# پرسش‌های ترکیبیات المپیادهای ریاضی روسیه
# ۱۹۹۳ ـ ۲۰۱۳
## ویرایش دوم

ابوالفضل اسدی
گروه المپیاد جی‌پک 

تقدیم می‌کنم به دو چراغ زندگی‌ام
استاد افروز جبل‌عاملی که نور چراغ هدایتش، نگذاشت مفهوم شب را درک کنم
و دوست عزیزم، دانیال مهرجردی، که چراغ معرفتش نگذاشت این چرخ دوّار به من آسیبی بزند

# پیش‌گفتار

به نام خدا
سال‌هاست مباحث تئوری، بخش سترگی از مباحث المپیاد کامپیوتر را در ایران می‌سازند؛ در حالی که به سبب تفاوت سیستماتیک، برگزاری المپیاد کامپیوتر در ایران، با بقیه‌ی کشورها تفاوت دارد. در کشورهای دیگر دست کم در آزمون‌ها، به مباحث تئوری (دست کم به این شکل)، پرداخته نمی‌شود. از طرفی منابع پارسی، پاسخ‌گوی نیاز دانش‌آموزان نیستند. از این رو دانش‌آموزان المپیاد کامپیوتر ایران، برای آمادگی در مراحل اول و دوم، به سوالات ترکیبیات المپیادهای ریاضی پناه می‌آورند؛ حال آن که بسیاری از این چنین سوالات، دردی از آلام این دانش‌پژوهان، نمی‌کاهد.

اما در جایی پهناور از این کره‌ی خاکی، المپیاد ریاضی به گونه‌ای برگزار می‌شود که نه تنها پرسش‌های آن، حیرت جهانیان را برانگیخته است؛ بل‌که پرسش‌های ترکیبیات آن به سبب نزدیک بودن به پرسش‌های خلاقانه و الگوریتمیک ــ که بیش‌تر در مراحل اول و دوم المپیاد کامپیوتر ایران به چشم می‌خورند ــ منبعی بسیار خوب برای دانش‌پژوهان کوشایی است که در تکاپو برای گذر از پل مرحله‌ی دوم المپیاد کامپیوتر ایران هستند. این مکان پهناور، روسیه است.

روسیه با قدمت برگزاری المپیادهای‌ش، به گونه‌ای پدر المپیاد محسوب می‌شود. قدمت برگزاری المپیاد در روسیه، از برگزاری نخستین المپیاد جهانی ریاضی که در رومانی برگزار شد، بیش‌تر است. نخستین بار، حدود ۱۰ سال قبل از نخستین المپیاد جهانی، شهر لنینگراد[1]، سنتی را آغاز کرد که بی‌شک، پرشماری دانش‌مندان جهان امروز، مدیون این سنت است. مسابقاتی هم‌چون تورنمنت شهرها، مسابقه‌ی ریاضی مسکو، مسابقه‌ی بزرگ‌داشت زاتیکف و ...، طراحان این کشور را پخته‌تر کردند تا این که در دهه‌های ۸۰ و ۹۰، همه‌گان، پرسش‌های المپیادهای ریاضی شوروی را، بزرگ‌ترین گنجینه‌ی المپیادی می‌دانستند. پس از فروپاشی شوروی، روسیه این سنت را نشکست و هم‌چنان با طرح زیباترین آزمون‌ها، در آسمان المپیاد جهان، به مانند یک غول سرخ، می‌درخشد.

به همین سبب، بر آن شدیم تا با جداکردن پرسش‌هایی از این آزمون‌ها که بیش‌تر به درد دانش‌آموزان المپیاد کامپیوتر می‌خورد، خدمتی ناچیز به آن‌ها کرده باشیم.

نسخه‌ی قبلی این مجموعه، در سال ۱۳۹۰ منتشر شد. نسخه‌ی جدید تفاوت‌های بسیاری با نمونه‌ی قبلی دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- نسخه‌ی قبلی به سبب ویرایش‌نشدن و شتاب‌زدگی بیش‌از حد در تهیه، شامل اشکالات فراوان تایپی، نگارشی، ترجمه‌ای و مفهومی بود که بیش‌تر آن‌ها در این مجموعه، برطرف شده است.

- نسخه‌ی قبلی شامل سوالاتی پراکنده از مراحل مختلف المپیاد ریاضی روسیه بود. این نسخه، تنها شامل پرسش‌های دور نهایی المپیاد ریاضی روسیه می‌باشد. پس ممکن است پرسش‌هایی مشاهده کنید که در مجموعه‌ی پیشین باشند ولی در این نسخه نباشند که برعکس آن نیز ممکن است. البته

[1] سنت‌پترزبورگ کنونی

به شخصه این مجموعه را توصیه می‌کنم؛ چرا که پرسش‌های آن بیش‌تر به درد دانش‌آموزان المپیاد کامپیوتر می‌خورد.

- یک اصل اساسی ترجمه در متون علمی، تغییرندادن متن اصلی است. رعایت این اصل در نسخه‌ی قبلی، مسبب نارسایی‌های بسیاری در پرسش‌ها شده بود. در این نسخه ضمن رعایت این اصل، بیش‌تر نارسایی‌ها برطرف شده و سعی شده دانش‌آموزان در فهم پرسش‌ها، مشکل چندانی نداشته باشند. هر کجا نیز که اطلاعات اضافی لازم بود، آن را در پانوشت، نگاشته‌ام. اسامی طراحان پرسش‌ها (در صورت دانستن) نیز جلوی هر پرسش نبشته شده است که این نیز در نسخه‌ی قبل، موجود نبود.
- ظاهر نسخه‌ی قبل، زننده بود. در این نسخه تلاش شده تا با به‌کارگیری استانداردها، استفاده از به‌ترین فونت‌ها و ...، متن تا بیشینه‌ی حد ممکن برای خواننده، خوانا باشد.
- پرسش‌های سال‌های ۲۰۱۲ و ۲۰۱۳ که در نسخه‌ی قبل موجود نبود، به این نسخه اضافه شده است.

هیچ مجموعه‌ای بی‌اشکال نیست. در صورت مشاهده‌ی هرگونه مشکل، آن را با من در میان بگذارید. هم‌چنین بسیاری از پرسش‌ها، شاید در ظاهر ترکیبیاتی نباشند ولی با ترکیبیات حل شوند. ممکن است این پرسش‌ها از دیدگان من فرار کرده باشند. اگر آن‌ها را به ما اطلاع بدهید، خرسند می‌شویم. شما می‌توانید از طریق $abasadi@ce.sharif.edu$ با من در ارتباط باشید.

در انتها سپاس فراوان خود را به آقایان محمدمهدی جهان‌آرا، آرش بیک‌محمّدی، وحید شمس‌الدینی و علی رحیمی کله‌رودی و هم‌چنین خانم مهشید حدادی عرضه می‌نمایم که بدون آن‌ها، تهیه‌ی این مجموعه ممکن نبود. هم‌چنین از گروه المپیاد جی‌پک تشکر می‌کنم که بستر این کار را برای‌مان فراهم کرد.

ابوالفضل اسدی
ـ زمستان ۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# ۱۹۹۳

## ۱.۱ کلاس نهم

۱. چندجمله‌ای درجه ۲ $f(x)$ می‌تواند با $x^۲f(۱+\frac{۱}{x})$ یا $(x-۱)^۲f(\frac{۱}{x-۱})$ جای‌گزین شود. با شروع از چندجمله‌ای $x^۲+۴x+۳$ آیا ممکن است چندجمله‌ای $x^۲+۱۰x+۹$ را به دست آورد؟
(ا.پرلین[۱])

۲. در یک آلبوم عکس،
ا) ۱۰
ب) $n$
عکس وجود دارد. روی هر عکس، ۳ نفر هستند: یک مرد در وسط، پسرش در چپ و برادرش در راست. با این فرض که تمام مردهای وسط عکس‌ها، متفاوت‌اند،کمینه‌ی ممکن تعداد افراد متفاوت روی عکس‌ها، چیست؟
(س.کنیاگین[۲])

۳. بیشینه‌ی تعداد مهره‌های پیاده‌ای که می‌توان روی خانه‌های تخته شترنج قرار داد؛ طوری که روی هر سطر، هر ستون و هر قطر[۳]، تعداد زوجی مهره‌ی پیاده باشد، چیست؟
(س.زاپتسف[۴])

۴. به تعداد فرد $n$ از عبارت‌هایی به شکل $*x^۲+*x+*=۰$ روی تخته سیاه نوشته شده است. دو بازی‌کن به نوبت، ستاره‌های عبارت‌ها را با اعداد حقیقی ناصفر، جای‌گزین می‌کنند. پس از $۳n$ حرکت، $n$ معادله‌ی درجه ۲ به دست می‌آید. بازی‌کن نخست تلاش می‌کند تا تعداد معادله‌هایی را که ریشه‌ی حقیقی ندارند، بیشینه کند؛ در حالی که بازی‌کن دوم سعی می‌کند تلاش‌های او را پای‌مال کند. بدون وابستگی به میزان خوب بازی کردن بازی‌کن دوم، بیشینه‌ی تعداد معادله‌های بدون ریشه‌ی حقیقی که بازی‌کن نخست می‌تواند به دست آورد، چیست؟
(ای.روبانف[۵])

---

[۱] A.Perlin
[۲] S.Tonyagin
[۳] منظور از قطر، هر قطری (اعم از اصلی و فرعی) است.
[۴] S.Zaptsev
[۵] I.Rubanov

## ۲.۱ کلاس دهم

۱. پرسش ۱ کلاس نهم

۲. سی نفر از یک شرکت دور یک میز نشسته‌اند. تعدادی از آن‌هاباهوش و تعدادی خنگ هستند. از هر نفر پرسیده می‌شود:

"نفر سمت راست شما باهوش است یا خنگ؟"

یک فرد باهوش، درست پاسخ می‌دهد؛ در حالی که یک فرد خنگ، درست یا نادرست پاسخ می‌دهد. فرض کنید بیش از F خنگ وجود ندارد. بیشینه‌ی صحیح F چقدر است، طوری که هم‌واره بتوان با دانستن پاسخ‌ها، یک فرد باهوش را در شرکت تشخیص داد؟
(او.لیاشکو[۶])

۳. یک مربع با ضلع $n$ به $n^۲$ مربع واحد تقسیم شده است. بزرگ‌ترین $n$ چیست؛ طوری که بتوان $n$ مربع واحد را نشان‌دار کرد و هر مستطیل با اضلاع روی خطوط شبکه‌ای و مساحت نابیش‌تر از $n$، شامل دست کم یک مربع واحد نشان‌دار در درونش باشد؟
(د.فن.در.فلاس[۷])

---

O.Liashko[۶]
D.Van.der.Flaas[۷]

## ۱.۳ کلاس یازدهم

۱. نشان دهید عدد طبیعی $n$ با شرط زیر وجود دارد:
"اگر مثلث منتظمی[۸] با ضلع $n$ را به $n^{۲}$ مثلث منتظم با ضلع ۱ تقسیم کنیم، بتوان میان رئوس این مثلث‌ها، ۱۹۹۳$n$ نقطه را انتخاب کرد؛ طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها رئوس یک مثلث منتظم نباشند."
(س.آوگوستینویچ[۹] ـ د.ون.در.فلاس)

۲. اعداد ۱ تا ۱۹۹۳ به ترتیبی دل‌خواه، در یک سطر نوشته شده‌اند. عمل زیر انجام می‌شود:
"اگر عدد نخست سطر، $k$ باشد، آن‌گاه $k$ عدد نخست سطر، برعکس می‌شوند."
نشان دهید پس از تعدادی از این عمل‌ها، عدد ۱ در مکان نخست پدیدار می‌شود. (د.ترشین[۱۰])

۳. در یک تورنمنت تنیس با $n$ شرکت‌کننده، مسابقات به صورت جفت (دو به دو) برگزار شد و هر دو شرکت‌کننده دقیقن یک‌بار روبه‌روی هم بازی کردند. برای چه $n$هایی این کار ممکن است؟
(س.توکارف[۱۱])

