

آزمون تشریحی مرحله دو شازرز، تیر ۱۳۹۹



زمان آزمون ۲۷۰ دقیقه است.
آزمون شامل ۴ سوال تشریحی است.
ترتیب سوالات به صورت تصادفی است، پیشنهاد میشود همه سوالات را بخوانید.



همانطور که می دانید (یا شاید هم نمی دانید) طلاهای امسال برای المپیاد جهانی به سنگاپور رفتند. برای همین تصمیم گرفتند به جای آن به چهارگوشه ایران سفر کنند...

۱ - در ابتدا بچه ها به سمت جنوب حرکت کردند تا به شیراز بروند. وقتی به شیراز رسیدند شایان برای آن ها تعدادی شیرینی آورد تا بخورند. وزن هر شیرینی یک عدد حقیقی مثبت کمتر مساوی ۱ کیلو است. همچنین می دانیم جمع وزن کل شیرینی ها برابر با عدد طبیعی n است. از آن جایی پاشا به شایان اعتماد ندارد حدس می زند که شایان شیرینی ها را سعی کرده است. بنابراین آن ها تلاش کردند که شیرینی ها را نخورند ولی برای آنکه شیرینی ها حیف نشوند تصمیم گرفتند آنها را به افراد دیگر بدهند به صورتیکه کمترین تعداد آدم ها به خاطر سعی بودن شیرینی ها بمیرند! فرایند توزیع شیرینی ها به این صورت است که ابتدا شیرینی ها را به k جعبه افراز می کنند به صورتیکه جمع وزن شیرینی های هر جعبه حداکثر ۱ کیلو باشد (زیرا کسی نمی تواند بیشتر از ۱ کیلو شیرینی بخورد). سپس ارشیا هر کدام از k جعبه را به یک آدم در حافظیه می دهند. از آن جایی که طلا ها (حتی شایان) می خواهند کمترین تعداد آدم ها بمیرند شما باید کمترین k ممکن را پیدا کنید که همواره بتوان شیرینی ها را به k دسته تقسیم کرد!

۲ - بعد از توزیع شیرینی ها، طلاها به دلیل مسموم کردن افراد تحت تعقیب قرار گرفتند و تصمیم گرفتند به سمت مشهد فرار کنند. پس سوار قطار شدند. از آنجایی که در قطار وقت زیادی داشتند تصمیم گرفتند نقشه شهر مشهد را بررسی کنند و مکانی برای پنهان شدن پیدا کنند. ناگهان ابوالفضل متوجه شد که می توان این نقشه را به صورت یک گراف n راسی نمایش داد که یال های گراف به صورت اجتماع n تا دور فرد است! (اگر یک یال چند بار در دور ها بیاید به همان تعداد بار در گراف اصلی یال داریم). کسری بدون اینکه به نقشه نگاه کند گفت روشی وجود دارد که از هر کدام از n دور فرد، حداکثر یک یال را انتخاب کنیم و با آن ها یک دور فرد دیگر بسازیم، سپس کسری خواهید. به طلاها که حاج و واج مانده اند کمک کنید که این موضوع را ثابت کنند.



۳ - وقتی بچه‌ها به مشهد رسیدند، دیدند پارک آبی تعطیل است! به همین دلیل بدون معطلی به سمت دریای خزر حرکت کردند. وقتی به ساحل رسیدند عمو سریع به سمت فروشگاه رفت تا چیزی بخورد. بقیه بچه‌ها که ۸ نفر بودند تصمیم گرفتند واترپلو بازی کنند.

قبل از شروع بازی هرنفر یک امتیاز از ۱ تا ۱۰۰ براساس مهارتش در بازی به خود نسبت می‌دهد. هیئت داوری برای شروع بازی باید تعدادی از بچه‌ها را دوتا تیم کنند (و آن‌هایی که در هیچ یک از تیم‌ها نیامده‌اند را دنبال نخود سیاه بفرستند) طوریکه جمع امتیاز بازیکنان دوتا تیم باهم برابر باشند.

الف) ثابت کنید (مثال بدون اثبات نمره ای نمی‌گیرد!) بچه‌ها که ۸ نفرند با هوش سرشارشان میتوانند طوری امتیاز بگیرند که داوران نتوانند تیم کشی را انجام دهند (از آنجایی که عمو نیست و همه عمو را دوست دارند، یکی برای همه، همه برای یکی).

ب) بعد از اینکه عمو از فروشگاه خرید کرد فروشنده را نیز دعوت کرد تا به جمع بچه‌ها بپیوندد و بازی کند. ثابت کنید با اضافه شدن عمو و فروشنده و ۱۰ نفر شدن آن‌ها، هر کاری هم که بکنند نمیتوانند جلوی تیم کشی داوران را بگیرند.

۴ - مهدی و مهدی که دائما در حال رقابت هستند تصمیم گرفتند در راه رفتن به غرب با هم بازی زیر را انجام دهند. (از آنجایی که مهدی و مهدی شبیه هم هستند برای تمایز دادن آن‌ها از کوچیکه و بزرگه استفاده می‌کنیم).

ابتدا کوچیکه یک عدد طبیعی مثل n در نظر می‌گیرد.

سپس با شروع از بزرگه هر کس در نوبتش تغییری در عدد اعمال می‌کند.

بزرگه در نوبت خود عدد طبیعی x را به عدد نامنفی $x - a^2$ تبدیل می‌کند. (a یک عدد طبیعی دلخواه است).

کوچیکه در نوبت خود عدد طبیعی x را به x^k تبدیل می‌کند. (k یک عدد طبیعی دلخواه است).

اگر بزرگه بتواند عدد را به ۰ تبدیل کند برنده می‌شود.

پدرام می‌خواهد روی یکی از آن دو نفر شرط بندی کند. بنابراین شما باید بگویید که آیا بزرگه می‌تواند

مستقل از بازی کوچیکه به هدفش برسد؟ یا اینکه کوچیکه همواره می‌تواند با زیرکی خود (و انتخاب عدد

اولیه درست) همواره عدد را مثبت نگه دارد؟