مدارهای الکتریکی ۱

فصل ششم

مدارهای تزویج

Scanned by CamScanner

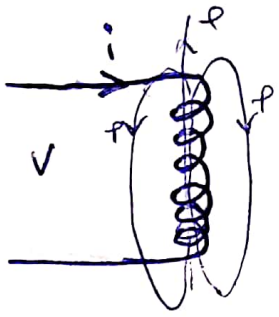
۵ مدارهای تزویج

در این فصل به بررسی دیگر از عناصر مدار مانند سلف های تزویج شده و ترانسفورماتور ایده آل بررسی می شود. تفاوت این عناصر با عناصری مانند سلف، خازن و مقاومت در این است که بیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به جریان و ولتاژ شاخه دیگر وابسته است، به همین دلیل عناصر تزویج نامیده می شوند.

در این فصل روش جدید تحلیل ندارد و نوشتن KVL و KCL برای حل این مدارات کفایت می کند.

۱- اندوکتانس یا ضریب القای خودی (L)

اندوکتانس یا ضریب القای خودی رابطه‌ی بین ولتاژ و جریان یک سیم پیچ را نشان می دهد.



قانون فاراده‌ی

$$V = N\frac{d\Phi}{dt}$$

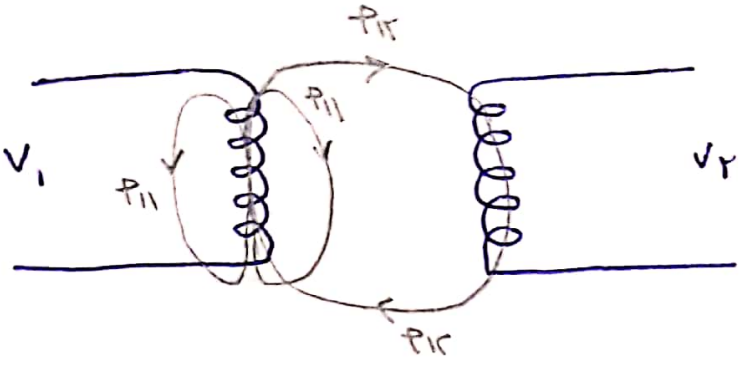
$$V = N\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} \xrightarrow{N\frac{d\Phi}{di} \triangleq L} V = L\frac{di}{dt}$$

۲- سلف های تزویج شده و ضریب القای متقابل (M)

اگر دو سیم پیچ حامل جریان در کنار یکدیگر قرار داشته باشند شار تولیدی هرکدام از دیگری نیز عبور می کند و بر روی شار اصلی آن تاثیر می گذارد بنابراین بر روی ولتاژ آن نیز اثر دارد. در این صورت گفته می شود این ۲ سیم پیچ تزویج شده اند و بین آنها القای متقابل وجود دارد.

Scanned by CamScanner

شکل و روابط سلف های تزویج به صورت زیر است



N_1 : تعداد دور سیم پیچ اول

N_2 : " " " " دوم

ϕ_1 : شار سیم پیچ اول

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

ϕ_{11} : شار سیم پیچ اول تولید شده توسط خودش

ϕ_{12} : شار گذرنده از سیم پیچ اول تولید شده توسط سیم پیچ دوم

$$V_1 = N \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

$$= N_1 \frac{d\phi_{11}}{di_1} \frac{di_1}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \frac{di_1}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt}$$

به صورت مشابه برای سیم پیچ دوم نیز داریم :

$$V_2 = N \frac{d\phi_2}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{22}}{dt}$$

$$= N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{22}}{di_2} \frac{di_2}{dt} = L_{21} \frac{di_2}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