---

[۸] مثلث متساوی‌الاضلاع
[۹] S.Avgustinovich
[۱۰] D.Tereshin
[۱۱] S.Tokarev

# فصل ۲

# ۱۹۹۴

## ۱.۲ کلاس نهم

۱. سه توده از کبریت روی میز وجود دارد: یکی با ۱۰۰، یکی با ۲۰۰ و یکی با ۳۰۰ کبریت. دو بازی‌کن، بازی زیر را انجام می‌دهند. آن‌ها به نوبت بازی می‌کنند و هر بازی‌کن در نوبت‌ش، یکی از توده‌ها را برای خود برمی‌دارد و هر یک از توده‌های باقی‌مانده را به دو توده‌ی ناتهی تقسیم می‌کند. بازی‌کنی که نتواند حرکت مجاز انجام دهد، می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟
(ک.کوخاس[۱])

۲. روی یک خط، $n$ نقطه‌ی آبی و $n$ نقطه‌ی قرمز داده شده‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل بین جفت نقاط هم‌رنگ از مجموع فواصل بین جفت نقاط ناهم‌رنگ، بیش‌تر نیست.
(او.موسین[۲])

۳. کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰۰ ، طبق قانون زیر، یکی‌یکی روی خانه‌های یک تخته‌ی مستطیلی ۱۹۹۴ × ۱ قرار داده می‌شوند: "اگر خانه‌ی بعدی شامل کارت $n$ آزاد باشد، آن‌گاه کارت $n+1$ باید روی آن گذاشته شود. نشان دهید تعداد آرایش‌های ممکن، از نیم‌میلیون بیش‌تر نیست.
(د.کارپف[۳])

۴. یک صفحه با دو مجموعه از خطوط موازی، به مربع‌های واحد تقسیم شده است. برای هر مربع $n \times n$ با اضلاع روی خطوط تقسیم‌کننده، *قاب* آن را مجموعه‌ی مربع‌های واحدی که از درون با مرز مربع $n \times n$ در تماس هستند، تعریف می‌کنیم. نشان دهید تنها یک راه برای پوشاندن یک مربع ۱۰۰ × ۱۰۰ داده شده با اضلاع روی خطوط تقسیم‌کننده، با قاب‌های ۵۰ مربع (که لزومن مشمول در مربع ۱۰۰ × ۱۰۰ نیستند[۴])، وجود دارد.
(ا.پرلین)

---

[۱] K.Kokhas'
[۲] O.Musin
[۳] D.Karpov
[۴] قسمتی از آن‌ها می‌تواند بیرون مربع ۱۰۰×۱۰۰ باشد

## ۲.۲ کلاس دهم

۱. پرسش ۱ کلاس نهم

۲. در یک $6n+1$-ضلعی منتظم، $k$ رأس با قرمز و بقیه با آبی رنگ شده‌اند. نشان دهید تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقینی که رأس‌های‌ش هم‌رنگ هستند، به آرایش رأس‌های قرمز بستگی ندارد. (د.تامارکین[۵])

۳. ۳۰ شاگرد در یک کلاس هستند و هر یک از آن‌ها تعداد یک‌سانی دوست در بین هم‌کلاسی‌ها دارد. بیشینه‌ی تعداد شاگردانی که هر یک از آن‌ها بیش از اکثریت[۶] دوستان‌ش درس می‌خواند، چیست؟ (برای هر دو شاگرد می‌توان گفت کدام بیش‌تر درس می‌خواند)
(س.توکارف)

---

[۵] D.Tamarkin

[۶] بیش از نصف

## ۳.۲ کلاس یازدهم

۱. درون یک ۱۰۰ـضلعی کوژ، $2 \le k \le 50$ نقطه انتخاب شده‌اند. نشان دهید می‌توان $2k$ راس از ۱۰۰ـضلعی انتخاب کرد؛ طوری که $2k$ـضلعی کوژ ساخته شده با این رأس‌ها، شامل تمام نقاط انتخاب شده باشد.
(س.برلف[۷])

۲. روی خانه‌های یک شبکه‌ی نامتناهی، اعدادی حقیقی نوشته شده است. دو شکل شامل تعدادی متناهی خانه داده شده است. آن‌ها می‌توانند هر جای شبکه قرار بگیرند؛ طوری که خانه‌های آن‌ها بر خانه‌های شبکه، منطبق شوند. می‌دانیم که شکل نخست، هر جا قرار بگیرد، جمع اعدادی که می‌پوشاند، مثبت است. ثابت کنید شکل دوم می‌تواند جایی قرار بگیرد که جمع اعدادی که می‌پوشاند، مثبت باشد.
(ب.گینزبرگ[۸] ـ ای.سولویف[۹])

۳. بازی‌کنان $A, B$، به نوبت یک مهره‌ی اسب را روی یک تخته شترنج $1994 \times 1994$ حرکت می‌دهند. بازی‌کن $A$ تنها حرکات افقی انجام می‌دهد که در آن مهره‌ی اسب به یک سطر مجاور می‌رود؛ حال آن که بازی‌کن $B$، تنها حرکات عمودی انجام می‌دهد. نخست، بازی‌کن $A$ مهره‌ی اسب را روی یک خانه‌ی دل‌خواه می‌گذارد و حرکت نخست را انجام می‌دهد. مهره‌ی اسب نمی‌تواند به خانه‌ای برود که در طول بازی، ملاقات شده است. بازی‌کنی که نتواند یک حرکت مجاز انجام دهد، می‌بازد. ثابت کنید بازی‌کن $A$ یک استراتژی برد دارد.
(ا.پرلین)

---
S.Berlov[۷]
B.Ginzburg[۸]
I.Solovyef[۹]

# فصل ۳

# ۱۹۹۵

## ۱.۳ کلاس نهم

۱. آیا اعداد ۱ تا ۸۱ می‌توانند روی یک تخته‌ی $۹ \times ۹$ نوشته شوند؛ طوری که جمع اعداد هر مربع $۳ \times ۳$ یک‌سان باشد؟
(س.توکارف)

۲. سه جعبه از سنگ وجود دارد. زیزیفوس سنگ‌ها را یکی‌یکی بین جعبه‌ها جابه‌جا می‌کند. هر گاه او یک سنگ را جابه‌جا کند، زئوس به او تعدادی سکه می‌دهد که برابر با تعداد سنگ‌های جعبه‌ای که سنگ در آن گذاشته می‌شود منهای تعداد سنگ‌های جعبه‌ای که سنگ از آن برداشته شده، می‌باشد (سنگ حرکت‌داده‌شده، شمرده نمی‌شود). اگر این مقدار منفی باشد، آن‌گاه زیزیفوس مقدار مربوطه را به زئوس برمی‌گرداند (اگر زیزیفوس نتواند پرداخت کند، زئوس بخشنده، به او اجازه می‌دهد تا ادامه دهد و بعدن پرداخت کند). پس از مدتی، تمام سنگ‌ها در جعبه‌های ابتدایی‌شان قرار گرفتند. بیشینه‌ی ممکن مقدار دریافتی زیزیفوس در آن لحظه چیست؟
(ای.ایزمستف)[۱]

۳. روی خانه‌های یک تخته‌ی $۲۰۰۰ \times ۲۰۰۰$، اعداد ۱ و ۱− نوشته شده است. می‌دانیم جمع تمام اعداد تخته، مثبت است. نشان دهید می‌توان ۱۰۰۰ سطر و ۱۰۰۰ ستون انتخاب کرد؛ طوری که جمع اعداد نوشته شده در خانه‌های برخورد آن‌ها، دست کم ۱۰۰۰ باشد.
(د.کارپف)

---

[۱] I.Izmest'ef

## ۲.۳ کلاس دهم

۱. پرسش ۳ کلاس نهم

## ۳.۳ کلاس یازدهم

۱. یک پسر $n$ بار به یک چرخ‌وفلک با $n$ صندلی می‌رود. پس از هر بار، او در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند، طوری که کمتر از یک دایره‌ی کامل حرکت می‌کند و به یک صندلی دیگر می‌رود. تعداد صندلی‌هایی که او در هر حرکت از آن‌ها عبور می‌کند، طول حرکت نامیده می‌شود. برای چه $n$هایی او می‌تواند روی تمام صندلی‌ها بنشیند و طول تمام $n-1$ حرکت‌ش متفاوت باشد؟
(و.نیو[۲])

---

[۲] V.New

# فصل ۴

# ۱۹۹۶

## ۱.۴ کلاس نهم

۱. در دوما[۱]، ۱۶۰۰ نماینده وجود دارد که ۱۶۰۰۰ کمیته‌ی ۸۰ نفر تشکیل داده‌اند. نشان دهید می‌توان دو کمیته پیدا کرد که دست کم چهار عضو مشترک دارند.
(ا.اسکوپنکف[۲])

۲. دو توده از سکه، روی یک میز قرار دارد. می‌دانیم وزن دو توده، برابر است و برای هر عدد طبیعی $k$ که از تعداد سکه‌های هیچ توده‌ای بیش‌تر نیست، جمع وزن $k$ سکه‌ی سنگین توده‌ی اول از جمع وزن $k$ سکه‌ی سنگین توده‌ی دوم، بیش‌تر نیست. نشان دهید برای هر $x > ۰$، اگر هر سکه (در هر توده) با وزن دست کم $x$، با سکه‌ای با وزن $x$ جای‌گزین شود، توده‌ی اول از توده‌ی دوم سبک‌تر نخواهد بود.
(د.فن.در.فلاس)

۳. آیا یک تخته‌ی $۷ \times ۵$ می‌تواند با $L$ـ‌ترومینوها (شکلی که از یک مربع $۲ \times ۲$ با برداشتن یک مربع واحد از آن، ساخته می‌شود)، که از آن بیرون نزنند، در چندین لایه، پوشانده شود؛ طوری که هر خانه از تخته با تعداد یک‌سانی از ترومینوها پوشانده شده باشد؟
(م.یودوکیمف[۳])

[۱] پارلمان روسیه در دوما است
[۲] A.Skopenkov
[۳] M.Yevdokimov

## ۲.۴ کلاس دهم

۱. چهار مهره روی صفحه مختصات، روی نقاطی با مختصات صحیح، وجود دارند. می‌توان یک مهره را با برداری که دو مهره‌ی دیگر را به هم وصل می‌کند، جا به جا کرد. ثابت کنید هر دو مهره می‌توانند پس از متناهی گام، روی یک نقطه بروند.
(ر.سادیکف[۴])

۲. سه گروه‌بان و چند سرباز در یک پادگان، خدمت می‌کنند. گروه‌بان‌ها، به صورت چرخشی[۵] انجام وظیفه می‌کنند.فرمانده، دستورات زیر را داده است:

- هر روز، دست کم یک وظیفه به سربازی باید داده شود.
- یک سرباز نمی‌تواند بیش از دو وظیفه (در کل) یا بیش از یک وظیفه (در روز)، دریافت کند.
- لیست وظایف دریافتی سربازها، در دو روز متفاوت باید متفاوت باشد.
- نخستین گروه‌بانی که از این دستورها سرپیچی کند، زندانی می‌شود.

