ص۱

تعاریف - قوانین - روابط

## تعریف ها :

کیفیت : هر چیز قابل توصیف را کیفیت می گویند ( مزه - رنگ - بو - نرمی - زبری - گروه خونی و ...

گاهی برای توصیف و درجه بندی یک کیفیت می توان از واژه های ( کم / متوسط / زیاد ) استفاده کرد.

کمیت : هر چیز قابل اندازه گیری را کمیت می گویند ( طول - جرم - زمان - دما ) ( سرعت - شتاب و غیره ... )

اصلی — فرعی

انواع کمیت:
- برداری : دارای جهت اند ← سرعت - نیرو - شتاب
- نرده ای
  - گسسته ← ( حجم حافظه یک مموری - تعداد طبقات و ...
  - پیوسته ← ( زمان - حجم - جرم - طول - ...

واحد کمیت : مقدار قراردادی از یک کمیت است که به کمک آن شمارش و اندازه گیری کمیت مورد نظر انجام می شود. ( طول ← متر - زمان ← ثانیه - جرم ← کیلوگرم - مساحت ← متر مربع ...

مقدار کمیت : عددی که به یک کمیت نسبت داده می شود و پس از آن حتماً باید واحد گفته شود

( ۲ دانه / کیلو / کیسه / کارتن / تُن ) ( ۳ میلی متر / سانتی متر / متر / کیلومتر )

کمیت ثابت : اگر مقدار یک کمیت تحت شرایط مختلف تغییر نکند به آن ثابت گفته می شود

← بار الکترون - جرم نترون - ثابت گرانشی - عدد $\pi$ - ثابت پلانک - سرعت نور و ...

کمیت متغیّر : اگر مقدار یک کمیت تحت شرایط مختلف تغییر بکند به آن متغیر گفته می شود

یک متغیر را معمولا با حرف انگلیسی مثل $x$ یا $t$ نشان می دهند (زمان یک متغیر است)

رابطه بین کمیت ها در واقعیت : در طبیعت و جهان هستی کمیت ها و حتی کیفیت ها

با یک دیگر مرتبط اند (رابطه دارند) . به عبارتی تغییرات یک کمیت بر دیگری اثرگذار است.

رابطه دو کیفیت ← رنگ گل و بوی گل – رنگ پوست و زیبایی فرد

رابطه ی یک کیفیت و یک کمیت ← زیبایی یک محصول و میزان فروش آن

رابطه دو کمیت ← زمان و دما در طول روز – تعداد افراد داخل یک اتاق و تعداد پاها

سرعت و شتاب با نیرو – مساحت کشورهای جهان و محیط کشورها

طول ضلع مربع با محیط یا مساحت آن – تعداد معلم ها و نمره دانش آموزان

ارتفاع جسم و زمان لازم برای سقوط – تعداد درخت ها و تعداد گنجشک ها

جرم وزنه و طول فنر – تعداد گربه های شهرها نمره متوسط درس ریاضی

در بیان رابطه بین کمیت ها یک کمیت به عنوان کمیت اول (A) انتخاب می شود و

کمیت دیگر به عنوان کمیت دوم (B) در نظر گرفته می شود. مقادیر کمیت اول به صورت

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ و مقادیر کمیت دوم نیز به صورت $b_1, b_2, b_3, \ldots$ نمایش داده می شوند

بیان انواع رابطه به صورت کلامی و با استفاده از کلمات :

انواع رابطه

مستقیم : $\frac{\text{افزایش}}{\text{کاهش}}$ A باعث $\frac{\text{افزایش}}{\text{کاهش}}$ B می شود $(A\uparrow\downarrow \rightarrow B\uparrow\downarrow)$

معکوس : $\frac{\text{افزایش}}{\text{کاهش}}$ A باعث $\frac{\text{کاهش}}{\text{افزایش}}$ B می شود $(A\uparrow\downarrow \rightarrow B\downarrow\uparrow)$

یکنواخت : $\frac{\text{افزایش}}{\text{کاهش}}$ A باعث تغییر B نمی شود $(A\uparrow\downarrow \rightarrow B \rightarrow)$

تصادفی : بسته به مقادیر A رابطه کمیت A و B ممکن است مستقیم، معکوس یا یکنواخت باشد به این ترتیب رابطه آنها از نوع نامعلوم یا تصادفی است.

تعریف رابطه بین کمیت ها در ریاضی : (به هر شکل ممکن که بتوان مقادیر یک کمیت را به مقادیر یک کمیت دیگر مرتبط کرد) یک رابطه ریاضی می گویند

رابطه ها در ریاضی با حرف انگلیسی بزرگ نام گذاری (R) ... می شوند

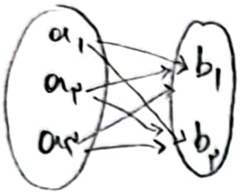
در ریاضی لزوما رابطه معقول بین کمیت ها مد نظر نیست

مثال: رابطه های ممکن بین دو مجموعه A و B با مقادیر $B=\{b_1, b_2\}$ و $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ حل

داده شده در روبه‌رو را بنویسید.

$R_{A\times B}=\{(a_1;b_1),(a_1;b_2),(a_2;b_1),(a_2;b_2),(a_3;b_1),(a_3;b_2)\}$

مجموعه R و هر زیرمجموعه از آن یک رابطه ریاضی بین A و B است




شکل روبه‌رو و هر شکل ساده‌تر از آن یک رابطه ریاضی بین A و B است

نشان دادن یک رابطه در ریاضی: بیان یک رابطه به صورت کلامی و با استفاده از کلمات بسیار وقت‌گیر و غیر دقیق است.

برای نمایش دقیق‌تر و سریع‌تر یک رابطه در ریاضی از نمایش‌ها ریاضی (زبان ریاضی) استفاده می‌کنیم

انواع روش‌های نشان دادن یک رابطه در ریاضی

نمایش یک رابطه ریاضی به صورت زوج مرتب:

A , B

(a , b) → (۱,۲), (۲,۴), (۳,۶), (۴,۸), (۳,۵), (۴,۵)

a: مقادیر مجموعه اول

b: مقادیر مجموعه دوم

مزایا: ساده و سریع روش است

معایب: اطلاعات کمی منتقل می‌کند
برای تعداد زیاد مناسب نیست

نمایش یک رابطه ریاضی به صورت جدول:

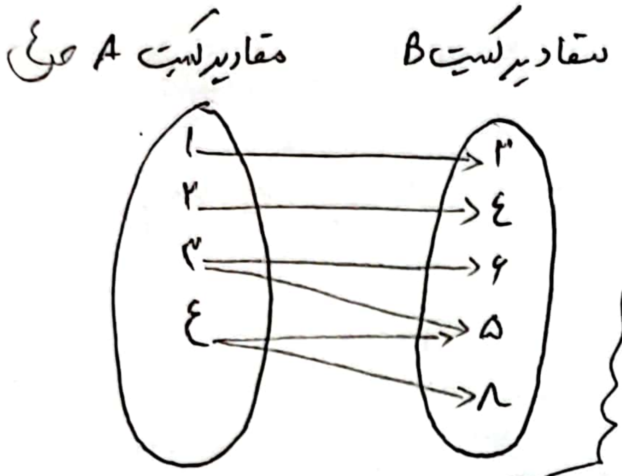
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مقادیر مجموعه اول | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۳ | ۴ |
| مقادیر مجموعه دوم | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۵ | ۵ |

