کامل	۸۰٪ نمره‌ی کامل	۵۰٪ نمره‌ی کامل
صورتواره‌ی زرافه کوچولو	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا

با توجه به صورتواره‌ای که در میدان دید دارید به سه سؤال زیر پاسخ دهید.

۱. قدر ظاهری ستاره‌ی E برابر ۸٫۲۵ و قدر ظاهری ستاره‌ی D برابر ۶٫۸۷ است. قدر ظاهری ستاره‌های خواسته شده را تخمین بزنید.

قدر ظاهری ستاره B	قدر ظاهری ستاره C

۲. از میان ستاره های A تا E کدام یک دارای کمترین بعد است؟ کدام یک دارای بیشترین فاصله‌ی زاویه‌ای از قطب جنوب سماوی است؟

ستاره با کمترین بعد	ستاره با بیشترین فاصله‌ی زاویه‌ای از قطب جنوب سماوی

۳. فاصله‌ی زاویه‌ای ستاره‌ی C تا E را ۱۰۰ واحد در نظر بگیرید. مقادیر خواسته شده در جدول زیر را **در این مقیاس خاص** تخمین بزنید.

میدان دید چشمی	فاصله‌ی زاویه‌ای ستاره‌ی B تا E	میل ستاره B	فاصله‌ی زاویه‌ای ستاره‌ی B از خوشه‌ی کروی $M۲$

ب) ستاره‌ی دوتایی: (۳ نمره)

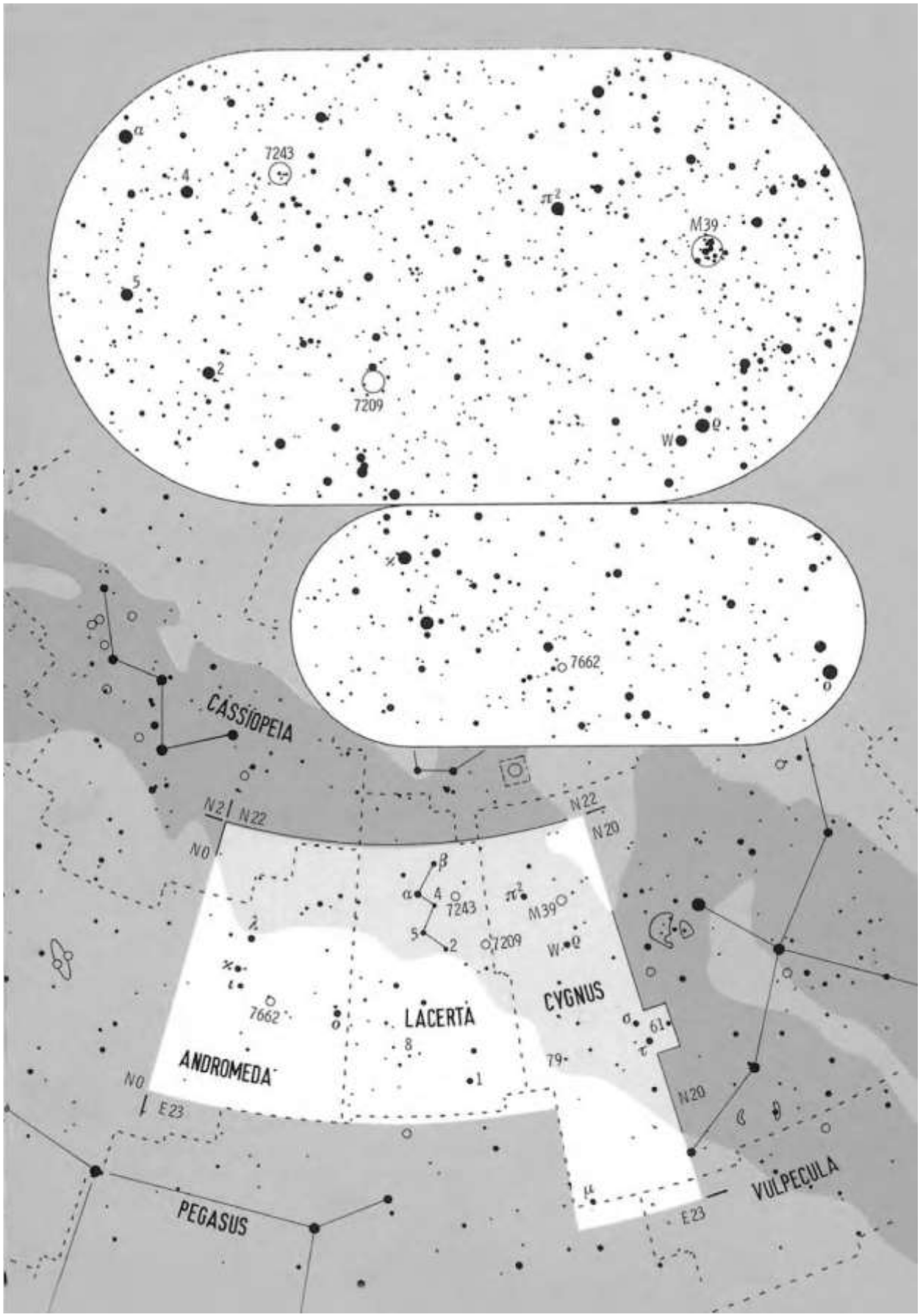
ستاره‌ی دوتایی خواسته شده را با توجه به **نقشه‌ی داده شده** به مرکز میدان دید بیاورید و موارد خواسته شده را بنویسید.

