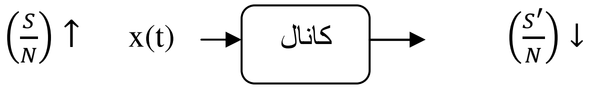
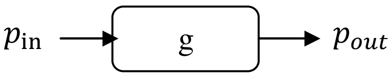
اتلاف توان در انتقال[1]:

یک سیستم انتقال علاوه بر اعوجاج معمولاً توان سیگنال را نیز کاهش می دهد. این کاهش توان را می تـوان بـا تقویت کنندهٔ توان جبران کرد اما اگر کاهش توان از حدی بیشتر باشد نویز موجود در سیگنال مانع بازیابی کامل و تقویت سیگنال مطلوب می شود.

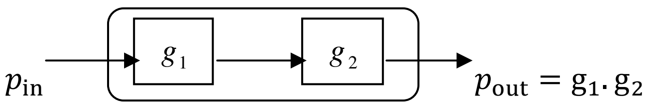


(تضعیف به این علت مهم است که چون نویز همواره وجود دارد، نسبت توان سیگنال به نویز در طرف اول بالاست پس نویز تأثیر زیادی روی سیگنال ندارد اما چون سیگنال در کانال تضعیف می شود و نویز همه جا حضور دارد، پس نسبت توان سیگنال به نویز در طرف دوم پایین می آید.)

گین توان : در سیستم LTI روبرو اگر توان ورودی p_{in} و سیستم بدون اعوجاج باشد آنگاه توان متوسط خروجی متناسب با p_{in} است. (g گین سیستم است.)



$$g \triangleq \frac{p_{out}}{p_{in}} \implies p_{out} = g.p_{in}$$



از آنجائیکه مقدار g در سیستم های متداول بسیار زیاد است مرسوم است که آن را بصورت زیر برحسب دسی بل(dB)[2] بیان می کنند:

$$g_{dB} \triangleq 10\log_{10} g \Rightarrow g = 10^{\frac{g_{dB}}{10}}$$

به عنوان مثال

$$if \quad g_{dB} = 20dB \implies g = 100$$

$$if \quad g = 1000 \implies g_{dB} = 30dB$$

اگر $g \le 1 (= 10^0)$ باشد g_{dB} منفی و یا صفر می شود. (یعنی $g_{dB} \le 0$)

با این شیوه اعمال ضرب گین ها (حاصل سری کردن چند سیستم) به جمع تبدیل می شود.

$$g = g_1.g_2 \rightarrow g_{dB} = g_{1dB} + g_{2dB}$$

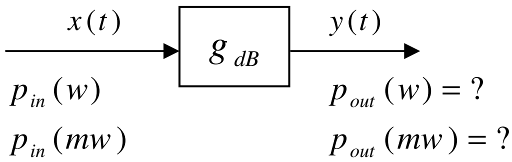
1. transmission loss
2. decible

– دسی بل همواره برای سنجش نسبت توانها است. می‌توان خود مقادیر توان‌ها (برحسب وات یا میلی وات) را نیز بصورت لگاریتمی بیان کرد :

$$p(w) \quad \Longrightarrow \quad p_{dBw} = 10\,log\frac{p(w)}{1(w)}$$

$$p(mw) \quad \Longrightarrow \quad p_{dBm} = 10\,log\frac{p(mw)}{1(mw)}$$

مثال :



حل :

$$p_{in}(dBw) \quad \Longrightarrow \quad p_{out}(dBw) = g_{dB} + p_{in}(dBw)$$

$$p_{in}(dBm) \quad \Longrightarrow \quad p_{out}(dBm) = g_{dB} + p_{in}(dBm)$$

توجه شود که توان همواره نسبت به یک بار(یا امپدانس) سنجیده می شود. بنابراین مقایسه توان ورودی و خروجی در صورتی درست است که امپدانس ها در ورودی و خروجی با هم برابر باشند. با این فرض اگر به سیستم LTI مذکور با تابع انتقال H(f) یک موج سینوسی با دامنه A_x بدهیم و دامنه موج سینوسی خروجی A_y باشد آنگاه داریم :

$$x(t) = A_x\cos(\omega_0 t + \varphi_x) \quad , \quad y(t) = A_y\cos(\omega_0 t + \varphi_y) \quad , \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$,A_y = A_x.\,|H(f)|_{f=f_0}$$

$$\longrightarrow \ \tfrac{1}{2}{A_y}^2 = \tfrac{1}{2}{A_x}^2|H(f_0)|^2 \qquad \left(p_x = \tfrac{1}{2}{A_x}^2 \quad , \ p_y = \tfrac{1}{2}{A_y}^2\right)$$

$$\Longrightarrow \ p_y = p_x.\,|H(f_0)|^2$$

رابطه گین توان : $g = \frac{p_{out}}{p_{in}} = \frac{p_y}{p_x} = |H(f)|^2$

اگر $H(f) = ke^{-j\omega t_d}$ باشد آنگاه گین توان برابر است با : ⁕ $g = |H(f)|^2 = k^2$

