امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۸۴/۱۰/۲۰

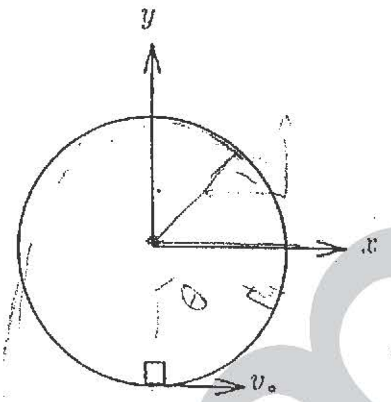
وقت: ۳/۵ ساعت

۱ـ شکل، مقطع یک لوله استوانه‌ای صیقلی به شعاع a را نشان می‌دهد. جسم کوچکی از پایین‌ترین نقطه با سرعت اولیه v_0 در امتداد سطح داخلی و موازی محور x پرتاب می‌شود.

آ) به ازای چه مقادیری از v_0، جسم قبل از رسیدن به بالاترین نقطه‌ی مسیر از سطح جدا می‌شود؟

ب) به ازای $v_0 = 2\sqrt{ag}$ زمان طی مسیر بین نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی جدا شدن چقدر طول می‌کشد؟

پ) بعد از جدا شدن جسم از سطح لوله چه مدت طول می‌کشد تا دوباره به سطح لوله برخورد کند؟

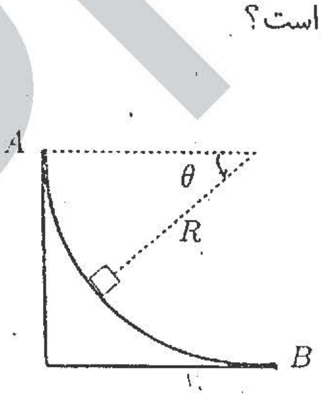


۲ـ مانند شکل، مکعب کوچکی به جرم m از نقطه‌ی A بر روی یک سطح استوانه‌ای ثابت به شعاع R رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین مکعب و سطح μ_k است.

آ) معادلات حرکت جسم را در وضعیت دلخواهی که مکعب در زاویه θ است، بنویسید.

با توجه به اینکه $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$، (که v سرعت مکعب در لحظه‌ی دلخواه t است) معادله حاکم بر سرعت در وضعیت θ را بدست آورید.

ب) سرعت جسم در نقطه‌ی B چقدر است؟



۴۸

۸۴/۱۰/۲۰ امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

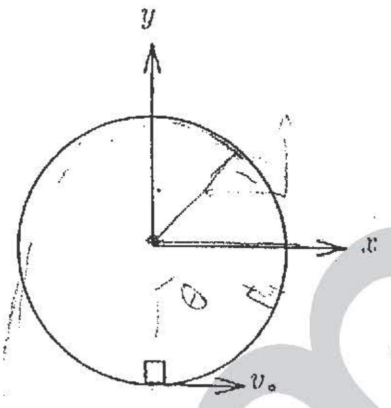
وقت: ۳/۵ ساعت

۱ـ شکل، مقطع یک لوله استوانه‌ای صیقلی به شعاع a را نشان می‌دهد. جسم کوچکی از پایین‌ترین نقطه با سرعت اولیه v_0 در امتداد سطح داخلی و موازی محور x پرتاب می‌شود.

آ) به ازای چه مقادیری از v_0، جسم قبل از رسیدن به بالاترین نقطه‌ی مسیر از سطح جدا می‌شود؟

ب) به ازای $v_0 = 2\sqrt{ag}$ زمان طی مسیر بین نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی جدا شدن چقدر طول می‌کشد؟

پ) بعد از جدا شدن جسم از سطح لوله چه مدت طول می‌کشد تا دوباره به سطح لوله برخورد کند؟

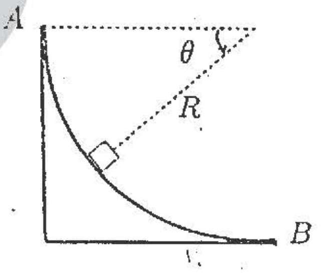


۲ـ مانند شکل، مکعب کوچکی به جرم m از نقطه‌ی A بر روی یک سطح استوانه‌ای ثابت به شعاع R رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین مکعب و سطح μ_k است.

آ) معادلات حرکت جسم را در وضعیت دلخواهی که مکعب در زاویه θ است، بنویسید.

با توجه به اینکه $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$، (که v سرعت مکعب در لحظه‌ی دلخواه t است) معادله حاکم بر سرعت در وضعیت θ را بدست آورید.

ب) سرعت جسم در نقطه‌ی B چقدر است؟



۴۸

در صورت نیاز:

$$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1-\cos ax}{\sin ax}\right), \qquad \int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+\sin ax}{\cos ax}\right)$$

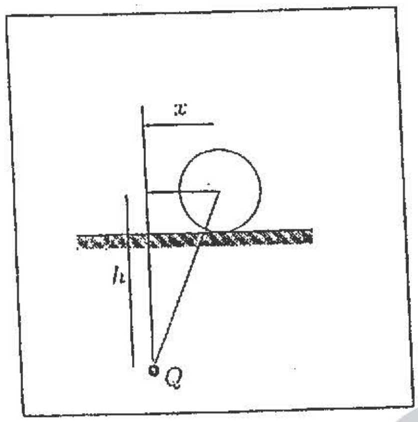
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}, \qquad \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$e^{x}\left(\frac{dy}{dx}+y\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x}y\right)$$

۳ـ گلوله‌ای به شعاعِ R، جرمِ m، بارِ q و لختیِ دورانیِ I رویِ سطحی با ضریبِ اصطکاکِ μ قرار دارد. هم بار و هم جرمِ گلوله یک‌نواخت توزیع شده‌اند. مطابقِ شکل، در فاصله‌ی $h - R$ زیرِ سطحِ افقی بارِ Q ثابت شده است. بارِ Q را تقریباً نقطه‌ای بگیرید. از تابشِ بارِ q در اثرِ حرکت نیز صرفِ نظر کنید.

الف– با فرضِ $h \gg x$، بسامدِ نوسان‌هایِ کوچکِ گلوله را به دست آورید. فرض کنید شرطِ غلتش هم‌واره برقرار است.

ب– حداقل مقدارِ μ چه‌قدر باشد تا شرطِ غلتش هم‌واره برقرار باشد؟



ذره‌ی بارداری تحتِ تأثیرِ یک نیرویِ کولنی مرکزی و هم‌چنین یک میدانِ الکتریکیِ یک‌نواخت قرار دارد.

$$U(\vec{r}) = -\alpha/r - \vec{S}\cdot\vec{r}$$

نشان دهید که M

$$M := \vec{S}\cdot(\vec{v}\times\vec{L}) + A(\vec{S}\cdot\vec{r})/r + B(\vec{S}\times\vec{r})\cdot(\vec{S}\times\vec{r})$$

به ازایِ مقادیرِ معینی از ثابت‌هایِ A و B ثابتِ حرکت است. $\vec{v}$ سرعتِ ذره و $\vec{L}$ تکانه‌یِ زاویه ای ذره است. این مقادیرِ خاص برایِ A و B را به دست آورید.

$\boxed{4}$ یک القاگر را درنظر بگیرید که خود القایی آن (L) تابع پارامتر x است. x از جنس طول است، متناظر با پارامتر x، این القاگر یک انرژی جنبشی دارد به شکل $\frac{1}{2}M\dot{x}^2$، که M ثابت است، و یک انرژی پتانسیل، $U(x)$.

الف- انرژی کل این سیستم را برحسب شار مغناطیسی القاگر، x، و پارامترها و تابع‌های داده شده بنویسید.

ب- فرض کنید دو سر القاگر اختلاف پتانسیل V برقرار است. توان الکتریکی وارد شده به القاگر را بنویسید و از آن جا نیروی متناظر با x (یعنی $M\ddot{x}$) را حساب کنید (برحسب شار و پارامترها و ثابت‌های داده شده).

ج- فرض کنید سیستم با شار ϕ_0 در نقطه‌ی x_0 در حالت تعادل است. چه شرطی باشد تا این تعادل پایدار باشد؟ (می‌توانید شرط را برحسب L^{-1} به جای L بیان کنید.)

د- فرض کنید شار از مقدار ϕ_0 به $\phi_0+\Delta\phi$ تغییر کند. x جدید تعادل را تا مرتبه‌ی یک نسبت به $\Delta\phi$ حساب کنید.

