پاسخ‌های تمرین‌های ترکیبیات

جلسه‌ی سوم و چهارم ـ احتمال و امید ریاضی

۱. اگر ما نخستین توپی را که از هر رنگ می‌بینیم، برداشته و بقیه را دور بیندازیم، در تمام حالاتی که از هر رنگ دست کم یک توپ وجود دارد، برنده خواهیم شد. در حالاتی که تمام توپ‌ها هم‌رنگ باشند نیز امکان برنده شدن به هیچ عنوان وجود ندارد. پس استراتژی ما بهینه است و احتمال برد در آن برابر $1 - \frac{1}{2^{1394}}$ است.

۲. پاسخ در کلاس ارایه شد و مقدار $\frac{1+(0/2)^{2016}}{4}$ به دست آمد.

۳. احتمال دیدن عدد m با شروع از عدد $n > m$ را $p(n,m)$ می‌نامیم. ثابت می‌کنیم $p(n,m)$ برابر $\frac{1}{m+1}$ است. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای پایه، $n = m + 1$ را در نظر می‌گیریم که به وضوح $f(m+1,m)$ برابر $\frac{1}{m+1}$ است. فرض کنید حکم به ازای $< n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n نیز برقرار است. داریم:

$$p(n,m) = \frac{1}{n} \times p(n-1,m) + \frac{1}{n} \times p(n-2,m) + \ldots + \frac{1}{n} \times p(m+1,m) + \frac{1}{n} \times 1$$

که طبق فرض استقرا داریم:

$$p(n,m) = (n-m)\frac{1}{n} \times \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1}$$

پس حکم استقرا ثابت شد. با استفاده از این حکم، پاسخ سوال برابر $\frac{1}{2} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{101} \times \frac{1}{1001}$ است.

توجه: پاسخ $\frac{1}{16}$ برای این مسئله نادرست است؛ زیرا دنباله‌هایی که رخ می‌دهند، هم‌احتمال نبوده و حق نداریم تعداد حالات مطلوب را بر کل حالات تقسیم کنیم.

۴. فرض کنید دو بیت داریم که هر کدام به احتمال برابر می‌توانند ۰ یا ۱ باشند. فضای نمونه‌ی ما شامل ۴ حالت $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ است که هر کدام از حالات، احتمال $\frac{1}{4}$ دارند. دو متغیر تصادفی زیر روی این فضای نمونه‌ی را در نظر بگیرید:

$$X = \text{بیت یکم} \qquad Y = \text{بیت دوم}$$

متغیر تصادفی $Z = X \oplus Y$ را نیز در نظر بگیرید. به ازای هر $a,b,c \in \{0,1\}$ داریم:

$$P[X=a] = \frac{1}{2} \qquad P[Y=b] = \frac{1}{2} \qquad P[Z=c] = \frac{1}{2}$$

زیرا هر کدام از احتمال‌های بالا، دقیقن دو حالت مطلوب از چهار حالت فضای نمونه را دارند. از طرفی به ازای هر $a,b,c \in \{0,1\}$ داریم:

$$P[X=a, Y=b] = \frac{1}{4} \qquad P[X=a, Z=c] = \frac{1}{4} \qquad P[Y=b, Z=c] = \frac{1}{4}$$

زیرا هر کدام از احتمال‌های بالا، دقیقن یک حالت مطلوب از چهار حالت فضای نمونه را دارند. پس متغیرهای تصادفی گفته شده، دوبه‌دو مستقل هستند. امّا داریم

$$P[X=۰, Y=۰, Z=۱] = ۰ \neq \frac{۱}{۸} = P[X=۰] \times p[Y=۰] \times p[Z=۱]$$

پس این سه متغیر تصادفی با هم مستقل نیستند.