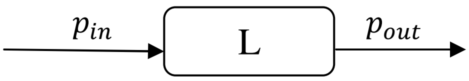
اگر امپدانس‌های ورودی و خروجی با هم برابر نباشند گین توان دیگر k^2 نیست بلکه متناسب با k^2 می شود.

از رابطه* ملاحظه می شود که اگر اندازه تابع انتقال با فرکانس تغییر کند آنگاه گین تابعی از فرکانس می شـود. به همین دلیل معیار مفیدی که وابستگی فرکانسی را برحسب توان سیگنال نشـان مـی دهـد تعریـف و اسـتفاده می کنند :

$$g_{dB} \overset{\Delta}{=} 10\log|H(f)|^2 = 20\log|H(f)|$$

اتلاف توان و تکرارکننده ها :

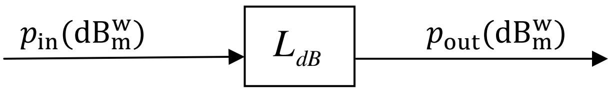
در یک سیستم پسیو توان خروجی کمتر از توان ورودی است ($p_{out} < p_{in}$) لذا برای سنجش میزان تضعیف یا اتلاف توان در انتقال، کمیتی بصورت زیر تعریف و استفاده می کنند :



$$L \overset{\Delta}{=} \frac{1}{g} = \frac{p_{in}}{p_{out}} \Rightarrow L_{dB} = -g_{dB} = 10\log\frac{p_{in}}{p_{out}}$$

در سیستم های دارای تضعیف همواره L >1 است.

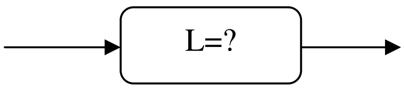
اگر



- $p_{out}(\mathrm{dBw}) = p_{in}(\mathrm{dBw}) - L_{dB}$
- $p_{out}(dBm) = p_{in}(dBm) - L_{dB}$

مثال : در برخی خطوط انتقال، کابل های کواکسیال و موجبرها توان خروجی بصورت نمایی با فاصله کاهش می یابد ؛

if ، $p_{out} = 10^{\frac{-\alpha\ell}{10}} . p_{in}$



α = ضریب تضعیف و l = طول مسیر بر حسب dB بر واحد طول می باشد.

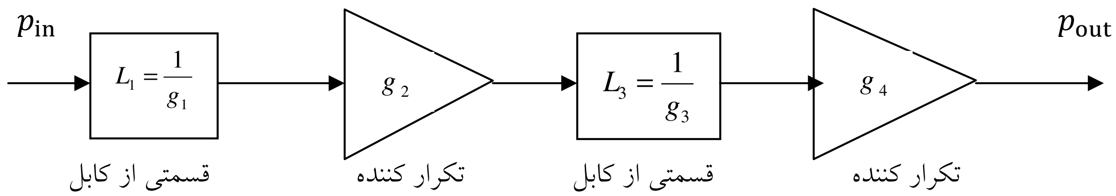
حل :

$$L = 10^{\frac{\alpha l}{10}} \rightarrow L_{dB} = \alpha l$$

از آنجایی که تضعیف (dB) متناسب با فاصله است، بنابراین باید در طول مسیر از تقویت کننده هایی برای جلوگیری از تضعیف بیش از حد سیگنال استفاده کنیم. این تقویت کننده ها را تکرار کننده[1] نیز گویند.

1. Repeater

نحوه‌ی استفاده از تکرار کننده‌ها در شکل زیر نشان داده شده است :



عملگر متوسط گیری : $< z(t) >$

برای سیگنال های توان؛ اگر z(t) توان باشد :

$$< z(t) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t)dt.$$

برای سیگنال های انرژی؛ اگر z(t) انرژی باشد :

$$< z(t) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t)dt$$

ضرب اسکالر یا ضرب داخلی :

برای دو سیگنال $v(t)$ و $w(t)$ داریم : ضرب اسکالر $\triangleq < v(t).w^*(t) >$

ویژگی های عملگر متوسط گیری :

1. $p_v = < |v(t)|^2 >$
2. $E_v = < |v(t)|^2 >$
3. $< z^*(t) > = < z(t) >^*$
4. $< z(t - t_d) > = < z(t) > \quad \forall t_d$
5. $< a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) > = a_1 < z_1(t) > + a_2 < z_2(t) >$

٦- ضرب اسکالر معرف میزان شباهت دو سیگنال است.

