به نام خالق ستارگان

12th IOAA team

I.R.IRAN

پاسخنامه دومین آزمون شبیه ساز مرحله اول

المپیاد نجوم و اختر فیزیک

دوازدهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اختر فیزیک

سوال 1: گزینه ۱

می دانیم که ستاره شعرای شامی یک کوتوله سفید است بنابراین داریم

$$MR^3 = M_{Procyon}{R_{Procyon}}^3$$

که طبق این رابطه با داشتن جرم ستاره و همچنین اطلاعات داده شده شعرای شامی شعاع ستاره برابر

$$R = 2.2R_{\odot}$$

همچنین با داشتن دما می توان درخشندگی این ستاره و با استفاده از فاصله شار آن را به دست آوریم

$$b = \frac{\sigma T^4 4\pi R^2}{4\pi d^2} \Rightarrow b = 1.1 \times 10^{-12} \ , \ m - m_{\odot} = -2.5\log(\frac{b}{b_{\odot}}) \Rightarrow m = 10.9$$

سوال 2:گزینه ۴

طبق رابطه قدر-شار ، مقدار شار مربوط به قدر 14.3 برابر 5.1×10^{-14} وات بر متر مربع است که میدانیم این شار تقریبا برابر روشنایی ای به اندازه 50 در نمودار داده شده است . کمینه قدر متناظر با بیشینه شار است که طبق نمودار بیشینه شار برابر 150است که سه برابر روشنایی متناظر با قدر 14.3 است . پس بیشینه شار طبق نمودار $1.5 \times 1.^{-13}$ که قدر متناظر با این شار برابر 13.1 می شود

سوال 3: گزینه ۱

با استفاده از فرمول کسینوس ها در مثلث کروی زاویه بین این دو شهر از رابطه زیر به دست می آید

$$\cos(\theta) = \sin(\varphi_{teh})\sin(\varphi_{mel}) + \cos(\varphi_{teh})\cos(\varphi_{mel})\cos(l_{teh} - l_{mel})$$

که φ بیانگر عرض جغرافیایی و l بیانگر طول جغرافیایی است .

$$\theta = 113.5$$

بنابراین طول کمانی که از تهران تا ملبورن طی می شود برابر $s = R_{earth}\theta$ که در این رابطه θ برحسب رادیان است . طول کمان 1.26×10^7 متر است که با توجه به سرعتی که در سوال داده شده ، مدت زمان این سفر برابر 12 ساعت به دست می آید .بنابراین ساعت رسیدن آن ها در ملبورن برابر ساعت زمانی ملبورن هنگام شروع حرکت به اضافه 12 است .

می دانیم اختلاف زمان محلی میان دو شهر در یک لحظه برابر اختلاف طول جغرافیایی آن هاست یعنی اگر زمان محلی را با LMT نمایش دهیم داریم $LMT_2 - LMT_1 = l_2 - l_1$

بنابراین طبق این رابطه زمان محلی در ملبورن هنگام شروع حرکت حدودا 8:30 به دست می آید و طبق توضیحات بالا هنگام رسیدن زمان محلی ملبورن 20:30 است .

سوال 4 : گزینه ۴

برای اینکه مساحت مربعی 2 برابر شود طول ضلع آن باید $\sqrt{2}$ برابر شود .