هـ- فرض کنید علاوه بر نیروهای بالا، یک نیروی دیگر هم باشد که به شکل $-\alpha\dot{x}$ است، که α ثابت است. در $t<0$، سیستم در حالت تعادل $\phi=\phi_0$ و $x=x_0$ است. در $t=0$، ϕ به $\phi_0+\Delta\phi$ تبدیل می‌شود و $\Delta\phi$ ثابت است. معادله‌ی دیفرانسیل برای $y=x-x_0$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به y و مشتقات آن بنویسید و $y(t)$ را حساب کنید.

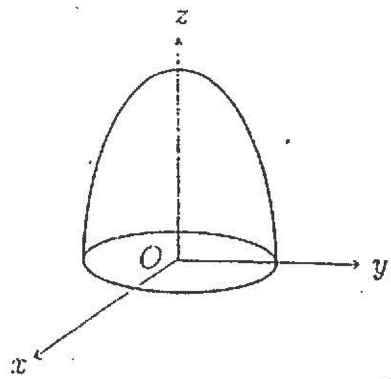
و- القاگر را به شکل دو رسانای بلند درنظر بگیرید که رسانای اول یک استوانه‌ی همگن توپر به شعاع x و رسانای دوم یک استوانه‌ی توخالی به شعاع b است. طول این دو استوانه را l بگیرید و فرض کنید b ثابت است، اما x می‌تواند تغییر کند، چنان که استوانه‌ی درونی همیشه همگن می‌ماند. $x<b\ll l$. جرم استوانه‌ی درونی را m بگیرید. از استوانه‌ی درونی یک جریان همگن I می‌گذرد و از استوانه‌ی بیرونی این جریان برمی‌گردد. چگالی جریان در راستای محور استوانه‌ها است. استوانه‌ها هم محورند. M و $U(x)$ را برای این سیستم حساب کنید.

موفق باشید.

وقت: ۳ ساعت

امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ نفر)

۱) اتومبیلی با تندی ثابت v بر روی یک تپه‌ی سهمی‌شکل به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع H بر روی یک مسیر مارپیچ بالا می‌رود. اگر اتومبیل در هر بار چرخیدن حول محور تپه، ارتفاع‌های یکسانی را طی کند و پس از طی n دور کامل به قله برسد، بردار سرعت و شتاب اتومبیل را در دستگاه مختصات استوانه‌ای ($\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{k}$) به صورت تابعی از فاصله‌ی لحظه‌ای اتومبیل تا محور تپه، ρ، به دست آورید.

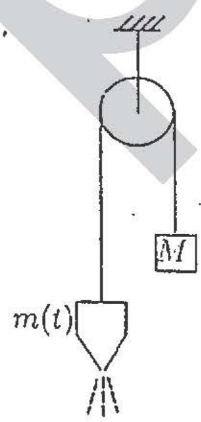


۲) یک مدل آزمایشگاهی برای موشک یک ماشین آتوود است، که به یک طرف آن جرم ثابت M و به طرف دیگر یک جرم متغیر متصل است. فرض کنید به طناب طرف چپ یک ظرف آب متصل شده که از ته آن آب با سرعت ثابت u نسبت به ظرف و با آهنگ ثابت α بیرون می‌ریزد. اگر در $t = 0$ که دستگاه از حال سکون رها می‌شود، جرم ظرف و آب داخل آن روی‌هم m_0 باشد (و از اصطکاک نخ با قرقره و جرم نخ صرفنظر کنیم)

آ) سرعت و جابجایی جرم‌ها را بر حسب زمان t به دست آورید.

ب) آیا امکان شُل شدن نخ وجود دارد؟ چه شرطی بین کمیت‌های داده شده باید باشد؟

پ) در صورت برقراری شرط لازم، در چه زمانی نخ شُل می‌شود؟



۶

۵۱

۳) یک ذره به جرم ـ m و بار ـ q را در نظر بگیرید. سرعت ـ این ذره در زمان ـ صفر $\mathbf{v} = v_1(0)\,\hat{\mathbf{x}} + v_2(0)\,\hat{\mathbf{y}} + v_3(0)\,\hat{\mathbf{z}}$ است. در کل ـ مسئله سرعت‌ها را بسیار کوچک‌تر از سرعت ـ نور بگیرید و از آثار ـ نسبیت ـ خاص چشم بپوشید.

- یک میدان ـ مغناطیسی ي $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$ و یک میدان ـ الکتریکی ي $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{z}}$ داریم، که ثابت و یک‌نواخت اند.

a سرعت ـ این ذره بر حسب ـ زمان را به دست آورید.

b زاویه ي مسیر ـ این ذره با صفحه ي xy را بر حسب ـ زمان به دست آورید.

- این بار فرض کنید این ذره در میدان ـ مغناطیسی ي $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$ و میدان ـ الکتریکی ي $\mathbf{E} = E_1\,\hat{\mathbf{x}} + E_3\,\hat{\mathbf{z}}$ است، که این میدان‌ها هم ثابت و یک‌نواخت اند.

c چارچوب ی را در نظر بگیرید که مبدئ ـ آن با سرعت ـ ثابت ـ $\mathbf{V}$ نسبت به چارچوب ـ قبلی حرکت می‌کند و محورها ي آن‌ها با محورها ي چارچوب ـ قبلی موازی اند. $\mathbf{V}$ را چنان بیابید که در چارچوب ـ جدید میدان‌ها ي الکتریکی و مغناطیسی با هم موازی شوند.

d سرعت ـ این ذره در چارچوب ـ جدید را بر حسب ـ زمان بیابید.

e سرعت ـ این ذره در چارچوب ـ قدیم را بر حسب ـ زمان بیابید.

شد ل درست
نسبد

بسمه تعالی

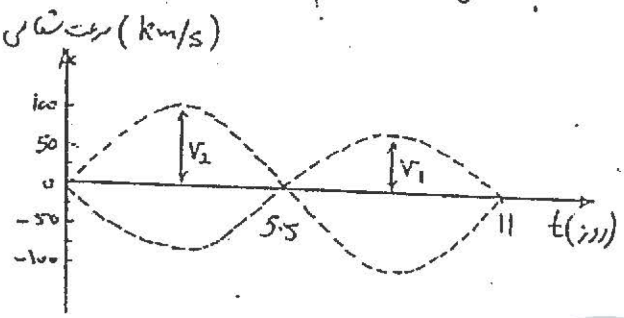
۸۵/۲/۳

امتحان چهارم المپیاد فیزیک

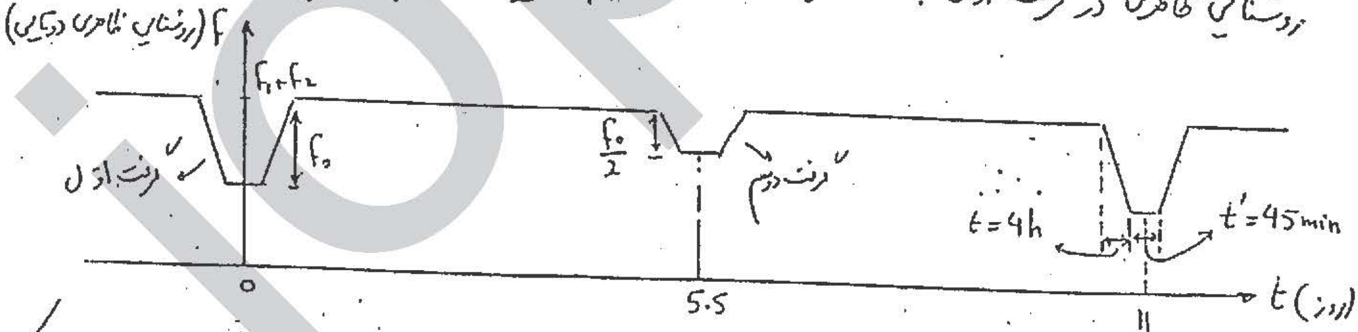
وقت: ۵ ساعت

۱- در آسمان ستاره‌هایی وجود دارند که به ستاره‌های دوتایی معروفند. این دوتایی‌ها دوستاره‌ی نزدیک هستند که حول یکدیگر می‌چرخند. فرض کنید دوستاره با جرم‌های m_1 و m_2 و شعاع‌های R_1 و R_2 ($R_2<R_1$) روی دایره‌هایی به شعاع r_1 و r_2 حول مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند و در فاصله‌ی دوری از زمین قرار دارند. ناظر زمینی در صفحه‌ی مداری این دوستاره است. در این وضعیت پدیده‌ی گرفت (کسوف) کامل (وقتی ستاره‌ی کوچکتر پشت ستاره‌ی بزرگتر) و حلقوی مرکزی (وقتی ستاره‌ی کوچکتر در جلوی ستاره‌ی بزرگتر است) دیده می‌شود.