۷- نامساوی شوارتز : سیگنال های توان : $|< v(t).w^*(t) >|^2 \leq p_v.p_w$

سیگنال های انرژی : $|< v(t).w^*(t) >|^2 \leq E_v.E_w$

حالت تساوی زمانی رخ می دهد که : $v(t) = a.w(t)$ (a یک عدد ثابت است.)

بعبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو سیگنال زمانی ماکزیمم می شود (زمانی بیشترین شباهت را به هم دارند) که دو سیگنال متناسب باهم باشند.

توابع همبستگی:

۱- تابع همبستگی متقابل ۲- تابع خود همبستگی

همبستگی سیگنال های توان :

تابع همبستگی متقابل :

برای دو سیگنال توان v(t),w(t) داریم :

$$R_{vw}(\tau) \overset{\Delta}{=} < v(t).w^*(t-\tau) > \\ = < v(t+\tau).w^*(t) >$$

خواص تابع همبستگی متقابل :

۱- تابع همبستگی متقابل میزان شباهت یکی نسبت به شیفت یافته‌ی دیگری است.

2- $R_{vw}(\tau) \neq R_{wv}(\tau)$

3- $|R_{vw}(\tau)|^2 \leq p_v.p_w$

4- $R_{wv}(\tau) = R^*_{vw}(-\tau)$

تابع خودهمبستگی :

$$R_v(\tau) \overset{\Delta}{=} R_{vv}(\tau) =< v(t).v^*(t-\tau) > =< v(t+\tau).v^*(t) >$$

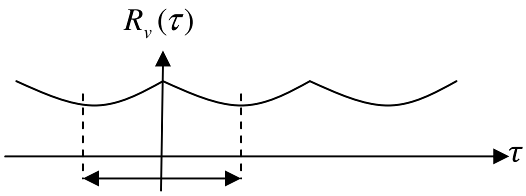
خواص تابع خودهمبستگی :

۱- این تابع میزان شباهت تابع v(t) را با شیفت یافته خودش به اندازه τ، بیان می کند.

2- متناوب $v(t) \rightarrow R_v(\tau)$ متناوب (دوره تناوب همان دوره تناوب قبلی است.)

3- $|R_v(\tau)| \leq R_v(0) \Longrightarrow$ یعنی شبیه ترین سیگنال به v(t) خود v(t) است نه شیفت یافته آن

مقدار ماکزیمم در مبدأ است



4- $R_v(0) = p_v$

5- $R_v(-\tau) = R_v^*(\tau)$

6- اگر v(t) حقیقی باشد $\Longrightarrow$ $R_v(\tau)$ حقیقی و زوج است.

دو سیگنال ناهمبسته[1] :

دو سیگنال v(t),w(t) را ناهمبسته گوییم هرگاه داشته باشیم: $\forall \tau \quad R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$

اگر v(t),w(t) دوسیگنال دلخواه باشند. $z(t) = v(t) \pm w(t)$

$$\Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{wv}(\tau) + R_{vw}(\tau)]$$

حال اگر این دو سیگنال ناهمبسته نیز باشند $\Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau)$

$$\tau = 0 \rightarrow \quad p_z = p_v + p_w$$

همبستگی سیگنال های انرژی :

در مورد سیگنال های انرژی نمی‌توان از متوسط گیری استفاده کرد و بجای آن از تعریف انرژی کل استفاده می‌کنیم : $E_v \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t).v^*(t)\,dt \geq 0$

حال می‌توان توابع همبستگی متقابل و خودهمبستگی را برای سیگنال‌های انرژی چنین تعریف کرد:

$R_{vw}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} < v(t).w^*(t-\tau) >$ (v(t),w(t) دو سیگنال انرژی اند.)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).w^*(t-\tau)\,dt$$

$$R_v(\tau) = R_{vv}(\tau) =< v(t).v^*(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).v^*(t-\tau)\,dt$$

