

Subject: معادلات دیفرانسیل

Year: ★ Month: ☺ Date:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Rightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int k f dx = k \int f dx \Rightarrow \int \varepsilon dx = \varepsilon x + C$$

$$\int 5x^4 - 2x + 3 dx \Rightarrow \frac{5x^5}{5} - \frac{2x^2}{2} + 3x + C$$

قوانین انتگرال گیری

$$1) \int dx = x + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3) \int f + g dx = \int f dx + \int g dx$$

$$4) \int k f dx = k \int f dx$$

$$\int 5x^4 - 2x + 3 dx$$

$$\frac{5x^5}{5} - \frac{2x^2}{2} + \frac{3x^1}{1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} + C$$

Arman

5x⁵

5x⁵

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\int \frac{dx}{x^b} = \frac{x^{-b}}{-b} = \frac{x^{-b}}{-b} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^0}{0} \quad \text{یہ ایک خاص صورت ہے}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad \text{اور } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \sin \epsilon x dx = -\frac{1}{\epsilon} \cos \epsilon x + C$$

$$\int \cos \epsilon x dx = \frac{1}{\epsilon} \sin \epsilon x + C$$

$$f(x) = e^x \quad \text{ناتوانی}$$

$$e \approx 2.71 \quad \text{عدد نیر}$$

Arman

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$v) (e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

$$1) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

$$\int e^{-5x} dx = \frac{1}{-5} e^{-5x} + C$$

$$\int e^{-x} dx = \frac{1}{-1} e^{-x} + C$$

$$a) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1}$$

$$\text{Arman} \begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0 \\ 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases} \quad B=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

فصل اول :

تعریف : هر رابطه‌ای بین تابع y و متغیر x ، جوابی از y و مشتقات آن نسبت به x که حداقل شامل یکی از مشتقات باشد باید معادله دیفرانسیل گویند.

مثال ۱۰ مرتبه ۲
 $y'' + 2xy' + (\sin x)y = e^x$

مرتبه ۳
 $y''' + y'' + xy' + e^x y = 0$

مرتبه ۵
 $y^{(5)} + 2xy'' = \sin x$

تعریف : مرتبه معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه y است که موجود در معادله

دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گویند.

مرتبه ۶
 $y^{(6)} + 2xy' + 2xy = 0$

تعریف : جواب معادله دیفرانسیل، هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$y'' + y = 0$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

مثال ۱

$$-\sin x + \sin x = 0$$

بنابراین $y = \sin x$ جوابی از معادله بالاست

$$y'' + y = 0$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$-\cos x + \cos x = 0$$

مثال ۲ بررسی کنید تابع $y = e^x$ جوابی از معادله دیفرانسیل $y'' - y' = 0$ است یا نه

$$y'' - y' = 0$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y'' = e^x$$

$$e^x - e^x = 0$$

پس e^x جوابی از معادله بالاست

* معادلات مرتبه اول

الف) معادلات جدایی پذیر: به معادلاتی گویند که بتوان هر یک از متغیرها را به

یک سمت فرستاد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$y' = xy$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

Arman

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^r}{r} + C$$

$$xy' + x^r y = 0 \quad xy' = -x^r y$$

$$\frac{dy}{dx} = -x y$$

$$y' = \frac{y}{1+x^r} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^r} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^r}$$

$$\ln|y| = (\tan^{-1}) x + C \quad (\tan^{-1}) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{e^x}{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y} \Rightarrow \int y dy = \int e^x dx$$

$$\frac{y^r}{r} = e^x + C$$

$$\frac{y'}{\sin x} = y$$

$$y' = (\sin x) y$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x) y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx$$

$$\ln|y| = -\cos x + C$$

$$y' = y^r \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = y^r \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y^r} = \int \tan x dx$$

$$\int y^{-r} dy = \int \tan x dx$$

$$\text{Arman} \quad \frac{y^{-r}}{-r} = -\ln|\cos x| + C$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

معادلات همب: تابع $f(x, y)$ همب و از درجه n گویند هرگاه

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

که n ثابت

مثال ۱: $f(x, y) = x - y \Rightarrow (\lambda x) - (\lambda y) = \lambda(x - y)$

$$\lambda f(x, y) \quad \text{همب و از درجه ۱}$$

مثال ۲: $f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2$

$$\lambda^2(x^2 - y^2) \quad \lambda^2 = f(x, y) \quad \text{همب و از درجه ۲}$$

تعریف معادله دیفرانسیل: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ، M و N همب!