ϕ_2 : شار سیم پیچ دوم

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

ϕ_{21} : شار گذرنده از سیم پیچ دوم تولید شده توسط سیم پیچ اول

ϕ_{22} : شار سیم پیچ دوم تولید شده توسط خودش

Scanned by CamScanner

نکته: اگر شار پراکندگی نداشته باشیم (که در حالت ایده‌آل داریم)

$$L_{12} = L_{21} = M$$

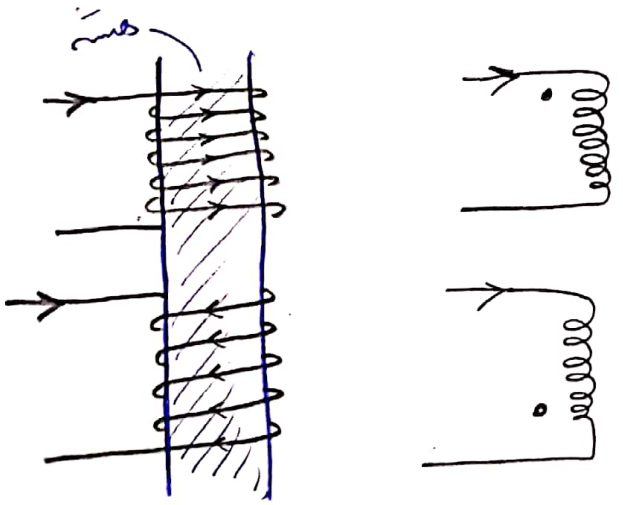
M ضریب القای متقابل بین دو سیم پیچ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \end{cases} \xrightarrow[\text{برای حالت دائمی سینوسی}]{\text{در حالت نیروی}} \begin{cases} V_1 = j\omega L_{11}I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2 \end{cases}$$

* روابط بالا نشان می‌دهد که ولتاژ یک سیم پیچ متأثر از جریان سیم پیچ دیگر است که به علت تزویج مغناطیسی شار بین آنها این اتفاق رخ داده است.

• قرارداد نقطه و ولتاژ القا شده

سیم پیچ‌ها معمولاً به دور هسته پیچیده می‌شوند. برای جهت خرخش سیم پیچ دور هسته ۲ حالت وجود دارد که در مدار با یک نقطه مشخص می‌شود.



سیم پیچ و هسته

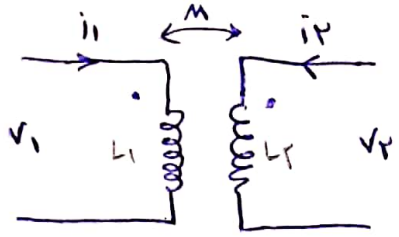
مدل مداری

سر نقطه دار در واقع پلاریته ولتاژ القایی را نشان می‌دهد.

Scanned by CamScanner

بجای تعیین جهت ولتاژ القا شده با توجه به سر نقطه دار ۴ حالت رخ می دهد.

الف)

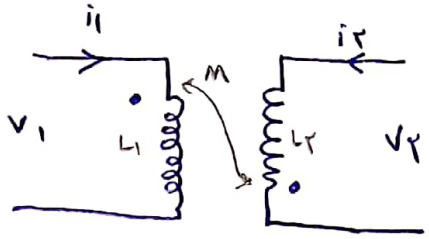


$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$M > 0$

ب)

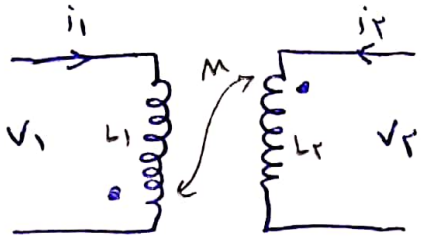


$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$M < 0$

ج)

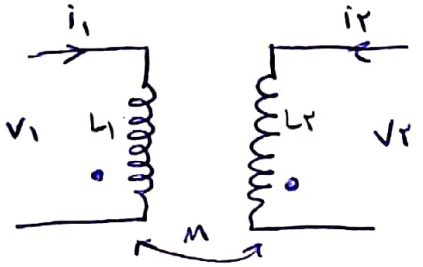


$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$M < 0$

د)



$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$M > 0$

- در ۴ شکل بالا به جهت جریان ها، سر نقطه دار و علامت M دقت شود.