۵. متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که به هر جایگشت، تعداد اعداد آقابالاسر آن را نسبت می‌دهد. حال متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} ۰ & \text{اگر عدد } i \text{ ام جایگشت، آقابالاسر نباشد} \\ ۱ & \text{اگر عدد } i \text{ ام جایگشت، آقابالاسر باشد} \end{cases}$$

داریم:

$$E[X_i] = ۱ \times P[X_i = ۱] + ۰ \times P[X_i = ۰] = P[X_i = ۱] = \frac{\binom{n}{i}(i-۱)!(n-i)!}{n!} = \frac{۱}{i}$$

از طرفی برای هر پیشامد داریم:

$$X = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n$$

طبق قضیه می‌دانیم امید ریاضی جمع چند متغیر تصادفی برابر با جمع امید ریاضی آن‌هاست (حتی اگر مستقل نباشند). پس:

$$E[X] = E[X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n] = E[X_۱] + E[X_۲] + \ldots + E[X_n] = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i} = H_n \in \theta(lg\ n)$$

۶. متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که به هر پیشامد، ارزش ملّی باقی‌مانده را نسبت می‌دهد. حال متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } i \nmid n \text{ یا اثر } i \text{ ام سالم نماند} \\ \frac{\varphi(i)}{p^{\varphi(i)}} & \text{اگر } i|n \text{ و اثر } i \text{ ام سالم بماند} \end{cases}$$

اگر $i|n$، احتمال سالم ماندن اثر i ام برابر $\big(۱-(۱-p)\big)^{\varphi(i)} = p^{\varphi(i)}$ داریم:

$$E[X_i] = \frac{\varphi(i)}{p^{\varphi(i)}} \times P[\text{سالم ماندن اثر } i] + ۰ \times P[\text{سالم نماندن اثر } i] = \varphi(i)$$

از طرفی برای هر پیشامد داریم:

$$X = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n$$

طبق قضیه می‌دانیم امید ریاضی جمع چند متغیر تصادفی برابر با جمع امید ریاضی آن‌هاست (حتی اگر مستقل نباشند). پس:

$$E[X] = E[X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n] = E[X_۱] + E[X_۲] + \ldots + E[X_n] = \sum_{i|n} \varphi(i)$$

که طبق قضیه این مقدار برابر n است.

توجه: در سالی که این سوال در آزمون ترکیبیات آمد، این قضیه در جلسات کلاس اثبات شده بود و نیازی به اثبات آن در امتحان نبود؛ امّا در حالت عادی باید اثبات شود و شما می‌توانید این قضیه را با استقرا روی n به راحتی اثبات کنید.

۷. تعداد جایگشت‌های دلواپسی که عدد n ام در مکان k باشد که $n \leq k < ۲n - ۱$، برابر با $۲\binom{n-۱}{k-n} \times (k-۱)!(۲n-۱-k)!$ است.

اگر هم n در مکان آخر جایگشت باشد، حتمن جایشگت دلواپس است. پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{۱}{۲n-۱} + \sum_{k=n}^{۲n-۲} \frac{۲\binom{n-۱}{k-n} \times (k-۱)!(۲n-۱-k)!}{(۲n-۱)!} \\
&= \frac{۱}{۲n-۱} + \sum_{k=n}^{۲n-۲} \frac{۲.\frac{(n-۱)!}{(k-n)!(۲n-۱-k)!} \times (k-۱)!(۲n-۱-k)!}{(۲n-۱)!} \\
&= \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۲(n-۱)!}{(۲n-۱)!} \sum_{k=n}^{۲n-۲} \frac{(k-۱)!}{(k-n)!} \times \frac{(n-۱)!}{(n-۱)!} \\
&= \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۲(n-۱)!(n-۱)!}{(۲n-۱)!} \sum_{k=n}^{۲n-۲} \binom{k-۱}{n-۱} \\
\text{طبق اتحاد چوشی‌چی} &= \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۲(n-۱)!(n-۱)!}{(۲n-۱)!} \binom{۲n-۲}{n} \\
&= \frac{۱}{۲n-۱} + \frac{۲(n-۱)}{n \times (۲n-۱)} = \frac{n+۲(n-۱)}{n(۲n-۱)} = \frac{۳n-۱}{۲n^۲-n}
\end{aligned}$$

توجه: نیازی به اثبات اتحاد چوشی‌چی نیست. هم‌چنین توجه کنید این سوال راه حل ساده‌تری با تناظر یک به چند دارد!