توسعه هرگاه تابع $M(x, y)$ و $N(x, y)$ همب و از درجه m و n باشند

مثال ۳: $\underbrace{x^2 dx}_m + \underbrace{xy dy}_n = 0 \quad m(x, y) = x^2$

$$m(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2$$

$$n(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy \Rightarrow \lambda^2 m(x, y) = \lambda^2 n(x, y)$$

* یک معادله دیفرانسیل همب، با تغییر متغیر $u = y/x$ معادله جدایی پذیر تبدیل

Arman

مکانیسم و سیستم های رایانشی

Subject:

Year:

★ Month:

📅 Date:

$$y = tx \quad dy = t dx + x dt$$

$$(x+y) dx + (x-y) dy = 0$$

مسئله داده دفرانسیل زیر را حل کنید

$$m(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$$

ابتداءً ثابت کردن یون

$$n(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y = \lambda(x-y)$$

همین وارد جدا

$$(x+y) dx + (x-y) dy = 0$$

حل

$$(x+tx) dx + (x-tx)(t dx + x dt) = 0$$

$$x dx + tx dx + x t dx + x^2 dt - tx^2 dx - tx^2 dt = 0$$

$$(x + tx - tx) dx + (x^2 - tx^2) dt = 0$$

$$x(1 + t - t) dx + x^2(1 - t) dt = 0$$

$$x(1 + t - t) dx = -x^2(1 - t) dt$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-(1-t)}{1+t-t^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-t}{t^2-t-1} dt$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{r} \ln(t^2 - t - 1)$$

$$\text{Arman } \int \frac{1-t}{t^2-t-1} dt \quad u = t^2$$

تغییر متغیر

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$rt-1 \Rightarrow dt = rt-r$$

$$\frac{1}{r} \int \frac{-du}{u} = -\frac{1}{r} \ln(f^r rt-1)$$

$$\int \frac{x+1}{x^r+rx} dx$$

$$u = x^r + rx$$

$$du = (rx + r) dx$$

مثال، انتگرال تقسیم می‌شود

$$= \frac{1}{r} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{r} \ln|u| + c = \frac{1}{r} \ln|x^r + rx| + c$$

$$\int \frac{x^c}{x^c+1} dx$$

$$u = (x^c+1)' dx$$

$$(cx^{c-1}) dx$$

مثال، انتگرال

$$\frac{1}{c} \int \frac{du}{|u|} = \frac{1}{c} \ln|x^c+1| + c$$

$$(x+y) dx + x dy = 0$$

مثال

$$m(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y \quad m(\lambda x + \lambda y)$$

$$n(\lambda x) = \lambda x \quad n(\lambda x)$$

همه از درجه 1

$$(x+tx) dx + x(t dx + x dt)$$

$$(x+tx) dx + x t dx + x^2 dt = 0$$

$$x dx + tx dx + xt dx + x^2 dt = 0$$

Arman

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$(x + y^2) dx + x^2 dy = 0 \Rightarrow x(1 + y^2) dx = -x^2 dy \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dy}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{y} \ln|1+y^2| + C$$

$$\frac{1}{y} \int \frac{y dy}{1+y^2} = \frac{1}{y} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{y} \ln|u| \quad u = 1+y^2 \quad du = 2y dy$$

$$= -\frac{1}{y} \ln|1+y^2| + C \quad y = \frac{y}{x} \quad x = \frac{y}{y}$$

$$y' = \frac{x-y}{x+y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y^2}$$

$$(x-y) dx = (x+y^2) dy \quad (x-y) dx - (x+y^2) dy$$

$$x dx - y dy + (x^2 - y^2) dx = 0$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \text{تعريف: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{أو } \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x} (x - y)$$

$$(x^2 + y^2)' = 2x + 2y y'$$

$$f(x, y) = x^2 y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y$$

Arman

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x^2 + xy$$

مثال ۱

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1x^2 + 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$\int x^2 y \, dx = \frac{x^3}{3} y + c$$