می‌توانید از ناظر بخواهید دوتایی را برایتان بیاورد. در این صورت تنها نمره‌ی آوردن دوتایی را نمی‌گیرید.

نام جرم	تأیید ناظر (اوّلین اقدام)	تأیید ناظر (دومین اقدام)	تأیید ناظر (سومین اقدام)
	٪۱۰۰ نمره‌ی کامل	٪۸۰ نمره‌ی کامل	٪۵۰ نمره‌ی کامل
۷۹ دجاجه	محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا

با توجه به دوتایی که در میدان دید دارید موارد زیر را تعیین کنید.

رنگ مؤلفه‌ی پرنورتر	رنگ مؤلفه‌ی کمنورتر	جدایی زاویه‌ای	زاویه‌ی موقعیت


7243
M39
7209
7662
CASSIOPEIA
N21
N22
N0
N22
N20
LACERTA
CYGNUS
ANDROMEDA
N0
E23
N20
PEGASUS
VULPECULA
E23

پانزدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون رصد مسلح

ایستگاه قطبی و کار با طوقه

زمان: ۱۳ دقیقه

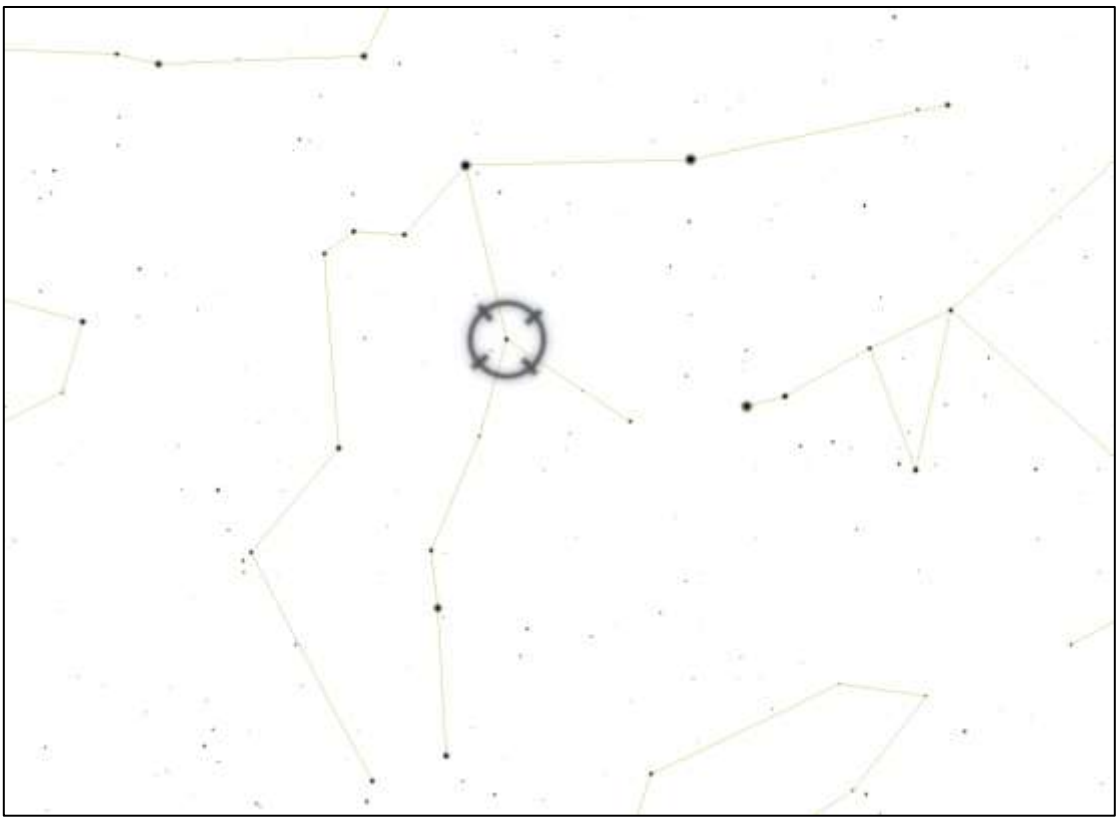
ایستگاه ۳ (۱۰ نمره) [طرّاح: هدی پورغلامی]

ا) تلسکوپ را با استفاده از قطبی‌بین $(Polarscope)$ قطبی کرده و برای تأیید به ناظر نشان دهید.