$$v = Hr \implies \dot{r} = Hr$$

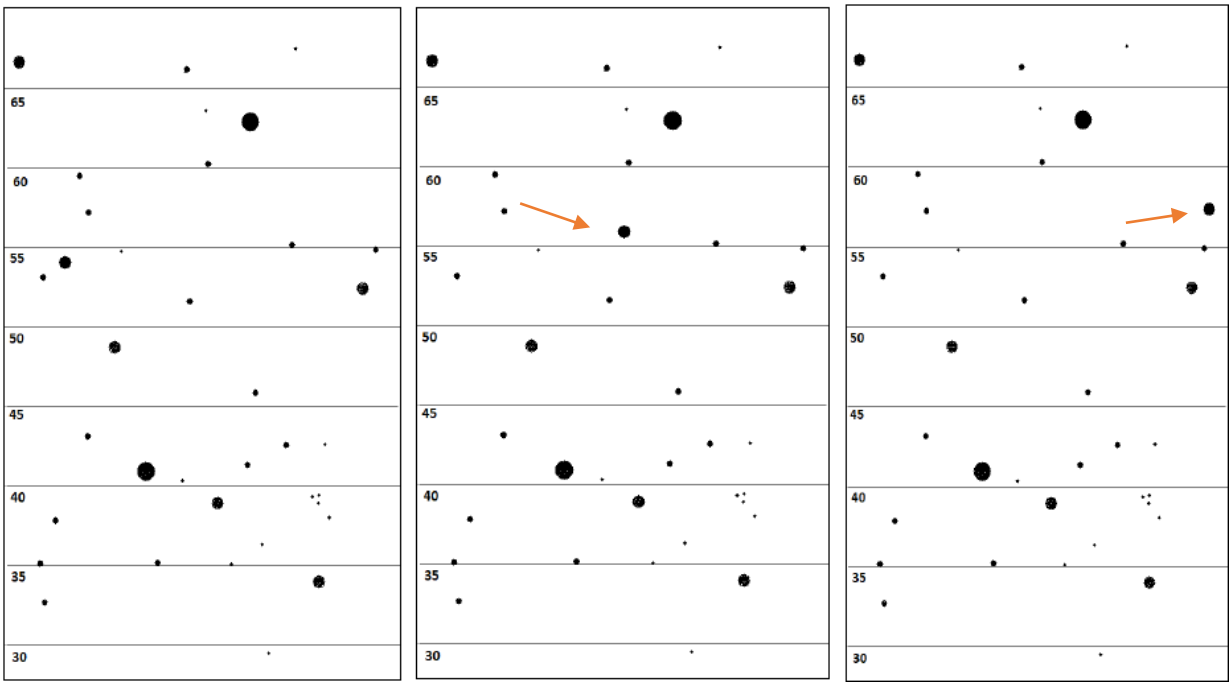
با انتگرال‌گیری $\longrightarrow r = r_0 \exp(Ht) \ , \ \frac{r}{r_0} = \sqrt{2} \implies t = 5 \times 10^9$

سوال 5 : گزینه ۳

بردار سرعت از آنجایی در صفحه آیینه قرار دارد تصویر نمی شود و تنها بردار B تصویر میشود که با استفاده از قاعده دست راست جهت بردار نیرو به دست می آید.

سوال 6 : گزینه ۳

تنها باید جسمی را بیابیم که در این سه تصویر حرکت کرده باشد



که میل جسم نشان داده شده تقریبا برابر ۵۵ است

سوال 7 : گزینه ۱

$$\Omega = \frac{A}{d^2} \rightarrow \Omega_\odot = 6.84 \times 10^{-5}, \Omega_s = 1.61 \times 10^{-17}$$

زاویه فضایی ستاره خورشیدگون از 5×10^{-8} کمتر است پس شار دریافتی از این ستاره در این زاویه فضایی برابر شار کل آن ستاره است.

$$\mu_\odot - \mu = 2.5 \log \frac{b}{I_\odot \times 5 \times 10^{-8}} = 2.5 \log \frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{L \times 5 \times 10^{-8}}{4\pi A}} = -23.7$$

سوال 8 : گزینه ۲

در صورت سوال گفته شده آب با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس:

$$mg\sin\theta - f = 0$$

گرمایی که به آب داده می‌شود برابر کار نیروی اصطکاک است:

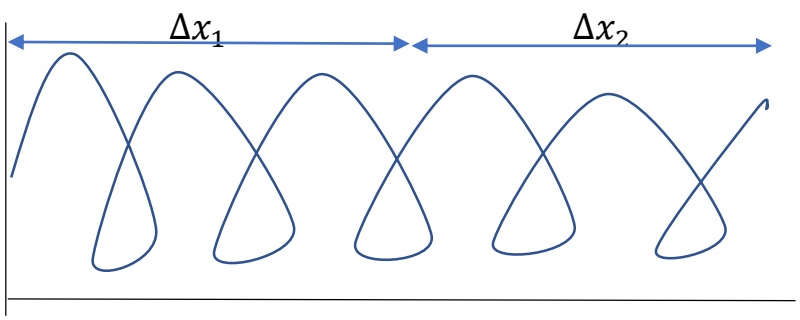
$$W = f.d = mg\sin\theta\,.d$$
$$W = Q = mc\Delta T$$

که نتیجه می‌دهد:

$$c\Delta T = dg\sin\theta \rightarrow \Delta T = 4°\mathrm{C}$$

سوال 9 : گزینه ۲

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,2\pi f = \omega \longrightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



برای یکسری فنرداریم : $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Longrightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