آیا دست کم یکی از گروه‌بان‌ها می‌تواند بدون توطئه با دیگران، وظایف را طبق قوانین بدهد و از زندانی‌شدن پرهیز کند؟
(م.کولیکف[۶])

---

[۴] R.Sadikov
[۵] به نوبت
[۶] M.Kolikov

## ۳.۴ کلاس یازدهم

۱. اعداد ۱ تا ۱۰۰ به ترتیبی نامعلوم نوشته شده‌اند. می‌توان ترتیب ۵۰ عضو را پرسید. کمینه‌ی تعداد پرسش‌ها برای پیداکردن ترتیب تمام ۱۰۰ عدد چیست؟
(س.توکارف)

# فصل ۵

# ۱۹۹۷

## ۱.۵ کلاس نهم

۱. وجوه جانبی یک متوازی‌السطوح مستطیلی با قاعده‌ی $a \times b$ و ارتفاع $c$ ($a, b, c$ اعداد طبیعی هستند) با مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها، موازی یال‌های متوازی‌السطوح است، بدون هم‌پوشانی، پوشانده شده است؛ طوری که هر مستطیل از شامل تعداد زوجی مربع واحد است. یک مستطیل می‌تواند روی یک یال متوازی‌السطوح، تا شده باشد. ثابت کنید اگر c زوج باشد، تعداد روش‌های پوشاندن نیز زوج است.
(د.کارپف ــ س.روکشین[۱] ــ د.فن‌ـ‌درـ‌فلاس)

۲. یک آزمون از خردمندان، به شکل زیر صورت می‌گیرد: پادشاه، خردمندان را در یک صف می‌چیند و روی سر هر نفر، یک کلاه سفید یا سیاه می‌گذارد. هر خردمند می‌تواند کلاه‌های تمام خرمندانی را که جلوی او هستند، ببیند؛ اما نمی‌تواند کلاه خودش و کلاه کسانی را که پشت او هستند، ببیند. سپس خردمندان، به نوبت[۲]، رنگ کلاه خودشان را حدس می‌زنند. پادشاه، تمام خرمندانی که حدس اشتباه بزنند، تنبیه می‌کند.
قبل از آزمون، خردمندان هم‌دیگر را ملاقات کردند و یک راه برای کاهش تعداد کسانی که تنبیه می‌شوند، به کمینه‌ی ممکن، ساختند. چه تعداد از آن‌ها می‌توانند از تنبیه شدن، در امان باشند؟

۳. ۳۳ شاگرد در یک کلاس هستند. از هر یک از شاگردها، تعداد شاگردان کلاس که هم‌نام[۳] او هستند و تعداد کسانی که هم‌فامیلی[۴] او هستند، پرسیده می‌شود. فهمیده شد که هر یک از اعداد ۰ تا ۱۰، در پاسخ‌ها پدیدار شده‌اند. نشان دهید در این کلاس، دو شاگرد با نام و فامیلی یک‌سان وجود دارد.
(ا.شاپووالف[۵])

۴. اعداد ۱ تا ۱۰۰ در خانه‌های یک تخته‌ی ۱۰ × ۱۰ نوشته شده‌اند؛ طوری که جمع هر دو عدد مجاور از $S$ تجاوز نمی‌کند. کمینه‌ی ممکن مقدار $S$ را بیابید (دو عدد، *مجاور* نامیده می‌شوند

---

[۱] S.Rukshin
[۲] از انتهای صف
[۳] نام کوچک
[۴] نام بزرگ
[۵] A.Shappovalov

اگر آن‌ها در خانه‌هایی با یک ضلع مشترک نوشته شده باشند.).
(د.هرامتسف[۶])

D.Hramtsov[۶]

## ۲.۵ کلاس دهم

۱. یک مربع $n \times n$ را که $n \geq ۳$، به یک استوانه تبدیل کرده‌ایم. تعدادی از خانه‌های آن سیاه شده‌اند. ثابت کنید دو زنجیره‌ی موازی از خانه‌ها (افقی، عموی یا مورب)، وجود دارند که شامل تعداد یک‌سانی از خانه‌های سیاه باشند.[۷]
(یه.پوروشنکو[۸])

۲. روی یک نوار از خانه‌ها، که از هر دو سو، نامتناهی است، خانه‌ها با اعداد صحیح شماره‌گذاری شده‌اند. چند سنگ روی خانه‌های نوار گذاشته شده‌اند (ممکن است روی یک خانه بیش از یک مهره باشد). حرکات زیر مجاز است:

- برداشتن یک سنگ از هر یک از خانه‌های $n - ۱$ و $n$ و گذاشتن یک سنگ روی خانه‌ی $n + ۱$
- برداشتن دو سنگ از خانه‌ی $n$ و گذاشتن یک سنگ در هر یک از خانه‌های $n - ۲$ و $n + ۱$

نشان دهید بدون توجه به آن که چگونه حرکات را انجام می‌دهیم، پس از زمانی متناهی، در وضعیتی که هیچ حرکت دیگری نمی‌تواند انجام شود، متوقف می‌شویم. علاوه بر آن، ثابت کنید این وضعیت نهایی به دنباله‌ی حرکات، بستگی ندارد.
(د.فن.در.فلاس)

---

[۷] توجه کنید پس از استوانه‌کردن، هر زنجیره‌ی افقی، عمودی یا مورب، شامل دقیقن $n$ خانه خواهد بود.
[۸] Ye.Poroshenko

## ۳.۵ کلاس یازدهم

۱. یک آزمون از خردمندان، به شکل زیر صورت می‌گیرد: پادشاه، خردمندان را در یک صف می‌چیند و روی سر هر نفر، یک کلاه سفید، آبی یا قرمز می‌گذارد. هر خردمند می‌تواند کلاه‌های تمام خرمندانی را که جلوی او هستند، ببیند؛ اما نمی‌تواند کلاه خودش و کلاه کسانی را که پشت او هستند، ببیند. سپس خردمندان، به نوبت[۹]، رنگ کلاه خودشان را حدس می‌زنند. پادشاه، تمام خرمندانی که حدس اشتباه بزنند، تنبیه می‌کند.
قبل از آزمون، خردمندان هم‌دیگر را ملاقات کردند و یک راه برای کاهش تعداد کسانی که تنبیه می‌شوند، به کمینه‌ی ممکن، ساختند. چه تعداد از آن‌ها می‌توانند از تنبیه شدن، در امان باشند؟
(ک.نپ[۱۰])

۲. یک مکعب $n \times n \times n$ از مکعب‌های واحد ساخته شده است. یک خط شکسته‌ی بسته را در نظر بگیرید که از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که مراکز دو معکب واحد مجاور (در یک وجه مشترک) را به هم وصل می‌کنند. یک وجه از یک مکعب واحد را *نشان‌دار* گوییم، اگر خط شکسته‌ی بسته از آن گذر کرده باشد. ثابت کنید یال‌های مکعب‌های واحد می‌توانند با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شوند؛ طوری که هر وجه نشان‌دار تعداد فردی و هر وجه بی‌نشان تعداد زوجی از یال‌های هر رنگ داشته باشند.
(م.اسمورف[۱۱])

۳. یک چندضلعی، یک خط $l$ و یک نقطه‌ی دل‌خواه $P$ روی خط $l$، در صفحه داده شده است. خطوطی که منطبق بر اضلاع چندضلعی هستند، $l$ را در نقاطی متفاوت ملاقات می‌کنند که همگی آن‌ها با $P$ نیز، متفاوت هستند. رأس‌هایی از چندضلعی را نشان‌دار می‌کنیم که خطوط منطبق بر اضلاع چندضلعی که گذرنده از این رأس هستند، $l$ را در دو طرف متفاوت $P$ ملاقات کنند[۱۲]
ثابت کنید $P$ درون چندضلعی است؛ اگر و تنها اگر هر یک از نیم‌صفحه‌هایی که از خط $l$ به وجود می‌آیند، شامل تعداد فردی رأس نشان‌دار باشند.
(او.موسین)

۴. در یک شبکه‌ی مستطیلی $m \times n$ که $m, n$ اعداد صحیح مثبت فرد هستند، دومینوهای $۲ \times ۱$ جای داده شده‌اند؛ طوری که تمام آن را به جز یک مربع واحد گوشه، می‌پوشانند. می‌توان یک دومینو را به سمت خانه‌ی خالی، لغزاند. نشان دهید با دنباله‌ای از این حرکات، می‌توانیم خانه‌ی خالی را به هر گوشه‌ی شبکه، ببریم.
(ا.شاپووالف)

[۹] از انتهای صف
[۱۰] K.Knop
[۱۱] M.Smurov
[۱۲] روی خط $l$، $P$ بین نقاط برخورد آن‌ها با $l$ باشد.

# فصل ۶

# ۱۹۹۸

## ۱.۶ کلاس نهم

۱. یک ماز[۱]، یک تخته‌ی $۸ \times ۸$ است که در آن تعدادی از خانه‌های مجاور، با دیوار، جدا شده‌اند؛ طوری که هر دو خانه می‌توانند با مسیری که دیوارها را قطع نمی‌کند، به هم وصل شوند. با یک دستور "چپ"، "راست"، "بالا" یا "پایین"، یک مهره‌ی سرباز در جهت متناظر می‌رود تا به یک دیوار یا یال تخته شترنج برسد. خدا یک برنامه می‌نویسد که شامل دنباله‌ای متناهی از دستورات است و سپس آن را به شیطان می‌دهد. سپس شیطان یک ماز می‌سازد و مهره‌ی سرباز را روی یک خانه جا می‌دهد. آیا خدا می‌تواند یک برنامه بنویسد که با وجود تلاش‌های شیطان، ضمانت کند مهره‌ی سرباز تمام خانه‌ها را ملاقات خواهد کرد؟
(و.اوفناروفسکی[۲] ــ ا.شاپووالف)

۲. یک جواهرفروش یک زنجیر شامل $N > ۳$ مهره می‌سازد. سپس یک مشتری زودرنج از او می‌خواهد ترتیب مهره‌ها را تغییر دهد؛ طوری که تعداد حلقه‌هایی که جواهرفروش باید باز کند، بیشینه شود. این عدد بیشینه چیست؟
(ا.شاپووالف)

---

[۱] maze
[۲] V.Ufnarovsky

## ۲.۶ کلاس دهم

۱. فرض کنید $k$ یک عدد صحیح مثبت باشد. تعدادی از زیرمجموعه‌های $۲k$ـ عضوی یک مجموعه‌ی داده شده، نشان‌دار شده‌اند. فرض کنید برای هر زیرمجموعه با تعداد عضوهای کم‌تر از $(k+۱)^۲$، تمام زیرمجموعه‌های نشان‌دار مشمول در آن، یک عضو مشترک دارند. نشان دهید تمام زیرمجموعه‌های نشان‌دار، یک عضو مشترک دارند.
(و.دلنیکف[۳])

۲. در ابتدا اعداد ۱۹ و ۹۸ روی تخته نوشته شده‌اند. هر دقیقه، هر یک از دو عدد، مجذور می‌شوند یا با ۱ جمع می‌شوند. آیا ممکن است در زمانی، دو عدد برابر ساخته شود؟
(یه.مالینیکوا[۴])

۳. هر خانه از یک تخته‌ی $۲^n - ۱ \times ۲^n - ۱$ شامل ۱ یا ۱− است. چنین آرایشی، *موفق* نامیده می‌شود، اگر هر عدد، ضرب هم‌سایه‌های‌ش باشد (دو خانه هم‌سایه‌اند اگر در یک ضلع مشترک باشند). تعداد آرایش‌های موفق را بیابید.