- ضریب تزویج K

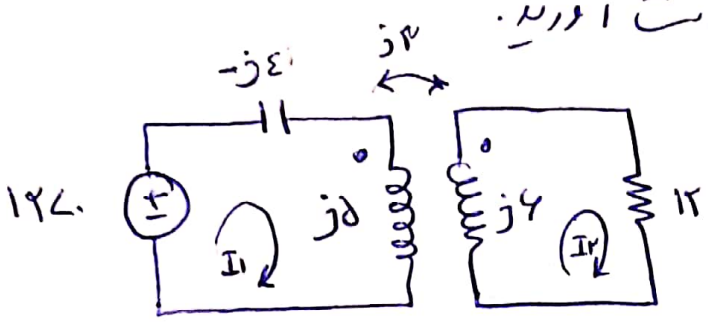
ضریب تزویج K به صورت زیر تعریف می شود که یک عدد بین ۰ و ۱ است. هرچه به یک نزدیک تر باشد تزویج بین ۲ سیم پیچ قوی تر است. عین شار یکی از دیگری بیشتر عبور کرده است

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad 0 \le K \le 1$$

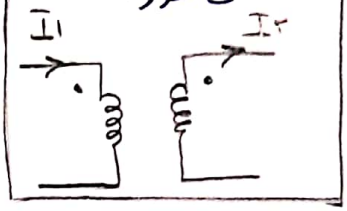
Scanned by CamScanner

۵/۶

مثال ۱- جریان I_1 و I_2 را بدست آورید.



حل: دقت شود جریان I_2 ماشد مدل استاندارد نیست و جهت آن عکس است بنابراین در هنگام ضرب می شود.



KVL @ ① : $-۱۲ - j۴I_1 + j۵I_1 + j۳(-I_2) = ۰$

$\Rightarrow jI_1 - j۳I_2 = ۱۲$ (I)

KVL @ ② $j۶I_2 - j۳I_1 + ۱۲I_2 = ۰$

$\Rightarrow I_1 = \frac{(۱۲+j۶)I_2}{j۳} = (۲-j۴)I_2$ (II)

جایگذاری (II) در (I)

$j(۲-j۴)I_2 - j۳I_2 = ۱۲$

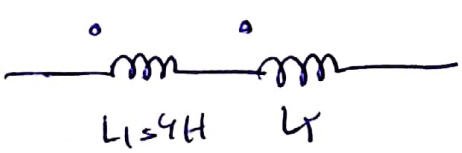
$(j۲+۴)I_2 - j۳I_2 = ۱۲ \Rightarrow (۴-j)I_2 = ۱۲$

$\Rightarrow I_2 = \frac{۱۲}{۴-j} = \frac{۱۲}{\sqrt{۱۷}\angle \tan^{-1}\frac{-۱}{۴}} = ۲٫۹۱\angle ۱۴٫۰۴$ A

$I_1 = (۲-j۴)I_2 = \left(\sqrt{۲۰}\angle \tan^{-1}\frac{-۴}{۲}\right)(۲٫۹۱\angle ۱۴٫۰۴)$

$= (۴٫۴۷\angle -۶۳٫۴۳)(۲٫۹۱\angle ۱۴٫۰۴) = ۱۳٫۰۱\angle -۴۹٫۳۹$ A

مثال ۲: در شکل زیر L_2 چند هانری است؟



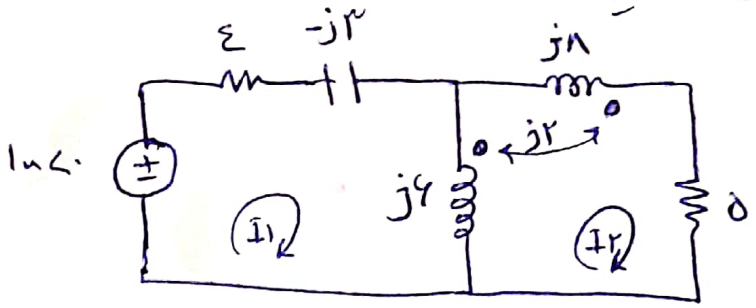
$K = ۰٫۸$

$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \Rightarrow ۰٫۸ = \frac{۹٫۶}{\sqrt{۴L_2}} \Rightarrow \sqrt{۴L_2} = \frac{۹٫۶}{۰٫۸} = ۱۲$

$۴L_2 = ۱۴۴ \quad L_2 = ۳۶$ H

Scanned by CamScanner

مثال ۳- جریان هرمش را بدست آورید.