+1

+2

مزایا: ساده و سریع است
ترتیب مقادیر بهتر مشخص می‌شود

معایب: برای تعداد کم مناسب است
اطلاعات زیادی به ما می‌دهد

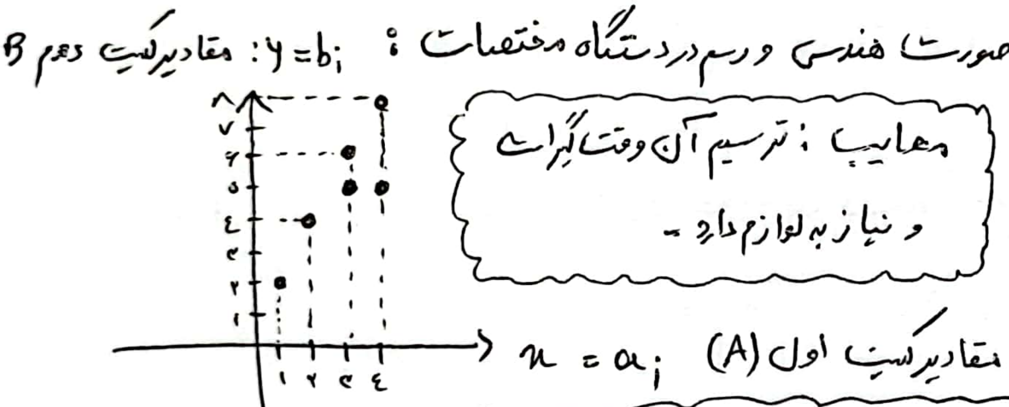



## نمایش یک رابطه ریاضی به صورت نمودار ون :

مزایا: به راحتی می توان فهمید به هر عضو و مقدار مجموعه B چند پیکان وارد شده و از هر عضو یا مقدار مجموعه A چند پیکان خارج شده است. و هر پیکان نشان دهنده وجود یک رابطه بین مقادیر این دو مجموعه است.

معایب: برای مجموعه هایی با تعداد مقادیر زیاد مناسب نیست. در صورت زیاد بودن مقادیر بسیار شلوغ می شود.

## نمایش یک رابطه ریاضی به صورت هندسی و رسم در دستگاه مختصات :




مزایا: سرعت و دقت بیان رابطه بین مقادیر دو مجموعه در این روش بسیار بالا است و چون حافظه ی بصری مغز را درگیر می کند فهم و درک آن آسان تر است

معایب: ترسیم آن وقت گیر است و نیاز به لوازم دارد.

مسئله: در یک پادگان افراد یکی یکی وارد یک اتاق می شوند اگر رابطه ریاضی تعداد افراد وارد شده و تعداد پاهای داخل اتاق به صورت روبه رو (زوج مرتب) داده شده باشد مشخص کنید کدام افراد (نفر چندم) دچار قطع پا شده اند

$(3,6)$ و $(1,2)$ و $(5,7)$ و $(4,6)$ و $(2,4)$

در ریاضی

تعریف تابع در ریاضی : در حالت کلی تابع نوع خاصی از یک رابطه در ریاضی است که ص۵

در آن هر مقدار از کمیت اول فقط به یک مقدار معین از کمیت دوم

مربوط (مرتبط - تبدیل) می شود .

در این حالت کمیت دوم (B) را تابعی از کمیت اول (A) می گویند

به عبارتی کمیت دوم را کمیت تابع (به طور خلاصه تابع) می نامند و کمیت اول را کمیت مستقل (متغیر) می نامند

توجه :

ممکن است دو کمیت در واقعیت رابطه‌ی منطقی و معقول نداشته باشند

اما در ریاضی برای آنها رابطه تعریف می شود .

همچنین ممکن است دو کمیت در واقعیت تابع یک دیگر نباشند اما به صورت

محدود برای آنها تابع تعریف بشود و

به دو دلیل :

1. ریاضی قدرت تشخیص ندارد : به عبارتی جنس اعداد برای ریاضی قابل تفکیک

و تشخیص نیست . و ریاضی نمی تواند بفهمد این عدد مربوط به چه کمیتی است

مثال : تعداد گربه های شهر های یک کشور و معدل دانش آموزان شهرها (1)

تعداد معلم های شهر های یک کشور و معدل دانش آموزان شهرها

2. ریاضی پیش داوری نمی کند : به عبارتی ممکن است از نظر ما دو کمیت در واقعیت

بی ربط باشند و هیچ کدام تابع دیگری نباشد اما ریاضی بتواند بین آنها یک رابطه و قانون

کشف کند

مثال : تعداد افراد باسواد کشورها با تعداد جرم و جنایت

از نظر ما هرچه سواد بیشتر باشد جرم و جنایت باید کمتر بشود (پیش داوری)

اما ریاضی هیچ گونه پیش داوری ندارد و ممکن است خلاف موضوع را ثابت کند

# روش های تشخیص تابع بودن یک رابطه به کمک حالت های مختلف نمایش رابطه (۶)

**نمایش زوج مرتب :**

یک رابطه که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است به شرطی تابع است که مولفه هیچ دو زوج مرتبی یکسان نباشد.

$(a_1 , b_1), (a_2 , b_2) \dots (a_n , b_n)$

مگر این که مولفه ی دوم آنها نیز یکسان باشد.

$\forall\ a_i = a_j \rightarrow b_i = b_j$

$\{(1,2), (2,3), (2,3), (3,5)\}$ رابطه است تابع هست

$\{(1,2), (2,3), (2,4), (3,6)\}$ رابطه است تابع نیست

**نمایش جدولی :**

یک رابطه که به صورت جدولی به نمایش درآمده است به شرطی تابع نیز است که در مقادیر مولفه های جدول هیچ مقدار تکراری وجود نداشته باشد.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| مقادیر A | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | ... |
| مقادیر B | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | ... |

مگر این که مقادیر ست دوم نیز یکسان و تکراری باشند

$\forall\ a_i = a_j \rightarrow b_i = b_j$

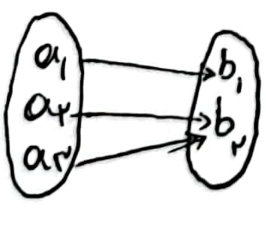
| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۴ | ۵ | ۶ |

تابع است

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۲ |
| ۴ | ۵ | ۶ |

تابع نیست

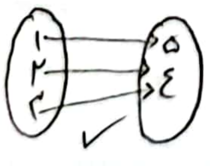
**نمایش نمودار وِن :**



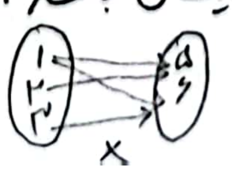

یک رابطه که به صورت نمودار وِن به نمایش درآمده است به شرطی تابع نیز است که از هر مقدار ست اول فقط یک پیکان خارج شده باشد.