مؤلفه‌ی شعاعی سرعت دوستاره در امتداد خط دید ناظر به صورت سینوسی مطابق شکل (۱) است. V_1 و V_2 مربوط به ستاره‌های به شعاع R_1 و R_2 است.



فرض کنید ستاره‌ها به صورت جسم سیاه تابش می‌کنند و روشنایی ظاهری (شدت نوری که به ناظر زمینی می‌رسد) برای هر یک از آنها به ترتیب f_1 و f_2 است. ناظر زمینی روشنایی ظاهری این دوتایی را برحسب زمان به صورت زیر ثبت می‌کند (شکل (۲)). می‌نیمم‌های به وجود آمده ناشی از گرفت‌ها است و کاهش روشنایی ظاهری در گرفت اول به اندازه‌ی f_0 و در گرفت دوم $\frac{f_0}{2}$ است. ($G = 6.67\times10^{-11}\,kg^{-1}m^3s^{-2}$ ثابت جهانی گرانش)



الف) با توجه به منحنی سرعت شعاعی ستاره‌ها نسبت به ناظر زمینی، جرم‌های دوستاره و فاصله‌ی آنها از یکدیگر (r) را حساب کنید.

ب) فرض کنید شعاع‌های دوستاره در مقایسه با فاصله‌ی بین آنها (r) کوچک‌اند. با استفاده از داده‌های منحنی روشنایی ظاهری دوتایی شعاع‌های دوستاره (R_1 و R_2) را حساب کنید.

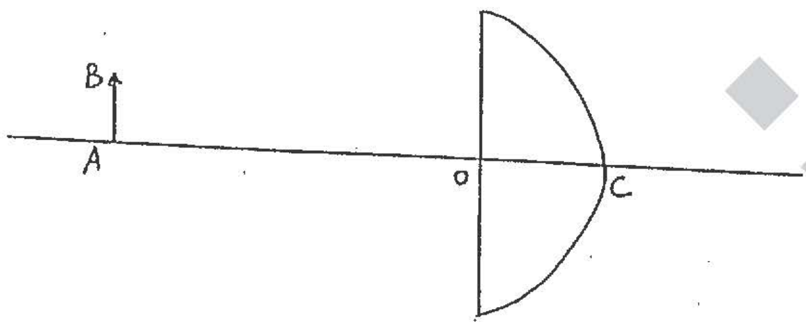
ج) با توجه به داده‌های منحنی روشنایی ظاهری نسبت دمای دوستاره، $\frac{T_1}{T_2}$، را حساب کنید. فرض کنید ستاره‌ی کوچکتر داغ‌تر است.

۴۳

۲- از ماتریس انتقال $\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و ماتریس شکست برای دیوپتر کروی $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{n-n'}{n'R} & \frac{n}{n'}\end{pmatrix}$ استفاده کنید

برای یک نیمکره‌ی شیشه‌ای با شعاع $5cm$ و ضریب شکست 1.5 ،

الف- ماتریس کلی عبور را به دست آورید (با مقادیر عددی)



ب- جسم AB به طول $1cm$ در فاصله‌ی $20cm$ از سطح ورودی نیم‌کره قرار گرفته است. فاصله‌ی تصویر تا نقطه‌ی C را S' بگیرید. عناصر ماتریس کلی تبدیل:

$$\begin{pmatrix}y'\\ \alpha'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ \alpha\end{pmatrix}$$

که رابطه‌ای بین طول جسم، y، و طول تصویر، y'، برقرار می‌کند را پیدا کنید.

ج- محل و طول تصویر را به دست آورید.

د- اکنون محل و طول تصویر را با استفاده از شکست در دیوپترها محاسبه و نتیجه را با قسمت ج مقایسه کنید.

۵۴

۳ – ظرفی شامل n مول گاز کامل با ظرفیت گرمایی مولی در فشار ثابت C_v را در محیطی با فشار، دما و شتاب گرانش به ترتیب P_0، T_0 و g قرار می‌دهیم. لوله‌ی متصل به ظرف، به وسیله‌ی گلوله‌ای به جرم m که آزادانه حرکت می‌کند، مسدود شده است (شکل ۱). فشار و حجم گاز درون ظرف (و لوله) را پس از رسیدن به تعادل گرمایی به ترتیب با P_e و V_e، سطح خارجی ظرف از محل تعادل گلوله به پایین را با A_e و ضریب رسانایی گرمایی جداره‌ی ظرف و ضخامت آن را به ترتیب با k و d نشان می‌دهیم. هم‌چنین، سطح مقطع داخلی لوله‌ی متصل به ظرف را A فرض کنید. گلوله را مقدار کوچکی از موضع تعادل تکان می‌دهیم و آن را رها می‌کنیم. در اثر این اختلال کوچک، دما و فشار گاز درون ظرف به ترتیب به $T_0 + \delta T$ و $P_e + \delta P$ تغییر پیدا می‌کند.

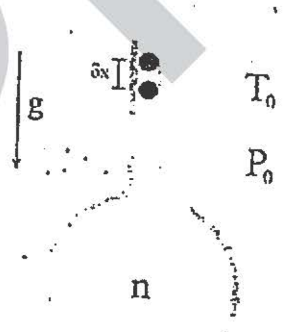
الف) معادلات لازم برای توصیف تحول زمانی δx و δT را تنها بر حسب δx و δT، مشتق‌هایشان و پارامترهای مسئله با تقریب خطی بنویسید.

ب) با فرض پاسخ‌های $\delta x = Re\{\delta x_0 e^{i\omega t}\}$ و $\delta T = Re\{\delta T_0 e^{i\omega t}\}$ معادله‌ای برای فرکانس‌های نوسان (ω) به دست آورید. ریشه‌های معادله‌ی اخیر را در حد $k \to 0$ تا مرتبه‌ی اول از k و در حد $k \to \infty$ تا مرتبه‌ی اول از k^{-1} به دست آورید. پاسخ‌های خود را تنها بر حسب پارامترهای زیر بنویسید:

$$\gamma := \frac{C_p}{C_v}, \quad \Omega := \sqrt{\frac{P_e A^2}{m V_e}}, \quad \beta := \frac{k A_e}{n C_v \Omega d}$$

ج) با شرایط اولیه‌ی $\delta x(0) = \delta x_0$، $\delta \dot{x}(0) = 0$ و $\delta T(0) = 0$، $\delta x(t)$ را در حد $k \to 0$ تا مرتبه‌ی اول از k و در حد $k \to \infty$ تا مرتبه‌ی اول از k^{-1} حساب کنید.

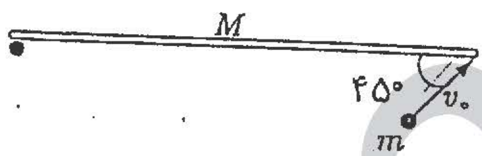
۱



۴ـ مطابق شکل، یک میله‌ی یکنواخت به جرم M و طول $2L$ به طور افقی روی میز صافی قرار دارد. در مقابل سرِ سمت چپ میله، مانع صلبی روی میز محکم شده است. توپی به جرم m با زاویه‌ی $45°$ و سرعت v_0 به سرِ سمت راست میله برخورد می‌کند. ضریب برگشت برخورد میله با جرم m و مانع، e است.
(ضریب برگشت در برخورد دو جسم $e = \frac{v'_{2y} - v'_{1y}}{v_{1y} - v_{2y}}$ است که v'_{2y} و v'_{1y} مؤلفه‌های سرعت بعد از برخورد دو جسم در راستای عمود بر سطح تماس دو جسم و v_{2y} و v_{1y} مؤلفه‌های سرعت قبل از برخورد دو جسم در راستای عمود بر سطح تماس دو جسم است)

۲

آ) سرعت توپ پس از برخورد به میله چقدر است؟
ب) سرعت زاویه‌ای و سرعت مرکز جرم نهایی میله چقدر است؟



۵ـ موشکی در امتداد محور x با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. در $t=0$ موشک در $x=0$ است. در این موشک چراغ چشمک‌زنی هست که اگر ساکن باشد هر $1s$ یک بار روشن و خاموش می‌شود. وقتی موشک در $x=0$ است، این چراغ روشن و خاموش می‌شود، این تپ را تپ شماره‌ی $n=0$ می‌نامیم.
ناظری در نقطه‌ی $x=0$ و $y=b$ ایستاده است و تپ‌هایی را که از موشک می‌رسد ثبت می‌کند، به این معنی که دنباله‌ی t_n را می‌نویسد که t_n زمان رسیدن تپ nام به نقطه‌ی $x=0$، $y=b$ است. این دنباله را به دست آورید.