---

[۳] V.Dolnikov
[۴] Ye.Malinikova

## ۳.۶ کلاس یازدهم

۱. ۱۹۹۸ شهر در روسیه وجود دارد و هر یک از آن‌ها به ۳ شهر دیگر با راه دوطرفه‌ی هوایی، متصل است. سفر بین هر دو شهر ممکن است. $KGB$[۵] می‌خواهد ۲۰۰ شهر را ببندد که هیچ دوتایی با یک پرواز تنها به هم وصل نباشند. نشان دهید این کار می‌تواند انجام شود؛ طوری که بتوان بین هر دو تا از شهرهای مانده، بدون گذر از یک شهر بسته، سفر کرد.
(د.کارپف ــ ر.کاراسف[۶])

۲. شکل $\Phi$، تشکیل شده از مربع‌های واحد، شرط زیر را دارد: اگر خانه‌های یک مستطیل $m \times n$ ($m, n$ ثابت هستند)، با اعدادی که جمع‌شان مثبت است، پر شوند، شکل $\Phi$ می‌تواند درون مستطیل جای گیرد (ممکن است پس از دوران)؛ طوری که جمع اعدادی که پوشش می‌دهد، مثبت باشد. ثابت کنید تعدادی از چنین شکل‌هایی می‌توانند روی مستطیل $m \times n$ گذاشته شوند؛ طوری که هر خانه توسط تعداد یک‌سانی از شکل‌ها پوشانده شده باشد.
(ا.بلف[۷])

---

[۵] پلیس مخفی اتحاد جماهیر شوروی
[۶] R.Karasev
[۷] A.Belov

# فصل ۷

# ۱۹۹۹

## ۱.۷ کلاس نهم

۱. چند شهر در یک کشور وجود دارد. بعضی از جفت شهرها با خطوط هوایی دوطرفه، از یکی از $N$ هواپیمایی، وصل هستند؛ طوری که هر هواپیمایی، دست کم یک خط هوایی از هر شهر دارد و هر کس می‌تواند بین هر دو شهر سفر کند. در طول یک بحران اقتصادی، $N-1$ خط هوایی، غیرفعال شدند (از هواپیمایی‌های مختلف). ثابت کنید هنوز می‌توان بین هر دو شهر سفر کرد.
(د.کارپف)

۲. اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ با سیاه و سفید، رنگ شده‌اند. در هر گام، می‌توان یکی از این اعداد را انتخاب کرد و رنگ هر عددی را (شامل خود آن عدد) که نسبت به آن اول نیست، تغییر داد. در ابتدا، تمام اعداد سیاه هستند. آیا ممکن است در متناهی گام، وضعیتی را به دست آورد که در آن تمام اعداد سفید باشند؟
(س.برلف)

۳. یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع $n$، به مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی با ضلع ۱ تقسیم شده است. بیشینه‌ی ممکن تعداد پاره‌خط‌های واحد با نقاط پایانی روی راس‌های مثلث‌های کوچک را که می‌توانند انتخاب شوند بیابید؛ طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها، اضلاع یک مثلث نباشند.
(م.آنتونف[۱])

۴. ۲۰۰۰ جزء در یک مدار وجود دارد که در ابتدا هر دوتایی از آن‌ها با یک سیم به هم وصل شده‌اند. دو ول‌گرد به نام‌های واسیا و پتیا، سیم‌ها را یکی پس از دیگری می‌برند. واسیا کار را شروع می‌کند و در نوبتش یک سیم را می‌برد؛ در حالی که پتیا یک یا سه سیم می‌برد. ول‌گردی که آخرین سیم از یک جزء را ببرد، می‌بازد. کدام یک، استراتژی برد دارند؟
(د.کارپف)

---

[1] M.Antonov

## ۲.۷ کلاس دهم

۱. سه کوزه‌ی خالی روی یک میز وجود دارد. وینی‌پو، خرگوش و پیگلت، به نوبت در کوزه‌ها، گردو می‌اندازند. ترتیب نوبت‌ها با یک قرعه‌کشی مشخص می‌شود. وینی‌پو، در کوزه‌ی یکم یا دوم، خرگوش در کوزه‌ی دوم یا سوم و پیگلت در کوزه‌ی یکم یا سوم می‌اندازند. بازی‌کنی که پس از حرکت‌ش، کوزه‌ای با ۱۹۹۹ گردو وجود داشته باشد، بازی را می‌بازد. نشان دهید وینی‌پو و پیگلت می‌توانند هم‌کاری کنند تا خرگوش را بازنده کنند.
(ف.باخارف[۲])

۲. روی یک تخته شترنج نامتناهی، $n^۲$ نشان‌گر، روی خانه‌های یک مربع $n \times n$، جای داده شده‌اند (هر نشان‌گر روی یک خانه). یک حرکت مجاز، پریدن از یک خانه‌ی هم‌سایه‌ی پر، به یک خانه‌ی خالی است و نشان‌گری که از روی آن پریده شده، برداشته می‌شود (دو خانه هم‌سایه‌اند، اگر در یک ضلع، مشترک باشند). ثابت کنید بدون توجه به این که چگونه حرکات انجام شود، دست کم $\lceil n^۲/۳ \rceil$ حرکت مجاز، قبل از رسیدن به وضعیتی که در آن هیچ حرکت دیگری قابل انجام نباشد، انجام خواهد شد.
(س.توکارف)

۳. در یک گروه از ۱۲ نفر، در میان هر ۹ نفر، ۵ نفر هستند که یک‌دیگر را می‌شناسند. ثابت کنید در این گروه ۶ نفر هستند که یک‌دیگر را می‌شناسند.
(و.دلنیکف)

---

F.Bakharev[۲]

## ۳.۷ کلاس یازدهم

۱. پرسش ۲ کلاس دهم

۲. سه چندضلعی کوژ در یک صفحه داده شده است. ثابت کنید خطی وجود ندارد که تمام چندضلعی‌ها را قطع کند؛ اگر و تنها اگر هر یک از چندضلعی‌ها بتوانند با خطی، از دوتای دیگر جدا شوند.
(و.دلنیکف)

۳. ۲۰۰۰ جزء در یک مدار وجود دارد که در ابتدا هر دوتایی از آن‌ها با یک سیم به هم وصل شده‌اند. دو ول‌گرد به نام‌های واسیا و پتیا، سیم‌ها را یکی پس از دیگری می‌برند. واسیا کار را شروع می‌کند و در نوبت‌ش یک سیم را می‌برد؛ در حالی که پتیا دو یا سه سیم می‌برد. ول‌گردی که آخرین سیم از یک جزء را ببرد، می‌بازد. کدام یک، استراتژی برد دارند؟
(د.کارپف)

# فصل ۸

# ۲۰۰۰

## ۱.۸ کلاس نهم

۱. چند جفت از شهرها در یک کشور، با جاده‌ها به هم وصل هستند. از هر شهر، دست کم سه جاده خارج می‌شود. نشان دهید یک دور شامل تعدادی جاده که تعدادشان بر ۳ بخش‌پذیر نیست، وجود دارد.
(د.کارپف)

۲. روی برخی خانه‌های یک تخته‌ی $۲n \times ۲n$، نشان‌گرهای سیاه و سفید، جای داده شده‌اند (روی هر خانه، دست بالا یک نشان‌گر). ابتدا تمام نشان‌گرهای سیاهی که با یک نشان‌گر سفید، هم‌ستون هستند، برمی‌داریم؛ سپس تمام نشان‌گرهای سفیدی که با یک نشان‌گر سیاه، هم‌سطر هستند، برمی‌داریم. ثابت کنید چه تعداد نشان‌گرهای سفید باقی‌مانده و چه تعداد نشان‌گرهای سیاه باقی‌مانده، از $n^۲$ تجاوز نمی‌کند.
(س.برلف)

## ۲.۸ کلاس دهم

۱. پنج وزنه‌ی مشابه با وزن‌های دوبه‌دو متفاوت، به ما داده شده است. برای هر سه وزنه‌ی $A, B, C$، می‌توان با یک اندازه‌گیری، درستی را $m(A) < m(B) < m(C)$ پرسید؛ که در آن $m(X)$، وزن وزنه‌ی $X$ است (پاسخ، بله یا خیر است). آیا همواره می‌توانیم با دست بالا ۹ اندازه‌گیری، وزنه‌ها را به ترتیب افزایشی آرایش دهیم؟
(او.پودلیپسکی[۱])

۲. تعدادی کاغذ مربعی از $k$ رنگ مختلف، روی میزی مستطیلی، با اضلاع موازی اضلاع میز، جای دارند. فرض کنید برای هر $k$ مربع از رنگ‌های مختلف، دو تا از آن‌ها وجود دارند که با تنها یک میخ، می‌توانند روی میز، میخ‌کوب شوند. ثابت کنید رنگی وجود دارد که تمام مربع‌های به آن رنگ می‌توانند با ۲ − $2k$ میخ، میخ‌کوب شوند.
(و.دلنیکف)

---
[۱] O.Podlipskiy

## ۳.۸ کلاس یازدهم

۱. خانه‌های یک تخته‌ی $100 \times 100$، با چهار رنگ، رنگ شده‌اند؛ طوری که هر سطر و هر ستون، شامل دقیقن ۲۵ خانه از هر رنگ است. ثابت کنید دو سطر و دو ستون وجود دارند که چهار خانه‌ی تلاقی آن‌ها، از رنگ‌های متفاوت باشند.
(س.برلف)

# فصل ۹

# ۲۰۰۱

## ۱.۹ کلاس نهم

۱. در ۲۰۰۰ـضلعی کوژ $P$، هیچ سه قطری، یک‌دیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. هر قطر با یکی از ۹۹۹ رنگ، رنگ می‌شود (اضلاع ۲۰۰۰ـضلعی رنگ نمی‌شوند). ثابت کنید مثلثی وجود دارد که رئوس آن، رئوس $P$ یا نقاط برخورد قطرها باشند؛ طوری که تمام اضلاع آن با رنگ یک‌سانی رنگ شده باشند.
(ی.لیفشیتس[۱])

۲. یورا ۲۰۰۱ سکه در یک سطر می‌گذارد که هر کدام، ۱، ۲ یا ۳ کوپک[۲] می‌ارزد. او اشاره کرد که بین هر دو سکه‌ی ۱ کوپکی، دست کم یک سکه، بین هر دو سکه‌ی ۲ کوپکی، دست کم دو سکه و بین هر دو سکه‌ی ۳ کوپکی، دست کم سه سکه وجود دارد. چه تعداد سکه‌ی ۳ کوپکی می‌تواند در سطر باشد؟
(ی.لیفشیتس)

۳. در اجتماعی از $۲n + ۱$ نفر، برای هر گروه از $n$ نفر، فردی وجود دارد که در گروه نباشد و تمام افراد گروه را بشناسد. ثابت کنید فردی وجود دارد که همه را می‌شناسد.
(س.برلف)

---

[۱] Y.Lifshits
[۲] واحد پول

## ۲.۹ کلاس دهم

۱. ۱۰۰ زیرمجموعه‌ی $A_{1}, A_{2}, ..., A_{100}$ از یک خط داده شده‌اند که هر یک از آن‌ها، اجتماع ۱۰۰ پاره‌خط بسته‌ی دوبه‌دو نامتقاطع است. ثابت کنید اشتراک $A_{1}, A_{2}, ..., A_{100}$، اجتماع دست بالا ۹۹۰۱ پاره‌خط بسته‌ی دوبه‌دو نامتقاطع است (یک نقطه‌ی تنها نیز یک پاره‌خط بسته در نظر گرفته می‌شود).
(ر.کاراسف)

۲. در یک کشور با تعدادی شهر، برخی از شهرها با جاده به هم وصل شده‌اند؛ طوری که برای هر دو شهر، یک مسیر یکتا که خودش را قطع نمی‌کند، آن‌ها را به هم وصل می‌کند. می‌دانیم دقیقن ۱۰۰ شهر وجود دارد که از هر کدام، یک جاده سرچشمه می‌گیرد. ثابت کنید می‌توان ۵۰ جاده‌ی جدید ساخت؛ طوری که پس از ساختن جاده‌های جدید، اگر هر جاده‌ای بسته شود، هر دو شهر به هم وصل باشند.
(د.کارپف)

۳. در یک مربع جادویی[۳] $n \times n$، تمام $n^{2}$ خانه‌ی آن با اعداد $1, 2, ..., n^{2}$ پر شده‌اند و برای هر جفت از خانه‌ها، مراکز آن‌ها با یک بردار به هم وصل هستند که از خانه‌ی با عدد کم‌تر به خانه‌ی با عدد بیش‌تر، جهت‌دهی شده است. ثابت کنید جمع این بردارها، برابر صفر است.
(ای.بگدانف[۴])

[۳] یک مربع جادویی، مربعی است که در آن جمع اعداد هر سطر و هر ستون در آن، مقداری ثابت است.
[۴] I.Bogdanov

## ۳.۹ کلاس یازدهم

۱. مجموع وزن مجموعه‌ای از سنگ‌ها، $2S$ است. عدد صحیح مثبت $k$ را ممکن می‌گوییم، اگر $k$ سنگ در این مجموعه با مجموع وزن $S$، وجود داشته باشد. بیشینه‌ی تعداد اعداد صحیح ممکن را بیابید.
(د.کوزنکف[۵])

۲. دو خانواده‌ی $P_1$ و $P_2$ از چندضلعی‌های کوژ، در صفحه وجود دارد. برای هر دو چندضلعی از خانواده‌های متفاوت، اشتراک‌شان ناتهی است. هم‌چنین هر یک از دو خانواده، شامل یک جفت چندضلعی جداازهم است. ثابت کنید خطی وجود دارد که تمام چندضلعی‌ها در هر دو خانواده را قطع می‌کند.
(و.دلنیکف)

