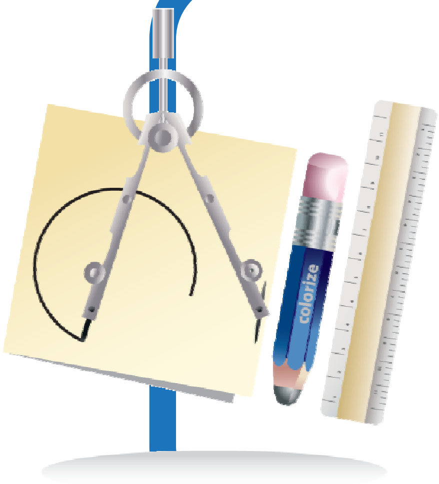
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



ریاضی ۱

فصل اول

اعداد و نمادها

معرفی مجموعه اعداد

۱) مجموعه اعداد طبیعی یا شمارشی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$

۲) مجموعه اعداد حسابی $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

۳) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

اعداد صحیح شامل اعداد طبیعی و صفر و قرینه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

۴) مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a\in\mathbb{Z}\ ,\ b\in\mathbb{N}\right\}$

مثال: چند مستطیل غیریکسان می‌توان رسم نمود که مساحت آن‌ها ۲۴ سانتی‌متر و طول و عرض آن‌ها برحسب سانتی‌متر اعداد طبیعی باشند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$۲۴=۲۴\times۱=۱۲\times۲=۸\times۳=۶\times۴$

مقایسه دو عدد گویا

برای مقایسه‌ی دو عدد گویا ابتدا با ضرب کردن صورت و مخرج در یک عدد، مخرج‌های دو عدد گویا را یکسان می‌کنیم. سپس با مقایسه‌ی صورت‌ها می‌توان تعیین کرد که کدام عدد بزرگ‌تر و یا کدام کوچک‌تر است.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. به بیان دیگر بین دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویا قرار دارد.

مثال: از بین سه عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۲۴}$ و $\frac{۳}{۷}$ کدام بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) با هم برابرند.

پاسخ: گزینه ۳

اگر آن‌ها را دو به دو مقایسه کنیم و عدد بزرگ‌تر را انتخاب کنیم راحت‌تر می‌باشد.

برای مقایسه باید مخرج‌ها یکسان شوند.

$$\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow\frac{۸}{۲۴}>\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow\frac{۱}{۳}>\frac{۵}{۲۴}$$

$$\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{۷}{۲۱}<\frac{۹}{۲۱}\Rightarrow\frac{۱}{۳}<\frac{۳}{۷}$$

تعیین عددی گویا بین دو عدد $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$

روش ۱: میانگین دو عدد همواره بین دو عدد قرار خواهد داشت.

$$\frac{a}{b}<\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{۲}<\frac{c}{d}$$

این روش به‌دلیل محاسبات زیاد طولانی خواهد بود.

روش ۲: اگر صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم، حاصل عددی می‌شود که بین دو عدد قبلی قرار دارد.

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

روش ۳: ابتدا مخرج دو کسر را یکسان می‌کنیم، سپس با توجه به صورت دو کسر عددی بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. در برخی موارد لازم است پس از یکسان‌سازی، صورت و مخرج هر دو کسر را در عدد دیگری نیز ضرب کنیم.

مثال: بین دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ سه عدد گویا بیان کنید.

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}\overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}}\frac{۱۲}{۲۴}\\ \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}\overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}}\frac{۱۶}{۲۴}\end{cases}\Rightarrow \frac{۱۲}{۲۴}<\frac{۱۳}{۲۴}<\frac{۱۴}{۲۴}<\frac{۱۵}{۲۴}<\frac{۱۶}{۲۴}$$

سه عدد $\frac{۱۳}{۲۴}$ و $\frac{۱۴}{۲۴}$ و $\frac{۱۵}{۲۴}$ بین دو عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ می‌باشند.

نمایش اعشاری

اعداد گویا نمایش دیگری دارند که با انجام عمل تقسیم به‌دست می‌آید که به آن نمایش اعشاری یک عدد گویند.

مثال: اعداد زیر را به فرم اعشاری تبدیل نمایید.

$$\frac{۱}{۲}=۱\div ۲=۰/۵$$

$$\frac{۱}{۱۰}=۱\div ۱۰=۰/۱$$

$$\frac{۲}{۳}=۲\div ۳=۰/۶۶۶۶...=۰/\overline{۶}$$

نمایش اعداد به فرم دهدهی

عدد دو رقمی $\overline{ab}=۱۰a+b$

عدد سه رقمی $\overline{abc}=۱۰۰a+۱۰b+c$

$$ab/c=۱۰a+b+\frac{c}{۱۰}$$

$\vdots$

در جمع و تفریق اعداد اعشاری نمادهای ممیز را زیر هم قرار داده و جمع یا تفریق را به‌صورت معمول انجام می‌دهیم.

مثال: یک عدد دورقمی را در نظر بگیرید، اگر جای ارقام آن را عوض کنیم و سپس دو عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر ۱۳۲ می‌شود. مجموع ارقام عدد کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

یک عدد دو رقمی: $\overline{ab}=۱۰a+b$

تعویض جای ارقام: $\overline{ba}=۱۰b+a$

$$\Rightarrow ۱۰a+b+۱۰b+a=۱۳۲\Rightarrow ۱۱a+۱۱b=۱۳۲$$

$$\Rightarrow ۱۱(a+b)=۱۳۲\Rightarrow a+b=۱۲$$

مثال: اگر a و b یک رقمی باشند، در ضرب زیر $a+b$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} ۲\,a\\ \times\, b\,۳\\ \hline ۶\,۹\\ +\,۹\,۲\;\\ \hline ۹\,۸\,۹\end{array}$$

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۷

۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

$$۳\times a=۹\Rightarrow a=۳$$

b در a ضرب شده و ۲ نوشته شده $\Rightarrow b\times ۳=۱۲\Rightarrow b=۴\Rightarrow a+b=۷$

راه حل دوم:

$$۹۸۹\div ۲۳=۴۳\Rightarrow b=۴\Rightarrow a+b=۷$$

مثال: حاصل تفاضل زیر را بیابید.

$$۲/۳۷۱-۱/۷۹=$$

$$\begin{array}{r} ۲/۳۷۱ \\ -۱/۷۹۰ \\ \hline ۰/۵۸۱ \end{array}$$

در ضرب دو عدد اعشاری، ممیزها را در نظر نگرفته و ضرب را انجام می‌دهیم. سپس به تعداد ارقام بعد از ممیز در هر دو عدد برای حاصل‌ضرب به‌دست آمده، اعشار در نظر می‌گیریم.

مثال: حاصل‌ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$۲/۷۲\times ۳/۴۲۱=۹/۳۰۵۱۲$$

$$۲۷۲\times ۳۴۲۱=۹۳۰۵۱۲$$

۵= تعداد ارقام بعد از ممیز در هر دو عدد

در تقسیم اعداد اعشاری بهتر است اعداد را به فرم کسری تبدیل کرده و سپس حاصل تقسیم را بیابیم.

$$\frac{۲/۷۲}{۳/۴}=\frac{\frac{۲۷۲}{۱۰۰}}{\frac{۳۴}{۱۰}}=\frac{۲۷۲\cancel{۰}}{۳۴۰\cancel{۰}}=\frac{۲۷۲}{۳۴۰}=۰/۸$$

دقت محاسباتی

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

مثال: حاصل $\frac{۱۱/۴۶-۵/۳۴}{۲/۰۴}$ برابر است با:

۱) ۲/۱۷ ۲) ۳/۰۵ ۳) ۳/۰ ۴) ۲/۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{array}{r} ۱۱/۴۶ \\ -۵/۳۴ \\ \hline ۶/۱۲ \end{array}\Rightarrow\frac{۶/۱۲}{۲/۰۴}=\frac{۶۱۲}{۲۰۴}=۳$$

مثال: در حاصل‌ضرب $۲۳۱/۴۵\times ۱/۰۰۰۱\times ۱/۵۷$، چند رقم معنی‌دار بعد از اعشار وجود دارد؟

۱) ۸ رقم ۲) ۹ رقم ۳) ۱۰ رقم ۴) ۷ رقم

پاسخ: گزینه ۲

کافیست تعداد اعشار اعداد را شمرده و با هم جمع کنیم.

$$۲+۴+۳=۹$$

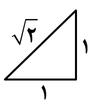
اعداد گنگ

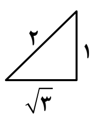
برخی اعداد وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت کسر (اعداد گویا) بیان نمود مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$، عدد π و ...، این اعداد را اعداد گنگ یا اصم نامند.

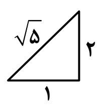
$$\sqrt{۲}\,,\,\sqrt{۳}\,,\,\sqrt{۵}\,,\,\sqrt{۶}\,,\,...$$

$$\pi\,,\,۲\pi\,,\,\pi^{۲}\,,\,\pi+۱\,,\,\pi+\sqrt{۲}\,,\,...$$

نمایش پاره‌خط‌هایی به طول اعداد گنگ

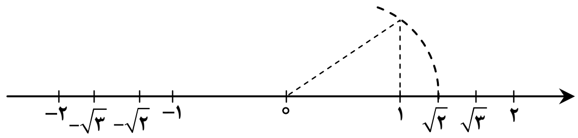
$\sqrt{۲}$:


$\sqrt{۳}$:


$\sqrt{۵}$:


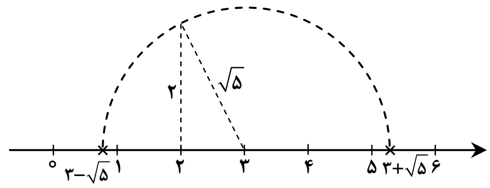
اعداد حقیقی

اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، اعداد حقیقی نامند که تشکیل محور اعداد حقیقی را می‌دهند.

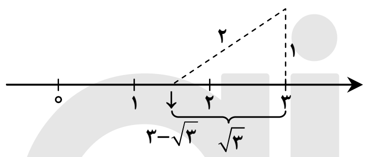


یعنی هر نقطه روی محور اعداد حقیقی متناظر با یک عدد گنگ یا گویاست.

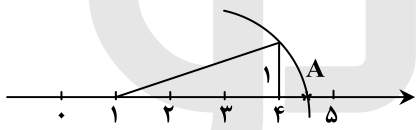
مثال: $۳-\sqrt{۵}$ و $۳+\sqrt{۵}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.



مثال: $۳-\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید.



مثال: در نمودار مقابل، نقطه‌ی A نشانگر چه عددی است؟



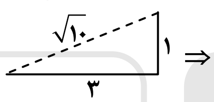
۱) $۲+\sqrt{۱۰}$

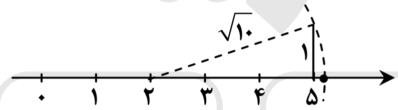
۲) $۱+\sqrt{۱۰}$

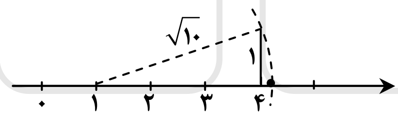
۳) $\sqrt{۱۰}$

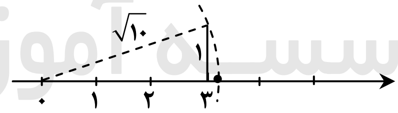
۴) $۳+\sqrt{۱۰}$

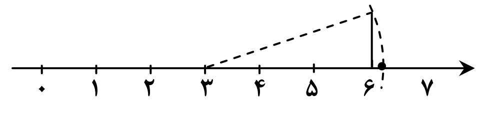
پاسخ: گزینه ۲

نمایش $\sqrt{۱۰}$ =  $\Rightarrow$

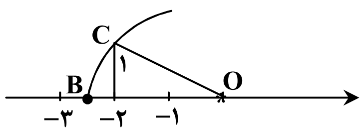
: گزینه‌ی ۱ 

: گزینه‌ی ۲  صحیح است

: گزینه‌ی ۳ 

: گزینه ی ۴ 

مثال: روی محور اعداد نقطه‌ی B چه عددی را نشان می‌دهد؟



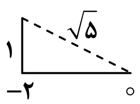
۱) $-\sqrt{۳}$

۲) $۱-\sqrt{۳}$

۳) $-\sqrt{۵}$

۴) $۱-\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

 $\Rightarrow$ به‌دلیل این‌که از صفر شروع شده و به چپ رفته است $\Rightarrow -\sqrt{۵}$

نماد قدرمطلق

برای بیان فاصله‌ی یک عدد حقیقی تا مبدأ از نماد قدرمطلق «| |» استفاده می‌شود که حاصل آن همواره عددی غیر منفی است.

برای محاسبه‌ی قدرمطلق به عدد درون آن نگاه می‌کنیم. اگر عدد غیر منفی باشد، حاصل قدرمطلق همان عدد خواهد بود و اگر عدد منفی باشد، حاصل قدرمطلق قرینه‌ی عدد می‌باشد.

مثال: اگر $a = ۱$ باشد، حاصل عبارت $|۲-a| - |-۳+a| + |۵a+۱|$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{عبارت} = |۲-۱| - |-۳+۱| + |۵+۱| = |۱| - |\underbrace{-۲}_{+۲}| + |۶| = ۱-۲+۶ = ۵$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$|۳| = ۳$

$\left|\frac{۴}{۳}\right| = \frac{۴}{۳}$

$|-۵| = ۵$

$|۱-۷| = |-۶| = ۶$

$|۱۱-۳| = |۸| = ۸$

$|۱-\sqrt{۲}| = \sqrt{۲}-۱$

$|۱+\sqrt{۲}| = ۱+\sqrt{۲}$

$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

دقت:

$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶...$

$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵۰۸۰$

$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶۰۶۷۹۷$

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵$

مثال: حاصل عبارت $|\sqrt{۳}-۱| + |۱-\sqrt{۳}|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}-۲$

پاسخ: گزینه ۴

$\sqrt{۳}-۱$ مثبت $\Rightarrow |\sqrt{۳}-۱| = \sqrt{۳}-۱$

$۱-\sqrt{۳}$ منفی $\Rightarrow |۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$

$\Rightarrow \text{عبارت} = \sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}-۱ = ۲\sqrt{۳}-۲$

مثال: خلاصه‌شده‌ی عبارت $|۲-\sqrt{۳}| - \sqrt{۳}|۱-\sqrt{۳}|$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $۵-۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

$۲-\sqrt{۳}$ مثبت $\Rightarrow |۲-\sqrt{۳}| = ۲-\sqrt{۳}$

$۱-\sqrt{۳}$ منفی $\Rightarrow |۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$

$\Rightarrow \text{عبارت} = ۲-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow ۲-\cancel{\sqrt{۳}}-۳+\cancel{\sqrt{۳}} = -۱$

تقریب اعداد به روش قطع کردن

در این روش اعداد اعشاری را فقط تا رقم دلخواه بیان می‌کنیم.

مثال: عدد π تا دو رقم اعشار ۳/۱۴ و تا ۴ رقم اعشار ۳/۱۴۱۵ می‌باشد.

در این روش، عدد تقریبی از عدد واقعی همواره کوچک‌تر خواهد بود.