$\forall$

مگر این که مقصد هر دو پیکان یکسان باشد.



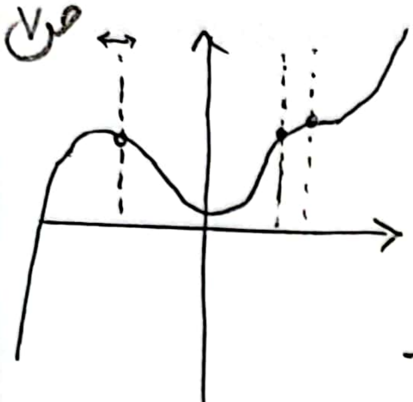

تابع است



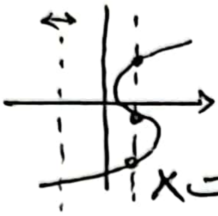

تابع نیست

## نمایش نمودار هندسی :

یک رابطه که به صورت نمودار دکارتی به نمایش درآمده است به شرطی تابع است که هر خط موازی محور y ها منحنی آن را فقط در یک نقطه قطع کند مگر ندارد. ☺



تابع است ✓



تابع نیست ✗

## نام گذاری تابع و تعریف دامنه تابع :

برای نام گذاری یک تابع از حروف انگلیسی کوچک و معمولا حروف f و g و h و ... استفاده می شود

دامنه ی تابع : تمام مقادیر مجاز برای کمیت اول را دامنه تابع می گویند دامنه را با $D_f$ نشان می دهند
دی اف

برد تابع : تمام مقادیر بدست آمده برای کمیت دوم را برد تابع می گویند

تعریف ضابطه : به قانون یا فرمولی که کمیت اول را به کمیت دوم تبدیل می کند ضابطه تابع گفته می شود

اگر a عددی در دامنه ی تابع f باشد $(a \in D_f)$ آنگاه مقدار تابع f به ازای a به صورت $f(a)$ نوشته می شود.

به طور کلی یک ضابطه و تابع به صورت روبه رو نمایش داده می شود

$$\overbrace{\underbrace{f}_{\text{نام تابع}}(\underbrace{x}_{\text{کمیت اول}}) = \underbrace{3x+2}_{\text{یک عبارت برحسب } x}}^{\text{ضابطه یا فرمول تابع}}$$

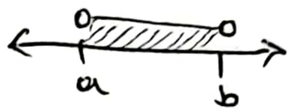
مقدار تابع به ازای x

بازه: زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص باشد را یک بازه (فاصله) می‌گویند

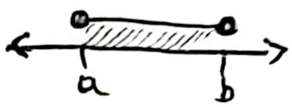
انواع بازه:
- بازه باز
- بازه بسته
- بازه نیم‌باز (نیم‌بسته)

یک بازه به صورت‌های روبه‌رو نمایش داده می‌شود

بازه باز: $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

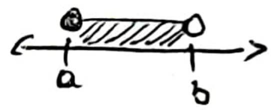



بازه بسته: $[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

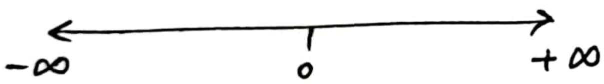



: $(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$


: $[a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$




علامت بی‌نهایت: ($\infty$)

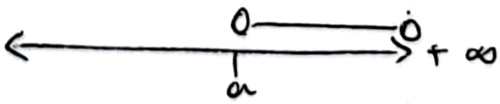



یک عدد - با اندازه خیلی بزرگ

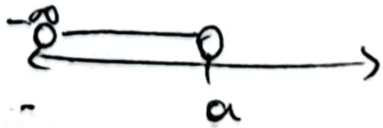
یک عدد + با اندازه خیلی بزرگ

بازه نامتناهی: هرگاه علامت $+\infty$ یا $-\infty$ در یک بازه نوشته بشود به آن بازه یک بازه نامتناهی (بی‌انتها) گفته می‌شود. (توجه: در سمت علامت $\pm\infty$ باید از ( استفاده کرد.

$(a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x\}$ یا $a < x < +\infty$




$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$ یا $-\infty < x < a$



چند جمله‌ای : به عباراتی شامل توان هایی از $x$ با ضرایب معلوم چند جمله‌ای گفته می‌شود

چند جمله‌ای ها برحسب بالاترین توان (درجه $x$) نام گذاری می‌شوند

چند جمله‌ای درجه ۱ : $ax^1 + bx^0$

↲ توجه: به هر توان $x$ در چند جمله‌ای یک جمله گفته می‌شود

چند جمله‌ای درجه ۲ : $ax^2 + bx + cx^0$

↲ به ... و $d$ و $c$ و $b$ و $a$ که اعدادی مشخص اند ضرایب چند جمله‌ای می‌گویند که $a$ باید مخالف صفر باشه.

چند جمله‌ای درجه ۳ : $ax^3 + bx^2 + cx + dx^0$

...

چند جمله‌ای درجه $n$ : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

---

مفاهیم ابتدایی هندسی
نقطه، خط، منحنی و
... توضیح داده شوند

انواع توابع پُر کاربرد :
- تابع درجه اول (تابع خطی) ✓
- تابع درجه دوم (تابع سهمی) ✓
- تابع مثلثاتی
- تابع نمایی
- تابع لگاریتمی

---

تابع خطی (تابع درجه اول) :

به تابعی که نمودار آن یک خط راست باشد تابع خطی گفته می‌شود ، ضابطه تابع خطی به صورت یک چند جمله‌ای درجه یک به صورت $y = ax + b$ قابل تبدیل است.

↲ در ضابطه تابع خطی { به $a$ شیب خط / به $b$ عرض از مبدا } گفته می‌شود

$[\frac{}{}]$ = نقطه عرض از مبدا

شیب خط زاویه خط با محور $x$ را نشان می‌دهد / عرض از مبدا : نقطه‌ای که نمودار تابع محور $y$ را قطع می‌کند

و مقدار ثابتی است که به مقادیر تابع افزوده می‌شود | مقدار تابع به ازای $x=0$

مثال: برای ورود به یک شهر بازی ۵ تومان پول باید پرداخت کرد.

به ازای هر ساعت ماندن در شهر بازی ۲ تومان باید پول اضافه پرداخت کرد.

جدول قیمت برحسب ساعت و معادله قیمت برحسب ساعت را نوشته و رسم کنید

$$y = ax + b$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| زمان (متغیر) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
| قیمت (تابع) | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ |

+۱ +۱ +۱

+۲ +۲ +۲

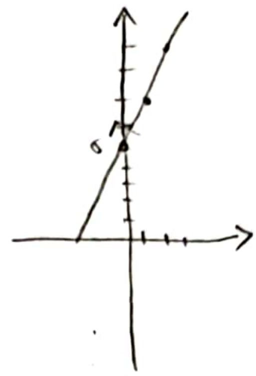
مقدار تابع به ازای $x=0$

پس $b = 5$

مقدار ثابتی که به تابع اضافه می‌شود

پس $a=2$

$\rightarrow \quad y = 2x + 5$



را قبل از مثال گفته شود

---

تشخیص تابع خطی از روی مقادیر جدول (نمایش جدولی تابع)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| $y$ | ۱ | ۴ | ۷ | ۱۰ | ۱۳ | ۱۶ |

+۱ +۱ +۱ +۱

+۳ +۳ +۳ +۳

← ابتدا بررسی می‌کنیم مقادیر $x$ به مقدار ثابتی اضافه شده باشند

← سپس چک می‌کنیم مقادیر $y$ نیز به اندازه ثابتی اضافه یا کم شده باشند.