۳. شرکت‌کنندگان یک مسابقه‌ی چندگزینه‌ای، $n$ پرسش برای پاسخ دارند. پاسخ درست برای $i$-امین پرسش، $P_i$ امتیاز دارد که $P_i$ یک عدد صحیح مثبت است. هر پاسخ نادرست، صفر امتیاز می‌آورد. برای هر شرکت‌کننده، امتیاز کل او برابر با مجموع امتیازهایی است که برای پاسخ‌های درست‌ش دریافت کرده است. پس از آزمون، رتبه‌بندی مشخص شد. یوری اشاره کرد که با دانستن پاسخ‌های شرکت‌کنندگان، اعداد $P_1, P_2, \dots, P_n$ می‌توانند تغییر یابند تا به هر رتبه‌بندی دیگر برسیم. بیشینه‌ی تعداد شرکت‌کنندگان این آزمون چیست؟
(س.توکارف)

۴. ۲۰۰۱ شهر در یک کشور هستند. برای هر شهر، یک جاده وجود دارد که از آن خارج می‌شود و شهری وجود ندارد که به تمام شهرهای دیگر، با جاده‌ی مستقیم، وصل باشد. یک مجموعه‌ی $D$ از شهرها، قدرت‌مندemph نامیده می‌شود، اگر هر شهری که به $D$ متعلق نیست، با یک جاده‌ی مستقیم، به دست کم یکی از شهرهای $D$، وصل باشد. گفته شده هر مجموعه‌ی قدرت‌مند، شامل دست کم $k$ شهر است. ثابت کنید کشور می‌تواند به $2001 - k$ جمهوری تقسیم شود؛ طوری که هیچ دو شهری از یک جمهوری با یک جاده به هم وصل نباشند.
(و.دلنیکف)

---

[۵] D.Kuznecov

# فصل ۱۰

# ۲۰۰۲

## ۱.۱۰ کلاس نهم

۱. یک اژدها شامل تعدادی سر و تعدادی گردن است که هر گردن، به دو سر متصل است. وقتی یک سر $A$ از اژدها با یک شمشیر، زده می‌شود، تمام گردن‌های سر $A$، ناپدید می‌شوند؛ اما گردن‌های جدیدی برای متصل کردن سر $A$ به تمام سرهایی که به $A$ وصل نبودند، رشد می‌کنند. هرکول با بریدن اژدها، به دو تکه که وصل نیستند، او را شکست می‌دهد. کمینه‌ی $N$ را بیابید که هرکول بتواند هر اژدها با ۱۰۰ گردن را با دست بالا $N$ ضربه، شکست دهد.
(ی.لیفشیتس)

۲. هشت رخ روی یک تخته شترنج هستند که هیچ دوتایی، یک‌دیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید دو تا فواصل دوبه‌دوی بین رخ‌ها، برابر است (فاصله‌ی بین دو رخ، فاصله‌ی بین مرکزهای خانه‌های آن‌هاست).
(د.کوزنستف[۱])

۳. یک خانه‌ی قرمز، $K > ۱$ خانه‌ی آبی و یک بسته از $۲n$ کارت شماره‌گذاری شده با اعداد ۱ تا $۲n$، به ما داده شده است. در ابتدا، بسته در یک خانه‌ی قرمز قرار گرفته است و به ترتیبی دل‌خواه، آرایش یافته است. در هر حرکت، اجازه داریم بالاترین کارت یک دسته را برداریم و آن را در خانه‌ای خالی یا بالای خانه‌ای دیگر که عدد بالاترین کارت آن، ۱ واحد بزرگ‌تر است بگذاریم. با دانستن $k$، بیشینه‌ی $n$ که همواره بتوان تمام کارت‌ها را به یک خانه‌ی آبی برد، چیست؟
(ا.بلف)

---

[۱] D.Kuznestov

## ۲.۱۰ کلاس دهم

۱. ۲۰۰۲ شهر در یک نظام شاهنشاهی وجود دارد. برخی از شهرها با جاده به هم وصل شده‌اند؛ طوری که اگر تمام جاده‌های یک شهر بسته شود، هنوز می‌توان بین هر دو شهر، سفر کرد. هر سال، پادشاه یک دور از جاده‌ها که خودش را قطع نمی‌کند، انتخاب می‌کند، یک شهر جدید می‌سازد و آن را به تمام شهرهای دور انتخاب شده، وصل می‌کند و تمام جاده‌های دور را می‌بندد. پس از چند سال، هیچ دوری که خودش را قطع نکند، نماند. ثابت کنید در آن زمان، دست کم ۲۰۰۲ شهر وجود دارد که دقیقن یک جاده از هر یک از آن‌ها خارج می‌شود.
(ا.پاستور[۲])

۲. پرسش ۳ کلاس نهم

۳. روی یک صفحه، تعدادی متناهی خط قرمز و آبی داده شده است. هیچ دوتایی موازی نیستند؛ طوری که هر نقطه‌ی برخورد دو خط هم‌رنگ، روی خطی دیگر از رنگ دیگر نیز قرار دارد. ثابت کنید تمام خطوط از یک نقطه می‌گذرند.
(و.دلنیکف ـ ای.بگدانف[۳])

---
[۲] A.Pastor
[۳] I.Bogdanov

## ۳.۱۰ کلاس یازدهم

۱. چند میدان در یک شهر وجود دارد. برخی از میدان‌ها، با خیابان‌های یک‌طرفه، به هم وصل هستند؛ طوری که دقیقن دو خیابان از هر میدان، خارج می‌شود. نشان دهید شهر می‌تواند به ۱۰۱۴ محله تقسیم شود؛ طوری که هیچ دو میدان یک محله با یک خیابان به هم وصل نباشند و تمام خیابان‌های بین دو محله، در یک جهت باشند.
(ا.پاستور)

۲. پرسش ۲ کلاس دهم

# فصل ۱۱

# ۲۰۰۳

۱. روی یک خط، $2k-1$ پاره‌خط سفید و $2k-1$ پاره‌خط سیاه داده شده است. فرض کنید هر پاره‌حط سفید، دست کم $k$ پاره‌خط سیاه و هر پاره‌خط سیاه، دست کم $k$ پاره‌خط سفید را قطع کند. ثابت کنید یک پاره‌خط سیاه وجود دارد که تمام پاره‌خط‌های سفید و یک پاره‌خط سفید وجود دارد که تمام پاره‌خط‌های سیاه را قطع کند.

۲. $N$ شهر در یک کشور هستند. هر دوتا از آن‌ها، با یک جاده یا با یک خط هوایی به هم وصل هستند. یک گردش‌گر می‌خواهد هر شهر را دقیقن یک بار بازدید کند و به شهری که از آن، سفر را آغاز کرده، برگردد. ثابت کنید می‌توان یک شهر ابتدایی انتخاب کرد و یک مسیر با حداکثر یک بار جابه‌جایی نوع سفر، ساخت.

۳. بیشینه‌ی عدد طبیعی $N$ را بیابید؛ طوری که برای هر آرایش از اعداد $1, 2, \dots, 400$ در یک تخته شترنج $20 \times 20$، دو عدد در یک سطر یا یک ستون وجود داشته باشد که اختلاف‌شان دست کم $N$ باشد.

۴. به هر یک از آنا و بورا یک نوار کاغذی به اندازه‌ی کافی بزرگ، داده می‌شود؛ روی یکی حرف $A$ روی دیگری حرف $B$ نوشته شده است. هر دقیقه یکی از آن‌ها (نه لزومن به نوبت)، در سمت چپ یا سمت راست کلمه‌ی نوارش، کلمه‌ی نوار دیگر را می‌نویسد. ثابت کنید روز بعد، می‌توان کلمه‌ی روی نوار آنا را به دو کلمه برید و جای‌شان را عوض کرد و یک کلمه‌ی آیینه‌ای[1] به دست آورد.

۵. ۱۰۰ شهر در یک کشور هستند و تعدادی از آن‌ها با جاده به هم وصل شده‌اند. هر چهار شهر با دست کم دو جاده، به هم وصل هستند. فرض کنید مسیری وجود ندارد که از هر شهر، دقیقن یک بار بگذرد. ثابت کنید دو شهر وجود دارند که هر شهر دیگر، به دست کم یکی از آن‌ها وصل باشد.

[1] کلمه‌ای که از هر دو طرف، یک‌سان خوانده شود

# فصل ۱۲

# ۲۰۰۴

## ۱.۱۲ کلاس نهم

۱. هر نقطه‌ی شبکه‌ای از یک صفحه‌ی مختصات، با یکی از سه رنگ، رنگ شده است؛ طوری که هر سه رنگ، به کار رفته‌اند. نشان دهید هم‌واره می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه یافت، طوری که سه رأس آن، رنگ‌های دوبه‌دو متفاوت داشته باشند.

۲. روی یک میز، ۲۰۰۴ جعبه وجود دارد و در هر جعبه، یک توپ قرار دارد. می‌دانیم تعدادی از توپ‌ها سفیدند و تعداد توپ‌های سفید، زوج است. هر مرحله، می‌توانیم دو جعبه‌ی دل‌خواه انتخاب کنیم و بپرسیم آیا در آن‌ها دست کم یک توپ سفید هست یا خیر. پس از دست کم چه تعداد پرسش، می‌توان دو جعبه را نشان داد که مطمئن در هر یک، توپ سفید قرار داشته باشد؟

۳. در مخابرات، ۲۰۰۴ تلفن وجود دارد. هر دوتا از این تلفن‌ها با یک کابل که با یکی از چهار رنگ، رنگ شده است، به هم وصل هستند. از هر رنگ، دست کم یک کابل وجود دارد. آیا هم‌واره می‌توان تعدادی تلفن انتخاب کرد؛ طوری که در میان کابل‌های اتصال دوبه‌دوی بین آن‌ها، دقیقن ۳ رنگ پدیدار شده باشد؟

۴. اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ دور یک دایره، آرایش یافته‌اند؛ با این ویژگی که هر عدد، بزرگ‌تر از دو هم‌سایه‌اش یا کوچک‌تر از دو هم‌سایه‌اش است. یک جفت عدد هم‌سایه، *خوب* نامیده می‌شود، اگر این جفت حذف شود، شرط بالا هنوز معتبر باشد. کمینه‌ی ممکن تعداد جفت‌های خوب چیست؟

## ۲.۱۲ کلاس دهم

۱. پرسش ۱ کلاس نهم

۲. یک کشور، ۱۰۰۱ شهر دارد و هر دو شهر با یک خیابان یک‌طرفه به هم وصل هستند. از هر شهر، دقیقن ۵۰۰ جاده خارج می‌شود و به هر شهر، دقیقن ۵۰۰ جاده وارد می‌شود. حال یک جمهوری مستقل که شامل ۶۶۸ شهر از ۱۰۰۱ شهر است، خودش را از کشور جدا می‌کند. ثابت کنید می‌توان از هر شهر جمهوری، بدون خارج شدن از جمهوری، به هر شهر دیگر جمهوری رسید.

## ۳.۱۲ کلاس یازدهم

۱. پرسش ۱ کلاس نهم

۲. یک آرایه‌ی مستطیلی، ۹ سطر و ۲۰۰۴ ستون دارد. در ۲۰۰۴ $\times$ ۹ خانه‌ی جدول، اعداد ۱ تا ۲۰۰۴ را، هر کدام ۹ بار، جای داده‌ایم. این کار را طوری انجام می‌دهیم که دو عدد که در یک ستون باشند، اختلاف‌شان دست بالا ۳ باشد. کمینه‌ی ممکن جمع اعداد سطر اول را بیابید.