علامت کوچک‌تر بودن

هرگاه روی محور اعداد حقیقی عدد b سمت راست عدد a قرار گیرد، می‌گوییم عدد b از عدد a بزرگ‌تر است یا عدد a از عدد b کوچک‌تر می‌باشد و آن را با نماد $a < b$ یا $b > a$ نمایش می‌دهیم.

مثال: اگر $A < ۵ - \sqrt{۳} < B$ ، که در آن A و B دو عدد صحیح و متوالی هستند، آن‌گاه $A + B$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳ \Rightarrow ۵ - \sqrt{۳} \simeq ۳/۲۷ \Rightarrow \underset{\underset{A}{\uparrow}}{۳} < ۵ - \sqrt{۳} < \underset{\underset{B}{\uparrow}}{۴} \Rightarrow A + B = ۷$$

مثال: از اعداد زیر کدام‌یک نامنفی است؟

۱) $\left|-۲\right| - \left|-۱\right|$ ۲) $-۳\left|-۳\right|$ ۳) $-\dfrac{۵}{\left|-۵\right|}$ ۴) $\left|۳-\pi\right|$

پاسخ: گزینه ۴

حاصل قدرمطلق همواره یک عدد نامنفی است $\Leftarrow$ $\left|\pi - ۳\right|$ نامنفی خواهد بود.

مثال: اگر $۰ < a < b < c < d$، آن‌گاه کدام عدد زیر از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $\dfrac{a+b}{c+d}$ ۲) $\dfrac{b+c}{a+d}$ ۳) $\dfrac{b+d}{a+c}$ ۴) $\dfrac{c+d}{a+b}$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: در یک کسر هرچه صورت بزرگ‌تر و مخرج کوچک‌تر باشد، کسر بزرگ‌تر خواهد بود.

روش دوم: می‌توان عددگذاری نمود، سپس گزینه‌ها را با هم مقایسه کرد.

زبان ریاضی

می‌توان جملات ریاضی را برای سهولت به زبان ریاضی بیان نمود.

مثلاً: جمله‌ی خبری «مجموع دو عدد دوازده و هفده، برابر بیست و نه است.» را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۱۲ + ۱۷ = ۲۹$$

یا «مجموع هر عدد با خودش مساوی با دو برابر آن عدد می‌باشد.»:

$$a + a = ۲a$$

در این‌گونه موارد که به عدد خاصی اشاره نشده از حروف انگلیسی a، b، c و ... استفاده می‌شود.

مثال: «حاصل‌جمع هر عدد با صفر خودش می‌شود.»:

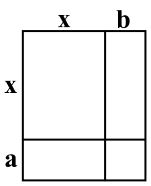
$$x + ۰ = x$$

مثال: «هر عددی با ۱ جمع شود از خود آن عدد بزرگ‌تر است.»:

$$z + ۱ > z$$

دقت: ضرب یک عدد در خودش را مجذور یا مربع آن عدد گویند، یعنی $x^۲$ مربع x است.

مثال: شکل مقابل نشانگر کدام‌یک از عبارات زیر است؟



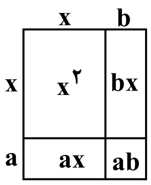
۱) $(x+a)(x+b) = x^۲ + abx$

۲) $(x+a)(x+b) = a^۲ + x^۲ + b^۲$

۳) $(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$

۴) $(x-a)(x-b) = x^۲ - (a+b)x + ab$

پاسخ: گزینه ۳



مجموع مساحت‌های داخل = مساحت کل

$$\Rightarrow (x+a)(x+b) = x^۲ + ax + bx + ab$$

$$= x^۲ + (a+b)x + ab$$

مثال: نماد ریاضی «معکوس تفاضل دو عدد حقیقی» کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$ ۲) $\frac{۱}{x-y}$ ۳) $x-y$ ۴) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$

پاسخ: گزینه ۲

$x-y$: تفاضل دو عدد حقیقی

$\frac{۱}{A}$: معکوس عدد حقیقی A $\Rightarrow$ ابتدا تفاضل و سپس معکوس $\Rightarrow \frac{۱}{x-y}$

اگر می‌گفت «تفاضل معکوس دو عدد» ابتدا باید معکوس سپس تفاضل را محاسبه می‌کردیم. $(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y})$

مثال: نماد ریاضی «فاصله‌ی x تا عدد (۲-) کم‌تر از یک است» کدام است؟

۱) $|x|-۲<۱$ ۲) $|x-۲|<۱$ ۳) $|x+۲|<۱$ ۴) $|x|+۲<۱$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: $|x-a|$: فاصله‌ی x از عدد a

فاصله‌ی x از عدد (۲-) $=|x-(-۲)|=|x+۲| \Rightarrow |x+۲|<۱$

مثال: نماد ریاضی «فاصله‌ی x تا عدد ۲، برابر ۵ است» کدام می‌تواند باشد؟

۱) $|x+۲|=۵$ ۲) $|x|-۲=۵$ ۳) $|x-۲|=۵$ ۴) $|x|+۲=۵$

پاسخ: گزینه ۳

فاصله‌ی x از عدد ۲ $=|x-۲| \Rightarrow |x-۲|=۵$

مثال: نماد ریاضی «اگر از عدد x، مجذور آن کم شود، حاصل برابر نصف معکوس آن می‌شود» کدام است؟

۱) $x^{۲}-x=\frac{۲}{x}$ ۲) $x^{۲}-x=\frac{۱}{۲x}$ ۳) $x-x^{۲}=\frac{۱}{۲x}$ ۴) $x-x^{۲}=\frac{۲}{x}$

پاسخ: گزینه ۳

$x^{۲}$: مجذور

$\frac{\frac{۱}{x}}{۲}=\frac{۱}{۲x}$: نصف معکوس $\Rightarrow x-x^{۲}=\frac{۱}{۲x}$

چند خاصیت مهم در اعداد

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

$a(x+y)=ax+ay$ خاصیت پخشی یا توزیع‌پذیری

$ax+ay=a(x+y)$ عکس عمل فوق را فاکتورگیری گویند.

$-(a+b+c)=-a-b-c$

تقدم اعمال ریاضی:

۱) پرانتز (داخلی‌ترین)
۲) توان
۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست)
۴) جمع و تفریق

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$-\left(۴\times-۳+۲-۳\times\left(۲+۵\div(-۱)\right)\right)+۱=?$$

$$-\left(۴\times-۳+۲-۳\times\underbrace{\left(۲+۵\div(-۱)\right)}_{۲-۵=-۳}\right)+۱$$

$$=-(\underbrace{۴\times-۳}_{-۱۲}+۲\underbrace{-۳\times-۳}_{+۹})+۱=-(-۱۲+۲+۹)+۱=-(-۱)+۱=۱+۱=۲$$

مثال: حاصل $-۵+۴\div۲+۱۴\div۲\times۷$ برابر است با:

۱) ۴۰   ۲) ۴۲   ۳) ۴۴   ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۴

$$-۵+\underbrace{۴\div۲}_{۲}+\underbrace{۱۴\div۲\times۷}_{\underbrace{۷\times۷}_{۴۹}}=-۵+۲+۴۹=۴۶$$

مثال: قیمت کالایی ۱۰٪ تنزل می‌کند. به‌منظور برگرداندن به ارزش قبلی، قیمت جدید چند درصد باید افزایش یابد؟

۱) ۱۰٪   ۲) ۹٪   ۳) ۱۱٪   ۴) $۱۱\frac{۱}{۹}$٪

پاسخ: گزینه ۴

$$\%۱۰=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow \underset{\text{قیمت اولیه}}{\underset{\downarrow}{x}}-\frac{۱}{۱۰}x=\frac{۹}{۱۰}x \text{ قیمت تنزل‌یافته}$$

حال می‌خواهیم آن را به قیمت اولیه باز گردانیم.

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۰}x+D\times\frac{۹}{۱۰}x=x\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}+D\times\frac{۹}{۱۰}=۱\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}(۱+D)=۱\Rightarrow ۱+D=\frac{۱۰}{۹}$$

$$\Rightarrow D=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\text{به درصد بیان کنیم}}D=\frac{۱}{۹}\times۱۰۰=\frac{۱۰۰}{۹}=۱۱\frac{۱}{۹}\%$$

فصل دوم

مجموعه‌ها

مجموعه

هر دسته‌ی مشخص شده از اشیا را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای آن مجموعه گویند. برای بیان مجموعه اعضای آن را بین دو آکولاد ({ }) قرار می‌دهند. معمولاً از حروف بزرگ برای نام‌گذاری مجموعه‌ها استفاده می‌شود.

نکته: اعضای یک مجموعه باید مشخص باشند.

مثال: عبارت «انسان‌های کوتاه‌قد» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و نسبی هستند.

عبارات زیر از این گونه‌اند:

«اعداد بزرگ»، «اعداد کوچک»، «لباس‌های زیبا» و ...

عضویت

هر یک از اشیاء مجموعه را یک عضو مجموعه گویند. برای نمایش عضو بودن از علامت $\in$ و برای نمایش عضو نبودن از علامت $\notin$ استفاده می‌شود.

نکته: یک شیء عضوی از مجموعه است هرگاه در داخل مجموعه عیناً موجود باشد.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{\{۱\},۲,\{\{۲\}\},\{\}\}$ را در نظر بگیرید.

غلط	$\{۲\} \in A$	صحیح	$\{۱\} \in A$
صحیح	$\{\{۲\}\} \in A$	غلط	$۱ \in A$
صحیح	$\{\} \in A$	صحیح	$۲ \in A$

این مجموعه چند عضو دارد؟ ۴ عضو

مجموعه‌ی تهی

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و به‌صورت { } یا $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

زیرمجموعه

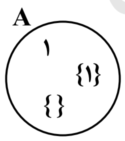
اگر A و B دو مجموعه باشند به‌طوری‌که هر عضو A، عضو B نیز باشد، در این صورت گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و آن را به‌صورت $A \subset B$ نمایش می‌دهیم.

برای بیان زیرمجموعه نبودن از علامت $\not\subset$ استفاده می‌شود.

نکته: مجموعه‌ی { } ($\varnothing$) زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.

نکته: برای مشخص شدن آن‌که آیا A زیرمجموعه‌ی B است یا خیر کافی است بررسی کنیم اعضای A عیناً در مجموعه‌ی B حضور دارند یا خیر.

مثال:



صحیح	$\{\} \in A$	غلط	$۱ \subset A$
صحیح	$\{\} \subset A$	صحیح	$\{۱\} \subset A$
صحیح	$\{\{۱\}\} \subset A$	صحیح	$\{۱\} \in A$
صحیح	$\{۱,\{۱\}\} \subset A$		

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی ۲^n می‌باشد.

مثال: کدام مجموعه‌ی زیر تهی نیست؟

۱) $\{x \mid x^۲ = ۵, x \in W\}$
۲) $\{x \mid ۳x^۵ = ۳, x \in \mathbb{N}\}$
۳) $\{x \mid x^۲ + ۲x + ۱ = ۰, x \in \mathbb{N}\}$
۴) $\{x \mid x^۲ + ۲ = ۰, x \in \mathbb{R}\}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی ۱: $x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \notin W$

گزینه‌ی ۲: $۳x^۵ = ۳ \Rightarrow x^۵ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \in \mathbb{N}$

گزینه‌ی ۳: $(x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \notin \mathbb{N}$

گزینه‌ی ۴: $x^۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۲ \Rightarrow$ فاقد جواب حقیقی

مثال: زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ کدام است؟

۱) $\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\},\{A\}$ ۲) $A,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}$ ۳) $A,\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\{\varnothing\}$ ۴) $\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\{\varnothing\}$

پاسخ: گزینه ۳

$\varnothing$ زیرمجموعه ۰ عضوی

$\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}$: زیرمجموعه ۱ عضوی

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=A$: زیرمجموعه ۲ عضوی

مثال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $x+5$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $x+3$ عضوی است؟

۱) ۲ برابر ۲) ۳ برابر ۳) ۴ برابر ۴) $\frac{1}{4}$ برابر

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{2^{x+5}}{2^{x+3}}=2^{(x+5)-(x+3)}=2^2=4$$

شرط تساوی دو مجموعه

اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B عضوی از مجموعه‌ی A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $A=B$.

نکته: در مجموعه‌ها اعضایی که تکرار شده‌اند، یک بار در نظر گرفته می‌شوند. یعنی $\{1,1,2,3,3,3\}$ با مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ برابر است.

نکته:

$$\begin{cases} A\subset B \\ \text{و} \\ B\subset A \end{cases} \Leftrightarrow A=B$$

مثال: اگر $\{a,a^2\}=\{1,b,b^2\}$ در این صورت a و b عبارت‌اند از:

۱) $\begin{cases} a=\pm1 \\ b=1 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a=1 \\ b=\pm1 \end{cases}$ ۳) $a=b=\pm1$ ۴) غیرممکن است.

پاسخ: گزینه ۳

$$1\in\{a,a^2\}\Rightarrow a=\pm1 \xrightarrow{b,b^2\in\{1,-1\}} b=a=\pm1$$

البته جایگذاری گزینه‌ها هم جواب می‌دهد.

مجموعه‌ی مرجع

مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آن باشد را مجموعه‌ی مرجع نامند که با M یا U نمایش داده می‌شود.

نکته: اگر در مسئله‌ای مجموعه‌ای به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع مطرح شده، یعنی در ادامه‌ی مسئله تمام مجموعه‌های مورد بحث باید زیرمجموعه‌ی آن باشند.

مثال: اگر مجموعه‌ی مرجع اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ انتخاب شود، آن‌گاه مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد چند عضو خواهد داشت؟

۱) بی‌شمار ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) هیچ

پاسخ: باید اعداد طبیعی فرد کوچک‌تر از ۲۰ شمارش شوند که تعداد آن‌ها ۱۰ می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

نحوه‌ی نمایش مجموعه‌ها (مشخص کردن مجموعه‌ها)

۱- توصیفی: مجموعه را با توصیف اعضای آن مشخص می‌کنیم.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰

مجموعه‌ی اعداد گویا که قدرمطلق آن‌ها از ۷ کم‌تر است.

۲- بیان ریاضی (با علائم ریاضی): در این روش با پیدا کردن یک ویژگی مشترک و استفاده از متغیرهای x، y و ... آن ویژگی مشترک را به‌صورت علائم ریاضی بیان می‌کنیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ $= \{x \mid x < ۱۰۰ , x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < ۱۰۰\}$

مجموعه اعداد گویا که قدرمطلق آن‌ها از ۷ کم‌تر است. $= \{r \mid |r| < ۷ , r \in \mathbb{Q}\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid |r| < ۷\}$

اعداد طبیعی زوج $= \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = ۲k , k \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی فرد $= \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = ۲k - ۱ , k \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی مربع کامل $= \{n^۲ \mid n \in \mathbb{N}\}$

مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۴ $= \{۴n \mid n \in \mathbb{N}\}$

اعداد طبیعی زوج بین ۱۰۱ تا ۷۰۱ $= \{x \mid x = ۲k , k \in \mathbb{N} , ۱۰۱ < x < ۷۰۱\} = \{x = ۲k \mid k \in \mathbb{N} , ۱۰۱ < x < ۷۰۱\}$

مثال: اگر n عدد طبیعی باشد و $۲ < n \le ۳۰$، مجموعه‌ی $A = \{x \mid x = ۳n + ۱ , x < ۷۰\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۹۱ ۲) ۸۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

$x < ۷۰ \Rightarrow ۳n + ۱ < ۷۰ \Rightarrow ۳n < ۶۹ \Rightarrow n < ۲۳$

با توجه به فرض $\Rightarrow ۲ < n < ۲۳ \Rightarrow n \in \{۳,۴,۵,۶,...,۲۲\} \Rightarrow A = \{۱۰,۱۳,۱۶,...,۶۷\}$

تعداد اعضای A: $۲۰ = ۱ + ۳ - ۲۲$ می‌باشد.