۵۵

۶- دو جسم هر یک به جرم m از دو ریسمان هر یک به طول l آویزان اند. بین این دو جسم فنری با ضریب سختی K و طول آزاد L_0 هست. ارتفاع نقاط آویز ریسمان‌ها یکسان، و فاصله‌ی این دو نقطه از هم L است. شتاب گرانش g است. در حالت تعادل هر یک از این دو ریسمان با راستای عمودی زاویه‌ی θ می‌سازد. همه‌ی حرکت‌های سیستم را در صفحه‌ی شامل این دو ریسمان در حالت تعادل بگیرید.

الف) معادله‌ای برای θ به دست آورید؛

ب) فرض کنید m خیلی بزرگ است. θ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به $\frac{1}{m}$ حساب کنید.

در بخش‌های بعدی مسئله، θ را دانسته فرض کنید و همه چیز را برحسب m، g، l، θ، و α حساب کنید، که $\alpha = \frac{\tilde{L} - L_0}{\tilde{L}}$ و $\tilde{L}$ طول فنر در حالت تعادل دستگاه است.

ج) جابه‌جایی افقی دو جسم از حالت تعادل را X_1 و X_2 بگیرید و انرژی پتانسیل سیستم منهای انرژی پتانسیل در حالت تعادل را تا مرتبه‌ی دو نسبت به این جابه‌جایی‌ها بنویسید.

د) انرژی جنبشی سیستم را تا مرتبه‌ی دو نسبت به $\dot{X}_1$ و $\dot{X}_2$ و تا مرتبه‌ی صفر نسبت به خود X_1 و X_2 بنویسید؛

ه) ویژه بسامدها و وجه‌های طبیعی این سیستم را به دست آورید.

و) ویژه بسامدها را در حد m بزرگ، تا مرتبه‌ی یک نسبت به $\frac{1}{m}$ حساب کنید.

موفق باشید

بسمه تعالی

وقت: ۳٫۵ ساعت

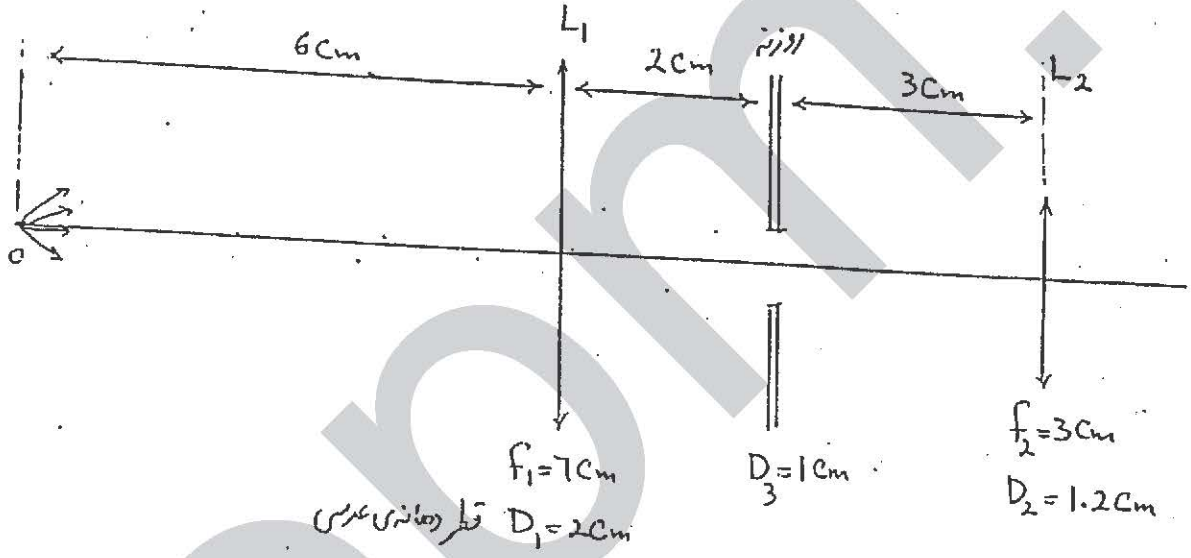
امتحان پنجم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفر)

۱- در دستگاه نوری شکل زیر، شامل دو عدسی و یک روزنه،

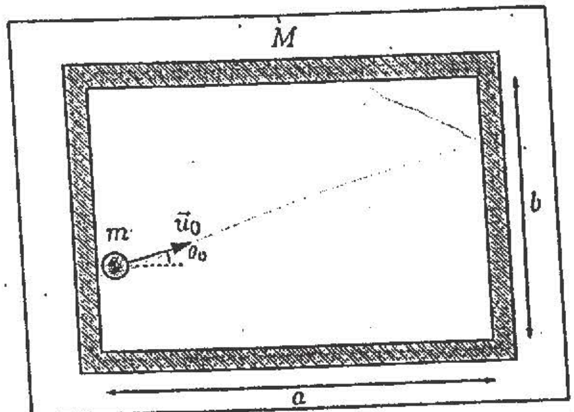
الف- مردمک ورودی را تعیین کنید. کدام جسم محدودکننده‌ترین عنصر برای عبور پرتوهای حاصل از نقطه‌ی O است؟ چرا؟

ب- با رسم پرتو(ها) یی روی شکل این محدودکنندگی را مشخص کنید.

ج- آیا برای نقطه‌ی O' واقع در ۲ سانتیمتری از عدسی اول هم پاسخ شما همین است؟ چرا؟



۲ـ مطابقِ شکل ذره‌ای به جرمِ m با سرعتِ اولیه‌یِ $\vec{u}_0$ درونِ جعبه‌یِ ساکنی به جرمِ M و ابعادِ داخلیِ a و b پرتاب می‌شود. بینِ جعبه و محیطِ بیرونِ از آن و بینِ m و کفِ جعبه هیچ اصطکاکی نیست.



?

ابتدا فرض کنید برخوردِ بینِ ذره و دیوارهایِ جعبه کاملاً کش‌سان است. θ_0 را صفر بگیرید. کمیت‌هایِ زیر را محاسبه کنید.

الف) سرعتِ جعبه پس از برخوردِ n اُم.

ب) زمانِ بینِ دو برخوردِ n و $n+1$ اُم.

در این مرحله برخوردها را غیرکش‌سان و ضریبِ جهندگی را e بگیرید. ضریبِ اصطکاکِ بینِ دیوارها و ذره را صفر بگیرید. θ_0 را نیز هم‌چنان صفر بگیرید. کمیت‌هایِ زیر را محاسبه کنید.

ج) سرعتِ جعبه پس از برخوردِ n اُم.

د) زمانِ بینِ دو برخوردِ n و $n+1$ اُم.

حالا θ_0 را غیرِ صفر بگیرید. کمیتِ زیر را برایِ دو حالتِ برخوردهایِ کش‌سان و غیرکش‌سان محاسبه کنید.

ه) زمانِ بینِ دو برخوردِ n و $n+1$ اُم با دیواره‌هایِ عمودی.

۳ـ جعبه‌ای که به وسیله‌ی دیواره‌ای به دو قسمت با حجم‌های V و V' تقسیم شده است در نظر بگیرید. همه‌ی دیواره‌ها (شامل دیواره‌ی وسط) عایق گرما هستند. حجم V شامل N اتم گاز ایده آل (تک اتمی) در دمای T است و حجم V' خالی (خلاء) است. سوراخ کوچکی در دیواره‌ی بین دو حجم ایجاد می‌کنیم و در مدت زمان کوچک t اجازه می‌دهیم تا ذرات گاز وارد حجم V' شوند و سپس سوراخ را می‌بندیم. دمای گاز در حجم V' چقدر است؟

۴

$T' = \frac{4}{3}T$

دو ذره در یک بُعد با ویژه‌شتابِ ثابت حرکت می‌کنند. معادله‌ي حرکتِ اولی $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$ و معادله‌ي حرکتِ دومی $x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$ است، که x مکان، t زمان، و c سرعتِ نور است؛ و a و b ثابت اند و $0 < a < b$. این دومتحرک می‌خواهند فاصله‌ شان از هم را حساب کنند. برا ي این هر متحرک یک تپِ نور به سو ي دیگری می‌فرستد و بازتابشِ آن را دریافت می‌کند. نصفِ زمانِ بینِ رفت و برگشت (از دیدِ فرستنده) ضرب در سرعتِ نور فاصله‌ ي راداری ي گیرنده از فرستنده است.

- یک تپِ نور در $t = t_0$ از متحرکِ 2 به متحرکِ 1 گسیل می‌شود، چنان که این تپ در $t = 0$ به متحرکِ 1 می‌رسد. متحرکِ 1 بلافاصله این تپ را به متحرکِ 2 بر می‌گرداند. تپِ برگشته در $t = t_2$ به متحرکِ 2 می‌رسد. t_0 و t_2 را حساب کنید. اختلافِ زمانِ بینِ روی‌دادها ي ارسالِ تپ به وسیله‌ي متحرکِ 2 و دریافتِ تپ به وسیله‌ ي متحرکِ 2، از دیدِ متحرکِ 2 را حساب کنید.