حل: نکته کلیدی در حل مسائل سلفهای تزویج داشتن علامت M است. در این مثال جریان سلف ۶j طبق شکل (I_1-I_2) است و جریان سلف ۸j برابر I_2 است اما I_2 وارد سر نقطه دار نشده است بنابراین M یعنی ۲j با علامت منفی ظاهر می‌شود

KVL ① $$-1\angle 0 + \varepsilon I_1 + (-j3)I_1 + j6(I_1-I_2) \underbrace{-j2}_{M} I_2 = 0$$

$$\Rightarrow 1\angle 0 = (\varepsilon + j3) I_1 - j8 I_2$$

KVL ② $$\underbrace{+j2}_{M} I_2 + j6(I_2 - I_1) + \underbrace{+j2}_{M}(I_2 - I_1) + j8 I_2 + 5 I_2 = 0$$

نکته KVL بالا: در حلقه دوم ۲ بار M ظاهر می‌شود چون در یک KVL هر ۲ سلف هستند همچنین جریان سلف ۶j برابر (I_2-I_1) و سلف ۸j برابر I_2 است که هر دو از سر نقطه دار وارد می‌شوند بنابراین M با علامت مثبت ظاهر شده است.

KVL ① $$0 = -j8 I_1 + (5 + j16) I_2$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon + j3 & -j8 \\ -j8 & 5 + j16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\angle 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

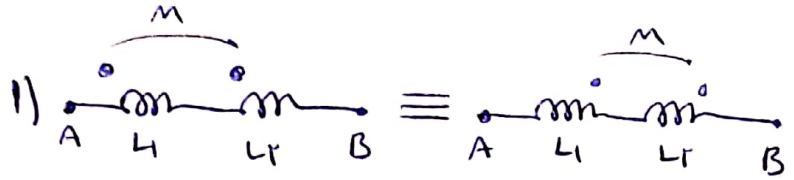
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1\angle 0 & -j8 \\ 0 & 5+j16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon+j3 & -j8 \\ -j8 & 5+j16 \end{vmatrix}} = \frac{1\angle 0 (5+j16) - j8}{(\varepsilon+j3)(5+j16) - (j8)(j8)} = 2.13\angle 35$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon+j3 & 1\angle 0 \\ -j8 & 0 \end{vmatrix}}{|\Delta|} = 8.49\angle 19$$