مثال: کدام تعریف برای مجموعه‌ی $A = \{x \mid x > ۰\}$ صحیح است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد اصم بزرگ‌تر از صفر ۲) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت

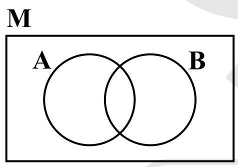
۳) مجموعه‌ی اعداد گویای غیرصفر ۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرمنفی

پاسخ: گزینه ۲

چون مجموعه‌ی مرجع ذکر نشده اعداد حقیقی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر می‌گیریم.

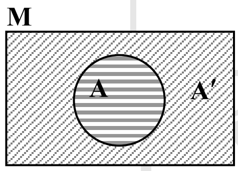
مثال: نمودار وِن: در این حالت معمولاً مجموعه‌ها را به‌صورت یک شکل هندسی بسته در نظر می‌گیرند و اعضای مجموعه را درون شکل هندسی قرار می‌دهند.

دقت: اگر در سؤالی مجموعه‌ی مرجع مطرح باشد، آن را به‌صورت مستطیل نمایش داده و تمام اشکال هندسی دیگر درون آن ترسیم می‌شوند.



اعمال بر روی مجموعه‌ها

۱- متمم مجموعه‌ی A، اعضایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A نباشند. به بیان دیگر مجموعه اعضای A و مجموعه اعضای متمم A روی هم مجموعه‌ی مرجع را تشکیل می‌دهند. متمم مجموعه‌ی A را با A' یا $\bar{A}$ نمایش می‌دهند.



۲- اشتراک دو مجموعه‌ی B و A: مجموعه اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B باشند اشتراک دو مجموعه‌ی A و B نامند و آن را با $A \cap B$ نشان می‌دهند.

اگر دو مجموعه‌ی A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند $(A \cap B = \varnothing)$، دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا گویند.

۳- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B: مجموعه‌ای متشکل از اعضای دو مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B با هم است که آن را با $A \cup B$ نمایش می‌دهند.

نکته: هر عضو مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی $A \cup B$ حضور دارد.

هر عضو مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی $A \cup B$ حضور دارد.

هر عضو $A \cup B$ یا در مجموعه‌ی A وجود دارد و یا در مجموعه‌ی B و یا در هر دو.

۴- تفاضل دو مجموعه: برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه اشیایی را که در A هستند ولی در B نیستند، تفاضل B از A گویند و آن را با $A - B$ نمایش می‌دهند.

یعنی برای به‌دست آوردن تفاضل B از A $(A - B)$ باید اعضای B را (در صورت وجود) از مجموعه‌ی A حذف کنیم. اعضایی که در A باقی می‌مانند، مجموعه‌ی $A - B$ را تشکیل می‌دهند.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$\{a,b,c\}-\{a\}=\{b,c\}$

$\{a,b,c\}-\{۱\}=\{a,b,c\}$

$\{۱\}-\{a,b,c\}=\{۱\}$

$\{a,b,c\}-\{a,۱,d\}=\{b,c\}$

$\{a\}-\{a,b,c\}=\{\}$

نکته: عمل تفاضل باید بین دو مجموعه صورت گیرد و بین یک مجموعه و یک عضو قابل انجام نیست:

$\{a,b,c\}-a$: قابل انجام نیست

مثال: اگر $A=\{۰,۱,۲,۳,...,۳۰\}$ و $B=\{x \mid x=۳n+۱, \text{n عدد طبیعی}\}$ مجموعه‌ی $A\cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

$B=\{۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸,۳۱,...\} \Rightarrow A\cap B=\{۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۲۵,۲۸\} \Rightarrow$ ۹ عضو دارد

روش دوم:

$$۰\le ۳n+۱\le ۳۰ \Rightarrow -۱\le ۳n\le ۲۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le n\le \frac{۲۹}{۳}=۹/۶...$$

n عدد طبیعی $\Rightarrow n\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} \Rightarrow A\cap B$ ۹ عضو دارد.

مثال: اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دلخواه مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ حداقل دارای «چند عضو» است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

به‌دلیل این‌که مجموعه‌ی A، ۴ عضو دارد پس هر زیرمجموعه ۳ عضوی آن دارای ۲ عضو مشترک است به‌عنوان مثال:

$B_۱=\{a,b,c\}$

$B_۲=\{a,b,d\} \Rightarrow$ بین هر دو زیرمجموعه همواره ۲ عضو مشترک وجود دارد

$B_۳=\{a,c,d\}$

مثال: اگر $M=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی اعداد فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، $A\cap B'$ چند عضو دارد؟

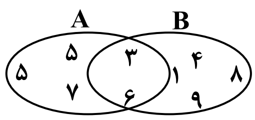
۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$B'=$ مجموعه اعداد زوج

تنها عدد زوجی که اول نیز باشد ۲ است پس: $A\cap B'=\{۲\}$

مثال: با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه‌ی $A-(A-B)$ و $B-(B-A)$ چند عضو دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$A-(A-B)=A\cap B=\{۳,۶\}$

$B-(B-A)=A\cap B=\{۳,۶\}$

$\Rightarrow$ اجتماع آن‌ها همان $\{۳,۶\}$ خواهد بود که ۲ عضو دارد.

مثال: اگر $x\notin A\cup B$ کدام‌یک درست است؟

۱) $x\in B, x\notin A$ ۲) $x\in B, x\in A$ ۳) $x\notin B, x\notin A$ ۴) $x\in(A-B)$

پاسخ: گزینه ۳

اگر عضوی در اجتماع نباشد یعنی در هیچ‌کدام از مجموعه‌ها نبوده است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

متناهی: اگر تعداد اعضای یک مجموعه شمارش‌پذیر باشد و عمل شمارش آن‌ها سرانجام به پایان برسد آن مجموعه را متناهی گویند. در غیر این صورت نامتناهی است.

مجموعه مورچه‌گان ← متناهی

مجموعه تهی ← متناهی

مجموعه اعداد طبیعی فرد ← نامتناهی

مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲ ← نامتناهی

نکته: اگر مجموعه‌ی A متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ی آن نیز متناهی است.

اگر مجموعه‌ی A نامتناهی باشد، زیرمجموعه‌های آن می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

اگر مجموعه‌ی B نامتناهی باشد و مجموعه‌ی A به‌گونه‌ای باشد که $B \subset A$ آن‌گاه مجموعه‌ی A نیز نامتناهی خواهد بود.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳

۲) مجموعه‌ی دایره‌هایی که مرکز آن‌ها نقطه‌ی $(1,2)$ است.

۳) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳

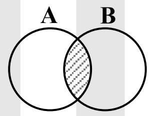
۴) مجموعه‌ی خط‌هایی که بر یک خط مفروض عمود هستند.

پاسخ: گزینه ۳

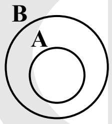
گزینه‌ی ۳ به‌صورت $\{1,2\}$ می‌باشد که متناهی است.

نکته: بیان نمودار وِن برای برخی مجموعه‌ها:

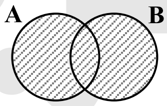
$A \cap B$



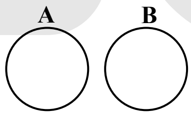
$A \subset B$



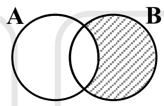
$A \cup B$ در حالت کلی



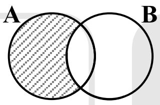
$A \cap B = \varnothing$ (دو مجموعه‌ی مجزا)



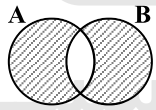
$B - A$ در حالت کلی



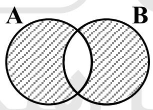
$A - B$ در حالت کلی



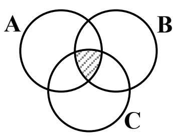
$(A - B) \cup (B - A)$



$(A \cup B) - (A \cap B)$



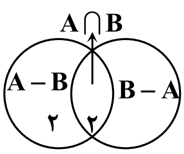
$A \cap B \cap C$ در حالت کلی



مثال: مجموعه‌های $(A \cup B)$ دارای ۵ عضو، $(A \cap B)$ دارای ۲ عضو و $(A - B)$ نیز دارای ۲ عضو می‌باشند. «مجموعه‌ی $(B - A)$» چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

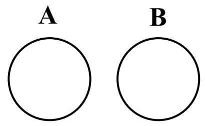


$\Rightarrow$ تعداد اعضای $B - A$ = ۵ − ۲ − ۲ = ۱

مثال: A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند. اگر مجموعه‌ی $A \cup B$ دارای ۲۳ عضو و مجموعه‌ی $A-B$ دارای ۱۲ عضو باشند $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) $\varnothing$ ۲) صفر ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳



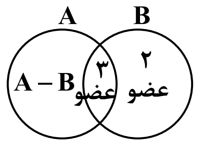
A و B جدا از هم

$$\begin{matrix} A-B=A \\ B-A=B \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد اعضای } B-A = ۲۳-۱۲ = ۱۱$$

مثال: مجموعه‌ی $A \cup B$ دارای ۷ عضو، $A \cap B$ دارای ۳ عضو و $B-A$ دارای ۲ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ چه تعداد بیش‌تر از تعداد زیر مجموعه‌های $A-B$ است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲



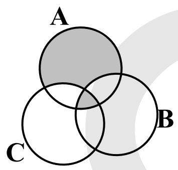
$\text{تعداد اعضای } A-B = ۷-۳-۲ = ۲$

$\text{تعداد زیرمجموعه ها} = ۲^۲ = ۴$

$\text{تعداد زیرمجموعه‌های} A\cap B = ۲^۳ = ۸$

$\Rightarrow ۸-۴ = ۴$

مثال: کدام‌یک از عبارت‌های زیر نشان‌دهنده‌ی قسمت سایه‌زده شده است؟



۱) $A-(B\cup C)$

۲) $(A\cap B\cap C)\cup(A-B)$

۳) $A-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

۴) $[A-(B\cup C)]\cup(A\cap B\cap C)$

پاسخ: گزینه ۴

مثال: اگر مجموعه‌ی A و B هر یک ۶ عضو داشته باشند و بدانیم $A\cup B$ دارای ۸ عضو است، $A\cap B$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

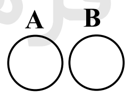
$\text{تعداد اعضای } A\cup B = \text{تعداد اعضای } A + \text{تعداد اعضای } B - \text{تعداد اعضای } A\cap B$

$\Rightarrow ۸ = ۶+۶-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B) = ۴ \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه} = ۲^۴ = ۱۶$

مثال: اگر $A\cap B=\varnothing$ و $B\neq\varnothing$، مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ برابر کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $A\cup B$ ۳) A ۴) B

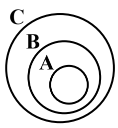
پاسخ: گزینه ۲

$A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ مجزا $A,B \overset{B\neq\varnothing}{\Rightarrow}$  $\Rightarrow \;,\; \begin{matrix} A-B=A \\ B-A=B \end{matrix} \Rightarrow \text{عبارت} = A\cup B$

نکات:

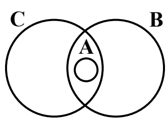
۱) $A\subset A$ و $\varnothing\subset A$

۲) $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \end{cases} \Rightarrow A\subset B\subset C$ یعنی



۳) $\begin{cases} A\subset B \\ A\subset C \end{cases} \Leftrightarrow A\subset B\cap C$

$\Rightarrow A\subset B\cup C$



۴) $A\cap A=A$

$A\cup A=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup\varnothing=A$

$A\cup A'=M$

$A\cap A'=\varnothing$

$A-A=\varnothing$

$A-\varnothing=A$

$\varnothing-A=\varnothing$

$A\cap M=A$

۵) $A\subset B \Leftrightarrow \begin{cases}A\cap B=A\\ A\cup B=B\end{cases}$

$\begin{matrix}A\cap B\subset A\\ A\cap B\subset B\end{matrix}\quad,\quad\begin{matrix}A\subset A\cup B\\ B\subset A\cup B\end{matrix}$

۶) $A\cap B=\varnothing \Rightarrow \begin{cases}A-B=A\\ B-A=B\end{cases}$

۷) $(A')'=A$

$\varnothing'=M$

۸) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

مثال: A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و $A\cup B\subset B$، آن‌گاه:

۱) $B\subset A$ ۲) $A\cap B=\varnothing$ ۳) $A\cap B=B$ ۴) $A\cap B=A$

پاسخ: گزینه ۴

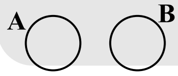
$A\cup B\subset B$ فرض مسئله

$B\subset A\cup B$ همواره برقرار است

$\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow A\subset B \Rightarrow A\cap B=A$

مثال: اگر $A-B=A$ آن‌گاه حاصل $B-[A-(B-A)]$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A-B$ ۴) $\varnothing$



پاسخ: گزینه ۲

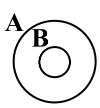
$A-B=A\Rightarrow$ A و B جدا از هم هستند $\Rightarrow B-A=B$

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $B-\underbrace{(A-\underbrace{(B-A)}_{B})}_{A}=B-A=B$

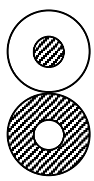
مثال: اگر $B\subset A$، آن‌گاه حاصل $(A\cap B)-(A-B)$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A-B$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه ۲



$\Rightarrow$ $A\cap B=$ / $A-B=$



$\Rightarrow A\cap B-(A-B)=A\cap B=B$

مثال: اگر $A\cap B=A$، آن‌گاه:

۱) $A\cup B=B$ ۲) $A\cup B=A$ ۳) $A\cup B=A-B$ ۴) $A\cup B=A\cap B$

پاسخ: گزینه ۱

$A\cap B=A\Rightarrow A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$

۹) اگر $\mathbb{N}$ و $\mathbf{W}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ به‌ترتیب نمایش اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، اصم و حقیقی باشند داریم:

$$\mathbb{N} \subset \mathbf{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \bigcup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \bigcap \mathbb{Q}' = \varnothing$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، اعداد حسابی $\mathbf{W}$ و اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ می‌باشند. «نتیجه‌ی نادرست» کدام است؟

۱) $\mathbb{N} \bigcup \mathbf{W} \subset \mathbf{W}$　　۲) $\mathbb{N} \bigcap \mathbf{W} \subset \mathbf{W}$　　۳) $\mathbf{W} \bigcup \mathbb{Z} \subset \mathbf{W}$　　۴) $\mathbf{W} \bigcap \mathbb{Z} \subset \mathbf{W}$

پاسخ: گزینه ۳

$\mathbf{W} \bigcup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$، زیرا $\mathbf{W} \subset \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z} \not\subset \mathbf{W}$

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی و صحیح به‌ترتیب $\mathbb{N}$ و $\mathbf{W}$ و $\mathbb{Z}$ بوده، «کدام مجموعه» با پایان است؟

۱) $\mathbb{Z} - \mathbf{W}$　　۲) $\mathbf{W} \bigcap \mathbb{N}$　　۳) $\mathbb{Z} \bigcap \mathbf{W}$　　۴) $\mathbf{W} - \mathbb{N}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی ۱ : $\mathbb{Z} - \mathbf{W} =$ تمام اعداد صحیح منفی $\Rightarrow$ بی‌پایان

گزینه‌ی ۲ : $\mathbf{W} \bigcap \mathbb{N} = \mathbb{N} \Rightarrow$ بی‌پایان

گزینه‌ی ۳ : $\mathbb{Z} \bigcap \mathbf{W} = \mathbf{W} \Rightarrow$ بی‌پایان

گزینه‌ی ۴ : $\mathbf{W} - \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow$ باپایان

مثال: اگر دو مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هم‌ارز باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) اعضای دو مجموعه در تناظر یک‌به‌یک هستند.　　۲) دو مجموعه مساوی هستند.