1.uncorrelated

توجه کنید که تمام روابطی که تاکنون برای سیگنال های توان بدست آوردیم، در مورد سیگنال های انرژی نیز صادق است. تنها کافی است که در آنجا بجای توان p_v از انرژی E_v و بجای متوسط گیری <z(t)> از انتگرالگیر $\int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\,dt$ استفاده کنیم. بعنوان مثال داریم :

برای سیگنال توان $\quad |R_{vw}(\tau)|^2 \le p_v.p_w$

برای سیگنال انرژی $\quad |R_{vw}(\tau)|^2 \le E_v.E_w$

از آنجایی که از سیگنال های انرژی می توان تبدیل فوریه گرفت (برخلاف سیگنال های توان) به همین دلیل علاوه بر خواص ذکر شده برای سیگنال های توان، یکسری خواص دیگر نیز برای سیگنال انرژی تعریف می کنیم که فقط برای سیگنال انرژی صادق است :

برای دو سیگنال انرژی v(t)وw(t) روابط زیر را داریم :

(در مورد سیگنال های توان، کانولوشن تعریف نشده است.) $\quad 1 - R_{vw}(\tau) = v(\tau) * w^*(-\tau)$

$$2 - R_v(0) = E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(f)|^2 df$$

$$3 - R_{vw}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).w^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(f).w^*(f)df$$

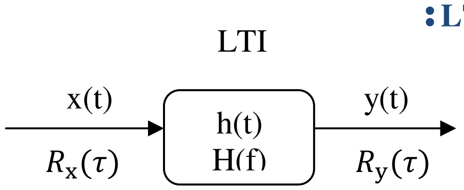
با ترکیب روابط ۲و۳ و($\tau=0$) داریم :

$$|R_{vw}(0)|^2 \le E_v.E_w = R_v(0).R_w(0)$$
$$\rightarrow \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} v(f).w^*(f)\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |v(f)|^2 df.\int_{-\infty}^{+\infty} |w(f)|^2 df$$

رابطه‌ی بالا بیان دیگری از نامساوی شوارتز در حوزه فرکانس است.

در رابطه بالا تساوی مجدداً زمانی رخ می دهد که v(f),w(f) با هم متناسب باشند.

توابع همبستگی بین ورودی- خروجی در یک سیستم LTI:



اگر x,y دو سیگنال دلخواه باشند که ورودی- خروجی

سیستم LTI را تشکیل دهند داریم:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda).x(t-\lambda)d\lambda$$

با توجه به رابطه فوق و تعریف توابع همبستگی می‌توان روابط زیر را بدست آورد :

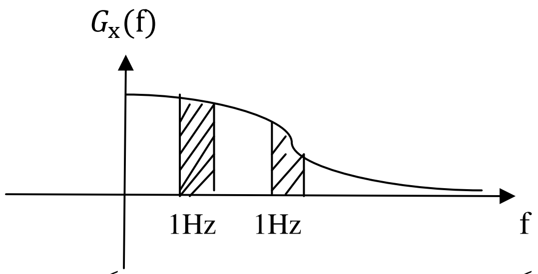
$$1) R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda).R_x(\tau-\lambda)d\lambda$$

$$2) R_y(\tau) = h^*(-\tau) * R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(-\lambda).R_{yx}(\tau-\lambda)d\lambda$$

$$1 \text{ و } 2 \quad \Rightarrow \quad 3) R_y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau)$$

تابع چگالی طیفی :

$$x(t) \to G_x(t)$$



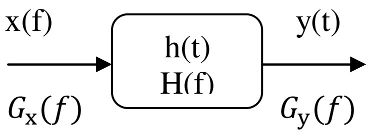
تابع چگالی طیفی یک سیگنال انرژی یا توان معرف چگونگی توزیع انرژی یا توان در طیف سیگنال است.

دو ویژگی اساسی تابع چگالی عبارت است از :

یعنی سطح زیر منحنی G_v(f) انرژی کل سیگنال یا توان متوسط آنرا بدست می‌دهد.

$$1\text{-}\ \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)df = E_v$$

۲- چگالی طیف ورودی و خروجی در یک سیستم LTI با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند :



گین توان $g = |H(f)|^2$

$$\to G_y(f) = |H(f)|^2 . G_x(f)$$

ترکیب دو ویژگی مذکور، رابطه‌ی روبرو را به ما می‌دهد :

$$R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, G_x(f)df$$

تعبیر رابطه فوق چنین است که انرژی کل یا توان متوسط سیگنال برابر انتگرال کمیتی است که می‌توان آنرا به عنوان چگالی انرژی یا توان (به عبارت دیگر مقدار انرژی یا توان در واحد فرکانس) در نظر گرفت. لذا به همین دلیل به تابع G(f) **"چگالی طیفی"** توان یا انرژی گفته می‌شود. همچنین از آنجا که انرژی یا توان کمیتی حقیقی هستند پس تابع چگالی انرژی یا توان نیز باید حقیقی باشد.