تأیید ناظر (اوّلین اقدام)	تأیید ناظر (دومین اقدام)	تأیید ناظر (سومین اقدام)
٪۱۰۰ نمره‌ی کامل	٪۸۰ نمره‌ی کامل	٪۵۰ نمره‌ی کامل
محلّ امضا	محلّ امضا	محلّ امضا

ب) نقشه‌ی زیر ستاره‌ی θ صورت فلکی دلو را نشان می‌دهد. ساعت ایستگاه و زاویه‌ساعتی این ستاره را از ناظر پرسیده و یادداشت کنید. سپس با استفاده از زاویه‌ساعتی و میل آن، طوقه‌ها را تنظیم (کالیبر) کنید.

$\delta_{\theta Aqr}$	-۷/۶۸۵ °
زمان	
زاویه ساعتی ستاره	



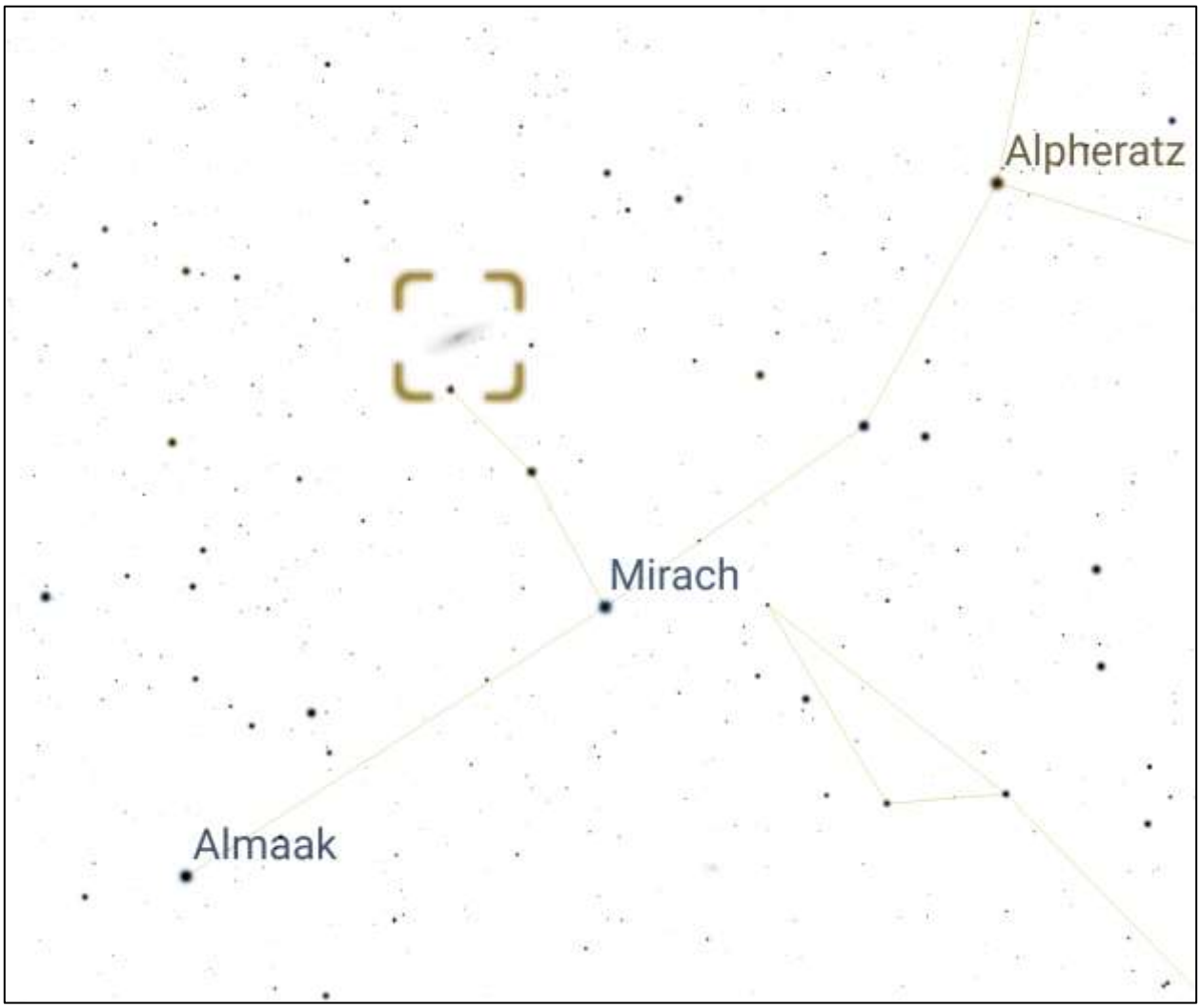
نقشه ۳

نقشه‌ی ۲ موقعیت کهکشان آندرومدا را نشان می‌دهد. مرکز روشن آن را به مرکز چشمی یا فایندر آورده و قسمت‌های بعد را حل کنید.

بُعد مرکز کهکشان آندرومدا نیز در جدول آمده است.

ب) میل مرکز کهکشان آندرومدا و زمان نجومی محلی (LST) را محاسبه کنید و در جدول زیر بنویسید.

δ_{And}	
LST	
α_{And}	$۴۳^m\ ۴۷^s$



نقشه ۴