۳) هر دو مجموعه بی‌پایان هستند.　　۴) هر دو مجموعه با پایان هستند.

پاسخ: گزینه ۱

دو مجموعه را هم ارز گویند هرگاه اعضای آن‌ها در تناظر یک‌به‌یک باشند ولی لزوماً نباید برابر باشند.

مثال: اگر دو مجموعه‌ی با پایان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ غیرتهی و مجموعه‌های $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$ هم‌ارز باشند، الزاماً کدام نتیجه‌گیری درست است؟ ($\simeq$ نماد هم‌ارزی است)

۱) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$　　۲) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$　　۳) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{B}$　　۴) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{A} = \mathbf{B}$

پاسخ: گزینه ۴

$\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$ هم‌ارز می‌باشند و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با پایان هستند پس $\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$ دارای تعداد اعضای برابر هستند که در صورتی امکان دارد که $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ باشد. می‌دانیم دو مجموعه‌ی مساوی، هم‌ارز نیز هستند.

فصل سوم

توان‌رسانی و ریشه‌گیری

تعریف توان

اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد و n بار عدد a را در خودش ضرب کنیم حاصل را می‌توان به‌صورت a^n نمایش داد که a را پایه و n را توان نامند.

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{\text{بار } n}=a^n$$

$$(-۴)^۳=(-۴)\times(-۴)\times(-۴)$$

خواص توان

۱) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ یا $a^{m+n}=a^m\times a^n$

مثلاً داریم:

الف) $b^۳\times b^۵=b^{۳+۵}=b^۸$

ب) $b^۷=b^{۶+۱}=b^۶\times b^۱$

$=b^{۵+۲}=b^۵\times b^۲$

$\vdots \quad \vdots$

۲) $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

مثلاً داریم:

$$a^۷\div a^۲=\frac{a^۷}{a^۲}=a^{۷-۲}=a^۵$$

۳) $(ab)^n=a^n\times b^n$ یا $a^n\times b^n=(ab)^n$

مثلاً داریم:

الف) $(ab)^۳=a^۳\times b^۳$

ب) $(a^۲bc^۳)^۵=(a^۲)^۵\times b^۵\times(c^۳)^۵$

۴) $(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

مثلاً داریم:

الف) $(\dfrac{a}{b})^۳=\dfrac{a^۳}{b^۳}$

ب) $(\dfrac{a}{b\times c})^۴=\dfrac{a^۴}{(bc)^۴}=\dfrac{a^۴}{b^۴\times c^۴}$

۵) $(a^n)^m=a^{n\times m}$

مثلاً داریم:

الف) $(۲^۳)^۵=۲^{۱۵}$

ب) $(۲^۳\times ۳^۲\times ۵)^۴=۲^{۱۲}\times ۳^۸\times ۵^۴$

دقت:

$$۲^{۲^۳} = ۲^۸$$

$$(۲^۲)^۳ = ۲^۶$$

۶) $a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$ یا $\frac{۱}{a^{-n}} = a^n$

مثلاً داریم:

$$۰/۰۰۱ = \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰^۳} = ۱۰^{-۳}$$

نکته: $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

مثلاً داریم:

الف) $۲^{-۵} = \frac{۱}{۲^۵}$

ب) $(۰/۲)^{-۳} = (\frac{۲}{۱۰})^{-۳} = (\frac{۱۰}{۲})^۳ = ۵^۳$

مثال: نصف عدد $۴^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۴^۵$ ۳) $۲^{۱۹}$ ۴) $۲^۵$

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نصف عدد } x = \frac{۱}{۲} \times x \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴^{۱۰} = \frac{۱}{۲} \times (۲^۲)^{۱۰} = \frac{۱}{۲} \times ۲^{۲۰} = ۲^{۱۹}$$

مثال: اگر $a = ۳^{k+۲}$ و $b = ۳^k$ باشد بین a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟

۱) $a = ۲b$ ۲) $a = ۹b$ ۳) $b = ۹a$ ۴) $a = b^۹$

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$\frac{a}{b} = \frac{۳^{k+۲}}{۳^k} = ۳^{(k+۲)-k} = ۳^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۹b$$

راه حل دوم: عددگذاری

مثال: عدد $\left(\frac{۱}{۶۴}\right)^{-۱۲}$ را به‌صورت ۲^m نوشته‌ایم، m کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\left(\frac{۱}{۶۴}\right)^{-۱۲} = (۲^{-۶})^{-۱۲} = ۲^{۷۲} \Rightarrow m = ۷۲$$

مثال: حاصل $(\frac{۲}{۷})^۶ \times (۰/۴)^{-۶} \times (\frac{۴۹}{۲۵})^۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{عبارت} = \left(\frac{۷^۲}{۵^۲}\right)^۳ \times \left(\frac{۲^{-۶}}{۵^{-۶}}\right) \times \frac{۲^۶}{۷^۶} = \frac{\cancel{۷^۶}}{\cancel{۵^۶}} \times \frac{\cancel{۵^۶}}{\cancel{۲^۶}} \times \frac{\cancel{۲^۶}}{\cancel{۷^۶}} = ۱$$

مثال: حاصل عبارت $۸۱^۳ \left[۵۰ \times \left(\frac{۳^{-۲}}{۵}\right)^۲\right]^۳$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

$$(۳^۴)^۳ \times (۵^۲ \times ۲ \times \frac{۳^{-۴}}{۵^۲})^۳ = ۳^{۱۲} \times ۲^۳ \times ۳^{-۱۲} = ۲^۳ \times ۱ = ۸$$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{(0/04)^3\times(625)^{-3}}{(\frac{1}{5})^{-4}\times(0/008)^2}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{5^{16}}$ ۲) 5^{16} ۳) 5^8 ۴) $\dfrac{1}{5^8}$

پاسخ: گزینه ۱

$(0/04)^3=\dfrac{4^3}{100^3}=\dfrac{2^6}{10^6}=2^6\times10^{-6} \Rightarrow$ عبارت $=\dfrac{\cancel{2^6}\times\cancel{10^{-6}}\times5^{-12}}{5^4\times\cancel{2^6}\times\cancel{10^{-6}}}=5^{-16}=\dfrac{1}{5^{16}}$

$(625)^{-3}=(5^4)^{-3}=5^{-12}$

$(\frac{1}{5})^{-4}=5^4\ ,\ (0/008)^2=(\frac{8}{10^3})^2=2^6\times10^{-6}$

مثال: حاصل $4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}$ با کدام عبارت برابر است؟

۱) 2^{28} ۲) 2^{30} ۳) 2^{26} ۴) 2^{52}

پاسخ: گزینه ۱

$4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}=4(4^{13})=4^{14}=(2^2)^{14}=2^{28}$

مثال: حاصل عبارت $\dfrac{(3^5+3^5)(2^5+2^5+2^5)}{6^3+6^3+6^3}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۴۸ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینه ۱

عبارت $=\dfrac{3\times2^5\times2\times3^5}{3\times6^3}=\dfrac{2^6\times3^6}{3\times6^3}=\dfrac{6^6}{3\times6^3}=\dfrac{6^3}{3}=2\times36=72$

مثال: مقدار عبارت 2^{2^3} برابر است با:

۱) ۶۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۳

$2^{2^3}=2^8=256$

دقت کنید که $(2^2)^3$ برابر 2^6 است.

۷) اگر $a>1$ باشد:

$1<a<a^2<a^3<\cdots<a^n<a^{n+1}$

اگر $0<a<1$ باشد:

$1>a>a^2>a^3>\cdots>a^n>a^{n+1}>0$

۸) اگر a و b دو عدد مثبت و $a>b$ آن‌گاه:

$a^2>b^2\ ,\ a^3>b^3\ ,\ \cdots\ ,\ a^n>b^n$

۹) $a^0=1 \qquad (a\neq0)$

$a^1=a$

مثال: اگر $0<a<1$ باشد کدام‌یک از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) a ۲) $\sqrt{a}$ ۳) a^3 ۴) a^8

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اعداد بین ۰ و ۱ هرچه به توان بزرگ‌تری برسند کوچک‌تر می‌شوند.

$\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عدد $=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

تجزیه‌ی اعداد

بیان اعداد به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول توان‌دار را تجزیه عدد نامند.

روش عملیاتی:

$$\begin{array}{r|l} ۱۵۰ & ۲ \\ ۷۵ & ۵ \\ ۱۵ & ۵ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۵۰ = ۲\times۵^{۲}\times۳$$

نماد علمی

برای نمایش اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک از نماد علمی استفاده می‌شود که بیش‌تر در علوم نجوم، شیمی و فیزیک کاربرد دارد.

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به‌صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از ۱۰ بنویسیم این نمایش را نماد علمی گویند.

یعنی فرم کلی نماد علمی به‌صورت $a\times۱۰^{n}$ است که در آن $۱\le a < ۱۰$ و n عددی صحیح است.

مثلاً داریم:

الف) $۳۷۲۰۰۰۰۰ = ۳/۷۲\times۱۰^{۷}$

ب) $۰/۰۰۰۰۰۶۸۲۰۳ = ۶/۸۲۰۳\times۱۰^{-۶}$

مثال: حاصل‌ضرب روبه‌رو به‌صورت نماد علمی چیست؟ $۰/۰۰۰۰۰۰۹۷\times۳۰۰۰$

۱) $۲۹/۱\times۱۰^{-۴}$ ۲) $۲/۹۱\times۱۰^{-۳}$ ۳) $۲/۹۱\times۱۰^{-۵}$ ۴) $۰/۲۹۱\times۱۰^{-۵}$

پاسخ: گزینه ۲

عبارت $= ۹۷\times۱۰^{-۸}\times۳\times۱۰^{۳} = ۲۹۱\times۱۰^{-۵} = ۲/۹۱\times۱۰^{-۳}$

ریشه‌گیری

تعریف: اگر $a^{n} = b$ باشد a را ریشه‌ی n ام b نامند.

مثلاً: $۳۲ = ۲^{۵}$ است، پس ۲ ریشه‌ی پنجم ۳۲ می‌باشد یا ریشه‌ی پنجم ۳۲ برابر ۲ است.

$۸۱ = ۳^{۴}$ است، پس ۳ ریشه‌ی چهارم ۸۱ می‌باشد.

$۸۱ = (-۳)^{۴}$ است، پس ۳- نیز ریشه‌ی چهارم ۸۱ می‌باشد.

دقت: در ریشه‌های زوج هم خود عدد و هم قرینه‌ی آن جواب می‌باشد.

مثلاً ریشه‌ی دوم ۲۵ برابر ۵- و ۵+ است.

تعریف: اگر n زوج باشد، فرجه‌ی n ام ($\sqrt[n]{\ }$) یک عدد برابر عدد مثبتی است که از ریشه‌ی n ام به‌دست می‌آید. و اگر n فرد باشد، فرجه‌ی n ام ($\sqrt[n]{\ }$) برابر ریشه‌ی n ام است.

مثلاً: ریشه‌ی دوم عدد ۱۶ برابر ۴+ و ۴- است، ولی $\sqrt{۱۶}$ فقط برابر ۴ می‌باشد. $\sqrt{۱۶} = ۴$

مثلاً: ریشه‌ی سوم عدد ۸ برابر ۲ است، پس $\sqrt[۳]{۸} = ۲$.

ریشه‌ی سوم عدد ۶۴- برابر ۴- است، پس $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$

دقت: با توجه به مطالب ذکر شده، اعداد منفی ریشه‌ی زوج ندارند و هرگاه صحبت از $\sqrt{b}$ (یا $\sqrt[n]{b}$ ، n زوج باشد) می‌کنیم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است.

دقت: جواب رادیکال با فرجه‌ی زوج همیشه عددی مثبت است.

مثال: $\sqrt{۳۶}$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۶± ۴) $\pm\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۱

$\sqrt{۳۶} = ۶$

حاصل رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. ولی ریشه‌ی دوم یک عدد هم مثبت و هم منفی خواهد بود مثلاً ریشه‌ی دوم ۳۶ برابر ۶+ و ۶- است.

خواص ریشه‌گیری یا فرجه

۱) $\sqrt{a^۲}=|a|$

در حالت کلی $\sqrt[۲k]{a^{۲k}}=|a|$

برای هر دو عدد نامنفی a و b:

۲) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ یا $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$

مثلاً داریم:

$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=۳\sqrt{۲}$, $\sqrt{۸}=\sqrt{۴\times۲}=۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ یا $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

اگر n زوج باشد، عدد نامنفی پشت فرجه را می‌توان به رادیکال وارد کرد و اگر n فرد باشد، عدد پشت فرجه را می‌توان به رادیکال وارد کرد:

۴) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

۵) در فرجه‌گیری می‌توان عددی را که توان آن در زیر رادیکال از فرجه بزرگ‌تر است از رادیکال خارج نمود:

مثلاً داریم:

$$\sqrt[۳]{۵^۷\times۳^۴\times۲^۲}=\sqrt[۳]{۵^۶\times۳^۳\times۵\times۳\times۲^۲}=۵^۲\times۳\times\sqrt[۳]{۵\times۳\times۴}=۷۵\sqrt[۳]{۶۰}$$

در جمع و تفریق رادیکال‌ها زمانی می‌توان دو یا چند رادیکال را با هم جمع یا تفریق نمود که هم فرجه و هم عدد زیر رادیکال یکسان باشند.

در بیش‌تر موارد لازم است که عبارت رادیکالی ساده شود.

مثلاً داریم:

الف) $۳\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ بیش‌تر از این ساده نمی‌شود.

ب) $\sqrt{۱۸}+۲\sqrt{۸}-۳\sqrt{۵۰}=\sqrt{۹\times۲}+۲\sqrt{۴\times۲}-۳\sqrt{۲۵\times۲}=۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}-۱۵\sqrt{۲}=-۸\sqrt{۲}$

دقت:

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a^۲+b^۲}\neq a+b$ برقرار نیست.