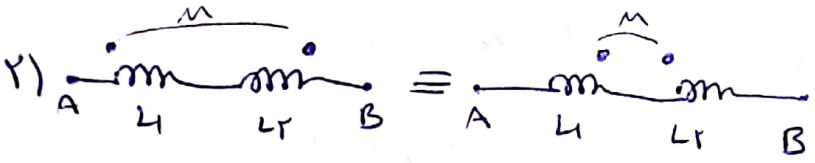
Scanned by CamScanner

• به هم بستن سلف های تزویج

الف) سری کردن ۲ سلف تزویج

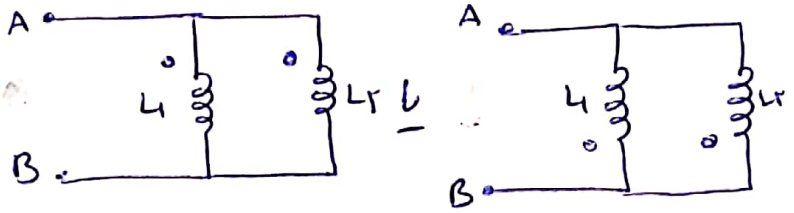


۱) $L_{AB} = L_1 + L_2 + 2M$

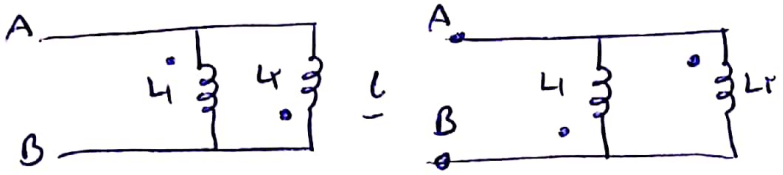


۲) $L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M$

ب) موازی کردن ۲ سلف تزویج



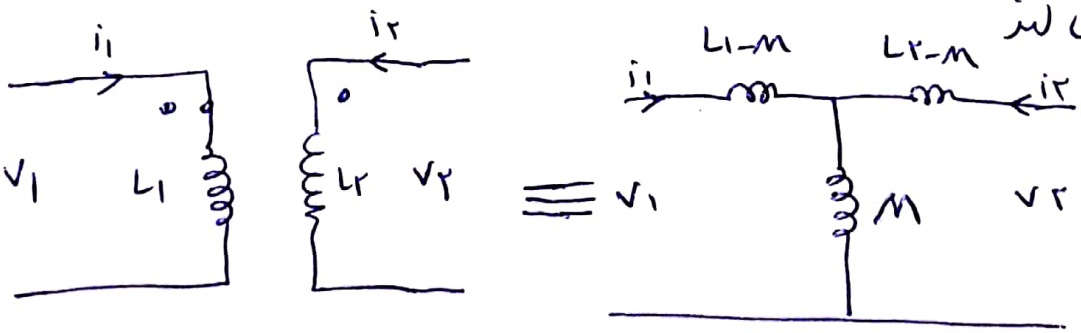
$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$



$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

• مدار معادل T برای سلف های تزویج

مدار معادل زیر برای جایگزینی ۲ سلف تزویج مناسب است چون روابط KVL تغییر نمی کند

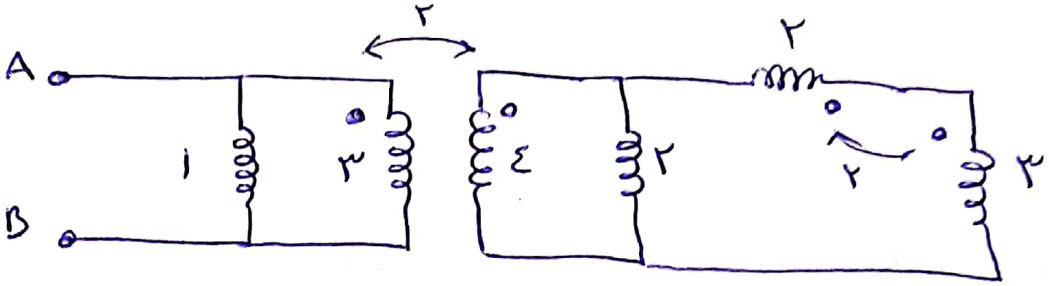


$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

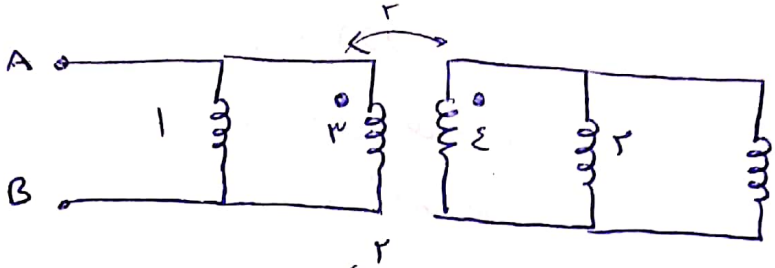
$$V_1 = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Scanned by CamScanner

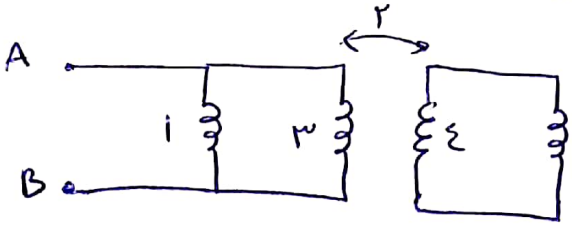
مثال ۴ - اندوکتانس دیده شده از سرهای A و B را بدست آورید



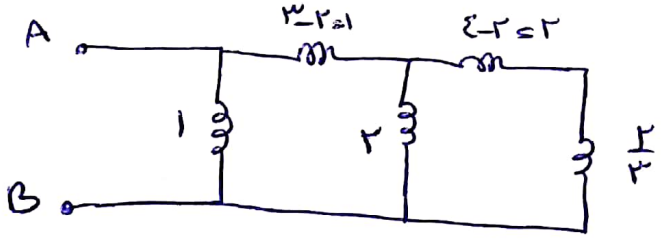
حل



$$L'_1 = 2+3-2(2) = 1$$



$$L'_2 = 1 \| 2 = \frac{1 \times 2}{1+2} = \frac{2}{3}$$



$$L_{AB} = \left[\left(\left(\frac{2}{3}+2\right) \| 2\right)+1\right] \| 1$$

$$= \left(\left(\frac{8}{3} \| 2\right)+1\right) \| 1 = \frac{15}{22}$$

- انرژی در سلف های تزویج

انرژی ذخیره شده در یک سلف قبلاً گفته شد که $\frac{1}{2}Li^2$ است برای سلف های تزویج داریم