بنابراین با نصف کردن فنر ، ثابت فنر دوبرابر می شود و بنابراین فرکانس $\sqrt{2}$ برابر می شود

سوال 10 : گزینه ۱

$$x = r\sin\theta \rightarrow \ddot{x} + \omega^2_{\text{دورانی}}x = 0 \rightarrow k = m\omega^2_{\text{دورانی}} = 2.37\times10^{11}$$

سوال 11 : گزینه ۳

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \Longrightarrow M(r) = \frac{v^2 r}{G}$$

$$v_{obs} = 220\ {}^{km}/_{s}\ ,r = 8.5\ kpc \quad\Longrightarrow\quad M_{obs} = 9.6\times10^{10}$$
$$v_{visible} = 160\ {}^{km}/_{s}\ ,r = 8.5\ kpc \quad\Longrightarrow\quad M_{visible} = 5.1\ \times10^{10}$$
$$M_{dark\ mater} = M_{obs} - M_{visible} \quad\Longrightarrow\quad M_{dark\ matter} = 4.5\times10^{10}$$

سوال 12 : گزینه ۱

از اطلاعات صورت سوال در می‌یابیم که:

$$\frac{L}{L_\odot} = (\frac{M}{M_\odot})^3 \Longrightarrow L = 27\, L_\odot \ \ , R = 15R_\odot$$
$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow T_{surf} = 3400\, k$$
$$\frac{dp}{dr} = \frac{-Gm(r)\rho(r)}{r2} \longrightarrow p_c = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 \quad \Longrightarrow p_c = 2.39 \times 10^{10}$$
$$p_c = p_{gas,c} + \ p_{rad,c} \quad , \quad p_{rad,c} \ = 0.1\, p_c \ \Longrightarrow \ \frac{1}{3} a {T_c}^4 = 0.1\, p_c$$
$$\longrightarrow T_c = 1.75 \times 10^6$$
$$\frac{T_c}{T_{surf}} \cong 500$$

سوال 13 : گزینه ۲

طبق نمودار سمت چپ برای ستاره ای با شاخص رنگ 1.2 ، قدر مطلق مرئی 7.6 به دست می آید و با استفاده از نمودار سمت راست برای قدر مطلق مرئی 7.6 ، v-I تقریبا 1.2 به دست می آید که طبق صورت سوال میدانیم I برابر 9.1 است . بنابراین قدر ظاهری مرئی تقریبا برابر 10.3 می شود .

$$m - M = 5logd - 5 \quad \longrightarrow d = 37\, pc$$

بنابراین جواب درست 40.3 است.

سوال 14 : گزینه ۴

$$\vec{f} = \frac{-\mu m}{r^2}\hat{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \ \ , h = r^2\dot{\theta} \ \Longrightarrow dt = r^2\frac{d\theta}{h} \ \Longrightarrow d\vec{v} = \frac{-\mu}{h}(\hat{r}d\theta)\ ,$$
$$\hat{r}d\theta = -d\hat{\theta} \ \Longrightarrow d\vec{v} = \frac{\mu}{h}d\hat{\theta} \quad \Longrightarrow \vec{v} - \ \overrightarrow{v_0} = \frac{\mu}{h}(\hat{\theta} - \widehat{\theta_0})$$

که رابطه بالا نشان میدهد بردار های سرعت هر جسمی که تحت تاثیر نیروی گرانش که با معکوس مجذور فاصله متناسب است، باشد تشکیل یک دایره می دهد .همچنین بردار های v_0 و $\widehat{\theta_0}$ ثابت های انتگرال گیری هستند و مربوط به زمان عبور جسم از حضیض هستند .این رابطه نشان میدهد شعاع این دایره $\frac{\mu}{h}$ است و فاصله مبدا مختصات که کانون است از مرکز دایره ، برابر اندازه بردار $\overrightarrow{v_0} + \frac{\mu}{h}\widehat{\theta_0}$ است و $\overrightarrow{v_0}$ و $\widehat{\theta_0}$ هم جهت هستند.

$$h = \sqrt{(\mu a(e^2 - 1)} \ \text{و} \ \overrightarrow{v_0} = \sqrt{\frac{\mu\times(1+e)}{a\times(e-1)}}\ \widehat{\theta_0}$$

پس از جاگذاری دو مقدار فوق فاصله از مرکز دایره $\frac{\mu e}{h}$ به دست می آید.