نکته: رابطه‌ی رادیکال با توان:

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

مثلاً: $\sqrt[۳]{۵^۲}=۵^{\frac{۲}{۳}}$

مثال: اگر $\left(\left(\left((۱۶)^{\frac{۱}{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[x]{۲}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

عبارت سمت راست $=(۲^۴)^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۴}{۲۴}}=۲^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۲}$

$\sqrt[x]{۲}=\sqrt[۶]{۲}\Rightarrow x=۶$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt{۳۲}-۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۷۲}-\sqrt{۸}$ کدام است؟

۱) $۱۴\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۲۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{\underbrace{۳۲}_{۱۶\times۲}}-۲\sqrt{\underbrace{۱۸}_{۹\times۲}}+۳\times\sqrt{\underbrace{۷۲}_{۳۶\times۲}}-\sqrt{\underbrace{۸}_{۴\times۲}}=۴\sqrt{۲}-۲\times۳\sqrt{۲}+۳\times۶\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=۱۴\sqrt{۲}$$

مثال: خلاصه‌شده‌ی عبارت $\left(\sqrt{\frac{2}{4}}-\sqrt{\frac{2}{9}}\right)\sqrt{\frac{4}{50}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{2}{15}$

پاسخ: گزینه ۲

عبارت $=\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{3}\right)\frac{2}{5\sqrt2}=\frac{3\sqrt2-2\sqrt2}{6}\times\frac{2}{5\sqrt2}=\frac{\cancel{\sqrt2}}{6}\times\frac{2}{5\cancel{\sqrt2}}=\frac{1}{15}$

دقت: $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt2$

مثال: حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt2$ ۲) $\sqrt2$ ۳) 2 ۴) $\sqrt[6]{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$\sqrt[3]{2\sqrt2}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times2}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt2$

گویا کردن مخرج کسرها

۱) $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$

مثلاً: $\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

۲) $\frac{1}{\sqrt a-\sqrt b}\times\frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}}=\frac{1}{\sqrt a-\sqrt b}\times\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}=\frac{\sqrt a+\sqrt b}{(\sqrt a)^2-(\sqrt b)^2}=\frac{\sqrt a+\sqrt b}{a-b}$

مثلاً: $\frac{1}{2\sqrt2+1}\times\frac{2\sqrt2-1}{2\sqrt2-1}=\frac{2\sqrt2-1}{(2\sqrt2)^2-1}=\frac{2\sqrt2-1}{4\times2-1}=\frac{2\sqrt2-1}{7}$

مثال: حاصل عبارت $\sqrt6(\sqrt2-\sqrt3)+\sqrt{50}-\frac{6}{\sqrt3}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt3$ ۲) $\sqrt6$ ۳) $\sqrt8$ ۴) $\sqrt{12}$

پاسخ: گزینه ۳

عبارت $=\sqrt{\underbrace{12}_{4\times3}}-\sqrt{\underbrace{18}_{9\times2}}+\sqrt{\underbrace{50}_{25\times2}}-\frac{6}{\sqrt3}=2\sqrt3-3\sqrt2+5\sqrt2-\frac{6\sqrt3}{3}=2\sqrt3+2\sqrt2-2\sqrt3=2\sqrt2=\sqrt8$

مثال: اندازه‌ی طول یک مستطیل $\sqrt3-\sqrt2$ واحد و مساحت آن ۱ واحد مربع است. محیط آن، برابر است با:

۱) $2\sqrt2$ ۲) $4\sqrt3$ ۳) $2\sqrt3$ ۴) $4\sqrt2$

پاسخ: گزینه ۲

طول × عرض = ۱ $\Rightarrow$ عرض $=\frac{1}{\sqrt3-\sqrt2}\times\frac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}=\frac{\sqrt3+\sqrt2}{1}=\sqrt3+\sqrt2$

محیط $=2(\sqrt3-\sqrt2+\sqrt3+\sqrt2)=2\times2\sqrt3=4\sqrt3$

مثال: حاصل $(1-\sqrt{20})(1+4\sqrt5)+\frac{\sqrt5}{2-\sqrt5}$ کدام است؟

۱) -45 ۲) -44 ۳) -36 ۴) -34

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}\times\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}+۵}{۴-۵}=-۲\sqrt{۵}-۵$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = -۲\sqrt{۵}-۵+۲\sqrt{۵}-۳۹=-۴۴$$

$$(۱+۴\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۲۰})=۱-\sqrt{\underbrace{۲۰}_{۴\times ۵}}+۴\sqrt{۵}-۴\sqrt{۱۰۰}=۱-۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}-۴۰=۲\sqrt{۵}-۳۹$$

مثال: حاصل $\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۸\sqrt[۳]{۲}}{۲}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

مثال: جذر عدد $۵+۲\sqrt{۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}+\sqrt{۶}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

$$۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲+۲\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲}=\left|\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right|=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

مثال: ساده‌ترین عبارت جبری که در $\sqrt[۳]{۴a^۲}$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل گردد کدام است؟

۱) $(۲a)^{\frac{۲}{۳}}$ ۲) $(۲a)^{\frac{۴}{۳}}$ ۳) $a(۲a)^{\frac{۱}{۳}}$ ۴) $۲(۲a)^{\frac{۱}{۳}}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt[۳]{۴a^۲}=\sqrt[۳]{(۲a)^۲}=(۲a)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$(۲a)^{\frac{۲}{۳}}\times\underbrace{(۲a)^{\frac{۴}{۳}}}_{\text{گزینه ۲}}=(۲a)^۲ \rightarrow \text{مربع کامل است}$$

فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

متغیر

نمادهایی‌که اعداد دلخواهی را نمایش می‌دهند، متغیر می‌نامند، زیرا به‌جای آن‌ها هر عددی می‌تواند قرار گیرد.

عبارت جبری

هر عبارت شامل تعدادی متغیر، اعمال جبری (ضرب، تقسیم، جمع، تفریق، ریشه‌گیری و توان‌رسانی) را یک عبارت جبری گویند. یک عدد هم یک عبارت جبری محسوب می‌شود.

دقت: مقدار عبارت جبری: هرگاه به جای متغیرهای عبارت جبری، اعداد را جایگزین کنیم عدد به‌دست آمده مقدار عبارت جبری خواهد بود.

مثال: حاصل عبارت جبری $1+\frac{x^2-2xz}{y}$ را به‌ازای $x=5$ ، $y=1$ و $z=3$ بیابید.

مثلاً:

$$\frac{5^2-2\times5\times3}{1}+1=\frac{25-30}{1}+1=-5+1=-4$$

این عبارت سه متغیر x، y و z دارد.

یک‌جمله‌ای‌ها

به‌صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (حسابی) از یک یا چند متغیر می‌باشد که ساده‌ترین نوع عبارت جبری است. مثلاً:

$-\sqrt{2}xz, \frac{-6}{7}ab^2, -5$ و $3bc^2y^3z$

عددی که در متغیرها ضرب می‌شود را ضریب عددی گویند.

عبارت‌های جبری زیر یک‌جمله‌ای نیستند:

$$\sqrt{x}y^3, 2x^2+y, 3x^2y^{-1}, \sqrt{x^2+1}, \frac{x^2y^3}{z^5}$$

درجه یک‌جمله‌ای نسبت به یک متغیر

توان متغیر در یک‌جمله‌ای را درجه یک‌جمله‌ای نسبت به آن متغیر گویند.

مثلاً داریم:

$5x^2y^3$
- نسبت به x از درجه ۲ است
- نسبت به y از درجه ۳ است
- نسبت به z و بقیه متغیرها از درجه ۰ است

دقت: اگر فقط یک متغیر داشتیم برای درجه نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

$5x^3 \rightarrow$ یک‌جمله‌ای از درجه ۳ است

یک‌جمله‌ای‌های متشابه

اگر در چند یک‌جمله‌ای نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان باشند آن‌ها را متشابه گویند.

مثلاً: $5ax^2, -7ax^2$

$3xy^3, -\frac{2}{3}y^3x$

متشابه نیستند: x^2y^3, x^3y^2 ؛ ax, axy

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

فقط یک‌جمله‌ای‌هایی‌که متشابه باشند را می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود بدین‌صورت که کافی است ضرائب عددی آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم.

$۵x + ۷x = ۱۲x$

$۵x + ۷x \neq ۱۲x^{۲}$

$۳x + ۵y \neq ۸xy$

ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

ضرایب عددی در هم و نمادهای حرفی نیز در هم ضرب می‌شوند.

مثلاً داریم:

الف) $۵x^{۲} \times -۳xy^{۳} = -۱۵x^{۳}y^{۳}$

ب) $\sqrt{۲}xy \times -۵x^{۲}y \times \frac{۳}{۵}y^{۲} = -۳\sqrt{۲}x^{۳}y^{۴}$

چندجمله‌ای‌ها

حاصل‌جمع چند یک‌جمله‌ای

$۳x^{۲}y + ۵xy^{۲} + \sqrt{۲}$

درجه یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر

بیش‌ترین توان متغیر در کل چندجمله‌ای

$$۳x^{۳}y + ۵x + ۴y^{۷} \begin{cases} \text{درجه نسبت به } x : ۳ \\ \text{درجه نسبت به } y : ۷ \end{cases}$$

دقت: اگر تنها یک متغیر داشتیم ذکر نام آن در تعیین درجه لازم نیست.

مثلاً:

$۵x^{۳} + ۲x + ۱$: چندجمله‌ای‌ها درجه ۳ است.

بیان استاندارد چندجمله‌ای یک متغیره

جمله‌های چندجمله‌ای را از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان به‌ترتیب می‌نویسیم.

جمع چندجمله‌ای‌ها

جملات متشابه جمع می‌شوند.

مثلاً داریم:

$$(۵x^{۳} + ۴x^{۲} + ۱) - (x^{۳} + ۲x - ۳) = \underline{۵x^{۳}} + ۴x^{۲} + \underline{۱} - \underline{x^{۳}} - ۲x + \underline{۳} = ۴x^{۳} + ۴x^{۲} - ۲x + ۴$$

ضرب دو چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای را به‌صورت دو پرانتز پشت سر هم نوشته و هر کدام از تک‌جمله‌ای‌های پرانتز اول را در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $(x^{۲} + ۱)(x^{۳} - ۲x + ۲) = x^{۵} - ۲x^{۳} + ۲x^{۲} + x^{۳} - ۲x + ۲ = x^{۵} - x^{۳} + ۲x^{۲} - ۲x + ۲$

۲) $(x - ۱)(x + ۲) = x^{۲} + ۲x - x - ۲ = x^{۲} + x - ۲$

۳) $(xy + ۱)(x + y - ۱) = x^{۲}y + xy^{۲} - xy + x + y - ۱$

مثال: اگر $A = x(x + ۲)$ و $B = (x - ۲)(x + ۴)$ باشد، حاصل $A - B$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

$$A - B = x^{۲} + ۲x - (x^{۲} + ۲x - ۸) = x^{۲} + ۲x - x^{۲} - ۲x + ۸ = ۸$$

مثال: از مستطیلی به ابعاد $x+5, x+3$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $x+4, x-1$ را حذف کرده‌ایم، مساحت باقی‌مانده کدام است؟

۱) $4x+17$ ۲) $5x+17$ ۳) $4x+19$ ۴) $5x+19$

پاسخ: گزینه ۴

مساحت مستطیل اول: $(x+5)(x+3) = x^2+8x+15$

مساحت مستطیل دوم: $(x+4)(x-1) = x^2+3x-4$

تفاضل مساحت‌ها: $x^2+8x+15-(x^2+3x-4) = x^2+8x+15-x^2-3x+4 = 5x+19$

اتحاد

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به‌ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدارهای یکسانی داشته باشند. آن دو عبارت را متحد یکدیگر گویند و عبارت حاصل از تساوی آن‌ها را اتحاد نامند.

در حقیقت برای انجام سریع محاسبات جبری، اتحادها کمک می‌کنند و با حفظ بودن برخی از اتحادهای مهم می‌توانیم در زمان انجام محاسبات صرفه‌جویی نماییم.

اتحادهای مهم

۱) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \rightarrow$ اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای

۲) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \rightarrow$ اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

۳) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ اتحاد مزدوج

۴) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$ اتحاد یک جمله‌ی مشترک

۵) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

۶) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

۷) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۸) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

دقت شود که به‌جای a و b هر عدد یا عبارتی می‌تواند قرار گیرد.

چند اتحاد فرعی (اتحاد ناقص)

۱) $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$ یا $a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$

۲) $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

بنابراین اگر $x+y=S$ و $xy=P$ باشد داریم:

$$x^2+y^2 = S^2-2P$$
$$x^3+y^3 = S^3-3PS$$

تجزیه

تبدیل یک عبارت جبری به‌صورت حاصل ضرب چند عبارت جبری را تجزیه گویند.

مثال: حاصل عبارت $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - x^{-1}(x^2+1)$ برابر است با: $(x>0)$

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{عبارت} = x+\frac{1}{x}+2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}-x-x^{-1} = x+\frac{1}{x}+2-x-\frac{1}{x} = 2$$

مثال: اگر $x^2+y^2=2xy$ باشد، حاصل $\frac{x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ چقدر است؟ $(x,y\neq 0)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=0 \Rightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$$

$$\text{عبارت} = \frac{x^2+x^2}{3x^2-x^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

مثال: اگر $x+\frac{1}{x}=2$ باشد، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول) $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=2^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=4 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$

راه حل دوم) $x+\frac{1}{x}=2$ فقط زمانی برقرار است که $x=1$ $\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{1}=2$

مثال: اگر $x+y=7$ و $xy=5$ باشد، حاصل x^3+y^3 کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۳۸ ۳) ۲۴۴ ۴) ۲۶۴

پاسخ: گزینه ۲

$S=x+y=7$

$P=xy=5$

$x^3+y^3=S^3-3PS=7^3-3\times5\times7=238$

مثال: حاصل عبارت $(3+2x)(9-6x+4x^2)$ به‌ازای $x=\sqrt[3]{-3}$ چه‌قدر است؟

۱) $-\sqrt[3]{-3}$ ۲) -3 ۳) $3\sqrt[3]{-3}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\text{عبارت} = \text{اتحاد چاق و لاغر} = (2x)^3+3^3 = 8x^3+27 \\ x=\sqrt[3]{-3}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{عبارت} = 8\times-3+27=-24+27=3$$

مثال: اگر $a-b=1$ و $a^2+b^2=5$، مقدار a^3-b^3 چه عددی است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) $a^2+b^2=5 \Rightarrow (a-b)^2+2ab=5 \Rightarrow 1+2ab=5 \Rightarrow 2ab=4 \Rightarrow ab=2$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)=1\times(5+2)=7$

روش دوم) عددگذاری: $\begin{cases}a-b=1\\a^2+b^2=5\end{cases} \Rightarrow a=2, b=1 \Rightarrow a^3-b^3=8-1=7$

مثال: حاصل $(9998)^2-4$ کدام است؟

۱) $9/996\times10^7$ ۲) $9/998\times10^7$ ۳) $9/996\times10^3$ ۴) $9/996\times10^5$

پاسخ: گزینه ۱

$\text{عبارت} = 9998^2-2^2 \underset{\text{مزدوج}}{=} (9998+2)(9998-2)=10000\times9996=9/996\times10^7$

روش‌های تجزیه

۱ – فاکتورگیری:

یک نماد حرفی مشترک در کل عبارات را از کل عبارت فاکتور می‌گیریم: مثلاً داریم:

۱) $x^2y+xy^2=xy(x+y)$

۲) $3x^2-4x=x(3x-4)$

۲ – دسته‌بندی:

گاهی نمی‌توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به چند دسته‌ی کوچک تقسیم‌بندی کنیم و از هر کدام آن‌ها عبارتی را فاکتور بگیریم در نهایت می‌توان یک عبارت را از کل فاکتور گرفت. مثلاً داریم:

الف) $\underline{x^3+2x^2}+\underline{x+2}=x^2(x+2)+(x+2)=(x+2)(x^2+1)$

ب) $\underline{x^2y+xy^2}+\underline{y^3x+y^4}=xy(x+y)+y^3(x+y)=(x+y)(xy+y^3)=y(x+y)(x+y^2)$

۳- استفاده از اتحادها:

۱) $a^{2}+2ab+b^{2}=(a+b)^{2}$

۲) $a^{2}-2ab+b^{2}=(a-b)^{2}$

مثلاً: $x^{2}+8x+16=(x+4)^{2}$

مثال: با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^{2}-6x+\frac{1}{4}$، مربع یک دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

$$4x^{2}-6x+\cdots=(2x)^{2}\underbrace{-6x}_{\downarrow}+\cdots\Rightarrow(2x)^{2}-6x+\frac{9}{4}=(2x-\frac{3}{2})^{2}$$

دو برابر اولی در دومی $\Rightarrow$ دومی $=\frac{-3}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{9}{4}$ است عددی که در جای خالی باید قرار گیرد $\Rightarrow \frac{1}{4}+a=\frac{9}{4}\Rightarrow a=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{8}{4}=2$

مثال: به‌ازای کدام مقدار m، عبارت $4x^{2}+mx+9$ به‌صورت مربع مجموع دو جمله است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

$$4x^{2}+mx+9=(2x)^{2}+\underbrace{mx}_{\downarrow}+3^{2}$$

دو برابر اولی در دومی $2\times 2x\times 3=12x\Rightarrow m=12$

۳) $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$

مثلاً داریم:

الف) $x^{4}-y^{2}=(x^{2})^{2}-y^{2}=(x^{2}-y)(x^{2}+y)$

ب) $x^{2}+4x+4-y^{2}=(x+2)^{2}-y^{2}=(x+2-y)(x+2+y)$

۴) $x^{2}+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

روش پرکاربرد در تجزیه عبارات درجه دوم

تجزیه عبارت $ax^{2}+bx+c$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$ax^{2}+bx+c=\frac{1}{a}(ax+m)(ax+n)$$

که در آن m و n به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}m+n=b\\ m\times n=ac\end{cases}$$

مثلاً داریم:

$$2x^{2}+7x-9=\frac{1}{2}(2x+m)(2x+n)$$

$$\left.\begin{array}{l}m+n=7\\ mn=-18\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}m=9\\ n=-2\end{cases}$$

عبارت $=\frac{1}{2}(2x+9)(2x-2)=(2x+9)(x-1)$

مثال: عبارت $3x^{2}-11x+10$ به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه شده است. یکی از عوامل تجزیه کدام است؟

۱) $3x+5$ ۲) $3x-5$ ۳) $3x+2$ ۴) $3x-2$

پاسخ: گزینه ۲

$3x^{2}-11x+10=\frac{1}{3}(3x+m)(3x+n)\Rightarrow$ عبارت $=\frac{1}{3}(3x-6)(3x-5)=(x-2)(3x-5)$

$$\begin{cases}m+n=-11\\ mn=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-6\\ n=-5\end{cases}$$

نکته: اگر جمع ضرائب در یک چندجمله‌ای صفر باشد عبارت عامل $x-1$ دارد و اگر مجموع جملات درجه فرد با مجموع جملات درجه زوج برابر باشد عامل $x+1$ خواهد داشت. مثلاً داریم:

$$2x^2+9x+7=\frac{1}{2}(2x+m)(2x+n)$$

$$\begin{cases} m+n=9 \\ m\times n=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ n=2 \end{cases}$$

$$\text{عبارت}=\frac{1}{2}(2x+7)(2x+2)=(2x+7)(x+1)$$

۵) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

۶) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

مثلاً داریم:

$$x^6-1=(x^3)^2-1$$

$$=\underbrace{(x^3-1)}_{=(x-1)(x^2+x+1)}\times\underbrace{(x^3+1)}_{(x+1)(x^2-x+1)}$$

۷) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

مثلاً داریم:

$$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$$

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$

مثال: تجزیه‌شده‌ی عبارت $x^2+4x+4-y^2$ کدام است؟

۱) $(x+4+y)(x+4-y)$ ۲) $(x+y)(x+2)$ ۳) $(x+y+2)(x-y+2)$ ۴) $(x+2)(x+2)$

پاسخ: گزینه ۳

$$x^2+4x+4-y^2=(x+2)^2-y^2\underset{\text{مزدوج}}{=}(x+2-y)(x+2+y)$$

مثال: در تجزیه‌ی عبارت $4a^2-4a-b^2-4b-3$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $2a+b+3$ ۲) $2a-b+1$ ۳) $2a+b-3$ ۴) $2a+b+1$

پاسخ: گزینه ۴

$$4a^2-4a-b^2-4b-3=4a^2-4a+1-b^2-4b-4=(2a-1)^2-(b^2+4b+4)=(2a-1)^2-(b+2)^2$$
$$=(2a-b-3)(2a+b+1)$$

مثال: یکی از عوامل عبارت $a^2+b^2-c^2+a+b+c+2ab$ برابر است با:

۱) $a+b+c+1$ ۲) $a+b-c$ ۳) $a+b-c-1$ ۴) $a+b-c+1$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{عبارت}=a^2+b^2+2ab-c^2+a+b+c=(a+b)^2-c^2+a+b+c$$
$$=(a+b-c)(a+b+c)+(a+b+c)=(a+b+c)(a+b-c+1)$$

فصل پنجم

معادلات درجه اول و معادله‌ی خط

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که فقط به‌ازای چند مقدار برای متغیرشان با هم‌دیگر برابر شوند، به تساوی آن‌ها معادله گویند و مقادیری که به‌ازای آن‌ها دو عبارت با هم برابر باشند را جواب‌های معادله نامند. روشی که برای به‌دست آوردن این جواب‌ها به‌کار می‌رود را روش حل معادله گویند.

معادله‌ی درجه اول

معادله‌ای که دارای یک متغیر بوده و درجه آن متغیر برابر ۱ باشد را معادله درجه اول گویند. که فرم کلی آن به‌صورت $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ می‌باشد.

روش حل معادله‌ی درجه اول

روش کلی حل بدین‌صورت است که باید مجهول معادله در یک طرف تساوی، تنها شود. برای این منظور مجهولات مسئله را به یک طرف تساوی و معلومات را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم. سپس محاسبات جبری (جمع و تفریق) را انجام دهیم در نهایت عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $3x+1=5x-2 \Rightarrow 3x-5x=-2-1 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

۲) $\frac{2x+1}{3}=\frac{5x+2}{2} \Rightarrow 4x+2=15x+6 \Rightarrow 4x-15x=+6-2 \Rightarrow -11x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{-11}=-\frac{4}{11}$

معادلات هم‌ارز

معادلاتی که با عملیات جبری ساده از روی هم به‌دست می‌آیند.

مثلاً این معادلات هم‌ارز هستند:

$2x+1=3 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow 2x+2=4 \Leftrightarrow 3x+1=x+3$

دقت: مجهول مسئله می‌تواند x، n، t و ... باشد.

دقت: در برخی مسائل ممکن است جواب معادله با توجه به مسئله داده شده مورد قبول نباشد.

مثال: دو نخ A و B به طول‌های $120m$ و $70m$ در اختیار است. در لحظه‌ی $t=0$ شروع به قیچی کردن نخ‌ها کرده به‌طوری‌که در هر ثانیه از نخ A، ۳ متر و از نخ B ۲ متر قیچی می‌کنیم.

الف) کدام نخ زودتر تمام می‌شود و چند ثانیه زودتر؟

$120-3t$: طول نخ A که باقی‌مانده

$70-2t$: طول نخ B که باقی‌مانده

تمام شدن نخ A: $120-3t=0 \Rightarrow -3t=-120 \Rightarrow t=\frac{-120}{-3}=40$ ثانیه

تمام شدن نخ B: $70-2t=0 \Rightarrow -2t=-70 \Rightarrow t=\frac{-70}{-2}=35$ ثانیه

نخ B، ۵ ثانیه زودتر تمام می‌شود.

ب) آیا زمانی وجود دارد که طول دو نخ برابر شود؟

$120-3t=70-2t \Rightarrow -3t+2t=70-120 \Rightarrow -t=-50 \Rightarrow t=50$

از لحاظ حل معادله، جوابی که به‌دست آمده می‌گوید که در ثانیه ۵۰ این دو نخ یکسان می‌شوند ولی با دقت در مسئله می‌بینیم که در ثانیه ۴۰ و ۳۵ به بعد دیگر نخ‌ها تمام شده‌اند و در ثانیه ۵۰ نخی وجود ندارد. پس این جواب قابل قبول نخواهد بود و باید بگوییم که طول نخ‌ها هیچگاه یکسان نمی‌شود.

ج) آیا زمانی وجود دارد که طول نخ B نصف طول نخ A گردد؟

$70-2t=\frac{120-3t}{2} \Rightarrow 140-4t=120-3t \Rightarrow -t=-20 \Rightarrow t=20$

مثال: جواب معادله‌ی $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}=\frac{۲}{۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{۱}{\frac{x+۱}{x}}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow \frac{x}{x+۱}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵x=۲x+۲\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

مثال: اگر $a\neq ۲b$، جواب معادله‌ی $a(x-۱)-۲bx+۲b=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) a ۳) b ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$ax-a-۲bx+۲b=۰\Rightarrow (a-۲b)x-a+۲b=۰\Rightarrow (a-۲b)x=a-۲b\Rightarrow x=\frac{a-۲b}{a-۲b}=۱$$: عبارت

مثال: سه برابر عددی به علاوه‌ی نصف آن برابر است با ربع عدد ۷، آن عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه ۲ پاسخ است.

$$۳x+\frac{x}{۲}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow \frac{۷x}{۲}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲}{۷}\times\frac{۷}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

مثال: حاصل ضرب عدد x در ۱۴ به اندازه‌ی ۸۴ واحد از حاصل ضرب عدد x در ۱۷ کم‌تر است. x کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۳

$$۱۴x=۱۷x-۸۴\Rightarrow -۳x=-۸۴\Rightarrow x=\frac{-۸۴}{-۳}=۲۸$$

مثال: سه برابر چه عددی را اگر با نصف مجموع آن عدد با ۱۰، جمع کنیم، حاصل برابر ۱۲ می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

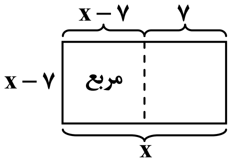
پاسخ: گزینه ۱

$$۳x+\frac{x+۱۰}{۲}=۱۲\Rightarrow \frac{۶x+x+۱۰}{۲}=۱۲\Rightarrow ۷x+۱۰=۲۴\Rightarrow ۷x=۱۴\Rightarrow x=\frac{۱۴}{۷}=۲$$

مثال: محیط یک مستطیل ۸۲ واحد است. اگر از طول آن ۷ واحد کم کنیم باقی‌مانده، یک مربع می‌شود، ضلع کوچک‌تر این مستطیل کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲



۸۲ = محیط

$\Rightarrow ۲(x-۷+x)=۸۲\Rightarrow ۲x-۷=۴۱$

$\Rightarrow ۲x=۴۸\Rightarrow x=۲۴$

$\Rightarrow$ ۱۷ = ۷ − ۲۴ = ضلع کوچک تر

مثال: عددی در ۵ ضرب، حاصل آن با عدد ۴ جمع، پس از آن مجموع بر ۳ تقسیم و سپس عدد ۲ از حاصل کم و باقی‌مانده ۱ می‌گردد، آن عدد «چند» است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{۵x+۴}{۳}-۲=۱\Rightarrow \frac{۵x+۴}{۳}=۳\Rightarrow ۵x+۴=۹\Rightarrow ۵x=۵\Rightarrow x=۱$$

مثال: به ۳ برابر عددی اگر ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی‌مانده ۵ می‌گردد، آن عدد کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{۳x+۴}{۲}-x=۵ \Rightarrow \frac{۳x+۴-۲x}{۲}=۵ \Rightarrow x+۴=۱۰ \Rightarrow x=۶$$

مثال: در یک تانکر پر از آب، با باز شدن شیر A در عرض ۴ ساعت ارتفاع آب داخل تانکر، یک متر کاهش می‌یابد و با باز شدن شیر B در عرض ۶ ساعت ارتفاع آب یک متر کاهش می‌یابد. اگر دو شیر با هم باز شوند در چه مدت زمانی ارتفاع آب یک متر کاهش می‌یابد؟

۱) ۲/۴ ساعت ۲) ۲/۸ ساعت ۳) ۳/۵ ساعت ۴) ۳/۲ ساعت

پاسخ: گزینه ۱

باید از لحاظ زمانی عبارات را یکسان کنیم:

شیر A در عرض ۴ ساعت ← ارتفاع آب ۱ متر کاهش ⇐ شیر A در عرض ۱ ساعت ← ارتفاع $\frac{۱}{۴}$ متر کاهش

شیر B در عرض ۶ ساعت ← ارتفاع آب ۱ متر کاهش ⇐ شیر B در عرض ۱ ساعت ← ارتفاع $\frac{۱}{۶}$ متر کاهش

پس شیر A و B با هم در یک ساعت ← ارتفاع $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}$ کاهش می‌یابد.

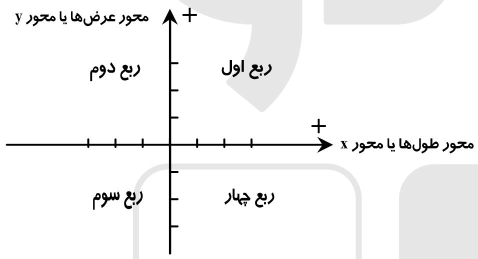
حال تناسب می‌بندیم:

ساعت	متر
۱	$\frac{۵}{۱۲}$
x	۱

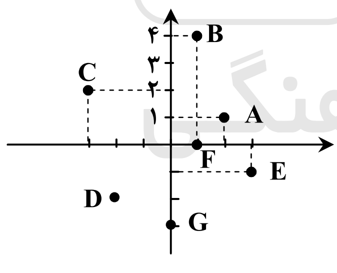
$$\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴ \text{ ساعت}$$

دستگاه مختصات

محورهای مختصات (دستگاه مختصات قائم)



هر نقطه در دستگاه مختصات دارای یک مختصات به‌صورت (عرض نقطه و طول نقطه) می‌باشد که به‌صورت $\begin{bmatrix} \text{طول نقطه} \\ \text{عرض نقطه} \end{bmatrix}$ نیز نوشته می‌شود. مثلاً داریم:



$A(۲,۱), B(۱,۴)$

$C(-۳,۲), D(-۲,-۲)$

$E(۳,-۱), F(۱,۰)$

$G(۰,-۳)$

نکته: نقاطی که روی محور طول‌ها قرار دارند عرض‌شان و نقاطی که روی محور عرض‌ها قرار دارند طول‌شان صفر است.