مثال ۲ - انتگرال

$$\int x^2 y \, dy = x^2 \frac{y^2}{2} + c$$

مثال ۳ کامل بودن معادله دیفرانسیل زیر را بررسی کنید و سپس آن را حل کنید.

$$(x^2 + y) \, dx + (x - 2y) \, dy = 0 \quad \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial n}{\partial x} = 1 \quad \text{کامل است}$$

۱ از m نسبت به x انتگرال می گیریم

$$f(x, y) = \int m \, dx = \int x^2 + y \, dx = \frac{x^3}{3} + yx + h(y)$$

۲ از f نسبت به y مشتق می گیریم و برابر n قرار می دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = n \Rightarrow x + h'(y) = x - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y$$

۳ از تابع $h(y)$ انتگرال می گیریم

$$\text{Arman } h(y) = \int -2y \, dy = -\frac{2y^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + c$$

Subject :

Year :

Month :

Date :

$$(x^2 - y) dx - x dy = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \text{Integrable}$$

$$\textcircled{1} f(x, y) = \int M dx = \int (x^2 - y) dx = \frac{x^3}{3} - yx + h(y)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow -x + h'(y) = -x \Rightarrow h'(y) = 0 \quad h(y) = C$$

$$(2xy + 5) dx + (x^2 + 1)y dy = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \text{Integrable}$$

$$\textcircled{1} f(x, y) = \int M dx = \int (2xy + 5) dx = x^2 y + 5x = x \left(\frac{x^2}{3} y + 5 \right)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow x^2 + h'(y) = x^2 + 1y \quad h'(y) = 1y$$

$$\textcircled{3} h(y) = \int 1y dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2} y^2 + C$$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

معادله دیفرانسیل به فرم $y' + f(x)y = g(x)$ ، از خطی مرتبه اول است

توسعه و جواب عمومی این معادله به فرم زیر است

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C \right]$$

Arman

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$y' + 2y = e^x \quad f(x) = 2 \quad g(x) = e^x \quad e^x \cdot e^{2x} = e^{3x}$$

$$y = e^{-\int 2 dx} \left[\int e^x \cdot e^{2x} dx + C \right]$$

$$y = e^{-2x} \left[\int e^{3x} dx + C \right] \quad y = e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{3x}$$

فصل ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، خطی، همگن یا نهمگن به فرم زیر باشد:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

در صورتی که $r(x) = 0$ معادله، همگن می‌باشد.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب عمومی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$

باشد آنگاه y_1 و y_2 جوابی از معادله است.

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$y'' + ay' + by = 0$$

این معادله به این فرم است

a و b ضرایب حقیقی هستند و این صورت معادله $t'' + at + b = 0$

Arman

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

۲. راه‌های مسطح یا مفسر معادله دیفرانسیل نامیم. و حالات زیر در حل این

معادله اتفاق می‌افتد.

۳. حالت اول: معادله مسطح دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز r_1 و r_2 باشد در این

صورت جواب عمومی به فرم زیر است.

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$① \text{ ابتدا معادله مسطح } y = 1, y' = t, y'' = 1$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad (t-2)(t-4) = 0 \quad \text{آنگاه } t-2=0 \quad \underline{t=2}$$

$$t-4=0 \quad \underline{t=4} \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} \quad \text{جواب عمومی}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

مثال ۲

$$(t-1)(t-4)$$

$$t = 1, 4$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$$

$$y'' + 5y' + 2y = 0$$

$$t^2 + 5t + 2 = 0$$

مثال ۳

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$9 - 2(1)(2) = 9 - 4 = 5$$

$$\text{Arman } t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = t_1 = \frac{-5 \pm 1}{2} = -1$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$f_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2} \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

