رسالة فی شرح ما أشکل من مصادرات کتاب [اصول] اقلیدس

این اثر نوشته‌ی شیخ الامام الاجل حجة الحق ابی الفتح عمر بن ابراهیم خیامی است.

۱- مشخصات رساله و نسخ خطی آن

منظور از کتاب اقلیدس[۱]، که خیام[۲] بر آن شـرحی نوشـته، همان کتاب مشـهور «اصول[۳]» اسـت. از رساله‌ی «فی شـرح ما اشکل...» خیام دو نسخه‌ی خطی بیشتر نمی‌شناسیم که به ترتیب و مشخصات ذیل اند:

الف) نسخه‌ی خطی کتاب‌خانه‌ی شهر لیدن[۴] هلند به قطع ۱۵ × ۱۸ سـانتی‌متر و شـماره‌ی ۱۹۹/۸، نوشته شده به سـال ۶۱۵ ق (راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۱؛ «فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمی»، ج ۷، ص ۳۳۲؛ ارانی، ص III). در پایان این نسـخه آمده اسـت: «وکان بخطّ الشیخ الامـام عمر بن ابراهیـم الخیامی مکتوب فی آخر هذه الرسـالة وقع الفراق من تسـویه هذا البیاض ببلد... فـی دار الکتب هناک فی اواخر جمادی الاولی سنة سبعین و أربعمائه، تحت الرسالة علی یدی مسعود بـن محمد بـن علی الحلفری فی الخامس من شـعبان سـنة خمس عشرة و تسمائه» (ارانی ص ۴۴؛ راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۷؛ همایی، ص ۱۷۴). از این نوشـته‌ها مستفاد می‌شـود که خیام این کتاب را در دارالکتاب یکی از بلاد که متأسـفانه اسـم آن محل در اصل نسخه‌ی خطی، سـفید مانده، در اواخر جمادی الاول سـال ۴۷۰ تصنیف کرده اسـت. برگرن (ص ۲۴) تاریخ تصنیف این رساله را ۴۵۶ ق/ ۱۰۷۷ م می‌دانـد. اگر تاریـخ تولد خیام را ۴۳۹ ق (به نقل از سـوامی گُویندا[۵]، نک ملکاب، ص ۱۰) بدانیم، وی این رسـاله را در ۳۱ سالگی تصنیف کرده است. مارکوالت[۶]، ایران‌شناس معروف، پس از تفحص فراوان از شناختن محل تصنیف آن رساله مأیوس شد (ارانی، ص IV).

از بقیه‌ی نوشـته‌های پایانی رساله می‌توان دریافت که نسخه‌ی مذکور (لیدن) در ۵ شـعبان سـال ۶۱۵ ق. به قلم محمود بن محمد بن حلفری، از روی نسـخه‌ای به دست‌خطِ حکیم خیام رونویسیِ شده است. از روی سال تألیف این رساله می‌توان حدس زد که ظاهراً خیام این رسـاله را در اصفهان نوشـته بوده است (قربانی الف، ص ۳۲۶) و آن هم در سـال ۴۶۹ ق/ ۱۰۷۷ م (دائرةالمعارف اسـلام، ذیل «عمر خیام»).

ب) نسـخه‌ی خطی کتاب‌خانه‌ی ملـی پاریس به قطع ۱۲ × ۱۷ سانتی‌متر و به شماره‌ی ثبت ۴۹۴۶/۴، نوشته شده در قرن ۱۶ م (راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۱؛ فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمی، ج ۷، ص ۳۳۲).

۲- شرح‌ها، تفاسیر، حاشیه‌ها، ترجمه و نسخ چاپی

اولین کسـی که از متن رساله‌ی «فی شـرح ما اشکل...» خیام، اطلاع صحیحی با اسم و رسم دقیق به ما داده و بخشی از آن رساله را عیناً نقل کرده، خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ ق) است. خواجه نصیرالدین طوسی روش حل مصادره‌ی خطوط متوازی را که خیام با ۸ قضیه مطرح کرد، در تألیف خود به نام «الرسالة الشافیه عن الشک فی الخطوط المتوازیه» آورده اسـت (همایی، ص ۱۷۰). به همین منظور «رسالة الشافیه» را گاهی «رسالة فی مصادرات اقلیدس» نیز نامیده‌اند (قربانی الف، ص ۴۹۱). اولین کسـی که در صَدد طبع و نشر رساله‌ی مذکور خیام برآمد، فردریک روزن[۷] آلمانی بود که متأسـفانه در هنگام

فراهم ساختن مقدمات کارِ طبع، درگذشت. اندکی از تلاش‌های او بعداً به دست یکی از دوستان ایرانی‌اش به نام تقی ارانی به ثمر رسید و این اثر در ایران به طبع رسید (همایی، ص ۱۷۱؛ ارانی، مقدمه).