مثال: نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} ۲m+n \\ ۲m-۱ \end{matrix}\right.$ به‌ازای چه مقداری از n روی محور عرض‌ها به عرض ۳ قرار دارد؟

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$۲m-۱=۳ \Rightarrow ۲m=۴ \Rightarrow m=۲$$

در محور عرض‌ها طول صفر است پس:

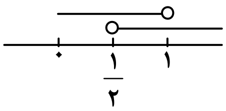
$$۲m+n=۰$$
$$۲\times ۲+n=۰ \Rightarrow ۴+n=۰ \Rightarrow n=-۴$$

مثال: اگر $A\begin{vmatrix} 2m-1 \\ 1-m \end{vmatrix}$ همواره در ناحیه‌ی اول باشد. M در کدام رابطه صدق می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{2} < m < 1$ ۲) $\frac{1}{2} < m < 1$ ۳) $1 < m < 2$ ۴) $\frac{1}{2} < m < 2$

پاسخ: گزینه ۲

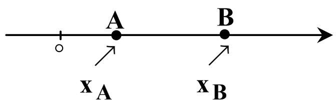
$$\text{ناحیه‌ی اول } \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m-1>0 \Rightarrow 2m>1 \Rightarrow m>\frac{1}{2} \\ 1-m>0 \Rightarrow -m>-1 \Rightarrow m<1 \end{cases}$$



اشتراک جواب‌ها ← $\frac{1}{2} < m < 1$

فاصله بین دو نقطه روی یک خط افقی (محور xها)

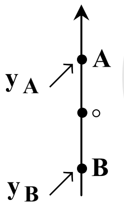
اگر فقط با یک محور، سر و کار داشته باشیم مختصات نقاط را می‌توان فقط با یک طول یا فقط با یک عرض مشخص نمود.



فاصله دو نقطه A و B $= |x_B - x_A|$

یا

طول پاره خط AB



طول پاره خط AB $= |y_B - y_A|$

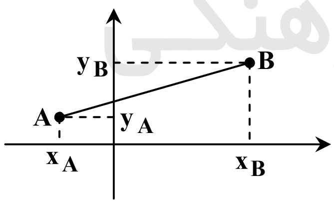
مثال: اگر طول پاره‌خط AB روی محور اعداد برابر با ۵ باشد و طول نقطه‌ی A برابر با ۷- باشد، طول نقطه‌ی B کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۴

$$AB = |x_B - x_A| \Rightarrow 5 = |x_B - (-7)| \Rightarrow 5 = |x_B + 7| \Rightarrow x_B + 7 = \pm 5 \Rightarrow x_B = -2 \text{ یا } -12$$

فاصله بین دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ در دستگاه مختصات

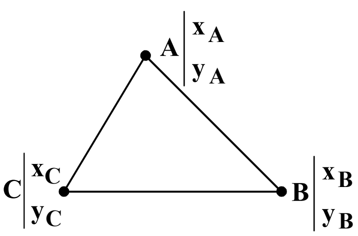


$$\begin{matrix} \text{طول پاره خط AB} \\ \text{فاصله دو نقطه B, A} \end{matrix} = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

نکته: فاصله‌ی یک نقطه تا مبدأ از فرمول زیر محاسبه می‌شود. $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$, $O\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ مبدأ

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

دقت: این فرمول‌ها معمولاً در محاسبه طول ضلع، فاصله دو نقطه داده شده و هر آن‌چه که به فاصله دو نقطه مربوط باشد، استفاده می‌شوند.



- طول اضلاع مثلث
- محیط مثلث
- آیا مثلث متساوی‌الساقین (یا متساوی‌الاضلاع یا قائم‌الزاویه) است

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ از مبدأ مختصات و هم‌چنین از نقطه‌ی A واقع بر محور طول‌ها به یک اندازه می‌باشد، طول نقطه‌ی A چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

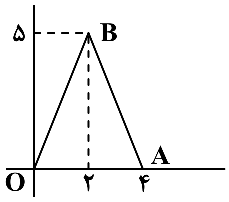
پاسخ: گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$A\left|\begin{matrix}x\\۰\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right. \Rightarrow AB=\sqrt{(x-۲)^۲+۲۵} \quad \text{و} \quad \text{فاصله تا مبدأ } OB=\sqrt{۲^۲+۵^۲}=\sqrt{۲۹}$$

$$AB=OB \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+۲۵}=\sqrt{۲۹} \Rightarrow (x-۲)^۲+۲۵=۲۹ \Rightarrow (x-۲)^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۲ \Rightarrow \boxed{x=۴} \\ x-۲=-۲ \Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

راه حل دوم: شکل



چون مثلث متساوی‌الساقین است (طبق فرض $OB=AB$) پس $A\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right.$

مثال: نقاط $A\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ رئوس چه مثلثی هستند؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) قائم‌الزاویه ۳) متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

پاسخ: گزینه ۲

طول اضلاع را می‌یابیم : $AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$

$$AC=\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}$$

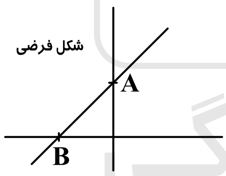
$$BC=\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

ملاحظه می‌شود که $(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۸})^۲=(\sqrt{۱۰})^۲$ پس مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال: خط به معادله‌ی $۳y-۴x=۶$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازه‌ی پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲



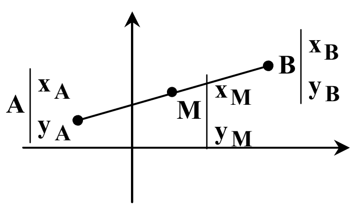
$$۳y-۴x=۶$$

$$x=۰ \Rightarrow ۳y=۶ \Rightarrow y=۲ \qquad \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$$

$$y=۰ \Rightarrow -۴x=۶ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲} \quad \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{-۳}{۲}\\۰\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

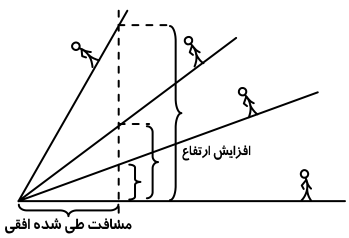
مختصات وسط پاره خط AB:



$$B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right. , A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$$

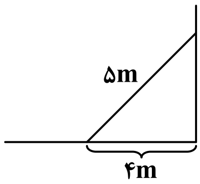
$$\text{مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB } \quad M\left|\begin{matrix}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}\\[2mm] y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}\end{matrix}\right.$$

شیب

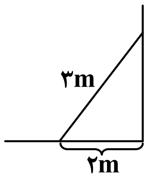


$$\text{شیب}=\frac{\text{مقدار افزایش یا کاهش ارتفاع}}{\text{مقدار مسافت طی شده افقی}}$$

مثال: نردبانی به‌طول ۵ متر به دیوار تکیه دارد و فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۴ متر است. نردبان دیگری به‌طول ۳ متر نیز به دیوار تکیه دارد و فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۲ متر است شیب کدام نردبان بیش‌تر است؟



$x = ۳ \xrightarrow{\text{طبق فیثاغورث}}$ $۵^۲ = ۴^۲ + x^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۱۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \underset{\text{غیرقابل قبول}}{\cancel{\pm}} ۳ \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$



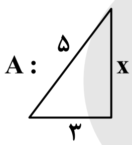
$x = \sqrt{۵} \xrightarrow{\text{طبق فیثاغورث}}$ $۳^۲ = ۲^۲ + x^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \underset{\text{غیرقابل قبول}}{\cancel{\pm}} \sqrt{۵} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \simeq ۱/۰۰۰$

پس شیب نردبان دوم بیش‌تر ا ست.

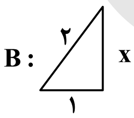
مثال: نردبان A به طول ۵ متر را در فاصله‌ی ۳ متری و نردبان B به‌طول ۲ متر را در فاصله‌ی ۱ متری یک دیوار قرار داده‌ایم. بالارفتن از کدام‌یک آسان‌تر است؟

۱) A　　۲) B　　۳) فرقی نمی‌کند.　　۴) نمی‌توان به‌دست آورد.

پاسخ: گزینه ۱



$\xrightarrow{\text{فیثاغورث}}$ $۵^۲ = ۳^۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \overset{x>۰}{\Rightarrow} x = ۴ \Rightarrow \text{شیب نردبان} = \frac{۴}{۳} \simeq ۱/۳$



$\xrightarrow{\text{فیثاغورث}}$ $۲^۲ = ۱^۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳ \overset{x>۰}{\Rightarrow} x = \sqrt{۳} \Rightarrow \text{شیب نردبان} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳} \simeq ۱/۷$

بنابراین بالا رفتن از نردبان A آسان‌تر است.

شیب خط

اگر دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ روی خط L باشند به بیان دیگر L خطی باشد که از دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ عبور کند، آن‌گاه شیب خط L برابر است با:

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

نمایش شیب مثبت، شیب منفی، شیب صفر و تعریف نشده

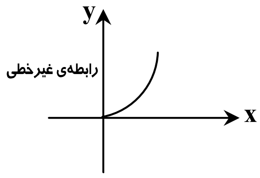
رابطه‌ی خطی

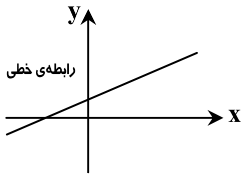
اگر بین مقادیر دو متغیر رابطه‌ای برقرار باشد و یکی از آن‌ها را با x و دیگری را با y نشان دهیم بیان ریاضی رابطه بین y, x به‌صورت معادله‌ای برحسب y, x خواهد بود.

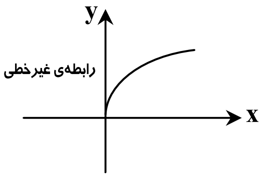
به‌عنوان مثال $y = x + ۴$ یا $y = ۵۰x$

اگر نمودار رابطه بین دو متغیر به‌صورت یک خط باشد (درجه y, x حداکثر ۱ باشد) گفته می‌شود آن دو متغیر به‌طور خطی به هم مرتبطند و با هم رابطه‌ی خطی دارند.

مثال:







$y = x + ۵$	$y = x^۲ + ۵$	$y^۲ = x + ۵$	$y = -۳$	$x = ۲$
رابطه‌ی خطی	رابطه‌ی غیرخطی	رابطه‌ی غیرخطی	رابطه‌ی خطی	رابطه‌ی خطی

فرم کلی معادلات خطی به‌صورت $y = mx + h$ می‌باشد که در آن n, m اعداد ثابتی هستند.

نمودار این معادلات یک خط می‌باشد.

دقت: فرم کلی معادلات خطی را می‌توان به‌صورت $ax + by + c = ۰$ نیز نوشت که به فرم قبلی قابل تبدیل است. (y را در یک طرف تساوی تنها نگه داریم.)

معادله خط

برخی از مواقع نمودار خط در دست است و می‌خواهیم معادله‌ی مربوط به این خط را بیابیم.

نوشتن معادله یک خط

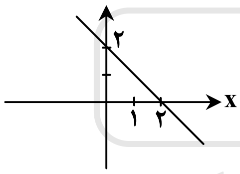
حالت ۱: یک نقطه مانند $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ از خط و شیب خط (m) معلوم است.

$y - y_A = m(x - x_A)$: معادله‌ی خط

حالت ۲: دو نقطه $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right., A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ از خط معلوم است.

$$\begin{cases} ۱)\ m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ ۲)\ y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$: معادله‌ی خط

مثال: کدام‌یک از توابع زیر نمودار هندسی شکل مقابل است؟



۱) $y = -x + ۲$

۲) $y = x + ۲$

۳) $y = x - ۲$

۴) $y = -۲x + ۲$

پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول: به‌دلیل این‌که شیب منفی است یا گزینه‌ی ۱ صحیح است یا گزینه‌ی ۴: حال نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ باید روی خط باشد که با امتحان کردن گزینه‌ی ۱ صحیح خواهد بود.

راه حل دوم: معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ می‌گذرد را بنویسیم:

$$\Rightarrow m = \frac{۲ - ۰}{۰ - ۲} = -۱ \Rightarrow y - ۰ = -۱(x - ۲) \Rightarrow y = -x + ۲$$

مثال: اگر معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(۱, -۱)$ و $B(۲, a)$ می‌گذرد به‌صورت $y = mx + ۲$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

روی خط $A\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \Rightarrow -۱ = m \times ۱ + ۲ \Rightarrow m + ۲ = -۱ \Rightarrow m = -۳ \Rightarrow$ معادله‌ی خط $y = -۳x + ۲$

روی خط $B\left|\begin{matrix}۲\\a\end{matrix}\right. \Rightarrow a = -۳ \times ۲ + ۲ = -۶ + ۲ = -۴$

مثال: هرچه از سطح زمین بالا برویم، دمای هوا کاهش می‌یابد، اگر دمای زمین $۲۰^\circ C$ و دمای هوا در ارتفاع یک کیلومتری $۱۰^\circ C$ باشد و فرض کنیم رابطه‌ی بین T دمای هوا برحسب $^\circ C$ و ارتفاع آن h (کیلومتر) خطی باشد، رابطه‌ی خطی آن‌ها کدام است؟

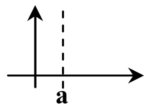
۱) $T = -۱۰h + ۲۰$ ۲) $T = ۱۰h + ۲۰$ ۳) $T = h - ۲۰$ ۴) $T = -h + ۲۰$

پاسخ: گزینه ۱

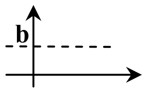
ارتفاع ۰ → دما ۲۰ → $h \to \begin{vmatrix} ۰ \\ ۲۰ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{۱۰ - ۲۰}{۱ - ۰} = -۱۰$
کیلومتر ارتفاع ۱ → دما ۱۰ → $T \to$

معادله‌ی خط : $T - ۲۰ = -۱۰(h - ۰) \Rightarrow T = -۱۰h + ۲۰$

نکته: اگر طول‌های دو نقطه یکسان باشد مثلاً $A\begin{vmatrix} a \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} a \\ y_B \end{vmatrix}$ آن‌گاه معادله‌ی خط به‌صورت $x = a$ می‌باشد که موازی محور yها است.



نکته: اگر در دو نقطه عرض‌ها یکسان باشد مثلاً $A\begin{vmatrix} x_A \\ b \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_B \\ b \end{vmatrix}$ آن‌گاه معادله‌ی خط به‌صورت $y = b$ می‌باشد که موازی محور x ها است.



مثال: معادله‌ی خط موازی محور yها گذرنده از نقطه‌ی (۳ و ۱-) کدام است؟

۱) $y = ۳$ ۲) $x = ۳$ ۳) $x = -۱$ ۴) $y = -۱$

پاسخ: گزینه ۳

اگر خط موازی محور yها باشد معادله‌ی آن به‌صورت $x = a$ خواهد بود حال از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} -۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$ عبور کرده پس معادله‌ی آن $x = -۱$ می‌باشد.

اگر خط موازی محور xها باشد معادله‌ی آن به‌صورت $y = b$ خواهد بود.