حالت دوم، $(\Delta = 0)$ معادله مشخصه دارای یک ریشه مضاعف λ است. $\lambda = -1$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \quad \text{صورت جواب عمومی به فرم زیر است.}$$

$$y'' - \varepsilon y' + \varepsilon = 0 \quad f'' - \varepsilon f + \varepsilon = 0 \quad \text{مثال ۱}$$

$$\Delta = b^2 - \varepsilon a c \Rightarrow 14 - \varepsilon(1)(\varepsilon) = 0 \quad \Delta = 0$$

$$\lambda = -1, \quad \Delta = \frac{-b}{2a} = \frac{\varepsilon}{2} = 2 \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad f'' + 2f' + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - \varepsilon a c \quad \text{مثال ۲}$$

$$\varepsilon - \varepsilon(1)(1) = 0 \quad \lambda = -1, \quad \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} = -1$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$\sqrt{-1} = i \quad \text{یادآوری:} \quad i^2 = -1 \quad \text{عدد موهومی}$$

$$\sqrt{-4} = 2i \quad \sqrt{-9} = 3i \quad \sqrt{-16} = 4i$$

حالت سوم، $(\Delta < 0)$ معادله مشخصه دارای 2 ریشه مختلط است.

Arman $P_4 \& i$ / فرم جواب عمومی به صورت زیر است.

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

$$y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

$$b^2 + 2b + 10 = 0$$

مثال ۱

$$\Delta = b^2 - 4ac = -24$$

$$b_1, b_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-24}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1 \pm i}{1}$$

$$y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y'' + 4y' + 28y = 0$$

$$b^2 + 4b + 28 = 0$$

مثال ۲

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$24 - 4(1)(28) = -92$$

$$b_1, b_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{-92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm i}{1}$$

$$y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم

این معادله به فرم $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f_3(x)$ است که اگر

$h(x)$ جواب عمومی معادله همگن $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ باشد

و $P(x)$ جواب خصوصی آن، جواب عمومی معادله دیفرانسیل به فرم

Arman

$$y = y_h + y_p$$

تیرا

جواب خصوصی $\rightarrow$ که جواب عمومی

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

حالت اول: اگر m به فرم $y = e^{rx}$ چند جمله‌ای n درجه n باشد جواب خصوصی به فرم زیر

$$y_p = x^m (\text{چند جمله‌ای کامل از درجه } n)$$

m : تعداد ریشه‌های صفر مکرر معادله است.

A	درجه صفر	} چند جمله‌ای کامل
$Ax + B$	درجه 1	
$Ax^2 + Bx + C$	درجه 2	

$$y'' + \varepsilon y = 2x \quad y'' - \varepsilon y = 0 \Rightarrow t^2 - \varepsilon = 0 \quad t = \pm \sqrt{\varepsilon}$$

$$t = \pm \sqrt{\varepsilon} \quad y_h = c_1 e^{\sqrt{\varepsilon} x} + c_2 e^{-\sqrt{\varepsilon} x} \leftarrow \text{جواب عمومی معادله همگن}$$

$$y_p = x^0 (Ax + B) = Ax + B \quad y_p' = A \quad y_p'' = 0 \quad \text{حال جایگزینی}$$

$$0 - \varepsilon (Ax + B) = 2x \Rightarrow -\varepsilon Ax - \varepsilon B = 2x$$

$$\begin{cases} -\varepsilon A = 2 \\ -\varepsilon B = 0 \end{cases} \quad A = -\frac{2}{\varepsilon} \quad B = 0 \quad y_p = -\frac{1}{\varepsilon} x \quad y = y_h + y_p$$

$$y = \underbrace{(c_1 e^{\sqrt{\varepsilon} x} + c_2 e^{-\sqrt{\varepsilon} x})}_{\hookrightarrow y_h} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\varepsilon} x\right)}_{\hookrightarrow y_p}$$