در سـال ۱۹۱۲ م، دو تن آلمانی به نام‌های ژاکوب[8] و ویدمان[9] مقدمه‌ی رساله‌ی خیام را به آلمانی ترجمه و منتشر کردند (ملک الف، ص ۶۶ یادداشت).

در سـال ۱۳۰۴ ق/ ۱۹۲۵ م، مجموعه‌ی متعلق به کتاب‌خانه‌ی شـهر لیدن هلند به کمک کتاب‌خانه‌ی دولتـی «پروس» از هلند، به برلینِ آلمان منتقل شد و تقی ارانی[10] همه‌ی ۹ رساله‌ی موجود در آن مجموعه را رونویسـی کرد (ارانی، مقدمه). در سـال ۱۳۱۴ ق/ ۱۹۳۶ م، برای اولین بار متن رسـاله‌ی هشتم این مجموعه که در ۱۳۰۴ ش استنسـاخ شـده بود، به نام «رسالة فی شـرح ما اشکل من مصادرات کتـاب اقلیدس للحکیم عُمر بن ابراهیم الخیّامی» به همت تقی ارانی در تهران منتشر شد (ارانی، همان؛ راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۳). متن رسـاله‌ی مذکور در ۴۴ صفحه‌ی قطع وزیری بود. متأسفانه مقدمه‌ی فارسـی (۱۹ صفحه) و مقدمه‌ی عربی آن (۵ صفحه) که ارانی بر این چاپ نوشته، بسـیار آشفته، مغشوش و مخلوط اند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۳؛ همایی، ص ۱۷۱).

در سـال ۱۳۳۸ ش/ ۱۹۵۹ م، ترجمه‌ی انگلیسی رساله‌ی خیام، از روی متنـی که تقی ارانی منتشـر کرده بـود، به همت علیرضا امیر معزّ[11] در مجله‌ی «Scripta Mothematica» منتشـر شد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۴ و مقدمه‌ی ۵، ص ۲۹۴ و «فرهنگ زندگی‌نامه‌ی علمـی»، ج ۷، ص ۳۳۲). در ۱۳۴۰ ش/ ۱۹۶۱ م، رسـاله‌ی خیـام بـه اهتمـام عبدالحمید صبره[12] از روی نسـخه‌های خطی مختلف در اسـکندریه‌ی[13] مصر انتشـار یافت (فرهنـگ زندگی‌نامه‌ی علمی، ج ۷، ص ۳۳۲؛ راشـد و وهـاب‌زاده، ص ۲۹۳). در ۱۳۴۱ ش/ ۱۹۶۲ م، تصویر نسـخه‌ی دست‌نوشـت لیدن، همراه با ترجمه‌ی روسـی و یادداشت‌های مربوط به آن، ضمن «مجموعه‌ی رسائل عُمر خیام» به اهتمام بوریس روزنفلد[14] و تعلیقات از روزنفلد و یوشکویچ[15]، در مسکو منتشر شد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۴؛ ملک الف، ص ۶۷ یادداشت؛ فرهنـگ زندگی‌نامه‌ی علمـی، ج ۷، ص ۳۳۲). در ۱۳۴۶ ش، جلال الدین همایی متن عربی و فارسی رساله‌ی خیام را به همراه توضیحات مکفی و تطبیقی (با اخلاف و اسلاف) با عنوان «خیامی‌نامه» در تهران منتشر کرد (همایی، «خیامی‌نامه»؛ راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۹۴).

آن گونه که از سـخنان همایی در توضیحات «خیامی‌نامه» (ص ۱۷۳-۱۷۴) برمی‌آید، رسـاله‌ی خیام غلط‌هایی داشته است. همایی با مقابله‌ی آن رسـاله (منظور نسـخه‌ی تقی ارانی) با قسمتی از مقاله‌ی اول «رسـالة فی شـرح ما اشـکل» خیام که خواجه نصیر طوسی در «رسالة الشافیه» به نام «فی حقیقة المتوازیات و ذکر الشک المعروف» آورده است (همایی، ص ۱۸۲)، برخی غلط‌های آن را تصحیح می‌کند. همایی برای تصحیح مابقی رسـاله به عکس نسـخه‌ی دسـت‌نویس لیدن مراجعه می‌کند که آن را روزنفلد در کتاب خود آورده است. بدین ترتیب کار تصحیح تمام رساله‌ی خیام را به پایان می‌رساند.