← درصورتی موارد بالا برقرار باشد تابع خطی است و می‌توان ضابطه‌ی آن را به صورت $y=ax+b$ نوشت

← برای بدست آوردن $b$ کافی است مقدار $y$ را در $x=0$ پیدا کنیم ($x=0$ اگر $b=y$) $b=1$

← برای بدست آوردن $a$ کافی است مقدار ثابتی که به تابع اضافه می‌شود را پیدا کنیم $a=3$

---

مثال‌های ص ٤٤ انجام شوند. (سر کلاس)

توابع داده شده را رسم کنید

$f(x) = -2x+1$    $y = 2x+1$    $y = -3x-1$    $y+\frac{1}{2}x-1=0$

داشد $[-1,3]$

ی مقدار مناسب

0 و مضرب ضریب $x$

راهنمایی ابتدا جدول کشیده و مقدارهای مناسب داده شوند (مثلا $x=0$ و $x=2$ و

تاثیر مقدار $a$ (شیب خط) در شکل و نمودار آن

اگر
- $a>0$ ($a$ مثبت باشد) : خط به صورت صعودی خواهد بود
- $a=0$ ($a$ صفر باشد) خط افقی خواهد بود
- $a<0$ ($a$ منفی باشد) خط نزولی خواهد بود

وضعیت خطوط با شیب $(a)$ برابر:

با رسم خطوط روبه‌رو وضعیت خطوط هم شیب معلوم می شود

$y = 3x-1$

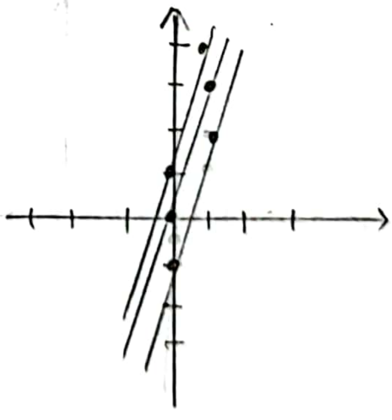
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | -1 | 2 |

$y = 3x$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | 3 |

$y = 3x+1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | +1 | 4 |



نتیجه: خطوطی که شیب $(a)$ در آنها برابر است موازی هم دیگر اند

خطی که عرض از مبدا $(b)$ آن بیشتر باشد بالاتر قرار می گیرد

وضعیت خطوط با عرض از مبدا (b) برابر

$y = 2x + 1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 |

: $L_1$

$y = -x + 1$

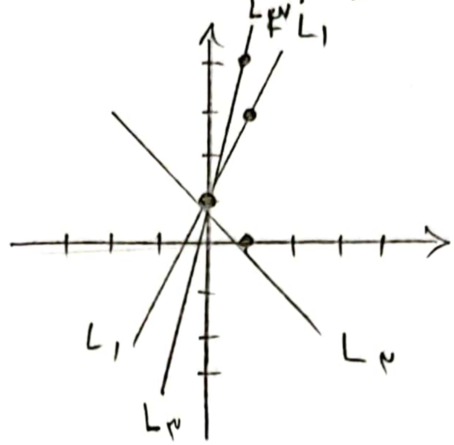
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 |

: $L_2$

$y = 3x + 1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 |

: $L_3$




نتیجه: خطوطی که عرض از مبدا آنها یکسان است یک نقطه مشترک دارند و همه از $\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}$ می گذرند.

خطوطی که اندازه شیب ($|a|$) آنها بزرگ تر باشد به حالت عمود نزدیک تر اند

تابع ثابت: تابعی که نمودار آن یک خط افقی باشد تابع ثابت گفته می شود

به عبارتی به ازای همه ی مقادیر متغیر مقدار تابع تغییر نکند و ثابت باشد.

توجه: شیب خط ثابت $a=0$ است به همین دلیل $x$ از معادله خطی حذف می شود

$$y = ax + b \xrightarrow{(a=0)} y = b$$

معادله تابع ثابت همواره به صورت $y=f(x)=b$ یا $y=c$ که در آن $c$ و $b$ اعداد ثابت و مشخصی اند قابل تبدیل است.

مثال: تابع های روبه رو را رسم کنید.

$y = 0$

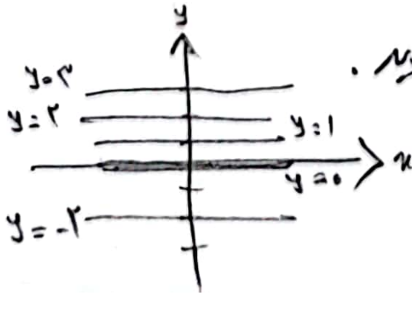
$y = 1$

$y = -2$

$y = 3$

$y = -3$

$y = 2$



## تابع درجه دوم :
(سهمی)

قانون
فرمول
ضابطه

به تابعی که نمودار آن به شکل سهمی باشد تابع درجه دوم می گویند.

تابع درجه دوم همواره به شکل $f(x)=y=ax^2+bx+c$ قابل تبدیل است

به طوری که a و b و c اعداد حقیقی مشخص اند و $a\neq 0$ است.

---

توجه: از آنجا که قانون و ضابطه یک سهمی به صورت یک چند جمله‌ای درجه ۲ است به آن تابع درجه دوم نیز می گویند (بزرگترین توان x در چند جمله‌ای درجه چند جمله‌ای گفته می‌شود)

---

توجه: در صورتی که $a=0$ باشه چند جمله‌ای ما درجه یک خواهد شد و سهمی نیز به یک تابع درجه اول (خط) تبدیل می شود.

---

تاثیر مقدار a روی شکل سهمی: اگر

$a<0$ (منفی باشد) ← $\cup$ سهمی رو به بالا

$a=0$ (صفر باشد) ← آنگاه تابع خطی است

$a>0$ (مثبت باشد) ← $\cap$ سهمی رو به پایین

---

رسم تابع درجه دوم به روش انتقال :

← ابتدا شکل تابع $y=f(x)=kx^2$ را در ذهن خود تصور می کنیم

← تابع درجه دوم داده شده را به فرم $f(x)=k(x-q)^2+p$ در می آوریم

← نمودار $y=kx^2$ را به اندازه‌ی p در راستای y بالا و یا پایین می بریم

← نمودار $y=kx^2$ را به اندازه‌ی q در راستای x چپ و یا راست می بریم

مثال: توابع درجه ۲ داده شده روبه‌رو را به روش انتقال رسم کنید.