Arman

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

$$y'' - \tau y' = \varepsilon \quad y'' - \tau y' = 0 \quad f' - \tau f = 0$$

solving

$$f(f - \tau) = 0 \quad \begin{matrix} f = 0 \\ f = \tau \end{matrix} \quad y_h = c_1 e^{\tau x} + c_2 e^{0x}$$

$$y_p = x^m \quad (\text{موردی از جدول}) \quad m \geq 1 \quad f = 0$$

$$y_p = x'(A) = Ax \Rightarrow y_p' = A \quad y_p'' = 0 \quad y_p'' - \tau y_p' = \varepsilon$$

$$0 - \tau A = \varepsilon \Rightarrow -\tau A = \varepsilon \quad A = \frac{\varepsilon}{-\tau} = -\tau \quad y_p = -\tau x$$

$$y = (c_1 e^{\tau x} + c_2) - \tau x$$

$$y''' - y'' = x + 1 \quad f'' - f' = 0 \quad f'(f - 1) = 0 \quad \text{solving}$$

$$f_1 = 0, f_2 = 1 \quad m \geq 1 \quad y_h = c_1 e^x + c_2 e^{0x} + c_3 x e^{0x}$$

$$= c_1 e^x + c_2 + c_3 \quad y_p = x'(Ax + B) = Ax' + Bx'$$

$$y_p' = Ax' + Bx \quad y_p'' = Ax + B \quad y_p''' = A$$

$$A - (Ax + B) = x + 1 \Rightarrow A - Ax - B = x + 1$$

$$-Ax = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{x} \quad Ax + B = 1 \Rightarrow B = 1 \quad A(-\frac{1}{x}) = B$$

$$\text{Arman} - 1 - B = 1 \quad -B = 2 \Rightarrow \underline{B = -2} \quad \text{qob}$$

 Year :

★ Month :

 Date :

مکالمہ و مفاد فرم جواب خصوصی مکالمات ابدوست اکبرید

$$f^c_{(f-1) \times 0} \leq \begin{matrix} f_{20} \\ f_{21} \end{matrix} \quad \gamma h = \underset{1}{c} e^{\gamma} + \underset{1}{c} e^{\gamma} + \underset{c}{c} \gamma e^{\gamma} + \underset{\gamma}{c} \gamma e^{\gamma}$$

$$y_p = x^c (Ax^r + Bx + C)$$

$$2) y''' - \varepsilon y'' + \zeta y' = x^2 + 12x \quad f^0 = \varepsilon f^1 + \zeta f^2 = 0$$

$$f(f^T - \varepsilon f_4, c) = 0 \Rightarrow (f-1)(f-c) = 0 \begin{cases} f=1 \\ f=c \\ f=0 \end{cases} \quad m=1$$

$$y_p = x' (Ax + Bx' + Cx + D)$$

حالت دوم: اگر $f(x) = M(x) e^{P(x)}$ باشد و $M(x)$ درجه n باشد

چند جلدی از دجه ۱۱ است ^۱ آنگاه $\rho \approx 0.7$ به غرض زیر است

$Y_{P_2} \in \mathbb{R}^m$ (نمایان)

Central Reserve Bank of India

$$y'' - 5y' + 7y = xe^x \quad f' - 5f + 7 = 0 \quad \text{5. Teil}$$

Arman $\Rightarrow (t-1)(t-2)_{x,0} \begin{cases} t_{x,1} \\ t_{x,2} \end{cases}$ $\begin{matrix} m_{x,1} \\ p_{x,1} \end{matrix}$

Subject :

 Year :

★ Month :