انرژی ذخیره شده در سلف اول $W_1 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm \frac{1}{2}M i_1 i_2$

" " " دوم $W_2 = \pm\frac{1}{2}M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$

انرژی کل $W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$

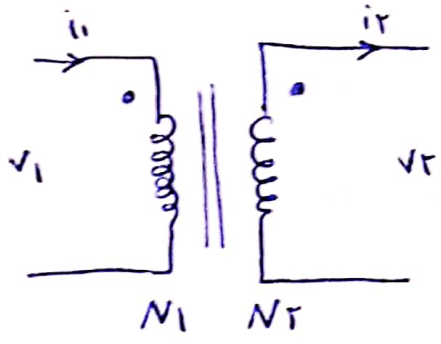
به شکل ماتریسی $W = \frac{1}{2}[i_1 \; i_2]\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

• ترانسفورماتور ایده آل

ترانسفورماتور ایده آل ۲ سلف تزویج است که به صورت کامل با یکدیگر تزویج شده اند یعنی $K=1$ به عبارت دیگر شار تولیدی توسط یک سلف به طور کامل از دیگری عبور می کند. به سیم پیچ اول اولیه و به سیم پیچ دوم ثانویه گفته می شود.

در ترانسفورماتور ایده آل: $M \to \infty$ و L_1 و L_2 و $K=1$ و بدون تلفات است



$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \qquad v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} \Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

یعنی ولتاژ ۲ طرف ترانسفورماتور با نسبت تعداد دور سیم پیچ ها رابطه ی مستقیم دارد.

حفظ ایده آل است بنابراین توان ورودی برابر با توان خروجی است.

$$P_{in} = P_{out} \Rightarrow v_1 I_1 = v_2 I_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}}$$

یعنی جریان ۲ طرف ترانسفورماتور با نسبت تعداد دور سیم پیچ ها رابطه ی عکس دارد

نکته: به جهت جریان ها دقت شود.

با تعریف $\frac{N_1}{N_2} = n$ که نسبت تبدیل نام دارد

$$\frac{v_1}{v_2} = n \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n}$$

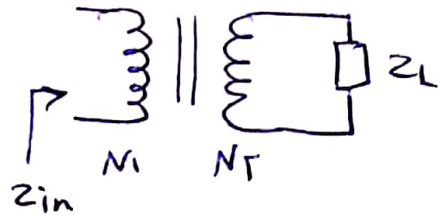
اگر $n<1$ باشد تراس افزاینده است یعنی ولتاژ طرف دیگر بیشتر است

اگر $n>1$ باشد تراس کاهنده است " " " " کمتر است

Scanned by CamScanner

● انتقال امپدانس

اگر در طرف ثانویه ترانسفورماتور یک امپدانس متصل باشد می‌توان آن را در نسبت تبدیل به توان ۲ ضرب کرد و آن را به طرف اول انتقال داد.



$$\Rightarrow \quad Z_{in} = n^2 Z_L$$

اثبات

$$Z_L = \frac{V_2}{I_2}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{\frac{1}{n}I_1} = n^2 \frac{V_2}{I_2} = n^2 Z_L$$

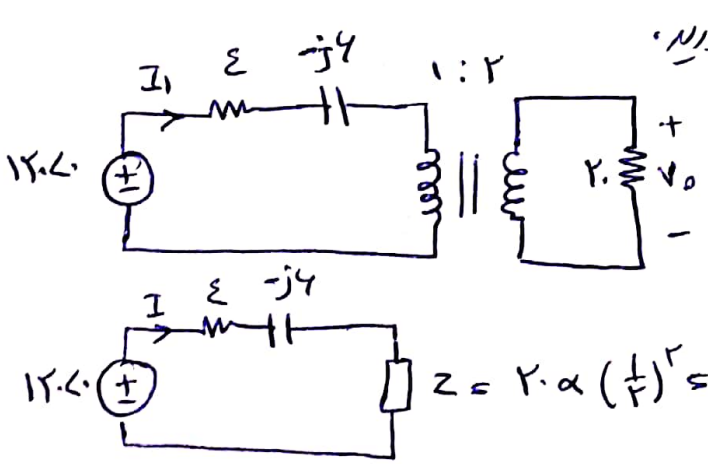
مثال ۵- در یک ترانسفورماتور ایده‌آل، با ولتاژ اولیه و ثانویه $\frac{24\text{kV}}{120\text{V}}$ و توان 9.6 KVA دارای ۵۰ دور در سیم پیچ ثانویه است: مطلوب: تعداد دور در سیم پیچ اولیه، نسبت تبدیل جریان اولیه و ثانویه