$y = (x+3)^2 - 2$ $\qquad\qquad$ $y = -(x-2)^2 + 1$

---

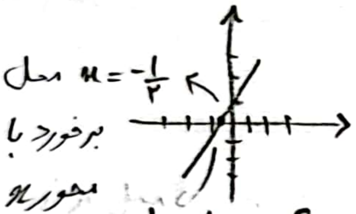
حل معادله و نامعادله به کمک نمودار تابع:

۱ـ هر وقت قانون و ضابطه یک تابع مساوی با صفر قرار بگیرد و از ما مقادیر $x$ را بخواهند منظور $x$ هایی است که در آن نمودار تابع محور $x$ها را قطع کرده است. زیرا در این نقاط مقدار $y$ (تابع) صفر است.

$y = 2x+1 \rightarrow 2x+1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$




روش رسم نمودار $\qquad$ روش حل معادله

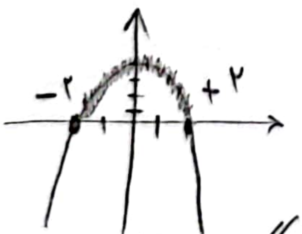
۲ـ هر وقت قانون یک تابع بزرگ‌تر از (کوچک‌تر از) صفر قرار بگیرد و از ما مقادیر $x$ را بخواهند منظور $x$ هایی است که در آنها نمودار تابع بالای (پایین) محور $x$ قرار می‌گیرد. به عبارتی در این نقاط مقدار $y > 0$ (مثبت) است.

$y = -x^2 + 4 > 0 \rightarrow -x^2 + 4 > 0$

$-x^2 > -4$

$x^2 < 4$

$|x| < \sqrt{4} \rightarrow |x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2$



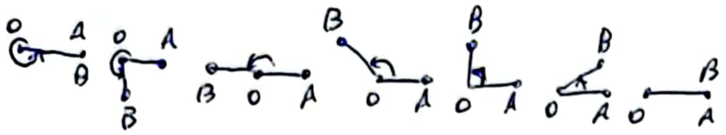

ناحیه پررنگ شده بالای محور $x$ ها است

# پودمان ۳: مثلثات

## پیش آزمون:

+ تعریف درجه و زاویه

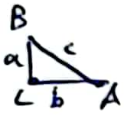
+ پرسیدن اندازه‌ی تقریبی زاویه‌های روبه‌رو



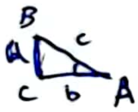
+ یک نفر را بیار بیرون هم‌جهت با عقربه‌های ساعت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور خودش بچرخه

---

تعریف مثلثات: شاخه‌ای از ریاضی است که به بررسی رابطه بین اضلاع و زوایای یک مثلث می‌پردازد.




قضایای هندسی مرتبط با مثلثات:
- ۱ـ مجموعه زوایای داخلی مثلث $180^\circ = A+B+C$
- ۲ـ قضیه فیثاغورس در مثلث قائمه $a^2+b^2=c^2$




$c * \sin A = a$

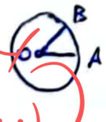
← خود مثلثات

کاربردهای مثلثات:
- ۱ـ نجوم
- ۲ـ فیزیک
- ۳ـ مهندسی و حرفه‌های فنی
- ۴ـ دریانوردی

## تعاریف مهم

زاویه: کمیتی است که به کمک آن وضعیت دو خط متقاطع، میزان چرخش و اندازه کمان بیان می‌شود.

واحدهای زاویه:
- درجه: به $\frac{1}{360}$ محیط دایره یک درجه گفته می‌شود.
- دور: به محیط یک دایره کامل یک دور گفته می‌شود.
- رادیان: به اندازه کمان هم‌طول با شعاع دایره یک رادیان گفته می‌شود.
- گراد (گرادیان): به $\frac{1}{400}$ محیط دایره یک گراد گفته می‌شود.



تعریف زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد و اضلاع آن شعاع‌های دایره

## کمان:

پیش آزمون:


کمان: بخشی از محیط دایره را کمان می گویند

اندازه کمان: اندازه کمان با اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی آن برابر است بنابراین اندازه کمان بر حسب درجه - رادیان - دور و ... قابل بیان است.

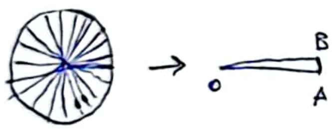
$\widehat{AB} = 90^\circ$

طول کمان: طول خطی که بعد از صاف کردن کمان ایجاد می شود طول کمان گفته می شود بنابراین طول کمان برحسب متر - سانتی متر - میلی متر و ... قابل بیان است

$|\widehat{AB}| = 0/5\ cm$

توجه: اندازه کمان و طول کمان به کمک شعاع دایره به یک دیگر مرتبط می شوند

تعریف درجه: اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم به اندازه‌ی هر قسمت از کمان و زاویه مرکزی روبه‌روی آن یک درجه گفته می شود.



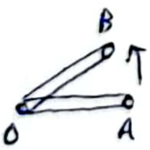
$1^\circ$ (یک درجه)

علامت درجه به صورت یک دایره کوچک (°) در بالا و سمت راست عدد نوشته می شود

$360^\circ$ - $30^\circ$ - $90^\circ$

زاویه چرخش: زاویه‌ای که در اثر چرخش یک جسم حول یک نقطه ایجاد می شود زاویه چرخش می گویند. از زاویه چرخش برای بیان میزان چرخش اجسام استفاده می شود.

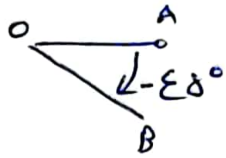
مثال: فرض کنید دو عدد چوب بستنی به وسیله یک سنجاق به صورت روبه‌رو به یک دیگر متصل شده‌اند به طوری که فقط یکی از آنها (OB) امکان چرخش داشته باشد. میزان چرخش چوب بستنی OB نسبت به چوب OA به کمک زاویه بین آنها بیان می شود که زاویه چرخش نقطه B نسبت به A حول O گفته می شود.



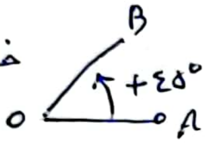
**جهت چرخش و تعیین علامت زاویه چرخش:** در بسیاری از مواقع جهت چرخش برای ما اهمیت دارد. برای مشخص کردن جهت چرخش و علامت زاویه چرخش می‌توان از علامت + و − استفاده کرد.

قرارداد:
- اگر جهت چرخش خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت باشد زاویه چرخش + است
- اگر جهت چرخش هم جهت با چرخش عقربه‌های ساعت باشد زاویه چرخش − است

هم جهت عقربه‌های ساعت




و




خلاف عقربه‌های ساعت

---

**زوایای قرینه:** هرگاه دو زاویه هم اندازه باشند ولی علامت آنها مختلف باشد به آنها زوایای قرینه گفته می‌شود.

---

**تعریف دور:** هرگاه یک جسم آنقدر بچرخد تا دوباره به سر جای اول خود باز گردد می‌گوییم یک دور کامل چرخیده است.

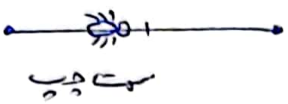
← یک دور کامل با $360°$ درجه برابر است.