سوال 15 : گزینه ۳

برای آن که خورشید عمود بر ماشین بتابد (از سرسو بگذرد) میل خورشید باید با عرض جغرافیایی ناظر برابر شود.

پس برای آن که خورشید از سرسو بگذرد عرض جغرافیایی ناظر باید بین $-\varepsilon < \varphi < \varepsilon$ باشد. پس طبق شکل زیر ماشین در نوار هاشور زده قابل استفاده است.

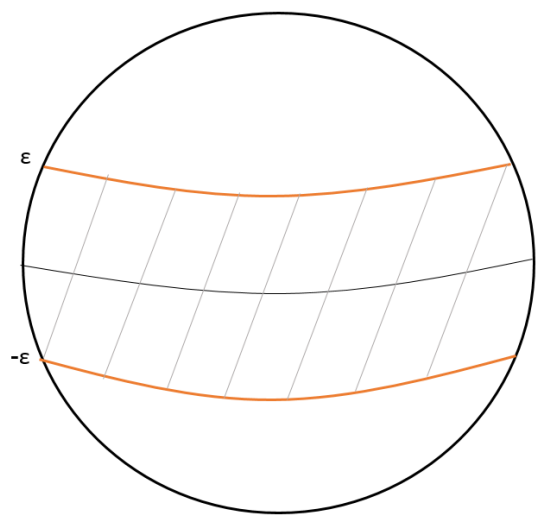
که مساحت این نوار را با کم کردن دو عرقچین با شعاع $90 - \varepsilon$ از مساحت کره بدست می آوریم.

$$S_{\text{عرقچین}} = 2\,\pi(1 - \cos(90 - \varepsilon)) = 2\,\pi(1 - \sin(\varepsilon))$$

$$\frac{S_{\text{نوار}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{S_{\text{کره}} - 2\,S_{\text{عرقچین}}}{S_{\text{کره}}} = 1 - \frac{2\,S_{\text{عرقچین}}}{S_{\text{کره}}}$$

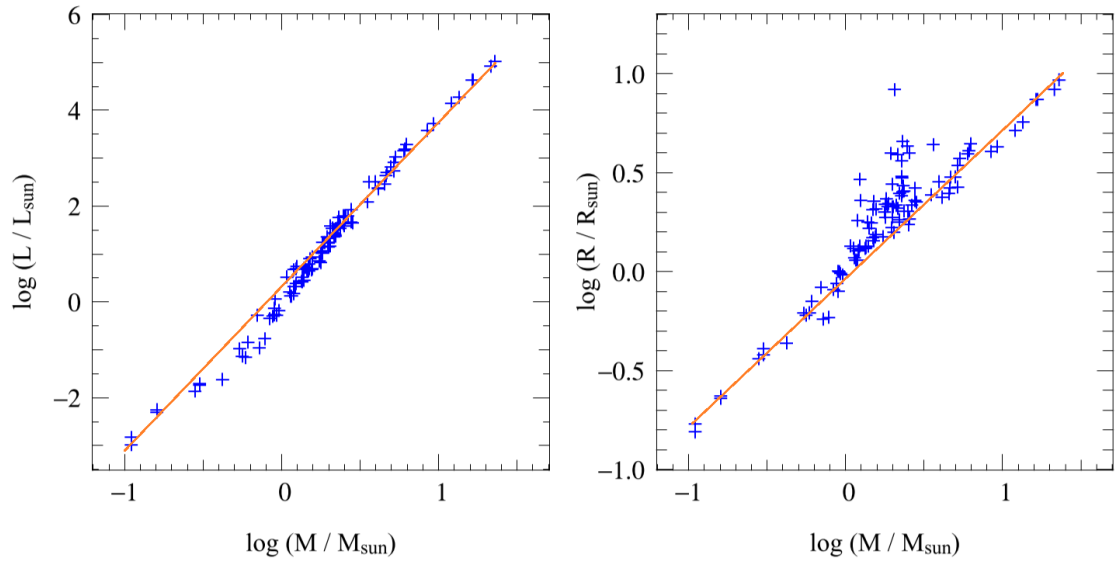
$$= 1 - \frac{2\ \times 2\,\pi(1 - \sin(\varepsilon))}{4\,\pi}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\text{نوار}}}{S_{\text{کره}}} = \sin(\varepsilon) = 39\%$$



سوال 16 : گزینه ۴

از نمودارها بهترین خط را عبور میدهیم:



میدانیم اگر رابطه ای به شکل $y \; \alpha \; x^b$ داشته باشیم نمودار $\log(y) - \log(x)$ نموداری خطی با شیب b است. پس شیب دو نمودار بالارا حساب میکنیم.