۳. ثابت کنید مجموعه‌ای متناهی شامل بیش از $2N$ ($N > 3$) بردار دوبه‌دو ناهم‌راستا در صفحه وجود ندارد که دو شرط زیر را داشته باشد:

- برای $N$ بردار دل‌خواه از این مجموعه، هم‌واره $N - 1$ بردار دیگر در این مجموعه هستند؛ طوری که جمع این $2N - 1$ بردار، برابر با بردار صفر باشد.
- برای $N$ بردار دل‌خواه از این مجموعه، هم‌واره $N$ بردار دیگر در این مجموعه هستند؛ طوری که جمع این $2N$ بردار، برابر با بردار صفر باشد.

۴. در یک کشور، چند شهر وجود دارد. برخی از این شهرها با خطوط هوایی به هم وصل هستند؛ طوری که یک خط هوایی دو شهر را به هم وصل می‌کند و هر دو جهت پرواز، ممکن است. هر خط هوایی، متعلق به یکی از $k$ هواپیمایی است و دو خط هوایی از یک هواپیمایی، هم‌واره یک شهر مشترک دارند. نشان دهید می‌توان شهرها را به $k + 2$ گروه تقسیم کرد؛ طوری که هیچ دو شهری از یک گروه، با یک خط هوایی به هم وصل نباشند.

# فصل ۱۳

# ۲۰۰۵

## ۱.۱۳ کلاس نهم

۱. لشا، اعداد ۱ تا $۲۲^۲$ را در خانه‌های یک جدول $۲۲ \times ۲۲$ می‌نویسد. آیا الگ هم‌واره می‌تواند دو خانه‌ی مجاور ضلعی یا رأسی انتخاب کند که جمع اعداد آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر باشد؟

۲. ۳۶۵ کارت که روی آن‌ها اعداد متفاوت نوشته شده است، داده شده‌اند. می‌توان برای هر سه کارت، ترتیب اعداد آن‌ها را پرسید. آیا هم‌واره می‌توان با ۲۰۰۰ پرسش این‌چنینی، ترتیب تمام ۳۶۵ کارت را فهمید؟

۳. ۱۰۰ فرد از ۵۰ کشور (دو نفر از هر کشور)، دور یک دایره هستند. ثابت کنید می‌توان آن‌ها را به دو گروه تقسیم کرد؛ طوری که هیچ دو هم‌وطنی در یک گروه نباشند و هم‌چنین هیچ سه فرد متوالی دور دایره در یک گروه نباشند.

## ۲.۱۳ کلاس دهم

۱. در یک آرایه‌ی $n \times ۲$ اعداد حقیقی مثلت نوشته شده است. جمع اعداد هر یک از $n$ ستون، ۱ است. نشان دهید می‌توانیم یک عدد در هر ستون برگزینیم، طوری که جمع اعداد انتخاب‌شده در هر سطر، دست بالا $\frac{n+۱}{۴}$ باشد.

۲. ۱۶ خانه روی یک تخته شترنج $۸ \times ۸$ انتخاب کرده‌ایم. کمینه‌ی تعداد جفت خانه‌های هم‌سطر یا هم‌ستون چیست؟

۳. یک صفحه‌ی سفید به طور معمول، به مربع‌های واحد تقسیم شده است. تعدادی متناهی از خانه‌ها، سیاه شده‌اند. هر خانه‌ی سیاه، تعداد زوجی (۰، ۲ یا ۴) خانه‌ی مجاور (در ضلع) سفید دارد. ثابت کنید می‌توان هر خانه‌ی سفید را با سبز یا سرخ، رنگ کرد؛ طوری که هر خانه‌ی سیاه، تعداد یک‌سانی از هم‌سایه‌های سبز و قرمز داشته باشد.

## ۳.۱۳ کلاس یازدهم

۱. ۲۰۰۵ عدد متفاوت $a_۱, a_۲, ..., a_{۲۰۰۵}$ داده شده است. با یک پرسش، می‌توان سه زیروند متفاوت $۱ \leq i < j < k \leq ۲۰۰۵$ را در نظر گرفت و مجموعه‌ی اعداد $\{a_i, a_j, a_k\}$ را (البته، بدون دانستن ترتیب)، فهمید. کمینه‌ی تعداد پرسش‌ها را که برای فهمیدن تمام اعداد $a_i$ نیاز است، بیابید.

۲. ۱۰۰ فرد از ۲۵ کشور (چهار نفر از هر کشور)، دور یک دایره هستند. ثابت کنید می‌توان آن‌ها را به چهار گروه تقسیم کرد؛ طوری که هیچ دو هم‌وطنی در یک گروه نباشند و هم‌چنین هیچ دو فرد متوالی دور دایره در یک گروه نباشند.

# فصل ۱۴

# ۲۰۰۶

## ۱.۱۴ کلاس نهم

۱. یک تخته شترنج $۱۵ \times ۱۵$ داده شده است. یک خط شکسته‌ی بسته بدون این که خودش را قطع کند، می‌کشیم؛ طوری که هر یال از خط شکسته‌ی بسته، پاره‌خطی است که مرکز دو خانه‌ی مجاور تخته شترنج را به هم وصل می‌کند. اگر این خط شکسته، نسبت به یک قطر تخته شترنج، متقارن باشد، ثابت کنید طول خط شکسته، نابیش‌تر از ۲۰۰ است.

۲. دایره‌ای با ۲۰۰۶ نقطه که روی آن قرار دارند، داده شده است. آلباترس، این ۲۰۰۶ نقطه را با ۱۷ رنگ، رنگ می‌کند. سپس، فرانکینفوتر برخی از نقاط را با وترهایی به هم وصل می‌کند؛ طوری که نقاط انتهایی هر وتر، هم‌رنگ باشند و دو وتر متفاوت، نقطه‌ی مشترک (حتی در نقاط پایانی)، نداشته باشند. فرانکینفوتر در تلاش است تا حد ممکن، وتر بکشد؛ در حالی که آلباتروس در تلاش است تا حد ممکن مانع او شود. بیشینه‌ی تعداد وترهایی که فرانکینفوتر هم‌واره می‌تواند بکشد، چیست؟

۳. یک تخته شترنج $۱۰۰ \times ۱۰۰$، به دومینوها (مستطیل‌های $۲ \times ۱$) بریده شده است. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازی‌کن دو خانه‌ی مجاور را (که پیش‌تر با یک یال برشی[۱]، از هم جدا بودند)، به هم می‌چسباند. یک بازی‌کن می‌بازد، اگر پس از حرکت‌ش، تخته شترنج $۱۰۰ \times ۱۰۰$ هم‌بند شود؛ یعنی بین هر دو خانه، راهی وجود داشته باشد که هیچ یال برشی را قطع نکند. کدام بازی‌کن یک استراتژی برد دارد؛ بازی‌کن آغازکننده یا حریف‌ش؟

[۱] منظور، همان خطوط جداکننده است

## ۲.۱۴ کلاس دهم

۱. پرسش ۱ کلاس نهم

۲. پرسش ۲ کلاس نهم

۳. یک مربع $3000 \times 3000$، با دومینوها (مستطیل‌های $1 \times 2$) به روشی دل‌خواه، فرش شده است. نشان دهید می‌توان دومینوها را با سه رنگ، رنگ کرد؛ طوری که تعداد دومینوهای هر رنگ، یک‌سان باشد و هر دومینوی $d$، حداکثر دو هم‌سایه‌ی هم‌رنگ با $d$ داشته باشد (دو دومینو، *هم‌سایه* نامیده می‌شوند، اگر یک خانه از یک دومینو با یک خانه از دیگری، یال مشترک داشته باشند).

## ۳.۱۴ کلاس یازدهم

۱. روی یک مستطیل ۶۹ × ۴۹ ساخته شده با مربع‌های شبکه‌ای، تمام ۷۰ × ۵۰ نقطه‌ی شبکه‌ای، با آبی رنگ شده‌اند. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر گام، بازی‌کن دو نقطه‌ی آبی را قرمز می‌کند و یک پاره‌خط بین این دو نقطه می‌کشد (پاره‌خط‌های مختلف می‌توانند یک‌دیگر را قطع کنند). پاره‌خط به این روش کشیده می‌شوند؛ تا زمانی که تمام نقاط آبی سابق، با قرمز رنگ شوند. در این لحظه، بازی‌کن نخست، تمام پاره‌خط‌های کشیده شده را جهت‌دهی می‌کند؛ یعنی هر پاره‌خط $AB$ را که می‌گیرد؛ آن را با یکی از بردارهای $\overrightarrow{AB}$ یا $\overrightarrow{BA}$ جای‌گزین می‌کند. اگر بازی‌کن نخست موفق شود که تمام پاره‌خط‌ها را جهت‌دهی کند؛ طوری که جمع بردارهای حاصل $\vec{0}$ باشد، می‌برد؛ در غیر این صورت بازی‌کن دوم می‌برد. کدام بازی‌کن یک استراتژی برد دارد؟

۲. در یک کمپ توریستی، هر فرد دست کم ۵۰ و دست بالا ۱۰۰ دوست در میان افراد دیگرِ کمپ، دارد. نشان دهید می‌توان یک پیراهن به هر نفر داد؛ طوری که پیراهن‌ها (دست بالا) ۱۳۳۱ رنگ متفاوت داشته باشند و هر فرد ۲۰ دوست داشته باشد که پیراهن‌های آن‌ها رنگ‌های دوبه‌دو متفاوت داشته باشند.

# فصل ۱۵

# ۲۰۰۷

## ۱.۱۵ کلاس هشتم

۱. آریوتیون جادوگر و دست‌یارش، آمایاک، قصد دارند شعبده‌بازی زیر را انجام دهند: یک دایره، روی تخته در اتاق کشیده می‌شود. تماشاگران ۲۰۰۷ نقطه روی این دایره مشخص می‌کنند؛ سپس آمایاک یکی از آن‌ها را پاک می‌کند. سپس آریوتیون به اتاق می‌آید و یک نیم‌دایره مشخص می‌کند که نقطه‌ی پاک‌شده، متعلق به آن باشد. شرح دهید چگونه آریوتیون و آمایاک می‌توانند این شعبده‌بازی را انجام دهند.
(ا.آکوپیان[۱] ـ ای.بگدانف)

۲. ماتریس $\{a_{ij}\}_{i,j=۰}^{۹}, a_{ij} = ۱۰i + j + ۱$ داده شده است. آندری قصد دارد اعضای آن را با ۵۰ مستطیل $۲ \times ۱$ بپوشاند (هر چنین مستطیلی، شامل دو عضو مجاور است)؛ طوری که جمع ۵۰ ضرب[۲] این مستطیل‌ها کمینه‌ی ممکن باشد. به او کمک کنید.
(ا.بادزیان[۳])

---

[۱] A.Akopyan
[۲] ضرب دو عدد
[۳] A.Badzian

## ۲.۱۵ کلاس نهم

۱. دو بازی‌کن به نوبت در یک ($۲n + ۱$)ـضلعی منتظم ($n > ۱$)، قطر رسم می‌کنند. کشیدن یک قطر که کشیده شده است یا تعداد فردی از قطرهای کشیده‌شده را قطع می‌کند، ممنوع است. بازی‌کنی که حرکت مجاز ندارد، می‌بازد. چه کسی یک استراتژی برد دارد؟
(ک.سوخف[۴])

۲. روی هر رأس یک ۱۰۰ـضلعی کوژ، دو عدد نوشته شده است. ثابت کنید می‌توان از هر رأس، یک عدد را پاک کرد؛ طوری که اعداد باقی‌مانده در هر دو رأس مجاور، متفاوت باشند.
(ف.پترف[۵])

۳. پرسش ۲ کلاس هشتم

[۴] K.Sukhov
[۵] F.Petrov

## ۳.۱۵ کلاس دهم

۱. وجوه یک مکعب ۹ × ۹ × ۹ به مربع‌های واحد، تقسیم شده است. سطح مکعب با **۲۴۳** نوار ۲ × ۱ بدون هم‌پوشانی، پوشانده شده است. ثابت کنید تعداد نوارهای خمیده[۶] فرد است.
(ا.پلیانسکی[۷])

۲. آریوتیون و آمایاک، یک شعبده‌ی تأثیرگذار دیگر به نمایش می‌گذارند. یک تماشاگر، روی تخته یک دنباله از $N$ رقم (ده‌دهی) می‌نویسد. آمایاک با یک دیسک سیاه، دو رقم مجاور رو می‌پوشاند؛ سپس آریوتیون می‌آید و هر دو رقم را (و ترتیب‌شان) می‌گوید. برای کدام $N$ کمینه، آن‌ها می‌توانند چنین شعبده‌ای به نمایش بگذارند؟
(ک.نپ ـ او.لئونتیوا[۸])

۳. چندوجهی کوژ $F$ داده شده است. رأس $A$ از آن درجه‌ی **۵** و بقیه‌ی رأس‌ها درجه‌ی **۳** دارند. یک رنگ‌آمیزی از یال‌های $F$، *خوب* نامیده می‌شود، اگر برای هر رأس غیر $A$، تمام سه یال آن رنگ‌های متفاوت داشته باشند. آشکار شد که تعداد رنگ‌آمیزی‌های خوب بر **۵** بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید یک رنگ‌آمیزی خوب وجود دارد؛ طوری که سه یال خروجی متوالی از $A$، با یک رنگ، رنگ شده باشند.
(د.کارپف)

---

[۶] تا شده
A.Poliansky[۷]
O.Leontieva[۸]

## ۴.۱۵ کلاس یازدهم

۱. پرسش ۲ کلاس دهم

۲. پرسش ۲ کلاس نهم

۳. گراف بدون جهت $G$ با $N$ رأس داده شده است. برای هر مجموعه از $k$ رأس $(1 \leq k \leq N)$، دست بالا $2k - 2$ وجود دارند که رأس‌های این مجموعه را به هم وصل می‌کنند. ثابت کنید یال‌ها می‌توانند با دو رنگ، رنگ شوند؛ طوری که هر دور، شامل یال‌هایی از هر دو رنگ باشد (گراف می‌تواند یال‌های چندگانه داشته باشد).