**مثال:** زوایای زیر را برحسب درجه بدست آورید

ربع دور چند درجه است:　　　　دو دور کامل چند درجه است:

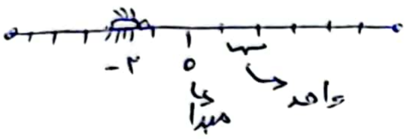
$\frac{3}{4}$ دور چند درجه است:　　　　$0/5$ دور چند درجه است:

فرض کنید یک مورچه روی خط مقابل قرار دارد. و می خواهیم مکان مورچه را مشخص کنیم و به شخص دیگری اطلاع دهیم:



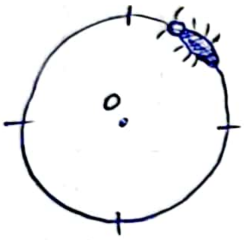

راه حل کیفی (توصیفی):
- سمت چپ
- وسط خط
- سمت راست

راه حل کمی:
۱. مشخص کردن نقطه‌ی وسط به عنوان مبدا و انتخاب یک واحد



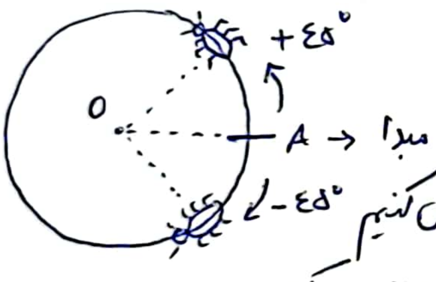

۲. اگر قبل از مبدا (سمت چپ) بود با علامت -
۳. اگر بعد از مبدا (سمت راست) بود با علامت +

حال فرض کنید مورچه روی یک مسیر دایره‌ای قرار دارد و میخواهیم مکان آنرا به شخص دیگری اطلاع بدهیم.



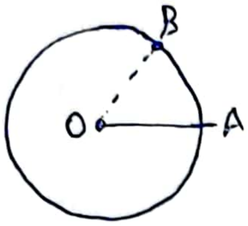

کیفی (توصیفی):

| | |
|---|---|
| ۱. بالای بالا | ۵. بالا راست |
| ۲. پایین پایین | ۶. بالا چپ |
| ۳. چپ چپ | ۷. پایین چپ |
| ۴. راست راست | ۸. پایین راست |




راه حل کمی:
۱. یک مبدا و یک واحد انتخاب و قرارداد می کنیم
۲. در جهت عقربه های ساعت از علامت - استفاده می کنیم
۳. در خلاف جهت عقربه های ساعت از علامت + استفاده می کنیم
۴. کمانی که مورچه طی کرده را برحسب درجه، دور یا واحدهای دیگر بیان می کنیم

تناظر بین زاویه چرخشی ، اندازه کمان و هر نقطه روی دایره :




- دایره مثلثاتی را در نظر بگیرید
- نقطه O مرکز دایره است
- نقطه‌ی A را به عنوان مبدا چرخشی در نظر می‌گیریم
- هر نقطه مانند B یک زاویه چرخشی و یک کمان را مشخص می‌کند

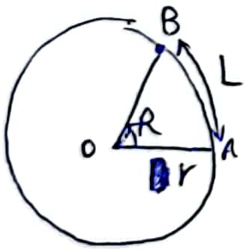
$\widehat{AB}$ کمان — $A\hat{O}B$ زاویه چرخشی

- و برعکس هر زاویه چرخشی و کمان یک نقطه متناظر روی دایره خواهد داشت .

## حل تمرین های ص ۶۹

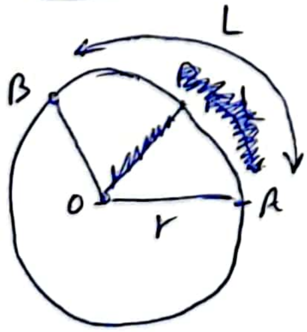
واحدهای اندازه گیری زاویه:
- درجه ✓
- دور ✓
- رادیان ؟
- گراد

رادیان : یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه رادیان است یک رادیان برابر است با اندازه کمانی که طول آن با شعاع دایره برابر باشد .




$L = r \rightarrow A\hat{O}B =$ یک رادیان

فرمول محاسبه‌ی رادیان :




$\widehat{AB}$ اندازه کمان برحسب رادیان $= \dfrac{|\widehat{AB}| \text{ طول کمان}}{\text{طول شعاع دایره}} = \dfrac{L}{r} = R$

$\parallel$

$A\hat{O}B$ اندازه زاویه

قرارداد : برای جلوگیری از اشتباه، زوایایی که برحسب رادیان هستند را به صورت مضربی از عدد $\pi$ می‌نویسیم.

بنابراین اگر در اندازه زاویه‌ای نماد $\pi$ وجود داشته باشد زاویه برحسب رادیان است مگر این که به صراحت گفته شود زاویه برحسب درجه است.

مثال ← یک زاویه $\pi$ درجه و یک زاویه $\pi$ رادیان رسم کنید

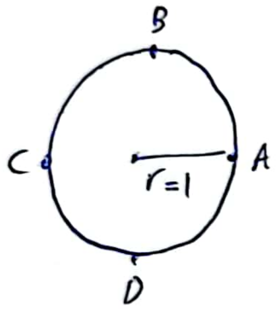
حل کار در کلاس ص ۷۴ - و مسائل ۷۵

دایره واحد: به دایره ای که در آن طول شعاع ۱ واحد (یک متر - یک سانتی متر - ...) باشد دایره واحد گفته می شود.


نکته: در دایره واحد طول کمان با اندازه کمان برحسب رادیان برابر است

زیرا اندازه کمان = طول کمان $\xrightarrow{\text{شعاع}=1}$ $\frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع}=1}$ = اندازه کمان

مثال: اگر شعاع دایره روبه‌رو ۱ واحد باشد ابتدا طول کمان های متناظر با نقاط A و B و C و D را برحسب متر و سپس اندازه کمان ها را برحسب رادیان بدست آورید.




| | | |
|---|---|---|
| $\widehat{AA} =$ | $\widehat{AA} =$ | $\lvert\widehat{AA}\rvert =$ |
| $\widehat{AB} =$ | $\widehat{AB} =$ | $\lvert\widehat{AB}\rvert =$ |
| $\widehat{AC} =$ | $\widehat{AC} =$ | $\lvert\widehat{AC}\rvert =$ |
| $\widehat{AD} =$ | $\widehat{AD} =$ | $\lvert\widehat{AD}\rvert =$ |
| اندازه برحسب درجه | اندازه کمان ها | طول کمان ها |

تبدیل رادیان به درجه و برعکس

قرارداد:
- اگر یک زاویه برحسب درجه باشد آن را با D نشان می دهیم
- اگر یک زاویه برحسب رادیان باشد آن را با R نشان می دهیم

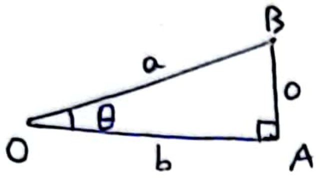
برای تبدیل یک زاویه بین دو واحد درجه و رادیان کافی است آنها را در فرمول زیر قرار دهیم

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

توجه: هنگام بیان اندازه یک زاویه حتما باید به واحد آن توجه شود. زیرا اختلاف درجه و رادیان بسیار زیاد است

## تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه :

sin – cos – tan – cot

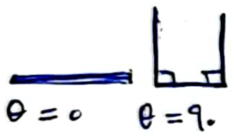



$\sin\theta = \dfrac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر مثلث}} = \dfrac{o}{a}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر مثلث}} = \dfrac{b}{a}$

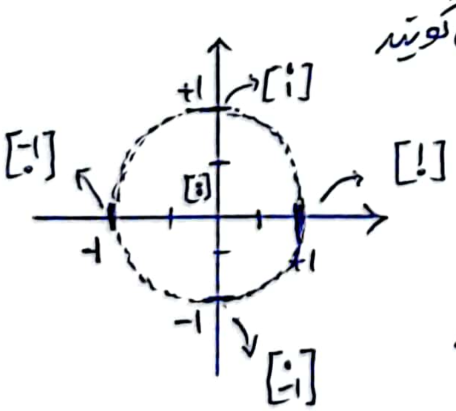
$\tan\theta = \dfrac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \dfrac{o}{b} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

توجه : بدست آوردن نسبت های مثلثاتی به کمک مثلث قائم الزاویه فقط برای زوایای بزرگ‌تر از ۰ (صفر) و کوچک‌تر از ۹۰ امکان پذیر است . زیرا درصورتی که زاویه θ صفر یا ۹۰ درجه یا بزرگ‌تر از ۹۰ درجه بشود دیگر مثلث قائم الزاویه تشکیل نمی‌شود




توجه : نسبت‌های مثلثاتی زوایای خارج از بازه (۰ و ۹۰) به کمک دایره مثلثاتی تعریف می‌شوند

دایره مثلثاتی : اگر به مرکز مبدا مختصات دایره‌ای به شعاع واحد (۱) رسم کنیم شکل بدست آمده را دستگاه مختصات و دایره مثلثاتی می‌گویند




همان طور که می‌بینید مرکز دایره مثلثاتی نقطه $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ است

همچنین دایره مثلثاتی محورهای x و y را در نقاط زیر قطع می‌کند

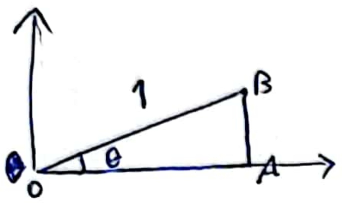
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

## پیدایش دایره مثلثاتی :

مطالب اختیاری

می‌خواهیم sin و cos هر زاویه‌ای را پیدا کنیم.

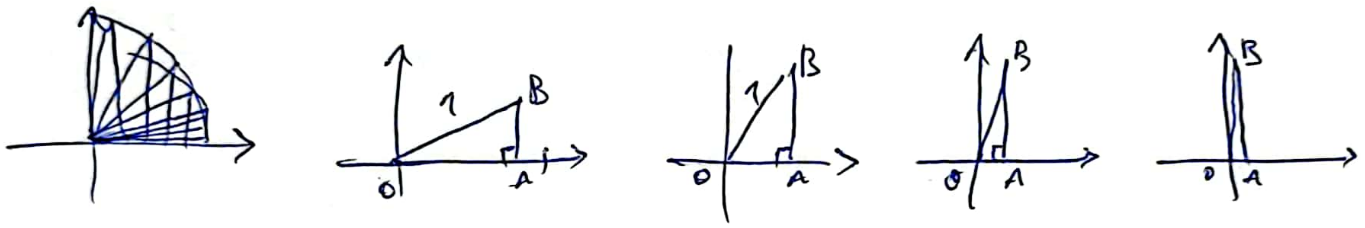
ابتدا یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر واحد (۱) رسم می‌کنیم و اضلاع و رئوس آنرا مانند روبه‌رو نام گذاری می‌کنیم و رأس O را در مرکز مبدا مختصات :



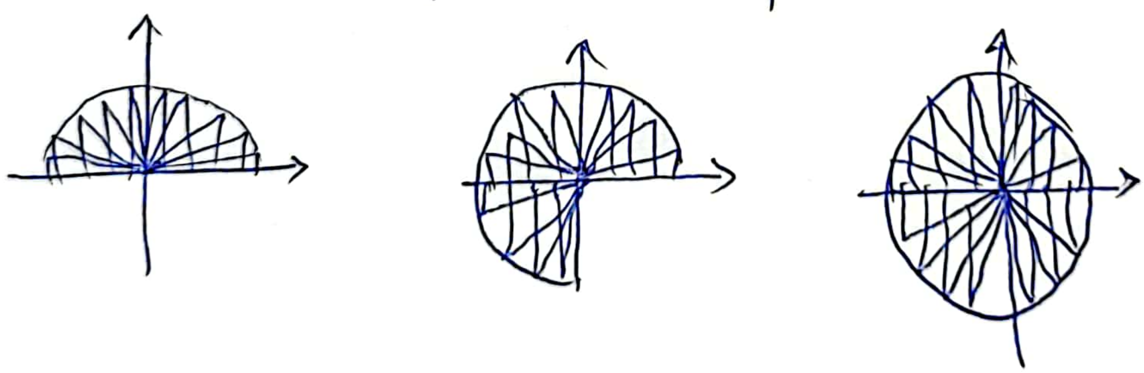

چون طول وتر مثلث ۱ است روابط زیر برقرار است

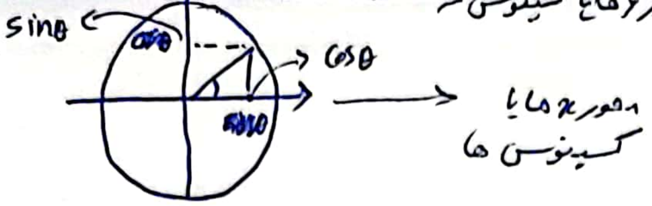
$$\sin\theta = \frac{AB}{1} = AB \quad , \quad \cos\theta = \frac{AO}{1} = AO$$

حال زاویه θ را از ۰ تا ۹۰ تغییر می‌دهیم



با تغییر زاویه θ تمام حالت های ممکن در داخل یک ربع دایره جا می‌گیرد. حال اگر θ را تا یک دور کامل ادامه دهیم یک دایره کامل ایجاد می‌شود





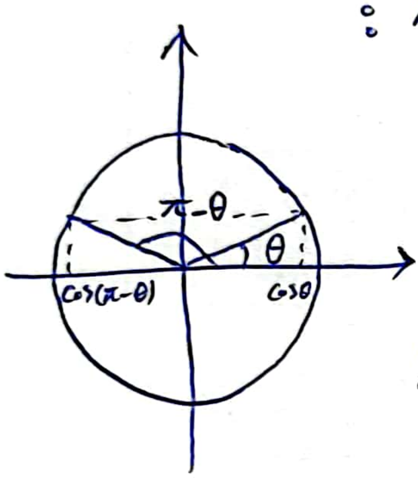

توجه :

← از آنجایی که مقادیر sin از روی محور y ها خوانده می شود به محور y ها محور سینوس ها نیز گفته می شود

← و از آنجایی که مقادیر cos از روی محور x ها خوانده می شود به محور x ها محور کسینوس ها نیز گفته می شود