- سئالِ بالا را برا ي حالت ی جواب دهید که نقشِ متحرک‌ها ي 1 و 2 با هم عوض شده: یک تپِ نور در $t = \bar{t}_0$ از متحرکِ 1 به متحرکِ 2 گسیل می‌شود، چنان که این تپ در $t = 0$ به متحرکِ 2 می‌رسد. متحرکِ 2 بلافاصله این تپ را به متحرکِ 1 بر می‌گرداند. تپِ برگشته در $t = \bar{t}_2$ به متحرکِ 1 می‌رسد. $\bar{t}_0$ و $\bar{t}_2$ را حساب کنید. اختلافِ زمانِ بینِ روی‌دادها ي ارسالِ تپ به وسیله‌ ي متحرکِ 1 و دریافتِ تپ به وسیله‌ ي متحرکِ 1، از دیدِ متحرکِ 1 را حساب کنید.

- این شرط که تپِ اولیه در $t = 0$ به گیرنده برسد را بر می‌داریم: یک تپِ نور در $t = 0$ از متحرکِ 2 به متحرکِ 1 گسیل می‌شود. این تپ در $t = t'_1$ به متحرکِ 1 می‌رسد. متحرکِ 1 بلافاصله این تپ را به متحرکِ 2 بر می‌گرداند. تپِ برگشته در $t = t'_2$ به متحرکِ 2 می‌رسد.

  a. t'_1 و t'_2 را حساب کنید.

  b. روی‌دادِ دریافتِ تپ به وسیله‌ ي متحرکِ 1 یک نقطه در فضازمان است. این نقطه را با یک خطِ راست به مبدئ (نقطه‌ ي $t = 0$ و $x = 0$) وصل می‌کنیم. این خط جهان‌خطِ متحرکِ 2 را در یک نقطه قطع می‌کند: روی‌دادِ B. t''_1 (زمانِ متناظر با روی‌دادِ B) را به دست آورید.

c اختلاف ـ زمان ـ روی‌داد ـ B با روی‌داد ـ گسیل ـ تپ از متحرک ـ 2، و اختلاف ـ زمان ـ روی‌داد ـ دریافت ـ بازتابش به وسیله ي متحرک ـ 2 و روی‌داد ـ B را، از دید ـ متحرک ـ B به دست آورید.

راه‌نمایی:

- اختلاف ـ زمان ـ دو روی‌داد از دید ـ یک متحرک، یعنی زمان ی که ساعت ـ هم‌راه ـ متحرک بین ـ آن دوروی‌داد (که در محل ـ متحرک رخ داده اند) نشان می‌دهد.
- استفاده از تغییرمتغیر ـ $t = (a/c)\sinh\xi$ یا $t = (b/c)\sinh\theta$، و نیز $\alpha := \ln(b/a)$، ممکن است مفید باشد. البته در نهایت جواب‌ها باید بر حسب ـ داده‌ها ي اولیه باشند.

سمیه قنبری
۸۵/۲/۱۷
وقت: ۵:۳۰'
امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ انفرادی)

۱ـ یک مایع با چگالی ی D و کشش ـ سطحی ی τ، به طور ـ صلب با سرعت ـ زاویه‌ای ی ثابت ـ ω حول ـ محور ـ z می‌چرخد. شتاب ـ گرانش بردار ـ ثابت ـ $-g\hat{z}$ است. فشار ـ هوا ی بالا ی سطح ـ آزاد ـ این مایع مقدار ـ ثابت ـ P_0 است. (ρ, ϕ, z) را مختصات ـ استوانه‌ای می‌گیریم. می‌خواهیم معادله ی سطح ـ آزاد ـ مایع $z = f(\rho)$ را به دست آوریم.

a) بخش ی از سطح ـ آزاد ـ مایع را در نظر بگیرید و با استفاده از تعادل ـ آن بخش در چارچوب ی که با سرعت ـ زاویه‌ای ی مایع می‌چرخد، $(P_i - P_0)$ را بر حسب ـ معادله ی سطح ـ آزاد و ثابت‌ها ی مسئله بیابید. P_i فشار درون ـ مایع درست زیر ـ سطح ـ آزاد است.

b) فشار ـ درون ـ مایع را بر حسب ـ z و ρ و ثابت‌ها ی مسئله به دست آورید.

c) یک معادله ی دیفرانسیل برا ی سطح ـ آزاد ـ مایع به دست آورید.

d) $f(\rho)$ را تا مرتبه ی یک نسبت به τ به دست آورید.

۶

۵۸

۲ـ یک پیکان تحت ـ گرانش و نیرو ي مقاومت ـ هوا حرکت می‌کند. نیرو ي مقاومت ـ هوا تقسیم بر جرم ـ پیکان را $\alpha |\sin\theta| v \mathbf{v}$ بگیرید (مجذوری نسبت به اندازه ي سرعت)، که $\mathbf{v}$ سرعت ـ جسم، α ثابت، و θ زاویه ي پیکان با بردار ـ سرعت ـ پیکان است. شتاب ـ گرانش $-g\hat{y}$ است، و حرکت ـ پرتابه در صفحه ي xy است. مقاومت ـ هوا جهت ـ پیکان را هم تغییر می‌دهد، اما تغییرات ـ این جهت با زمان هم متناسب با α است. فرض کنید در زمان ـ صفر پرتابه و سرعت ـ آن هم‌جهت اند. سرعت ـ اولیه ي پرتابه را $v_0(\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)$ بگیرید. می‌خواهیم بردار ـ سرعت ـ پرتابه بر حسب ـ زمان را تا مرتبه ي یک نسبت به α حساب کنیم.

a) نیرو ي مقاومت ـ هوا تقسیم بر جرم ـ پیکان را تا مرتبه ي یک نسبت به α حساب کنید.

b) بردار ـ سرعت ـ پرتابه بر حسب ـ زمان را تا مرتبه ي یک نسبت به α حساب کنید.

۳- یک ریسمان ِ افقی به طول ِ ℓ را در نظر بگیرید که یک سر ِ آن بسته است و سر ِ دیگرش به جسمی به جرم ِ M وصل شده. این جرم می‌تواند بی‌اصطکاک روی میله ای عمود بر ریسمان بلغزد. نیروی کشش در ریسمان F، و چگالی‌ی طولی‌ی ریسمان ρ است. فقط ارتعاش‌های کم‌دامنه‌ی ریسمان در یک راستای ثابت ِ عمود بر ریسمان (راستای میله) را در نظر می‌گیریم. به هر بخش ِ این ریسمان، جز نیروی کشش یک نیروی اصطکاک ِ متناسب با سرعت هم وارد می‌شود، که چگالی‌ی آن برابر است با یک ضریب ِ ثابت ِ α ضرب در چگالی‌ی ریسمان ضرب در سرعت ِ ریسمان. جهت ِ این نیرو بر خلاف ِ سرعت است. فاصله‌ی یک نقطه از ریسمان (در حالت ِ تعادل) از سر ِ مقید ِ ریسمان را با x و جابه‌جایی‌ی آن نقطه از ریسمان در زمان ِ t از حالت ِ تعادلش را با $z(x,t)$ نمایش می‌دهیم. در کل ِ مسئله، هر جا در کمیت‌های خواسته‌شده ρ ظاهر شد آن را بر حسب ِ $v := (F/\rho)^{1/2}$ بنویسید.

a) یک معادله‌ی دیفرانسیل برای $z(x,t)$ بنویسید، و شرایط ِ مرزی برای z در $x = 0$ و $x = \ell$ را تعیین کنید.

b) برای z جوابی به شکل ِ $\exp(-i\omega t - i k x)$ بگیرید و معادله‌ی پاشنده‌گی را به دست آورید. (ω و k ثابت اند، اما لزوماً حقیقی نیستند.)

c) با استفاده از معادله‌ی پاشنده‌گی و شرایط ِ مرزی (یا به هر روش ِ دیگری) یک معادله‌ی جبری برای ویژه‌بس‌آمدهای سیستم به دست آورید (یک معادله برای ω، که k نداشته باشد).

d) ویژه‌بس‌آمدها را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α حساب کنید. لازم نیست در جواب ω_0 (ویژه‌بس‌آمد در $\alpha = 0$) را به دست آورید.