# فصل ۱۶

# ۲۰۰۸

## ۱.۱۶ کلاس نهم

۱. فاصله‌ی بین دو خانه از یک تخته شترنج نامتناهی، کمینه‌ی تعداد حرکات مورد نیاز برای آن که یک شاه از یکی به دیگری برود، تعریف می‌شود. سه خانه با فواصل دوبه‌دوی برابر با ۱۰۰، انتخاب شده‌اند. چند خانه وجود دارد که فاصله‌ی آن از هر یک از این سه خانه، ۵۰ باشد؟

۲. $۳^{۲k}$ سکه‌ی مشابه داده شده است. یکی از آن‌ها تقلبی و سبک‌تر از دیگران است. هم‌چنین سه ترازوی مشابه بدون وزنه که یکی از آن‌ها شکسته[۱] است، داریم. چگونه می‌توانیم در $۳k + ۱$ توزین، سکه‌ی تقلبی را بیابیم؟

[۱] ترازوی شکسته، گاهی درست و گاهی نادرست کار می‌کند

## ۲.۱۶ کلاس دهم

۱. ستون‌های یک تخته‌ی $n \times n$ با ۱ تا $n$، نشان‌دار شده‌اند. اعداد ۱, ۲, ..., $n$ در جدول، آرایش یافته‌اند؛ طوری که اعداد هر سطر و اعداد هر ستون، دوبه‌دو متفاوت‌اند. به یک خانه خوب گوییم، اگر عدد آن از نشان ستونش بیش‌تر باشد. برای چه $n$هایی یک آرایش وجود دارد که در آن هر سطر شامل تعداد یک‌سانی عدد خوب باشد؟

۲. روی صفحه‌ی مختصات، چند مستطیل با اضلاع موازی محورهای مختصات، کشیده شده‌اند. فرض کنید هر دو مستطیل، می‌توانند با یک خط افقی یا عمودی، قطع شوند. نشان دهید می‌توان یک خط افقی و یک خط عمودی کشید؛ طوری که هر مستطیل با دست کم یکی از این دو خط، قطع شود.

## ۳.۱۶ کلاس یازدهم

۱. در یک تورنمنت شترنج، $2n+3$ بازی‌کن، شرکت کرده‌اند. هر دو بازی‌کن، دقیقن یک مسابقه می‌دهند. جدول زمان‌بندی مسابقات؛ طوری است که هیچ دو مسابقه‌ای در یک زمان برگزار نمی‌شوند و هر بازی‌کن، پس از شرکت در یک مسابقه، در دست کم $n$ مسابقه‌ی (متوالی) بعد، آزاد است[۲]. ثابت کنید یکی از بازی‌کنان که در مسابقه‌ی افتتاحیه شرکت می‌کند، در مسابقه‌ی اختتامیه نیز شرکت خواهد کرد.

[۲] شرکت نمی‌کند

# فصل ۱۷

# ۲۰۰۹

## ۱.۱۷ کلاس نهم

۱. $n$ فنجان دور یک دایره آرایش یافته‌اند. زیر یکی از فنجان‌ها، یک سکه پنهان شده است. در هر حرکت،اجازه داده شده است ۴ فنجان را انتخاب کنیم و زیر آن‌ها را ببینیم. سپس فنجان‌ها به جای سابق برمی‌گردند و سکه به یکی از دو فنجان مجاور می‌رود. کمینه‌ی تعداد حرکت‌هایی که نیاز داریم تا سرانجام بفهمیم سکه کجاست، چیست؟

۲. آیا اعداد طبیعی می‌توانند با ۲۰۰۹ رنگ، رنگ شوند، اگر بدانیم هر رنگ نامتناهی عدد صحیح را رنگ می‌کند و نتوانیم سه عدد که با رنگ‌های مختلف رنگ شده‌اند، پیدا کنیم که ضرب دو تا از آن‌ها برابر با سومی باشد؟

۳. هر یک از هشت خانه‌ی قطر یک تخته شترنج را یک حصار می‌نامیم. یک مهره‌ی رخ روی تخته شترنج حرکت می‌کند؛ طوری که روی هر خانه بیش از یک بار نمی‌رود و هرگز روی خانه‌های حصار نمی‌رود. بیشینه‌ی تعداد دفعاتی که رخ از حصارها می‌پرد، چیست[۱]؟

[۱] در این سوال مهره‌ی رخ مانند حرکاتش در بازی شترنج، حرکت می‌کند

## ۲.۱۷ کلاس دهم

۱. ۲۰۰۹ عدد صحیح نامنفی نابزرگ‌تر از ۱۰۰، روی یک دایره هستند. اگر دو عدد کنار یک‌دیگر نشسته باشند، می‌توانیم هر دوی آن‌ها را ۱ واحد افزایش دهیم. ما می‌توانیم این کار را دست بالا $k$ بار انجام دهیم. کمینه‌ی $k$ چیست؛ طوری که بتوان تمام اعداد دایره را برابر کرد؟

۲. درخت متناهی $T$ و یک‌ریختی $f: T \longrightarrow T$ داده شده‌اند. ثابت کنید رأس $a$ وجود دارد؛ طوری که $f(a) = a$ یا این که دو رأس مجاور $a, b$ وجود دارند؛ طوری که $f(a) = b$ و $f(b) = a$ باشد.

## ۳.۱۷ کلاس یازدهم

۱. در یک کشور، چند شهر وجود دارد که با جاده‌هایی به هم وصل شده‌اند. جاده‌ها تنها در شهرها یک‌دیگر را ملاقات می‌کنند. در هر شهر، تخته‌ای وجود دارد که طول کوتاه‌ترین جاده که از آن شهر آغاز می‌شود و از تمام شهرهای دیگر می‌گذرد، نوشته شده است (جاده می‌تواند بیش از یک بار از شهرها بگذرد و لزومی ندارد به شهر مبدأ بازگردد). ثابت کنید ۲ عدد تصادفی در تخته‌ها وجود ندارد که یکی بزرگ‌تر از ۱٫۵ برابر دیگری باشد.

۲. مجموعه‌ی $M$ از نقاط $(x, y)$ با مختصات صحیح با شرط $x^۲+y^۲ \leq ۱۰^{۱۰}$ داده شده است. دو بازی‌کن یک بازی انجام می‌دهند که حرکات نسبتن پیش‌رفته‌ای انجام می‌دهند. یکی از آن‌ها یک نقطه را در حرکت نخست‌ش، نشان‌دار می‌کند. سپس در هر حرکت، بازی‌کن حرکت‌کننده یک نقطه را که نشان‌دار نشده است، نشان‌دار می‌کند و آن را به نقطه‌ی نشان‌دار پیشین وصل می‌کند. بنابراین، آن‌ها یک خط شکسته می‌سازند. خواسته شده که طول یال‌های این خط شکسته، اکیدن افزایش یابد. بازی‌کنی که نتواند حرکت کند، می‌بازد. چه کسی یک استراتژی برد دارد؟

۳. $k$ مهره‌ی رخ روی یک تخته شترنج $۱۰ \times ۱۰$ هستند. تمام خانه‌هایی که یک رخ می‌تواند آن‌ها را بزند، نشان‌دار می‌کنیم (فرض می‌کنیم خانه‌ای که رخ در آن هست نیز توسط رخ زده می‌شود). بیشینه‌ی مقدار $k$ چیست؛ طوری که اتفاق زیر برای آرایشی از $k$ رخ، روی دهد: پس از برداشتن هر رخ از تخته شترنج، دست کم یک خانه‌ی نشان‌دار وجود داشته باشد که با هیچ یک از رخ‌های باقی‌مانده، زده نشود.

# فصل ۱۸

# ۲۰۱۰

## ۱.۱۸ کلاس نهم

۱. ۲۴ مداد متفاوت از ۴ رنگ مختلف، ۶ مداد از هر رنگ وجود دارد. آن‌ها به ۶ بچه داده می‌شوند؛ طوری که هر کدام ۴ مداد می‌گیرند. کمینه‌ی تعداد بچه‌هایی که اگر تصادفن انتخاب کرد، مطمئن باشیم که مدادهایی از تمام رنگ‌ها دارند، چیست؟

۲. ۱۰۰ عدد حقیقی متفاوت تصادفی، روی ۱۰۰ نقطه از یک دایره هستند. ثابت کنید هم‌واره می‌توان ۴ نقطه‌ی متوالی انتخاب کرد؛ طوری که جمع دو عدد بیرونی بزرگ‌تر از جمع دو عدد درونی باشد.

۳. ۱۰۰ سیب با مجموع وزن ۱۰ کیلوگرم روی میز است. هر سیب ناکم‌تر از ۲۵ گرم، وزن دارد. سیب‌ها باید برای ۱۰۰ بچه، برش داده شوند؛ طوری که هر یک از بچه‌ها، ۱۰۰ گرم بگیرد. ثابت کنید می‌توان این کار را انجام داد؛ طوری که هر قطعه ناکم‌تر از ۲۵ گرم وزن داشته باشد.

۴. هر یک از ۱۰۰۰ شیطانک یک کلاه (از درون قرمز و از بیرون آبی یا بالعکس) دارند. یک شیطانک با کلاهی که بیرونش قرمز است، فقط دروغ می‌گوید و یک شیطانک با کلاهی که بیرونش آبی است، فقط راست می‌گوید. یک روز هر شیطانک به هر شیلطانک دیگر گفت، بیرون کلاه تو قرمز است. در طول روز، برخی از شیطانک‌ها، کلاه‌شان را در زمانی از روز، پشت و رو کردند (یک شیطانک می‌تواند این را بیش از یک بار انجام دهد). کمینه‌ی ممکن تعداد بارهایی که کلاهی پشت و رو شده است، چیست؟

## ۲.۱۸ کلاس دهم

۱. ۴۰ مداد متفاوت از ۴ رنگ مختلف، ۱۰ مداد از هر رنگ وجود دارد. آن‌ها به ۱۰ بچه داده می‌شوند؛ طوری که هر کدام ۴ مداد می‌گیرند. کمینه‌ی تعداد بچه‌هایی که اگر تصادفی انتخاب کرد، مطمئن باشیم که مدادهایی از تمام رنگ‌ها دارند، چیست؟

۲. پرسش ۲ کلاس نهم

۳. در هر مربع واحد از یک مربع $۱۰۰ \times ۱۰۰$، یک عدد طبیعی نوشته شده است. مستطیلی با اضلاع موازی اضلاع مربع، خوب نامیده می‌شود، اگر جمع اعداد درون مستطیل، برا ۱۷ بخش‌پذیر باشد. تمام مربع‌های واحدی را که در یک مستطیل خوب هستند، رنگ می‌کنیم. بیشینه‌ی $d$ را بیابید؛ طوری که مطمئن باشیم دست کم $d$ خانه را رنگ می‌کنیم.