 Date :

$$\forall p, x \in \mathbb{R}^n (Ax + B) = e^x (Ax' + Bx) \quad \text{ممكن! شكرا}$$

$$y'' - \varepsilon y' + \varepsilon y = \delta e^{t_0 x} \quad f'' - \varepsilon f' + \varepsilon f = \delta e^{t_0 x}$$

$$(f-r)(f-r)_* = f_{*r} \quad \text{is also} \quad P_{*r} \quad \text{max}$$

$$y^p = Ax^r e^{rx}$$

$$y'' - \delta y' + \varepsilon y = (\rho x + 1) e^{cx} \quad t' - \delta t + \varepsilon = 0 \quad \text{5. } \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$(f-1)(f-2) \begin{cases} f=1 \\ f=2 \end{cases} \quad P_z \sim m=0$$

foli, Pass fol, b=ε, ^QCentomir, 15m *

$$y_p = x^0 e^{\lambda x} (Ax' + Bx + C) \quad y_h = c_1 e^{1x} + c_2 e^{2x}$$

حالت دوم: $\vec{F}(x) = e^{P(x)} (M(x) \cos Q(x) + N(x) \sin Q(x))$

باسمہ تعالیٰ
باسمہ تعالیٰ

$$y_P = x^m e^{P(x)} (R_1(x) \cos Q(x) + R_2(x) \sin Q(x))$$

Job ist in $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\dots$, $R_{n-1}(x)$, $R_n(x)$

Arman

با استفاده از $N(x)$ و $n(x)$

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

$$y'' - \varepsilon y' + \delta y = e^{rx} ((x+5) \sin x + x^5 \cos x)$$

سوال ۲

$$f'' - \varepsilon f + \delta = 0 \quad \Delta = 14 - \varepsilon(1)(\delta) = -\varepsilon$$

$$f_1, f_2 = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{-\varepsilon}}{2 \times 1} = 1 \pm i \quad p = 2 \quad q = 1 \quad m = 1$$

$$y_p = x' e^{rx} ((A_1 x^5 + B_1 x + C_1) \sin x + A_2 x^5 + B_2 x + C_2)$$

 $\cos x)$

جواب خصوصی نزدیک ترین جواب! بنابر روشی که

$$y'' - 4y' + 2\delta y = e^{rx} (\varepsilon \cos \varepsilon x + x \sin \varepsilon x)$$

سوال ۳

$$f'' - 4f + 2\delta = 0 \quad \Delta = 44 - \varepsilon(1)(2\delta) = -4\varepsilon$$

$$f_1, f_2 = \frac{4 \pm \sqrt{-4\varepsilon}}{2 \times 1} = 2 \pm \varepsilon i \quad p = 2 \quad q = 2 \quad m = 1$$

$$y_p = x' e^{rx} ((A_1 x + B_1) \cos \varepsilon x + (A_2 x + B_2) \sin \varepsilon x)$$

$$y'' - \varepsilon y' + \delta y = (x+5) e^{rx} \sin x$$

سوال ۴

$$f'' - \varepsilon f + \delta = 0 \quad \Delta = -\varepsilon \quad f_1, f_2 = 1 \pm i \quad m = 1$$

$$y_p = x' e^{rx} ((A_1 x + B_1) \cos x + (A_2 x + B_2) \sin x)$$

$$\text{Arman } y'' + \varepsilon y = 5 \cos \delta x \quad f' + \varepsilon = 0$$

سوال ۵

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

$$f^2 = -\varepsilon \Rightarrow f = \pm \sqrt{-\varepsilon} = \pm 2i \quad p_{20} \quad q_{20} \quad m_{20}$$

$$yP = x^0 e^{0x} (A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x)$$

5 فصل سوم: تبدیلات لاپلاس

تعریف: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد با نماد $F(s)$ یا

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

و با این تعریف $f(t)$ تبدیل مقلوب لاپلاس $F(s)$ کویم و آن را با نماد $L^{-1}\{F(s)\}$

نشان می دهیم.

15 قضیه الف: تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی بودن است یعنی اگر توابع

$f_1(t)$ و $f_2(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشد آنگاه لاپلاس

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

20 قضیه ب: تبدیل مقلوب لاپلاس دارای خاصیت خطی بودن است

$$L^{-1}\{c_1 F_1 + c_2 F_2\} = c_1 L^{-1}\{F_1\} + c_2 L^{-1}\{F_2\}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

تبدیل لاپلاس برخی توابع:

$$f(t) = k \Rightarrow \mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$$

(۱) تابع ثابت

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

مثال

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(۲)