$$\frac{24\text{kV}}{120} = \frac{N_1}{50} \quad \text{ا} \quad N_1 = \frac{24\text{k} \times 50}{120} = 1\text{m}$$

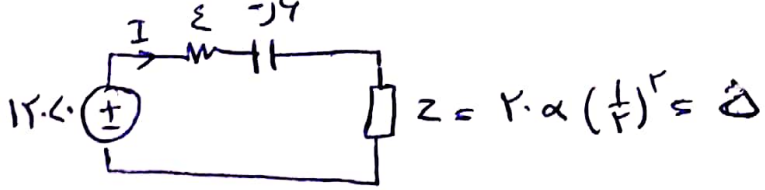
$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1\text{m}}{50} = 20$$

$$S = V_1 I_1 = V_2 I_2 \qquad I_1 = \frac{96\text{m}}{24\text{k}} = 4\,\text{A} \qquad I_2 = \frac{96\text{m}}{120} = 80\,\text{A}$$

مثال ۶- در مدار زیر جریان I_1 را بدست آورید.



مقاومت ۲۰ را به اولیه انتقال می‌دهیم و ترانس حذف می‌شود.



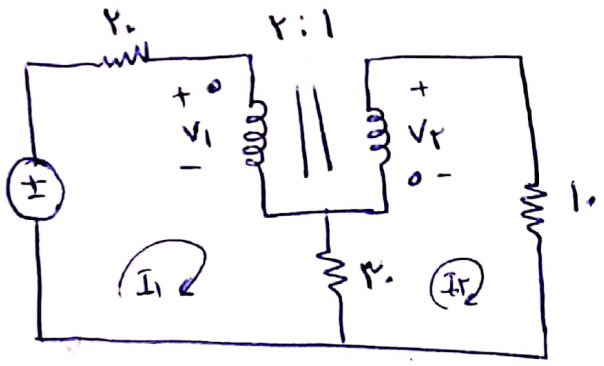
$$Z_{eq} = 4 - j4 + 5 = 9 - j4 = 10.82\angle -23.49$$

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120\angle 0}{10.82\angle -23.49} = 11.09\angle 23.49$$

Scanned by CamScanner

11/4

مثال ۷- در مدار زیر توان مصرفی در مقاومت ۱۰ اهمی چقدر است؟



حل: در این مدار برای توان مقاومت را انتقال داد در روش حل KVL یا KCL است.

KVL ① $-۱۲۰ + ۲۰ I_۱ + V_۱ + ۳۰ (I_۱ - I_۲) = ۰$

$\Rightarrow ۵۰ I_۱ - ۳۰ I_۲ + V_۱ = ۱۲۰$ (I)

KVL ② $-V_۲ + ۱۰ I_۲ + ۳۰ (I_۲ - I_۱) = ۰$

$\Rightarrow -۳۰ I_۱ + ۴۰ I_۲ - V_۲ = ۰$ (II)

برای ترانسفورماتور ایده آل داریم

$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{-۲}{۱} \Rightarrow V_۲ = -\frac{۱}{۲} V_۱$

$I_۲ = -۲ I_۱$

(I) $-۵۵ I_۲ - ۲ V_۲ = ۱۲۰$

(II) $۵۵ I_۲ - V_۲ = ۰$

$\Rightarrow I_۲ = \frac{-۱۲۰}{۱۴۵} = -۰.۸۲$

$P = R I^۲ = ۱۰ \times (-۰.۸۲)^۲ = ۶.۷ \ W$

Scanned by CamScanner