طبق قضیه وینر-کنشاین[1] توابع همبستگی و چگالی طیفی تشکیل یک زوج تبدیل فوریه می دهند :

$$G_v(f) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} R_v(\tau)$$

$$\begin{cases} G_v(f) = \mathcal{F}\{R_v(\tau)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ R_v(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_v(f)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau}\, df \end{cases}$$

اگر v(t) یک سیگنال انرژی باشد داریم :

$$R_v(\tau) = v(\tau) * v^*(-\tau)$$

$$\rightarrow G_v(f) = v(f). v^*(f) = |v(f)|^2$$

$$\rightarrow G_v(f) = |v(f)|^2$$

اگر v(t) یک سیگنال توان از نوع سیگنال های متناوب باشد می‌توان بسط سری فوریه آن را چنین نوشت :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi f_0 t} \quad , \quad (e^{j2\pi n f_0 t} = e^{jn\omega_0 t})$$

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j2\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 2\pi\delta(\omega - 2\omega_0)$$

.
.
.

$\Leftarrow$ تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب، یک قطار ضربه است.

$$\rightarrow G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\, \delta(f - nf_0)$$

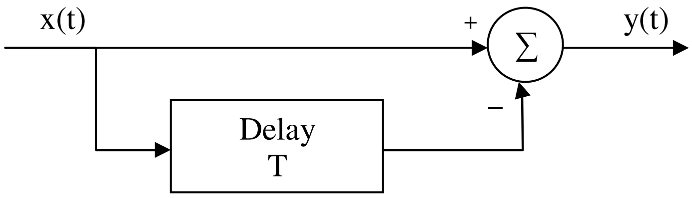
$$\begin{cases} G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) df = R_v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) . v^*(t) dt \end{cases} \dashrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) . v^*(t) dt$$

صورت دیگری از قضیه پارسوال :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t). v^*(t)\, dt$$

1.Wiener-kinchine theorem

مثال : فیلتر شانه ای[1] :



$R_y(\tau) = ?$

$G_y(\tau) = ?$

$(P_v)E_v = \bar{y}^2 = ?$

(یکی از کاربردهای این فیلتر در سیستم های تلویزیونی است.)

$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$

تبدیل فوریه $\rightarrow H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$

$|H(f)^2| = H(f).H^*(f) = \left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)(1 - e^{j2\pi fT})$

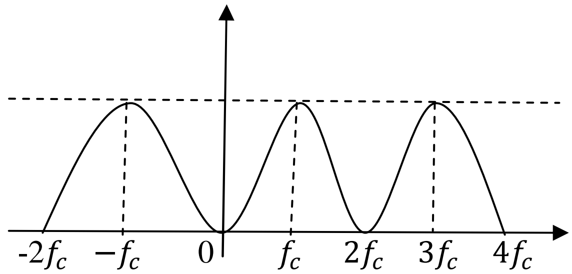
$= 2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT}$

$= 2 - (cos2\pi fT - jsin2\pi fT) - (cos2\pi fT + jsin2\pi fT)$

$= 2 - 2cos2\pi fT = 2 - 2(1 - 2sin^2 2\pi fT$

$= 4Sin^2\pi fT$ و ($T = \frac{2}{f_c}$ فرض)

$\rightarrow |H(f)|^2 = 4Sin^2\left(2\pi \frac{f}{f_c}\right)$



$$\begin{cases} G_y(f) = |H(f)|^2.G_x(f) \\ R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} \end{cases}$$

$\rightarrow R_y(\tau) = F^{-1}[|H(f)|^2] * R_x(\tau)$

و $F^{-1}[|H(f)|^2] = 2\delta(t) - \delta(t-T) - \delta(t+T)$

$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * [2\delta(t) - \delta(t-T) - \delta(t+T)]$

$= 2R_x(\tau) - R_x(\tau - T) - R_x(\tau + T)$

$\rightarrow \overline{y^2} = 2R_x(0) - R_x(-T) - R_x(T)$

$= 2\overline{x^2} - 2R_x(T)$ و ($\overline{x^2} =< x(t).x^*(t) >$ اگر سیگنال حقیقی باشد)

1. Comb filter