و روابط جرم-درخشندگی و جرم-شعاع ستارگان رشته اصلی را به این صورت بدست می آوریم:

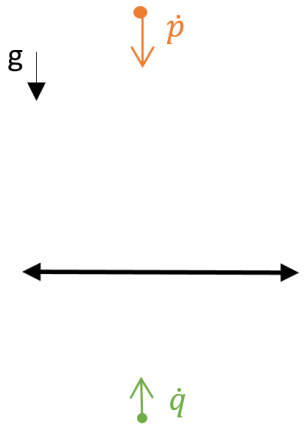
$$\frac{L}{L_\odot} \approx (\frac{M}{M_\odot})^{3.5}$$
$$\frac{R}{R_\odot} \approx (\frac{M}{M_\odot})^{0.8}$$

و میدانیم رابطه ی درخشندگی با شعاع و دما به صورت زیر است:

$$\frac{L}{L_\odot} = (\frac{R}{R_\odot})^2 (\frac{T}{T_\odot})^4$$
$$\rightarrow T \approx 170000 \; K$$

که نزدیکترین گزینه به پاسخ درست گزینه 4 میباشد.

سوال 17 : گزینه ۳



از رابطه ی فاصله ی تصویر و جسم و فاصله کانونی داریم: $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

از این رابطه نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$0=\frac{-\dot{p}}{p^2}-\frac{\dot{q}}{q^2}$$

سرعت جسم 0.2 ثانیه پس از سقوط برابر $\dot{p}$ است.

$$\dot{p}=-gt=-2\frac{m}{s}$$

$$p=p_0-\frac{gt^2}{2}=30\ cm$$

$$q=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{p}}=60\ cm$$

$$\rightarrow \dot{q}=-\dot{p}\left(\frac{q}{p}\right)^2=8\frac{m}{s}$$

سوال 18 : گزینه ۴

دمای تعادل ستاره را بدست می آوریم:

$$b_{\odot}\pi R^2(1-\alpha)=4\,\pi R^2\sigma T^4$$

که درآن R شعاع سیاره ، T دمای تعادل آن و α ضریب بازتاب آن است.

$$\rightarrow \frac{L_{\odot}}{4\,\pi\,d^2}(1-\alpha)=4\,\sigma T^4$$

$$\rightarrow T\ \alpha\ \frac{1}{\sqrt{d}}$$

$$\rightarrow \frac{T_{\text{زهره}}}{T_{\text{زمین}}}=\sqrt{\frac{d_{\text{زمین}}}{d_{\text{زهره}}}}\approx 1.2$$

میدانیم زهره داغترین سیاره ی منظومه شمسی است و دمای آن تا 500 درجه سانتی گراد نیز میرسد پس نتیجه ی بدست آمده با واقعیت سازگار نیست.

سوال 19 : گزینه ۲

برای فرار کردن کاوشگر از راه شیری باید انرژی آن برابر صفر یا اندازه‌ی انرژی جنبشی با پتانسیلش برابر شود. پس داریم:

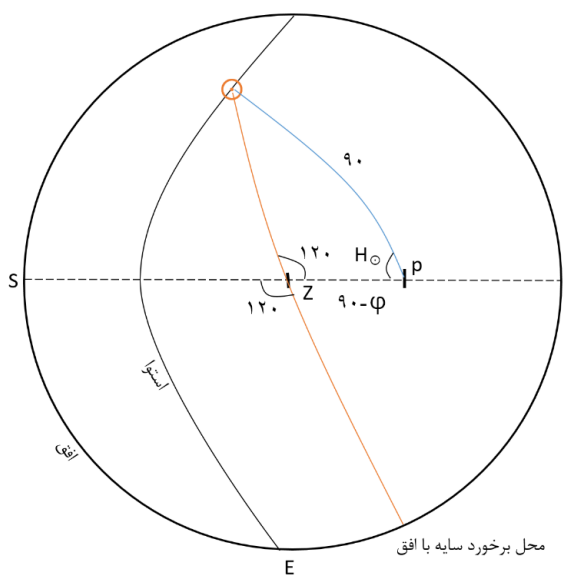
$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM_0}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$\rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2\,GM_0}{\sqrt{a^2+r^2}}} \approx 310\ \frac{km}{s}$$

اما میدانیم سرعت خورشید دور مرکز کهکشان نیز تقریبا $210\ \frac{km}{s}$ است پس برای پرتاب کاوشگر با کمترین سرعت دادن، باید اختلاف این دو سرعت را در جهت حرکت خورشید اعمال کنیم که تقریبا $100\ \frac{km}{s}$ است.