## روابط بین sin و cos زاویه های مختلف :

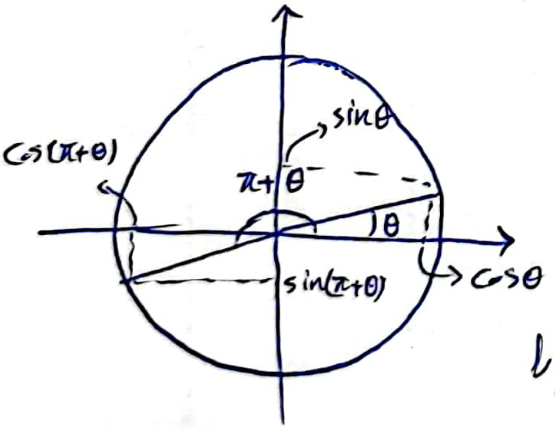
رابطه بین سینوس و کسینوس دو زاویه $\theta$ و $\pi-\theta$ :




$$\sin(\theta) = \sin(\pi-\theta)$$
$$\cos(\theta) = -\cos(\pi-\theta)$$

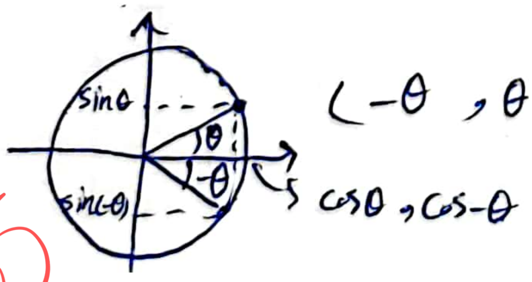
مثال : رابطه بین sin و cos دو زاویه ۳۰ و ۱۵۰ را بنویسید.

رابطه بین سینوس و کسینوس دو زاویه $\theta$ و $\pi+\theta$ :




$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

مثال : رابطه بین sin و cos دو زاویه ۳۰ و ۲۱۰ درجه را بنویسید.




رابطه بین sin و cos دو زاویه قرینه ( $\theta$ و $-\theta$ )

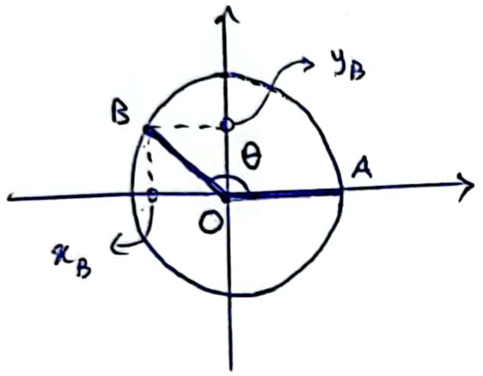
$$\sin-\theta = -\sin\theta$$
$$\cos-\theta = \cos\theta$$

# پیدا کردن sin و cos هر زاویه‌ای به کمک دایره مثلثاتی :

به کمک دایره مثلثاتی sin و cos هر زاویه‌ای را می‌توان بدست آورد.

درصورتی که نقطه‌ی A $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ شروع زاویه باشد و نقطه‌ی B $\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}$ بر روی دایره پایان زاویه باشد و ~~رأس~~ زاویه بر مرکز دایره منطبق باشد در این صورت

sin و cos زاویه $A\hat{O}B$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

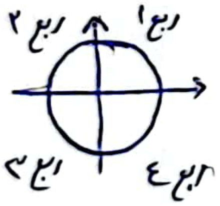



$\sin\theta = B$ عرض نقطه $= y_B$

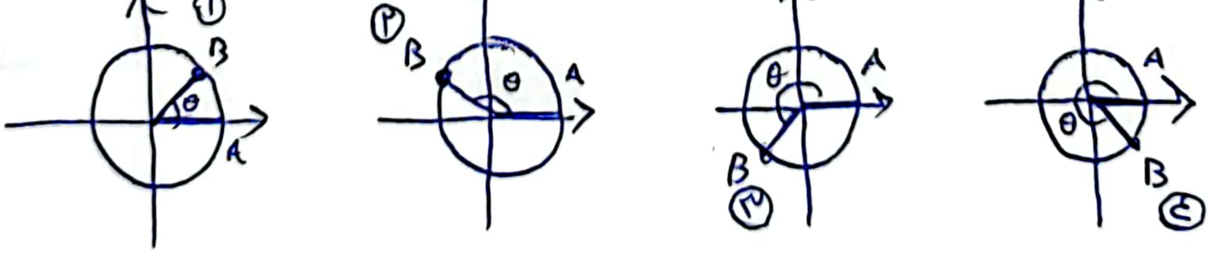
$\cos\theta = B$ طول نقطه $= x_B$

ربع های دایره مثلثاتی و علامت sin و cos :

دستگاه مختصات دایره مثلثاتی را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می کند که به هر قسمت یک ربع گفته می شود. و با اعداد ۱ تا ۴ به صورت روبرو شماره گذاری می شوند



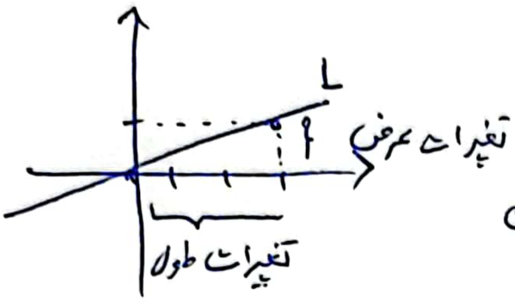

علامت sin و cos زاویه در ربع های چهارگانه




| ربع ۴ | ربع ۳ | ربع ۲ | ربع ۱ |
|---|---|---|---|
| sin منفی | sin منفی | sin مثبت | $0 < \sin$ |
| cos مثبت | cos منفی | cos منفی | $0 < \cos$ |

هر دو مثبت

رابطه بین تانژانت $\tan\theta$ و شیب خط:



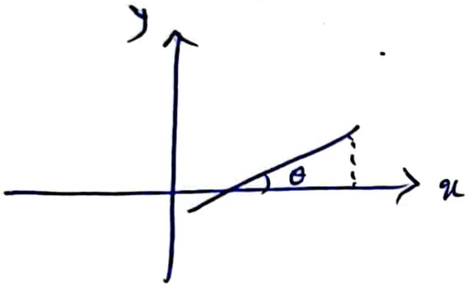

تعریف شیب خط:

شیب خط L از تقسیم تغییرات عرض آن به تغییرات طول آن محاسبه می شود.

و اگر معادله خط به صورت روبه‌رو باشد شیب خط همان عدد و حرف a است.  $y=ax+b$

تانژانت زاویه خط با جهت + محور x ها:

خط L با جهت مثبت محور x ها یک زاویه می سازد که با θ نام گذاری شده است.




برای محاسبه ی تانژانت θ کافی است یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می دهیم و براساس فرمول تانژانت مقدار آن را محاسبه کنیم

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\text{تغییرات عرض خط}}{\text{تغییرات طول خط}} = a = \text{شیب خط}$$

نتیجه: تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور x ها با شیب خط برابر است.