همایی بر آن اسـت که «خیامی‌نامه‌ی» منتشـر شده‌اش، اولین متن شـایان اعتماد از رسـاله‌ی خیام است که در ایران به طبع رسیده اسـت. هم‌چنین در این کتاب، برای نخستین بار مطالب رساله‌ی خیام مـورد تحقیق، تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند (همایی، ۱۷۳). در سـال ۲۰۰۵ م، رشـدی راشد[16] و بیژن وهاب‌زاده[17] رساله‌ی خیام را به زبان عربی، به همراه فهرسـتی از نسـخ خطی و ترجمه‌ها و شرح‌های ذکر شده بر آن، با عنوان «ریاضیات عمر الخیام» در بیروت چاپ کردند.

۳- معنی و مفهوم اسمی و محتوایی رساله‌ی خیام

این رسـاله شرح و تفسـیر آن دسته از مقدّمات مشکوک و محل اعتراض بخش مصادرات (پوستولای[18]) کتاب «اصول اقلیدس» است که به توضیح و برهان و استدلال هندسی نیاز داشت.

٤- فهرست موضوعی رساله

این رساله شامل چهار بخش به شرحِ مختصرِ زیر است:

الف) مقدمه (راشـد و وهـاب‌زاده، ص ۲۹۹-۳۰۳؛ همایی، ص ۲۲۵-۲۳۱): خیـام ریاضیـات را از لحـاظ ادراک، تصـوّر و تصدیق، آسـان‌ترین جزو حکمت می‌داند که فایده‌اش را «ورزیدگی، تند شدن خاطر و عادت نفس به اشمئزاز از آن‌چه که آن را برهانی نیست»، ذکر کرده است. او در ضمن همین سخنان به ارسطو و آثارش در فلسفه و منطق اشاره کرده است. خیام به تَبَع ارسطو به طبقه‌بندی اجزای علوم که بدان اشاره خواهیم کرد، می‌پردازد.

خیـام ضمن بیان علاقه‌اش به تحقیق و جسـت‌وجو در مبانی و مبادی علوم برهانی، مثل هندسـه، به کتاب «اصول» اقلیدس اشـاره می‌کند که آن را پایه و اسـاس همه‌ی علوم ریاضی می‌داند. خیام بعد از مطالعه‌ی کتاب اصول، اشاره به پوستولای پنجم می‌کند که تعریفی اسـت در باره‌ی «اصل توازی» و آن‌جا بر اقلیدس خُرده می‌گیرد؛ زیرا

خیام بر آن است که آن‌چه را اقلیدس در بخش پوستولای‌ها (قضایای مسلّم و بدیهی) آورده و آن را بی‌نیاز از اثبات دانسته، اولاً جزو مسائل است، نه پوستولای (مبادی) و ثانیاً محتاج به اثبات است. پس او اشاره به ریاضی‌دانان غیر مسلمان قبل از خودش می‌کند که آن‌ها در کتاب «اصول» تتّبع داشتند و در صدد حل مشکلات آن برآمدند، ولی به سبب دشواری‌ای که در آن مصادره[19] و در باره‌ی قضیه‌ی اصل توازی بود، اصلاً معترض آن نشدند. بعد اشاره به ریاضی‌دانان مسلمان قبل از خودش می‌کند که از عهده‌ی اثبات اصل توازی برنیامدند و برای اثبات آن مصادره به براهین و مصادرات دیگری متوسل شدند که در بداهت نداشتن، دست کمی از آن مصادره نداشتند. اما در آن میان به ابن هیثم (۳۵۴-۴۳۰ ق) و رساله‌ی او در این باب اشاره می‌کند که او اثباتی را بر آن اصل آورد، ولی مقبول نظر خیام واقع نشد (قربانی الف، ص ۵۰). خیام بعد از بیان مشکل اول که مربوط به صدر مقاله‌ی اول کتاب «اصول» بود، اشاره به مشکل دوم مربوط به صدر مقاله‌ی پنجم می‌کند که در آن‌جا اقلیدس، البته به شکلی ناقص، از نسبت و تناسب و عوارض و احوال آن سخن می‌راند و انجام گرفتن تحقیقی فلسفی را در آن باره لازم می‌شمارد. مشکل سومی را که خیام مطرح می‌کند، باز مربوط به صدر مقاله‌ی پنجم کتاب «اصول» است که اقلیدس در آن‌جا از نسبت مؤلفه سخنانی به میان می‌آورد و مصادراتی را مطرح می‌کند، بی آن که به اثبات آن‌ها بپردازد. پس خیام در پایانِ مقدمه‌ی رساله‌اش خلل و نقایصی را که در کتاب «اصول» وجود دارد و تا کنون اصلاح نشده، در سه عنوان به شرح ذیل معرفی می‌کند و در هر بخش به اثبات آن‌ها می‌پردازد.