سوال 20 : گزینه ۳

روز اول فروردین میل خورشید برابر صفر است و روی استوا قرار دارد. کره ی ناظر را از سرسو رسم میکنیم:



برای بدست آوردن زمان، زاویه ساعتی خورشید را با نوشتن رابطه چهارجزئی در مثلث کروی $PZ\odot$ پیدا میکنیم:

$$\sin(\varphi)\cos(H_\odot) = \cos(\varphi)\cot(90) - \sin(H_\odot)\cot(120) \rightarrow$$
$$\tan(H_\odot) = -\sin(\varphi)\tan(120) \rightarrow H_\odot = 45.38\,°$$

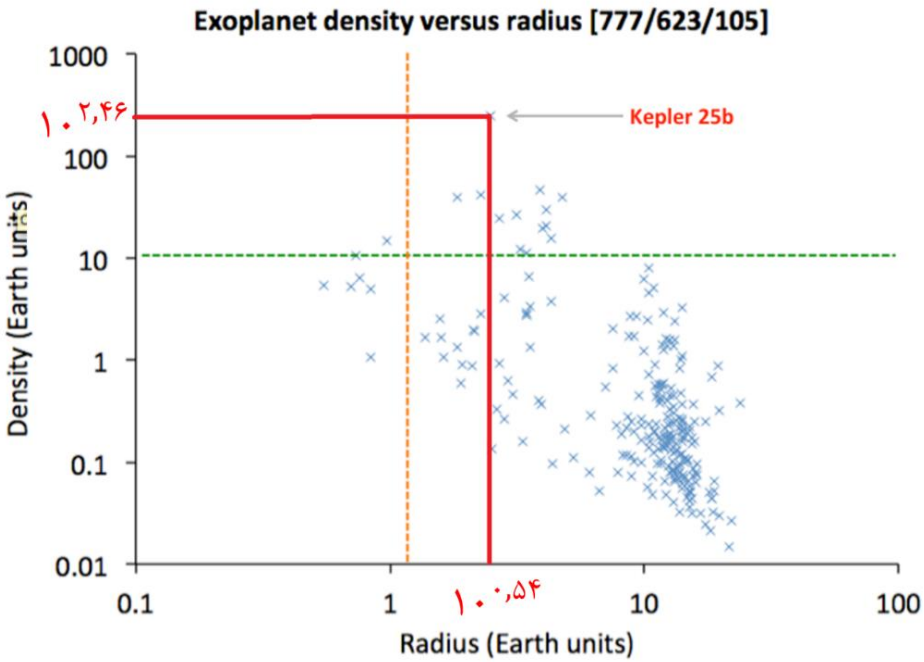
زمان محلی ناظر: $LMT = H_\odot + 12^h = 15^h 1^m$

و زمان رسمی کشور: $ZT = LMT + \Delta l = 15^h 1^m + (3^h 30^m - 3^h 26^m) = 15^h 5^m$

سوال 21 گزینه : ۴

باید دقت داشته باشیم که مقیاس نمودار لگاریتمی است و برای محاسبه مختصات سیاره از روش زیر استفاده کنیم.

در نمودار لگاریتمی، فاصله ی توان های عدد ده یکسان است پس برای بدست آوردن مختصات باید توان عدد ده را در آن نقطه پیدا کنیم.



رابطه ی شتاب گرانش با شعاع و چگالی را بدست می آوریم.

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G\frac{4\,\pi\rho R^3}{3}}{R^2} = \frac{4\,\pi G\rho R}{3}$$

$$\rightarrow \frac{g}{g_\oplus} = \frac{\rho}{\rho_\oplus}\frac{R}{R_\oplus}$$

$$\rightarrow \log(g) = \log\left(\frac{\rho}{\rho_\oplus}\right) + \log\left(\frac{R}{R_\oplus}\right) + \log(g_\oplus) = 2.46 + 0.54 + 1 = 4$$

نزدیکترین گزینه ای که لگاریتمش عدد بالا میشود عدد 6000 در گزینه هاست که لگاریتمش برابر 3.8 است.