۲۴ یک توپ به جرمِ M، شعاعِ R، و لختیِ دورانیِ I در هوایِ ساکن حرکت می‌کند. هوا از ملکول‌هایی تشکیل شده که جرمِ هر یک m است و $M \gg m$. توزیعِ این ملکول‌ها یک‌نواخت، و تعدادِشان بر حجم n است. فرض کنید در برخوردِ هر ملکولِ هوا با توپ، از دیدِ چارچوبِ ناچرخانی که مبدأِ آن مرکزِ توپ است، مؤلفه‌یِ سرعتِ توپ در راستایِ عمود بر سطحِ توپ در محلِ برخورد منفی می‌شود، و مؤلفه‌یِ مماسیِ سرعتِ توپ در محلِ برخورد، با سرعتِ توپ در نقطه‌یِ برخورد یکی می‌شود. فرض کنید در زمانِ صفر سرعتِ توپ $\mathbf{v}_0$ و سرعتِ زاویه‌ایِ آن $\omega_0 \hat{\mathbf{n}}$ است؛ که $\mathbf{v}_0$ بر $\hat{\mathbf{n}}$ عمود است.

a) یک ملکولِ هوا را در نظر بگیرید که در زمانِ صفر به توپ برخورد می‌کند. بردارِ محلِ برخورد نسبت به مرکزِ توپ را $R\hat{\mathbf{r}}$ بگیرید. تغییرِ سرعتِ این ذره در برخورد را بر حسبِ $\hat{\mathbf{r}}$، $\mathbf{v}_0$، $\hat{\mathbf{u}}$، ω_0 و ثابت‌هایِ مسئله به دست آورید.

b) مشتقِ زمانیِ بردارِ سرعتِ توپ در زمانِ صفر را به دست آورید. زاویه‌یِ این مشتق با بردارِ سرعتِ زاویه‌ای را تعیین کنید.

c) مشتقِ زمانیِ بردارِ سرعتِ زاویه‌ایِ توپ در زمانِ صفر را به دست آورید. زاویه‌یِ این مشتق با بردارِ سرعتِ زاویه‌ای را تعیین کنید.

d) مشتقِ زمانیِ بردارهایِ سرعت و سرعتِ زاویه‌ایِ توپ را در زمانِ دل‌بخواهِ t بنویسید، و با استفاده از آن اندازه‌یِ سرعت و سرعتِ زاویه‌ایِ توپ را بر حسبِ زمان به دست آورید.

راه‌نمایی: در صورتِ نیاز به انتگرال‌گیری رویِ سطح، شاید استفاده از مختصاتِ کرویِ (r, θ, ϕ) که مرکزِش مرکزِ توپ و زاویه‌یِ θ زاویه با بردارِ سرعتِ توپ است کار را ساده کند.

۵- دو جسم به جرم‌ها ي m و M رو ي محور ـ افقی ي x و به فاصله ي زیاد ی از هم هستند. جرم ـ m با سرعت ـ v به سمت ـ M می‌رود. می‌خواهیم بین ـ این دو جسم $(N-1)$ جسم ـ دیگر (رو ي محور ـ x و ساکن) بگذاریم، به طور ی که بیش‌ترین انرژی به M منتقل شود. انتقال ـ انرژی به این شکل است که $m_0 = m$ به m_1 برخورد می‌کند، بعد m_1 به m_2، ... و سرانجام m_{N-1} به $m_N = M$. همه ي برخوردها را سربه‌سر و کش‌سان بگیرید، و از برخوردها ي احتمالی ي دیگر چشم بپوشید. m_j ها را $(j = 1, \ldots, N-1)$ به دست آورید.

۶- حلقه ای به جرم ـ m و شعاع R از ارتفاع h رها می‌شود، طور ی که هم‌واره در یک ـ صفحه ي قائم ـ ثابت می‌ماند. این حلقه در اثر ـ برخورد با زمین تغییرشکل می‌دهد. فرض کنید زمین آن قدر سفت است که تغییرشکل نمی‌دهد، و شکل حلقه در هر لحظه چنین است: بخش ی که با زمین تماس دارد یک پاره‌خط است، و بخش ی که با زمین تماس ندارد همان دایره ي اولیه است. به علاوه فرض می‌کنیم حلقه آن قدر سفت است که تغییرشکل ‌اش کوچک است، به این معنی که طول ـ ناحیه ای که با زمین تماس دارد هم‌واره بسیار کوچک‌تر از R است. ضمناً فرض می‌کنیم ناحیه ای که با زمین تماس دارد به طور ـ یک‌نواخت فشرده شده. اندازه ي نیرو ي کشش در بخش ی از این حلقه به طول ـ اولیه ي ℓ برابر ـ $(C\,\Delta\ell/\ell)$ است، که $\Delta\ell$ تغییرطول ـ آن بخش از حلقه نسبت به حالت ـ آزاد است. همه ي محاسبات را فقط تا مرتبه ي غالب (نسبت به C) انجام دهید.

a) در حالت ی که حلقه به اندازه ي δ فرو رفته است (یعنی کم‌ترین فاصله ي مرکز ـ حلقه تا زمین $(R-\delta)$ است)، انرژی ي پتانسیل ـ کش‌سانی ي ذخیره‌شده در حلقه را به دست آورید.

b) بیش‌ترین مقدار ـ فرورفتگی ي حلقه را به دست آورید.

۴۱

۷- توان ـ ورودی به یک دست‌گاه P_i، و توان ـ خروجی از آن P_o است. فرض می‌کنیم دست‌گاه اتلاف ندارد، یعنی بخش ی از توان ـ ورودی که از سر ـ خروجی بیرون نرفته، از سر ـ ورودی برگشته است. نسبت ـ P_o/P_i را ثابت می‌گیریم و به آن گذرش ـ دست‌گاه می‌گوییم. فرض کنید گذرش ـ این دست‌گاه از دوطرف یک‌سان است. یعنی اگر از سر ـ خروجی هم به دست‌گاه توان ـ P_i بدهیم، همان توان ـ P_o از سر ـ ورودی بیرون می‌رود (و باقی‌مانده از سر ـ خروجی بر می‌گردد.)

a) دو دست‌گاه از این نوع با گذرش‌ها ي α و β را با هم سری می‌کنیم (خروجی ي اولی را به ورودی ي دومی وصل می‌کنیم). گذرش ـ دست‌گاه ـ مرکب را حساب کنید.

b) عکس ـ گذرش ـ دست‌گاه ـ مرکب را بر حسب ـ α^{-1} و β^{-1} حساب کنید.

c) N دست‌گاه از این نوع با گذرش‌ها ي α_1 تا α_N را با هم سری می‌کنیم. گذرش ـ دست‌گاه ـ مرکب را حساب کنید.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (ادامه)

۸۵/۲/۱۸

وقت: ۵ ساعت

۸ ـ ستاره‌ی S در فاصله‌ی D از ما است. به دور این ستاره یک پوسته‌ی کروی از غبار غلیظ هست که آن را Σ می‌نامیم. شعاع این کره R و مرکز آن S است.

ستاره ناگهان منفجر می‌شود، که یعنی در مدت Δt مقدار زیادی نور گسیل می‌کند. این نور به Σ می‌رسد و باعث می‌شود که کل پوسته ناگهان روشن شود و تقریباً به مدت Δt روشن بماند و بعد خاموش شود. فرض کنید

$$D = 3.0 \times 10^{20}\ \mathrm{m}, \qquad R = 1.5 \times 10^{14}\ \mathrm{m}, \qquad \Delta t = 1.0 \times 10^{6}\ \mathrm{s}$$

منجمی از روی زمین این واقعه را در تلسکپش می‌بینند. دیده می‌شود که حلقه‌ای به مرکز S تشکیل می‌شود و بزرگ می‌شود. در لحظه‌ی t شعاع بیرونی این حلقه در تلسکپ زاویه‌ی $\alpha(t)$ است. ($t = 0$ لحظه‌ای است که نخستین پرتوها به زمین می‌رسند.)

الف) $\alpha(t)$ را به دست آورید. در فرمول به‌دست‌آمده پارامترهای مسئله را وارد کنید. و آن‌ها را حتی‌المقدور ساده کنید. فرمول $\alpha(t)$ را در واحدهایی بنویسید که واحد زمان $10^6\,\mathrm{s}$ و واحد زاویه $10^{-6}\,\mathrm{Rad}$ باشد.

ب) $\dot\alpha(t)$ را به دست آورید.

ج) منجم سرعت بازشدن حلقه را این طور تعریف می‌کند $v := D\dot\alpha$، و $\beta := v/c$، که در این جا c سرعت نور است. $\beta(t)$ را به دست آورید.

ج) جدول زیر را کامل کنید ($\mathrm{M} = 10^6$، $\mu = 10^{-6}$ و $\mathrm{p} = 10^{-12}$ است).