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2!}{s^3} \quad \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3!}{s^4}$$

مثال

$$\mathcal{L}\{t^{10}\} = \frac{10!}{s^{10+1}} = \frac{10!}{s^{11}}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{s^{5+1}} = \frac{5!}{s^6}$$

$$\mathcal{L}\{10t^4\} = 10 \cdot \frac{4!}{s^{4+1}} = 10 \cdot \frac{4!}{s^5}$$

$$\mathcal{L}\{5t^3 - 2t^2 + 3t + 1\} = 5 \frac{3!}{s^{3+1}} - 2 \frac{2!}{s^{2+1}} + 3 \frac{1!}{s^{1+1}} + \frac{1}{s} = \frac{5 \cdot 6}{s^4} - \frac{2 \cdot 2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$$

مثال

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

(۳)

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}$$

$$\mathcal{L}\{e^{dt}\} = \frac{1}{s-d}$$

مثال

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s-(-2)} = \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}\{2e^{3t} + 5t^2 + 1\} = 2 \frac{1}{s-3} + 5 \frac{2!}{s^{2+1}} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s-3} + \frac{10}{s^3} + \frac{1}{s}$$

مثال

$$\text{Arman } \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

(۴)

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 1} \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}\{\sin 8t\} = \frac{8}{s^2 + 64}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-ct} \cos t - 5 \sin 7t + t^2 + 1\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+c} + \frac{s}{s^2+1} - 5 \frac{7}{s^2+49} + \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{8 \cos 7t - 5 \sin 8t + 8e^{7t} + 8t^2 + 7t - 1\}$$

$$\mathcal{L}\left\{8 \frac{s}{s^2+49} - 5 \frac{8}{s^2+64} + 8 \frac{1}{s-7} + 8 \frac{2!}{s^3} + 7 \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh 2t\} = \frac{2}{s^2 - 4} = \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh 7t\} = \frac{7}{s^2 - 49}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh ct\} = \frac{c}{a^2 - 9}$$

Arman

$$\mathcal{L}\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\mathcal{L}\{\tau \sin \tau t + \tau \cosh \tau t + \varepsilon e^{\tau t} + t^{\tau} + 1\}$$

مسئله

$$\frac{\tau}{s^2 + \varepsilon} + \tau \frac{s}{s^2 + 1} + \varepsilon \frac{1}{s - \tau} + \frac{\tau!}{s^{\tau+1}} + \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\tau \cos \tau t + \tau \sinh \tau t + e^{\tau t} + t^{\tau}\}$$

مسئله

$$\tau \frac{s}{s^2 + 1} + \tau \frac{1}{s^2 - 1} + e \frac{\tau!}{s^{\tau+1}} + \frac{\tau}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \tau}\right\} = e^{\tau t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau}{s^2 + 1}\right\} = \sin \tau t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \varepsilon}\right\} = \cos \tau t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 1}\right\} = \cosh t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\varepsilon}{s^2 - 1}\right\} = \sinh \varepsilon t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau}{s}\right\} = \tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\tau+1}}\right\} = t^{\tau}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - s}\right\}$$

مسئله: به روش تجزیه

$$\frac{1}{s^2 - s} = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

با توجه به درجه هر یک از دو طرف

صورت اضافی می شود

$$\frac{A(s-1) + Bs}{s^2 - s} = \frac{As - A + Bs}{s^2 - s} = \frac{(A+B)s - A}{s^2 - s}$$

از کفایت می گیریم

$$(A+B)s - A = 1 \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} B=1 \\ A=-1 \end{matrix}$$

صورت s
در صورت اول

Answer

Subject:

Year:

★ Month:

🕒 Date:

$$\Rightarrow \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} = -1 + e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+d}{s^2-2s-3} \right\}$$