سوال 22 : گزینه ۱

$$A \approx \frac{10 \times 10^6}{4} \times 1_{m^2} = \pi R^2 \longrightarrow R = 800\ m \longrightarrow D = 1600m$$

$$D = d\ tan\theta\ , \theta = 1.22\frac{\lambda}{D} \quad \Longrightarrow \quad D \approx 50\ cm$$

سوال 23: گزینه ۱

با استفاده از شکل برد این پرتابه ۱۲۰ متر به دست می آید.

رابطه برد یک پرتابه به صورت زیر است:

$$R = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}$$

که زاویه θ ، ۳۶ درجه به دست می آید.

سوال 24 : گزینه ۳

فاصله کانونی آیینه های جیوه ای به ابعاد ظرف بستگی ندارد و تنها تابع سرعت زاویه ای است .

سوال 25 : گزینه ۴

محل تقاطع دو دایره عظیمه عمود بر دایره عظیمه zp در قطب دایره عظیمه zp است.

سوال 26 : گزینه ۲

مدل اتمی بور : $\frac{1}{\lambda_0} = R_\infty \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \Longrightarrow \lambda_0 = 102.56\ nm$

$$v_{rot} = R\omega = 112\ km/s$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} = \frac{110 + 112 \quad km/s}{c} = 7.4\ \times 10^{-4} \qquad \Longrightarrow \lambda = 102.4\ nm$$

سوال 27 : گزینه ۱

$$H_0 = 69\ \frac{km}{s.mpc} \quad \longrightarrow \quad H_0 = 2.24 \times 10^{-18}\ {}^{1}/_{S}$$

$$k = 0 \ \longrightarrow \ \rho = \rho_c = \frac{3{H_0}^2}{8\pi G} = 8.94 \times 10^{-27}$$

$$M = \rho v = N < m >$$

$$v = (53.8)^3 (mpc)^3$$

$$N = 48000$$

$$\Longrightarrow < m > = 440 \times 10^9 M_\odot$$

سوال 28 : گزینه ۳

به ازای هر واکنش p-p یک اتم هلیوم تولید می شود

$$\text{تعداد واکنش ها در هر ثانیه} = \frac{750 \times 10^6 \times 10^3}{2m_p + 2m_n} = 1.12 \times 10^{38}$$

$$E_{\text{هر واکنش}} = 0.007 \times 4m_p c^2 = 4.21 \times 10^{-12}$$

$$\Longrightarrow L = 4.71 \times 10^{26} \quad , \quad d = 7kpc \longrightarrow b = 8 \times 10^{-16}\ \frac{w}{m^2} \rightarrow m = 18.9$$

سوال 29 : گزینه ۲

$$E = \frac{-GMm}{2a}\ , E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Longrightarrow v = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}$$

بنابراین سرعت روی نیم قطر کوچک $\sqrt{\frac{GM}{a}}$ و در اوج $\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}}$ است.

بنابراین با استفاده از داده های سوال نیم قطر کوچک 3 واحد نجومی و خروج از مرکز 0.5 به دست می آید .

طول حضیض در بیضی برابر $a(1-e)$ است که برای این دنباله این مقدار برابر 1.5 واحد نجومی میشود.

سوال 30 : گزینه ۴

از معادله موج داریم:

$$\psi_1 = \sin(kr_1 - \omega t) \ , \quad \psi_2 = \sin(kr_2 - \omega t)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\sin\left(\frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right)\cos(k(r_2 - r_1))$$

برای تداخل سازنده:

$$k(r_2 - r_1) = n\pi = cte.$$

که معادله بالا عملا معادله تعدادی هذلولی است.

سوال 31 : گزینه ۳

پاییز

سوال 32 : گزینه ۲

$$I_\oplus \Delta\omega_\oplus = m_{moon}\Delta(r_m v_m) = m_{moon}\Delta\sqrt{GM_\oplus r} = \sqrt{GM_\oplus}\frac{m}{2}\frac{\Delta r}{\sqrt{r}}$$

$$\Delta\omega_\oplus \times \frac{2}{5}M_\oplus {R_\oplus}^2 = \sqrt{GM_\oplus}\frac{m}{2}\frac{\Delta r}{\sqrt{r}} \Longrightarrow \Delta\omega_\oplus = \frac{5}{4}\frac{m_m}{M_\oplus}\frac{v_m \Delta r}{R^2}$$

$$\frac{\Delta\omega_\oplus}{\omega_\oplus} = \frac{\Delta T_\oplus}{T_\oplus} \quad \Longrightarrow \Delta T_\oplus \cong 10^{-21}$$