	واحد					
t	Ms	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
α	μRad					
$\dot\alpha$	pRad/s					
β	1					

۶۲

(ب): $\int \sin\theta\, d\theta = \int$

۱۰ توپی به جرم m و شعاع R و لختی دورانی $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ در حالیکه بدون لغزش روی یک سطح افقی می‌غلتد به پله‌ای به ارتفاع h می‌رسد و بدون لغزش در نقطه‌ی تماس با لبه‌ی تیز پله از آن بالا می‌رود.

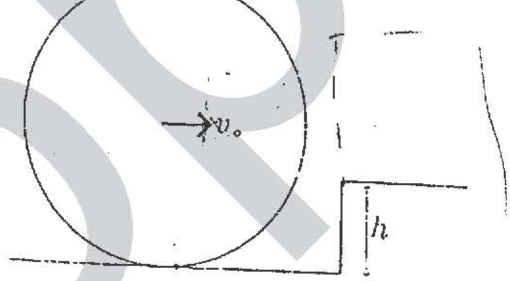
آ) کمینه‌ی سرعت مرکز جرم توپ در موقع حرکت بر روی سطح افقی چقدر باشد تا بتواند از پله بالا رود؟

ب) حداکثر ارتفاع پله چقدر باشد تا توپ بتواند بالاخره با سرعت اولیه‌ی مناسبی از آن بالا رود. در این حالت نیز فرض کنید ساختمان پله طوری است که فقط لبه‌ی آن با توپ تماس پیدا می‌کند.

پ) اگر سرعت اولیه‌ی مرکز جرم توپ روی سطح افقی $v_0 = 4\sqrt{Rg}$ باشد و ارتفاع پله $h = \frac{7}{10}R$ باشد، بالا رفتن توپ از پله چقدر طول می‌کشد؟ جواب را بر حسب انتگرال بیضوی نوع اول $F(k, 1)$:

$$
\begin{aligned}
F(k,1) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

(که $0 < k < 1$) بنویسید.



۱۱- ذره‌ای به جرم m و بار $q+$ در لحظه‌ی $t = 0$ با سرعت اولیه‌ی v_0 (در امتداد محور x) وارد ناحیه‌ای با میدان الکتریکی یکنواخت E (در امتداد محور y) می‌شود. از نیروی گرانش وارد بر ذره صرفنظر کنید.

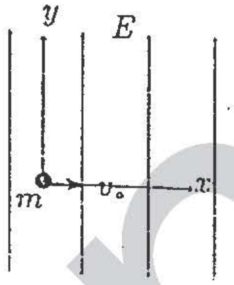
۶

آ) معادلات حرکت نسبیتی این ذره را بنویسید.

ب) $x(t)$ و $y(t)$ را به دست آورید.

پ) معادله‌ی مسیر ذره را در صفحه‌ی $y-x$ به دست آورید.

ت) نشان دهید در حد $v/c \ll 1$ مسیر ذره همان مسیر آشنای کلاسیکی خواهد بود.



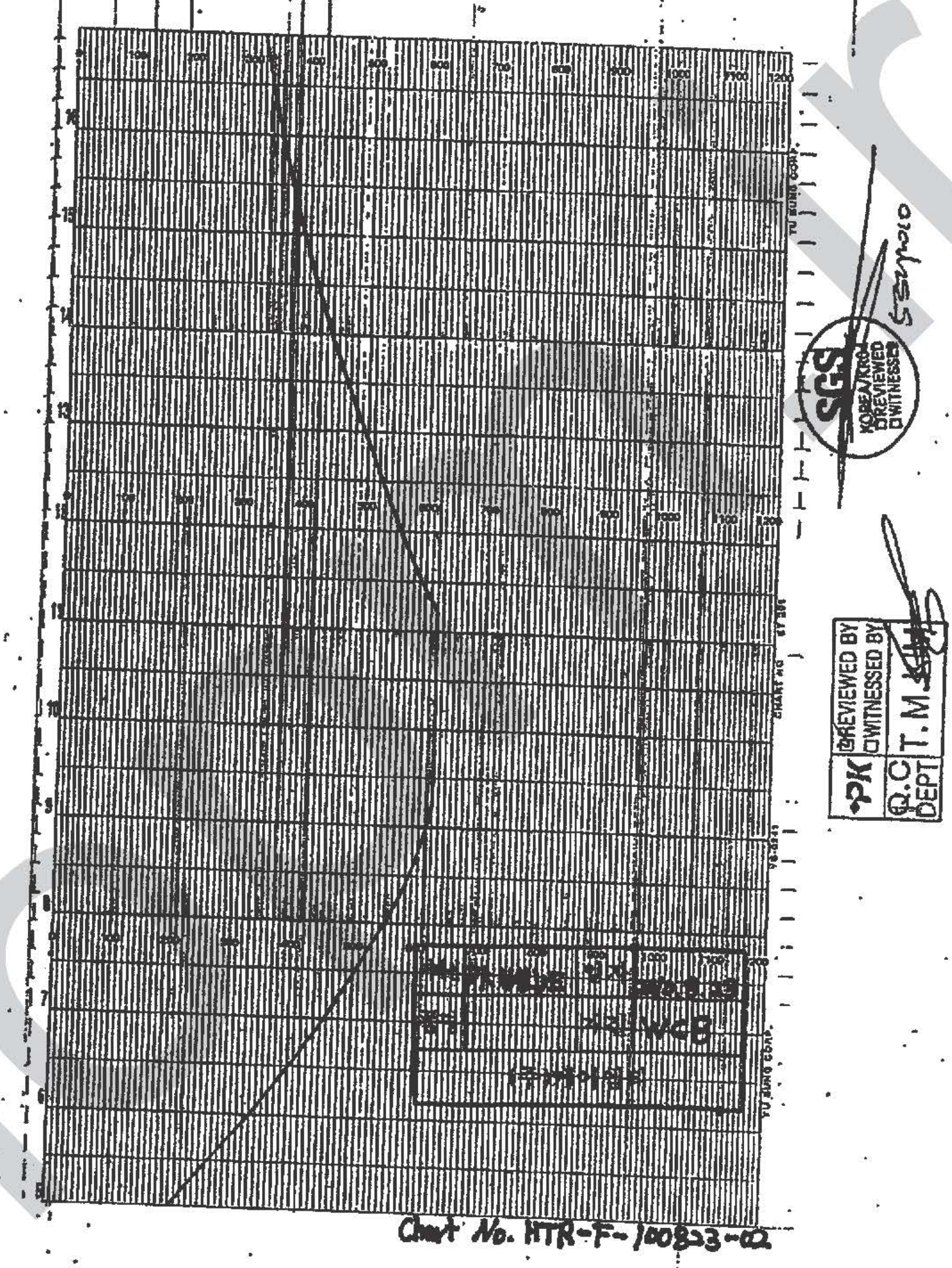


Chart No. HTR-F-100823-02
SGS
KOREA/KR02
REVIEWED
WITNESSED
PK
REVIEWED BY
WITNESSED BY
Q.C DEPT
T.M.

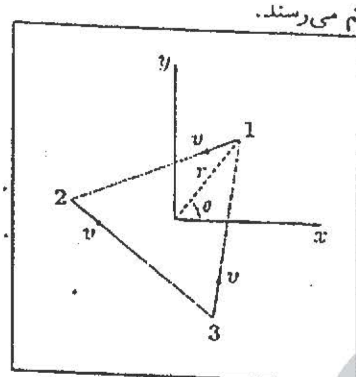
۱۲- وقتی روی زمین تابستان است در عمق مثلاً ۳ متر زیر زمین چه فصلی از سال است؟ قابلیت هدایت خاک فوق‌العاده کم است. تغییرات حرارت که در روی زمین رخ می‌دهد، بسیار کند به زیر زمین سرایت می‌کند و پس از مدت زمان بسیار زیادی به اعماق می‌رسد. اکنون می‌خواهیم به روش ساده‌ای به این مسأله نگاه کنیم.

معادله انتقال گرما، $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ است که D ضریب پخش گرما نامیده می‌شود. فرض کنید تغییرات دمای روی سطح زمین، $z = 0$ (مبدأ مختصات را روی سطح زمین و جهت افزایش z را به سمت پایین یعنی داخل زمین می‌گیریم) در طول یک سال بصورت ساده $T(0,t) = T_0 \cos\omega t$ باشد. جواب معادله انتقال گرما را طوری بدست آورید که با شرط مرزی فوق سازگار باشد.

برای خاک $D = 10^{-3}\frac{cm^2}{s}$. اگر در گرمترین روز سال در سطح زمین دما $40^\circ C$ باشد در عمق ۳ متر زیر سطح زمین بالاترین دما چقدر خواهد بود و چند روز بعد اتفاق می‌افتد؟

راهنمایی: $T(z,t) = T_0 e^{i[kz-w(k)t]}$.