۴. در یک کشور، برخی از جفت شهرها با خطوط هوایی بدون توقف به هم وصل شده‌اند. از هر شهر می‌توان به هر شهر دیگر پرواز کرد (ممکن است با بیش از یک پرواز مستقیم). اگر هر مسیر دوری (شهرهای آغازین و پایانی یک‌سان‌اند) را در نظر بگیریم که شامل تعداد فردی پرواز باشد؛ سپس تمام پروازهای این مسیر را غیرفعال کنیم، می‌توان دو شهر پیدا کرد؛ طوری که نتوان از یکی به دیگری پرواز کرد. ثابت کنید می‌توان کل کشور را به ۴ ناحیه تقسیم کرد؛ طوری که هر پرواز، دو شهر از ناحیه‌های مختلف را به هم وصل کند.

## ۳.۱۸ کلاس یازدهم

۱. روی یک جدول $n \times n$ که $n \geq 4$، $n$ علامت $+$ در خانه‌های یک قطر هستند و روی بقیه‌ی خانه‌ها، یک علامت $-$ هست. می‌توان تمام علامت‌هایی که در یک سطر یا یک ستون هستند را از $-$ به $+$ و از $+$ به $-$ تغییر داد. ثابت کنید همواره پس از متناهی حرکت، $n$ یا بیش‌تر علامت $+$ خواهیم داشت.

۲. در یک مدرسه‌ی تاریخی، ۹ درس، ۵۱۲ دانش‌آموز و ۲۵۶ اتاق (دو نفر در هر اتاق) وجود دارد. برای هر دانش‌آموز، زیرمجموعه‌ای از درس‌ها وجود دارد که دانش‌آموز به آن‌ها علاقه‌مند است. هر دانش‌آموز، زیرمجموعه‌ای متفاوت از سایر دانش‌آموزان، از درس‌ها دارد. ثابت کنید تمام دانش‌آموزان مدرسه می‌توانند دور یک دایره جای گیرند؛ طوری که هر دو هم‌اتاقی کنار هم ایستاده باشند و دانش‌آموزانی که کنار هم ایستاده‌اند و هم‌اتاقی نیستند، شرط زیر را داشته باشند: یکی دو دانش‌آموز، به تمام درس‌هایی که دانش‌آموز دیگر علاقه دارد، علاقه داشته باشد و هم‌چنین به یک درس دیگر نیز علاقه داشته باشد.

# فصل ۱۹

# ۲۰۱۱

## ۱.۱۹ کلاس نهم

۱. یک ۲۰۱۱ـضلعی کوژ روی تخته کشیده شده است. پیتر قطرهای آن را یکی‌یکی رسم می‌کند؛ طوری که هر قطر جدیدی که رسم می‌شود، بیش‌تر از یکی از قطرهای کشیده‌شده را قطع نمی‌کند. بیشینه‌ی تعداد قطرهایی که پیتر می‌تواند بکشد، چیست؟

۲. چند مهره در برخی خانه‌های یک تخته‌ی ۱۰۰ × ۱۰۰ وجود دارد. خانه‌ای را خوب گوییم، اگر تعداد زوجی مهره با آن مجاور در ضلع باشد. آیا ممکن است فقط یک خانه خوب باشد؟

## ۲.۱۹ کلاس دهم

۱. در هر خانه‌ی یک جدول با $n$ سطر و ده ستون، یک رقم نوشته شده است. می‌دانیم برای هر سطر $A$ و دو ستون، همواره می‌توان یک سطر یافت که در خانه‌های برخورد با آن دو ستون، رقم‌های متفاوت داشته باشد. ثابت کنید $n \geq$ ۵۱۲ است.

۲. گراف $G$، ۳ـ رنگ‌پذیر نیست. ثابت کنید این گراف می‌تواند به ۲ گراف $M, N$ تقسیم شود؛ طوری که $M$، ۲ـ رنگ‌پذیر و $N$، ۱ـ رنگ‌پذیر نباشد.
(و.دلنیکف)

۳. یک تخته‌ی ۲۰۱۰ × ۲۰۱۰ به کاشی‌های سه‌خانه‌ای گوشه‌شکل[1] تقسیم شده است. ثابت کنید می‌توان از هر کاشی، یک خانه را نشان‌دار کرد؛ طوری که هر سطر و هر ستون، تعداد یک‌سانی از خانه‌های نشان‌دار داشته باشند.
(ای.بگدانف ـ او.پلدیپسکی)

[1] مربعی ۲ × ۲ که یک گوشه‌ی آن برداشته شده باشد

## ۳.۱۹ کلاس یازدهم

۱. ۹۹۹ دانش‌مند داریم. هر دو دانش‌مند، دقیقن یک موضوع مورد علاقه‌ی مشترک دارند و برای هر موضوع، دقیقن ۳ دانش‌مند هستند که به آن موضوع، علاقه دارند. ثابت کنید می‌توان ۲۵۰ موضوع را انتخاب کرد؛ طوری که هر دانش‌مند به دست بالا یکی از آن‌ها علاقه‌مند باشد. (ا.ماگازینف[۲])

۲. بیش از $n^۲$ سنگ روی میز وجود دارد. پیتر و واسیا یک بازی را انجام می‌دهند. پیتر آغاز می‌کند. در هر نوبت، بازی‌کن می‌تواند به تعداد یک عدد اول کم‌تر از $n$ یا مضربی از $n$ یا ۱ سنگ بردارد (البته، بازی‌کن باید دست کم ۱ سنگ بردارد). ثابت کنید پیتر هم‌واره می‌تواند آخرین سنگ را بردارد (بدون در نظر گرفتن استراتژی واسیا).

---

A.Magazinov[۲]

# فصل ۲۰

# ۲۰۱۲

## ۱.۲۰ کلاس نهم

۱. یک ۲۰۱۲ـضلعی منتظم در یک دایره محاط شده است. بیشینه‌ی $k$ را بیابید؛ طوری که بتوان $k$ رأس از ۲۰۱۲ رأس انتخاب کرد و یک $k$ـضلعی کوژ بدون اضلاع موازی ساخت.

۲. ۱۰۱ مرد دانا دور یک دایره ایستاده‌اند. هر یک از آن‌ها اعتقاد دارد زمین دور مشتری می‌گردد یا اعتقاد دارد مشتری دور زمین می‌گردد. ناگهان، تمام مردان دانا عقایدشان را هم‌زمان بیان کردند. درست پس از آن، هر مرد دانا که بین دو نفر با عقاید متفاوت با او باشد، عقیده‌اش را تغییر می‌دهد[۱] و بقیه تغییری نمی‌دهند. ثابت کنید در یک لحظه، تغییر عقیده‌ها متوقف خواهد شد.

۳. در یک سیستم اتوبوس‌رانی، هر دو مسیر دقیقن در یک ایست‌گاه مشترک هستند و هر مسیر شامل دست کم چهار ایست‌گاه است. ثابت کنید ایست‌گاه‌ها می‌توانند به دو گروه، دسته‌بندی شوند؛ طوری که هر مسیر، شامل ایست‌گاه‌هایی از هر دو گروه باشد.

[۱] هر دقیقه آن‌ها این کار را هم‌زمان انجام می‌دهند

## ۲.۲۰ کلاس دهم

۱. پرسش ۲ کلاس نهم

## ۳.۲۰ کلاس یازدهم

۱. در ابتدا، ۱۱۱ تکه کلوخ با جرم برابر، روی میز هستند. در یک حرکت، می‌توان چند گروه با تعداد تکه‌های برابر از کلوخ‌ها انتخاب کرد و در هر گروه، تکه‌ها را به هم ملحق کرد و یک تکه‌ی بزرگ‌تر ساخت. کمینه‌ی تعداد حرکات که پس از آن ۱۱ تکه داشته باشیم که هیچ دوتایی جرم برابر نداشته باشند، چیست؟

۲. $۲n + ۱$ نقطه روی یک دایره هستند و آن را به کمان‌های برابر تقسیم کرده‌اند ($n \geq ۲$). دو بازی‌کن با هم بازی می‌کنند و در هر نوبت، یک نقطه پاک می‌کنند. اگر پس از نوبت یک بازی‌کن، تمام مثلث‌هایی که با نقاط باقی‌مانده‌ی روی دایره شکل می‌گیرند، باز[۲] باشند، بازی‌کن می‌برد و بازی پایان می‌یابد. چه کسی یک استراتژی برد دارد: بازی‌کن آغازکننده یا حریف‌ش؟

---

[۲] مثلث باز، مثلثی است که یک زاویه‌ی باز داشته باشد

# فصل ۲۱

# ۲۰۱۳

## ۱.۲۱ کلاس نهم

۱. $N$ خط روی یک صفحه قرار دارند که هیچ دوتایی موازی و هیچ سه‌تایی هم‌رس نیستند. ثابت کنید یک خط شکسته‌ی بسته‌ی $A_\circ A_1 A_2 \dots A_N$ که خودش را قطع نمی‌کند با $N$ قسمت وجود دارد؛ طوری که روی هر یک از $N$ خط، دقیقن یکی از $N$ پاره‌خط از خط شکسته، منطبق باشد.

۲. $2n$ عدد حقیقی با جمع مثبت دور یک دایره قرار دارند. برای هر یک از اعداد، می‌توان دید دو مجموعه‌ی $n$ عضوی وجود دارد؛ طوری که آن عدد در انتهای آن باشد[۱]. ثابت کنید دست کم یک عدد وجود دارد که جمع اعداد هر دو مجموعه‌اش مثبت باشد.

۳. روی یک شبکه‌ی مربعی $55 \times 55$، ۵۰۰ مربع واحد و ۴۰۰ قطعه‌ی $L$ـمانند شامل ۳ مربع واحد[۲]، برداشته می‌شود. ثابت کنید دست کم دو تا از قطعات برداشته شده، قبل از برداشتن، مجاور[۳] بوده‌اند.

[۱] در واقع یکی از این دو مجموعه، $n$ عدد کنار آن عدد در جهت ساعت‌گرد (شامل خود عدد) و دیگری مانند قبلی در جهت پادساعت‌گرد است. در واقع فقط عدد روبه‌روی آن عدد است که در هیچ یک از این دو مجموعه نیست.

[۲] مربعی $2 \times 2$ که یک گوشه‌اش برداشته شده است

[۳] در دست کم یک یال

## ۲.۲۱ کلاس یازدهم

۱. روی ۲۰۱۳ کارت، ۲۰۱۳ عدد متفاوت نوشته شده است. کارت‌ها را به پشت می‌گذاریم تا اعداد دیده نشوند. در یک حرکت اجازه داده شده است که ده کارت را برگزینیم و یکی از اعداد نوشته شده روی آن‌ها، گزارش داده می‌شود (نمی‌دانیم کدام‌شان). برای چه $\omega$ مطمئن، می‌توانیم $\omega$ داشته باشیم که بدانیم روی هر یک، چه عددی نوشته شده است؟

۲. ۱۰۱ عدد متفاوت از میان اعداد صحیح بین ۰ و ۱۰۰۰ انتخاب شده است. ثابت کنید در میان اندازه‌های تفاضل‌های دوبه‌دوی آن‌ها، ده عدد متفاوت وجود دارد که از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کنند.

۳. پادشاه مینت، می‌خواهد ۱۲ سکه را مقداردهی کند (هر کدام، به مقدار یک عدد طبیعی، روبل[۴])؛ طوری که هر مقداری از ۱ تا ۶۴۵۳ روبل، با نابیش‌تر از ۸ سکه، بتواند پرداخت شود. آیا او می‌تواند این کار را انجام دهد؟

---

[۴] واحد پول روسیه