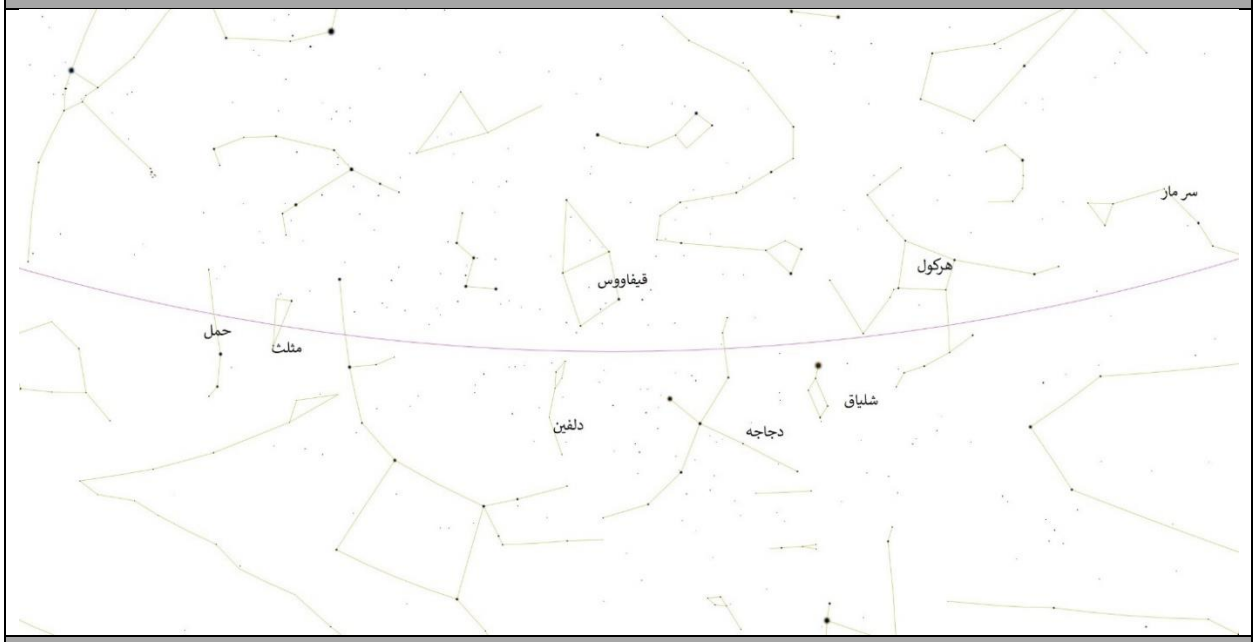
سوال 33 : گزینه ۲

$$T_{\odot}{}^{2} = \frac{4\pi^2 R_{\odot}{}^{3}}{GM_{in}} \Longrightarrow M_{in} = 2.7 \times 10^{41}$$

کهکشان دیسکی است: $M_{<r} = M_{<R} \times (\frac{r}{R})^2 \quad \rightarrow M_{<r} = 3.36 \times 10^{40}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_{<r}} \Longrightarrow T = 118.8\ Gyr$$

سوال 34 : گزینه ۳



سوال 35 : گزینه ۳

از رابطه ی قدرمطلق خطای دریافت درخشندگی را حساب می کنیم.

$$\mathrm{M} = -2.5 \log L + \mathrm{E} \quad \overset{\Delta}{\rightarrow} \Delta\mathrm{M} = \left| -2.5 \log e \left(\frac{\Delta L}{L}\right) \right|$$

حال رابطه ی خطا را برای قدر ظاهری می نویسیم.

$$m = -2.5 \log \left(\frac{L\alpha^2}{4\pi}\right) + E$$

$$\Delta m = \sqrt{(\frac{\partial m}{\partial L})^2 + (\frac{\partial m}{\partial \alpha})^2}$$

$$\frac{\partial m}{\partial L} = \left| -2.5 \log e \, (\frac{\Delta L}{L}) \right| = \Delta M = 0.2$$

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha} = \left| -5 \log e \, (\frac{\Delta \alpha}{\alpha}) \right| = 0.4343 \Rightarrow \Delta m = 0.478 \cong 0.5$$