۱۳- مسئله‌ي تعقيب — سه ذره روي رأس‌هاي يک مثلث متساوی‌الاضلاع که طولِ ضلع آن l است، قرار دارند. این سه ذره به‌گونه‌ای حرکت می‌کنند که جهتِ سرعتِ ذره‌ي 1 هم‌واره به سمتِ ذره‌ي 2 و جهتِ سرعتِ ذره‌ي 2 هم‌واره به سمتِ ذره‌ي 3 و بالاخره جهتِ سرعتِ ذره‌ي 3 هم‌واره به سمتِ ذره‌ي 1 است. اندازه‌ي سرعتِ ذره‌ها یک‌سان است. در این‌صورت در هرلحظه مثلثی که سه ذره، سه رأسش هستند یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع است. بنا به تقارن این سه ذره در مرکزِ مثلث به هم می‌رسند.

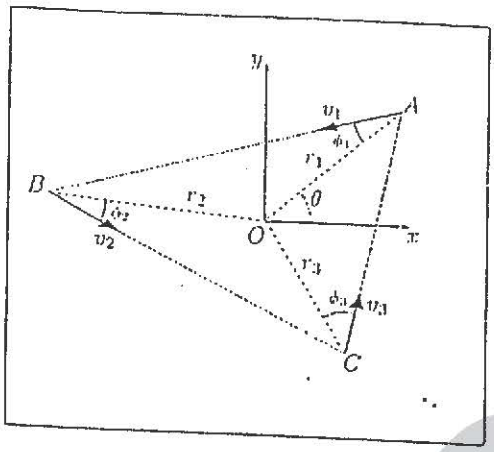


الف) v_r، و v_θ مؤلفه‌هاي سرعتِ ذره‌ي 1 را در دستگاهِ قطبی به دست آورید. مبدأِ مختصات مرکزِ مثلث است.

ب) مدتی که طول می‌کشد ذره‌ها به هم برسند را به دست آورید.

ب) فرض کنید ذره‌ي 1 در ابتدا روی محورِ x است. مسیرِ ذره $r(\theta)$ را به دست آورید.

حالا فرض کنید سه ذره با سرعت‌هاي v_1، v_2، و v_3 که لزوماً برابر نیستند روي سه رأسِ مثلثی به ابعادِ $AB = l_1$، $BC = l_2$، و $CA = l_3$ هم‌دیگر را تعقیب می‌کنند. فرض کنید که مثلثی که از این ذره‌ها در هرلحظه ساخته می‌شود متشابه با مثلثِ اولیه باشد و این ذره‌ها پس از مدت‌زمانِ T در نقطه‌ای مثلِ O به هم می‌رسند. فاصله‌ي ذره‌ها تا نقطه‌ي O را r_1، r_2، و r_3 بگیرید.



ج) ϕ_i ها (که در شکل نشان داده‌شده اند) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

د) نسبتِ $\frac{r_i v_j}{r_j v_i}$ براي هر $1 \leq i, j \leq 3$ در هر لحظه چه‌قدر است؟

ه) رابطه‌ای بینِ ϕ_1، v_1/v_2 و زاویه‌ي $\angle ABC$ به دست آورید.

و) نسبتِ v_1/v_2 را بر حسبِ دو زاویه‌ي $\angle CAB$، و $\angle ABC$ به دست آورید.

ز) فرض کنید ذره‌ي 1 (که سرعتش v_1 است) در ابتدا روی محورِ x بوده. معادله‌ي مسیرِ این ذره در مختصاتِ قطبی ($r(\theta)$) را به دست آورید.

راه‌نمایی: ممکن است رابطه‌ي سینوس‌ها در مثلث به دردتان بخورد. برطبقِ این رابطه در یک مثلث نسبت هر ضلع به سینوسِ زاویه‌ي مقابل مقداری ثابت است.

بسمه تعالی

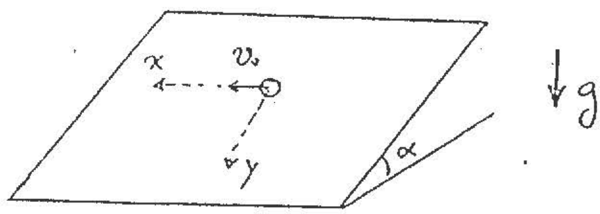
۸۵/۲/۱۹

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (ادامه‌ی ادامه)

وقت : ۳ ساعت

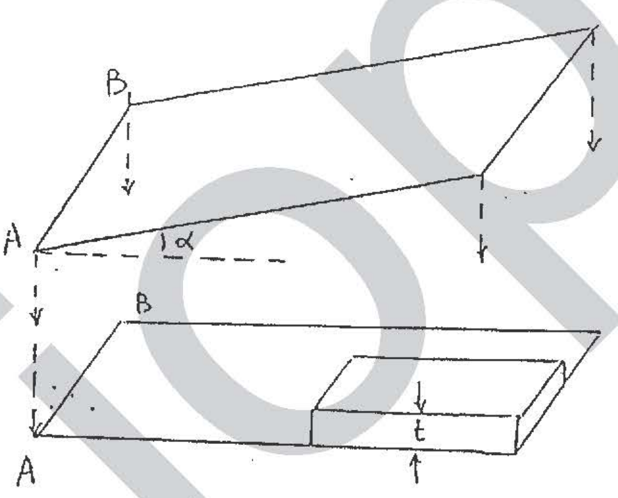
۳ نخوانده

۱۴ - گلوله‌ای به شعاع R روی گوه‌ای به زاویه‌ی α می‌غلتد. اگر این گلوله با سرعت اولیه‌ی v_0 در جهت افقی شروع به غلتش کند معادله‌ی مسیر آن را به دست آورید. جرم گلوله را m و گشتاور لختی آن را I بگیرید.



۶

۱۵ - یکی از راه‌های اندازه‌گیری ضخامت لایه‌های نازک استفاده از روش‌های تداخل‌سنجی است. فرض کنید لایه‌ی نازکی با ضخامت t قسمتی از سطح داخلی یک وجه گوه‌ی هوا را پوشانده است.

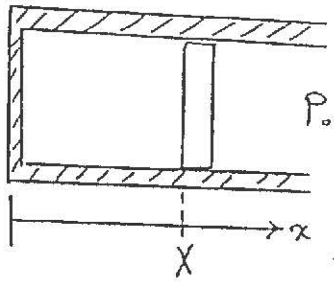


توجه:
سطح بالایی گوه در واقع
باید با زاویه‌ی α روی سطح
زیرین قرار گیرد و برای
وضوح شکل بالاتر رسم شده.

گوه را زیر میکروسکوپی نظیر آنچه در آزمایشگاه به کار بردید قرار می‌دهیم. چه تغییری در طرح فریزها نسبت به حالت گوه‌ی ساده‌ی هوا ایجاد می‌شود؟ طرح تقریبی فریزها را رسم کرده، دلیل به وجود آمدن چنین طرحی را بنویسید. همچنین به طور مستدل بنویسید چگونه می‌توان ضخامت t را به دست آورد.

۴۶

۱۶- در این مسئله می‌خواهیم بس‌آمد نوسانات بی‌دررو را برای گازی که مولکول‌های آن در یک میدان خارجی قرار دارند حساب کنیم. ذرات گاز را تک‌اتمی با جرم m و بار q در نظر بگیرید. تعداد این ذرات N، ثابت، و در ظرفی به حجم V قرار دارند.



این گاز در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}=-E\hat{x}$ قرار دارد. از برهم‌کنش الکتریکی ذرات گاز صرف‌نظر کنید. مکان پیستون را X (ایکس بزرگ)، جرم پیستون را M و سطح مقطع آن را A بگیرید.

الف) می‌دانیم تابع توزیع این سیستم به شکل $f(\vec{r},\vec{p})=Ge^{-\frac{E(\vec{r},\vec{p})}{kT}}$ است. $n(x)$ چگالی حجمی گاز را حساب کنید.

ب) $P(X)$ یعنی فشار در محل پیستون را حساب کنید.

ج) U انرژی کل سیستم را حساب کنید و آن را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{qEX}{kT}$ محاسبه کنید.

د) معادله‌ی حالت تحول بی‌دررو‌ی سیستم را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{qEX}{kT}$ به دست آورید. (در این قسمت رابطه‌ای بین $P(X)$ و V استخراج کنید.)

هـ) بس‌آمد نوسانات بی‌دررو‌ی پیستون را حساب کنید. (فشار خارج را P_0 بگیرید.)

موفق باشید