نکته: اگر نقطه‌ی $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ روی خط $L: y = mx + h$ قرار داشته باشد آن‌گاه با جایگذاری x_A و y_A به‌جای y, x در معادله‌ی خط باید تساوی برقرار باشد که به این حالت می‌گوییم «باید مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط صدق کند.»

مثال: آیا نقطه‌ی $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ روی خط $y = ۳x - ۲$ قرار دارد.

نقطه را جایگذاری می‌کنیم $۲ \overset{?}{=} ۳ \times ۱ - ۲ \Rightarrow ۲ \overset{?}{=} ۳ - ۲ \Rightarrow ۲ \overset{?}{=} ۱$

تساوی برقرار نیست در نتیجه نقطه روی خط قرار ندارد.

مثال: نقطه‌ی $(۳m - ۹, ۳ + ۲m)$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴

معادله‌ی نیمساز ربع اول و سوم: $y = x$: $۳ + ۲m = ۳m - ۹ \Rightarrow ۲m - ۳m = -۹ - ۳ \Rightarrow -m = -۱۲ \Rightarrow m = ۱۲$

نکته: $y = -x$: معادله‌ی نیمساز ربع دوم و چهارم

مثال: اگر $A(۲,۱)$ و $B(-۲,۳)$ باشد، فاصله‌ی وسط AB از نقطه‌ای به عرض یک واقع بر خط $۲x + ۳y = ۷$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۱

وسط AB $M\begin{vmatrix} ۰ \\ \frac{۱ + ۳}{۲} = ۲ \end{vmatrix} \Rightarrow M\begin{vmatrix} ۰ \\ ۲ \end{vmatrix}$

در معادله‌ی خط : $y = ۱ \Rightarrow ۲x + ۳ = ۷ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow C\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow MC = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$

شرط موازی بودن دو خط

اگر دو خط با هم موازی باشند شیب آن‌ها با هم برابر خواهد بود و برعکس:

$m_1 = m_2$: شرط موازی بودن

شرط عمود بودن دو خط

$m_1 \times m_2 = -1$

یا

$m_2 = \frac{-1}{m_1}$

مثال: خط موازی با خط $y + 2x - 1 = 0$ که از نقطه‌ی $A(-3,4)$ می‌گذرد، محور xها را با «کدام طول» قطع می‌نماید؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه ۱

$y = -2x + 1 \Rightarrow$ شیب $m_1 = -2 \Rightarrow$ شیب خط موازی $m_2 = -2$ $A\left|\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}\right. \Rightarrow y - 4 = -2(x+3)$

$\Rightarrow y = -2x - 6 + 4 \Rightarrow y = -2x - 2$

محل تلاقی با محور x ها : $y = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$

مثال: خط گذرنده از نقطه‌ی $(2,-3)$ و عمود بر خط به معادله‌ی $y + 2x = 0$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 8

پاسخ: گزینه ۴

$y = -2x \Rightarrow m_1 = -2 \Rightarrow$ شیب خط عمود $m_2 = \frac{1}{2}$ و $A\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right. \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$

محل تلاقی با محور xها : $y = 0 \quad : \quad 0 = \frac{1}{2}x - 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8$

مثال: خط گذرنده از نقطه‌ی $(4,-2)$ و موازی خط به معادله‌ی $2y - x = 4$، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(2,-4)$ ۲) $(6,-1)$ ۳) $(8,-1)$ ۴) $(10,2)$

پاسخ: گزینه ۲

معادله خط داده شده : $2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$ $A\left|\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right. \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}(x-4)$

$\Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$

حال گزینه‌ها را جایگذاری می‌کنیم، جواب گزینه ۲ است، زیرا:

$\left|\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right. : -1 = \frac{1}{2} \times 6 - 4$ ✓

مثال: نقطه‌ی $A(2,-6)$ و O مبدأ مختصات است، خطی که از وسط OA بر آن عمود شود محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) 6 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 10

پاسخ: گزینه ۴

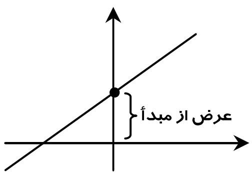
$O\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \quad A\left|\begin{matrix}2\\-6\end{matrix}\right. \Rightarrow$ وسط OA $M\left|\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right.$

شیب OA $m_1 = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow$ شیب خط عمود $m_2 = \frac{1}{3}$

$\xrightarrow[\text{با شیب } m_2 \text{ بگذرد}]{\text{معادله خطی که از } M} : y + 3 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

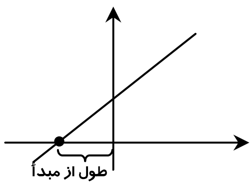
محل تلاقی با محور xها : $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \Rightarrow x = 10$

عرض از مبدأ



محل تلاقی خط با محور yها $(x=0)$ را عرض از مبدأ گویند.
برای یافتن عرض از مبدأ کافیست در معادله‌ی خط به‌جای x مقدار صفر را قرار دهیم و y را محاسبه کنیم.

طول از مبدأ



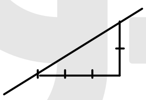
محل تلاقی خط با محور xها $(y=0)$ را طول از مبدأ گویند. برای یافتن طول از مبدأ کافی است در معادله‌ی خط به‌جای y مقدار صفر را قرار داده و x را بیابیم.

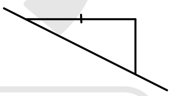
نکته: اگر معادله‌ی خط به فرم کلی $y=mx+h$ باشد آن‌گاه m شیب و h عرض از مبدأ و $-\frac{h}{m}$ طول از مبدأ است.

نمایش شیب

شیب را می‌توان به‌صورت $m=\dfrac{\text{میزان خیز}}{\text{میزان رفت}}$ بیان نمود.

به‌عنوان مثال شیب $m=\frac{2}{3}$ یعنی میزان خیز ۲ واحد و میزان رفت ۳ واحد است. برای نمایش شیب به مقدار «میزان رفت» به جلو حرکت کرده و به مقدار «میزان خیز» به بالا (+) و یا پایین (-) حرکت می‌کنیم:

$m=\frac{2}{3}$  خطی که شیب $\frac{2}{3}$ دارد

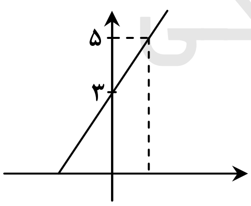
$m=-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$  خطی که شیب $-\frac{1}{2}$ دارد

رسم خط

روش اول (روش نقطه‌یابی):

دو نقطه از خط را با جایگذاری پیدا می‌کنیم سپس دو نقطه را روی محور مختصات مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

مثال: خط $y=2x+3$ را رسم کنید.



$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ نقطه $\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$

$x=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow$ نقطه $\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$

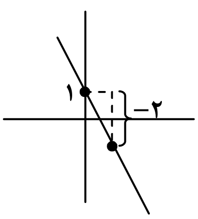
روش دوم: به کمک عرض از مبدأ و شیب:

ابتدا عرض از مبدأ را پیدا می‌کنیم و آن را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنیم. سپس شیب را با شروع از این نقطه نمایش مـی‌دهـیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

مثال: خط $y=-2x+1$ را رسم کنید.

شیب = ۲-

عرض از مبدأ = ۱



$m=-2=\dfrac{-2}{1}$ (خیز: -2، رفت: 1)

مثال: نمودار خط به معادله‌ی $۲x+۵y=۳$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

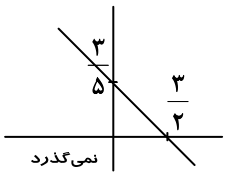
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۳

$$۲x+۵y=۳$$

$$x=۰ \Rightarrow ۵y=۳ \Rightarrow y=\frac{۳}{۵} \qquad \begin{array}{c|c} ۰ \\ \frac{۳}{۵} \end{array}$$

$$y=۰ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \qquad \begin{array}{c|c} \frac{۳}{۲} \\ ۰ \end{array}$$



مثال: خط به معادله‌ی $y=mx+(m-۲)$ به‌ازای هر عدد منفی m از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

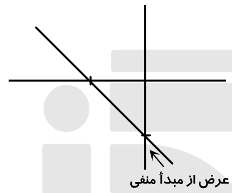
پاسخ: گزینه ۱

$y=mx+(m-۲)$

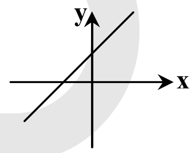
خط به‌صورت \ است. $\Rightarrow m<۰$ منفی است.

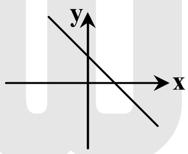
عرض از مبدأ منفی است $m<۰ \Rightarrow m-۲<۰$

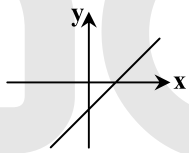
$\rightarrow$ شکل تقریبی به‌صورت روبه‌رو است

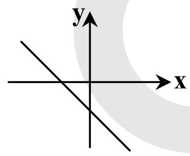


مثال: در تابع خطی $y=mx+h$، اگر ضریب زاویه و عرض از مبدأ مثبت باشند، نمودار به چه شکل خواهد بود؟

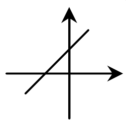
۱) 

۲) 

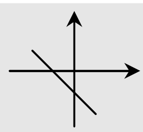
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۱

محل تلاقی با محور y ها مثبت $\Leftarrow$ عرض از مبدأ مثبت  شیب مثبت

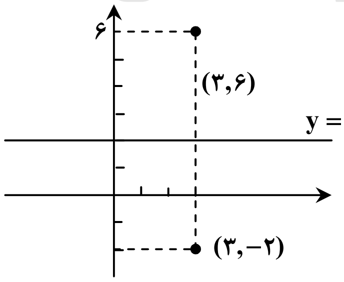
(ضریب زاویه همان شیب است)

محل تلاقی با محور y ها منفی $\Leftarrow$ عرض از مبدأ منفی  شیب منفی

مثال: دو نقطه‌ی $(۳,-۲)$ و (a,b) نسبت به خط $y=۲$ قرینه‌اند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴



$$\Rightarrow (a,b)=(۳,۶) \Rightarrow a+b=۹$$

دستگاه معادلات خطی: دستگاه دو معادله دو مجهول

در این دستگاه‌ها معمولاً دو معادله و دو مجهول (x,y) وجود دارد، جواب این دستگاه‌ها اعدادی هستند که اگر به‌جای y,x قرار گیرند هر دو معادله هم‌زمان برقرار باشد. فرم کلی این معادلات به‌صورت $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ است.

با توجه به فرم کلی معلوم است که هر معادله بیانگر یک معادله‌ی خط است و جواب دستگاه محل تلاقی دو خط می‌باشد.

نکته: برای به‌دست آوردن محل تلاقی (برخورد) دو خط کافیست معادله دو خط را در یک دستگاه قرار دهیم و آن را حل کنیم جواب‌های به‌دست آمده طول و عرض نقطه برخورد می‌باشند.

روش حل دستگاه

روش حذفی

در این روش به‌دنبال حذف یک مجهول هستیم برای این‌کار باید ضرایب مجهول در دو معادله قرینه‌ی هم باشد، پس با ضرب کردن کل معادله در عددی خاص، ضرایب قرینه را ایجاد می‌کنیم. در نهایت با جمع کردن دو معادله، یک مجهول حذف می‌شود و می‌توان مجهول دوم را پیدا کرد. با جایگذاری مجهول به‌دست آمده در یکی از معادلات، مجهول دیگر نیز محاسبه می‌شود.

مثال: دستگاه زیر را از روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases}۳x+۲y=۱\\ ۵x-۳y=۸\end{cases}\xrightarrow{\text{y را حذف کنیم}}\begin{matrix}۳\times\\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}۳x+۲y=۱\\ ۵x-۳y=۸\end{cases}\Rightarrow +\begin{cases}۹x+۶y=۳\\ ۱۰x-۶y=۱۶\end{cases}$$

$$۱۹x=۱۹\Rightarrow x=\frac{۱۹}{۱۹}=۱$$

جایگذاری در معادله‌ی اول $۳x+۲y=۱\Rightarrow ۳+۲y=۱\Rightarrow ۲y=-۲\Rightarrow y=-۱\Rightarrow$ محل تلاقی دو خط $\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$

روش جایگزینی (جایگذاری)

در این روش از یک معادله، یک مجهول را محاسبه می‌کنیم و در معادله‌ی دیگر قرار می‌دهیم و معادله به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

مثال: دستگاه زیر را با روش جایگزینی حل کنید.

$$\begin{cases}y=x+۱\\ ۳x+y=۵\end{cases}\Rightarrow ۳x+(x+۱)=۵\Rightarrow ۴x+۱=۵\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

جایگذاری در یک معادله $y=x+۱\Rightarrow y=۱+۱=۲\Rightarrow$ محل تلاقی دو خط $\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$

مثال: نقطه‌ی برخورد دو خط به معادله‌های $۲y-۳x=۱$ ، $۳y=۲x+۱$ در کدام ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases}۲y-۳x=۱\\ ۳y=۲x+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}۲\times\\ -۳\times\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱\\ ۳y-۲x=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y-۶x=۲\\ -۹y+۶x=-۳\end{cases}$$

$$-۵y=-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۵}$$

جایگذاری در یک معادله: $۲\times\frac{۱}{۵}-۳x=۱\Rightarrow -۳x=۱-\frac{۲}{۵}\Rightarrow -۳x=\frac{۳}{۵}\Rightarrow x=-\frac{۱}{۵}$

پس در ربع دوم است.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو خط به معادلات $x+y=۱$ ، $۲x+y=۲$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{matrix}\\ -۱\times\end{matrix}\begin{cases}۲x+y=۲\\ x+y=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+y=۲\\ -x-y=-۱\end{cases}$$

$$x=۱\Rightarrow y=۰\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$

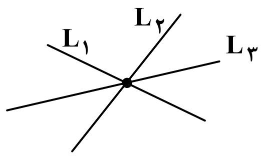
فاصله تا مبدأ $=OA=\sqrt{۱^۲+۰^۲}=\sqrt{۱}=۱$

مثال: به‌ازای کدام مقدار برای a سه خط به معادلات $y+۳x=-۲$ ، $۲y-x=۳$ و $x+y=a$ از یک نقطه می‌گذرند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

محل تلاقی دو خط را می‌یابیم، این نقطه باید در معادله‌ی خط سوم صدق کند.



$$\begin{cases} y+3x=-2 \\ 3\times\; 2y-x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+3x=-2 \\ 6y-3x=9 \end{cases} \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-1$$

باید روی خط سوم باشد $\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow -1+1=a \Rightarrow a=0$

مثال: به‌ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع $2y=4x+1$ و $y=ax-3$ متقاطع نیستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \rightarrow$ دو خط منطبق‌اند

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \rightarrow$ دو خط موازی‌اند $\rightarrow$ متقاطع نیستند

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \rightarrow$ دو خط متقاطعند

راه حل اول:

$$\begin{cases} ax-y-3=0 \\ 4x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4}=\frac{-1}{-2} \Rightarrow a=2$$

راه حل دوم: باید دارای شیب یکسان باشند

$\begin{cases} a = \text{شیب اولی} \\ 2 = \text{شیب دومی} \Rightarrow a=2 \end{cases}$