جواب سوال: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+d}{s^2-2s-3} \right\}$

$$\frac{s+d}{s^2-2s-3} = \frac{s+d}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$$\frac{A(s+1)+B(s-3)}{s^2-2s-3} = \frac{As+A+Bs-3B}{s^2-2s-3} = \frac{(A+B)s+A-3B}{s^2-2s-3}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{ضریب } s \\ A-3B=2 & \text{ضریب } s^0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} -A-B=-1 & \underline{A=2} \\ A-3B=2 & \underline{B=-1} \end{cases} \right.$$

$$Ae^{3t} + Be^{-t} \Rightarrow 2e^{3t} + (-1)e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+s-1} \right\} = (s+2)(s-1)$$

جواب سوال: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+s-1} \right\}$

$$\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{A(s+1)+B(s+2)}{s^2+s-2} = \frac{As+A+Bs+2B}{s^2+s-2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } s} \frac{(A+B)s+(-A+2B)}{s^2+s-2} \quad \begin{cases} A+B=0 & B=1 \\ -A+2B=2 & A=-1 \end{cases}$$

$$Ae^{-t} + Be^t \Rightarrow -e^{-t} + e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{s^2-s-4} \right\} \Rightarrow \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+2}$$

جواب سوال: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{s^2-s-4} \right\}$

$$\text{Arman} \quad \frac{A(s+2)+B(s-5)}{s^2-s-4} = \frac{As+2A+Bs-5B}{s^2-s-4}$$

Subject:

Year: Month: Date:

$$= \frac{s(A+B) + 2A - 5B}{s} \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B = 1 \quad \text{ضرب } s \\ 2A-5B = -1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} -2A-2B = -2 \\ 2A-5B = -1 \\ -8B = -3 \end{array} \right.$$

$$B = \frac{3}{8} \quad A = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8}e^{5t} + \frac{3}{8}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 - 5s} \right\} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-5} \quad \text{مثال د فاکتور } s(s-5)$$

$$= \frac{A(s-5) + Bs}{s^2 - 5s} = \frac{As - 5A + Bs}{s^2 - 5s} = \frac{s(A+B) - 5A}{s^2 - 5s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B = 0 \\ -5A = 2 \end{array} \right. \quad B = \frac{2}{5} \quad A = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{5}e^{5t}\right)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\{y\} - y(0) \quad \text{تبدیل لاپلاس مستقیم}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\{y\} - sy(0) - y'(0)$$

مثال و محادلات د فرائضی زیرابه لیک تبدیل لاپلاس حل فید

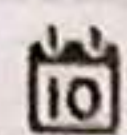
$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 7$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2\{y\} - sy(0) - y'(0) - 2(s\{y\} - y(0)) - 3\{y\} = 0$$

Arman

Subject:



Year:



Month:



Date:

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s - 1 - 2s \mathcal{L}\{y\} + 1 - 5 \mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 - 2s - 5) - s - 1 = 0 \quad \mathcal{L}\{y\}(s^2 - 2s - 5) = s + 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{s+1}{s^2 - 2s - 5} \rightarrow y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 - 2s - 5} \right\} = \frac{e^{5t} - e^{-t}}{6}$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 5$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + s \mathcal{L}\{y\} - y(0) - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - 5 + s \mathcal{L}\{y\} - 0 - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 + s - 2) + (-5) = 0 \rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s^2 + s - 2) = 5$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2 + s - 2} \right\} = -\frac{e^{-2t}}{3} + \frac{e^t}{3}$$

$$y'' + \varepsilon y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \varepsilon \mathcal{L}\{y\} = s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \varepsilon \mathcal{L}\{y\}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s(1) - 1 + \varepsilon \mathcal{L}\{y\}$$

Arman $\mathcal{L}\{y\}(s^2 + \varepsilon) - s - 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\}(s^2 + \varepsilon) = (s+1)$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \sqrt{2}t$$

$$y'' - y' - 4y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2$$

rel

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - (s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - 4\mathcal{L}\{y\}) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y\}(s^2 - s - 4) - s - 2 + 1 = 0 \quad \mathcal{L}\{y\}(s^2 - s - 4) = s + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+1}{s^2-s-4} = \frac{s+1}{(s-2)(s+2)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$\frac{As + 2B + Bs - 2B}{1} = \frac{s(A+B) + (2A - 2B)}{1}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$