ب) مقاله‌ی اول در متوازیات و حل شبهه‌ی آن (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۴-۳۱۵؛ همایی، ص ۲۳۱-۲۴۹).

ج) مقاله‌ی دوم در حقیقت نسبت و تناسب مقداری (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۶-۳۳۱؛ همایی، ص ۲۴۹-۲۷۲).

د) مقاله‌ی سوم در نسبت مؤلّفه و آن‌چه بدان متعلق باشد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۲-۳۳۷؛ همایی، ص ۲۷۲-۲۸۰).

۵- منابع استفاده شده در رسالة فی شرح ما اشکل... خیام

الف) کتاب «اَرغنون[20]» از ارسطو[21]: خیام در جایی از رساله‌ی خود (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۴؛ همایی، ص ۲۳۱) از ارسطو با لفظ «حکیم» یاد می‌کند و در جایی دیگر به کتاب «برهان» از علم منطق ارسطو اشاره می‌کند (راشد و وهاب‌زاده ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۶-۲۲۷) که ما می‌دانیم مراد همان کتاب «ارغنون» است. در واقع، کتاب «منطقِ» ارسطو تشکیل دهنده‌ی شالوده‌ی اصلی تفکر خیام در مورد طبقه‌بندی علوم است و خیام به استناد آن، در تعاریف[22] مبادی[23] و مسائل[24] کتاب «اصول» تفحص می‌کند و مواردی را که با آن اسلوب و زیربنای منطقی هم‌خوانی ندارند، هم‌چون پوستولای پنجم - اصل توازی، درگیر ادله و برهان می‌کند تا به زعم خود توانسته باشد مشکلات کتاب «اصول» را برطرف کند.

ب) کتاب «اصول» اقلیدس: مهم‌ترین منبع خیام کتاب «اصول» است که به گفته‌ی او «این کتاب، اصل و پایه‌ی همه‌ی علوم ریاضی است» (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۷). از طرفی، همین کتاب به علت اِشکال‌هایی[25] که اقلیدس در آن مرتکب شده، منبعِ مورد نقد و اعتراض خیام است. لازم است در باره‌ی این کتاب توضیحات مختصری داده شود؛ زیرا در غیر این صورت، درک آن‌چه بعداً خواهیم گفت مشکل خواهد بود.

اقلیدس (هم‌دوره‌ی بطلمیوس اوّل ۳۲۳-۲۸۵ پ. م.، پادشاه مصر) معلومات ریاضی بازمانده تا عصر خود را در کتاب «اصول»، در ۱۳ مقاله و ۴۶۵ قضیه، مدون ساخت (هیث B، ص ۳۹۶-۱). کتاب «اصول» برای اولین بار در دوره‌ی عباسی به همت حجاج بن یوسف مطر حاسب (سده‌ی دوم و اوایل سده‌ی سوم هجری قمری) دو بار به عربی ترجمه شد (الفهرست، ص ۳۷۱). بعد از حجاج، کتاب «اصول» بارها ترجمه شد. احتمال دارد خیام از ترجمه‌ی حجاج بن یوسف هم بهره برده باشد. «اصول»، رساله‌ای ترکیبی[26] است که مستقیماً از مطالب معلوم و ساده به سراغ مطالب مجهول و پیچیده‌تر می‌رود (هیث A، ج ۱، ص ۳۷۳). برای آشنایی قبلی با آن‌چه که حکیم خیام برای مستند کردن ایرادهای خود بر مطالب کتاب «اصول» بدان اشاره می‌کند، به ذکر شماری از آن مقالات می‌پردازیم که بعداً به کارمان خواهد آمد:

مقاله‌ی «I» با مطالب مقدماتی اساسی چون «تعریف‌ها، اصول متعارفه و اصول موضوعه» آغاز می‌شود (هیث B، ص ۱-۲). برای این که گزاره‌ای در دستگاه قیاسی اثبات شود، باید نشان داد که این گزاره پیامد منطقی لازم از چند گزاره است که قبلاً به اثبات رسیده‌اند. گزاره‌های اخیر هم باید به کمک گزاره‌هایی که قبلاً اثبات شده‌اند، ثابت شوند و به همین ترتیب تا آخر. چون این تسلسل را نمی‌توان به گونه‌ای نامحدود ادامه داد، در بدو امر باید مجموعه‌ی محدودی از گزاره‌ها بدون اثبات پذیرفته شوند. این گزاره‌های بدواً پذیرفته شده‌اند، اصول موضوعه یا «پوستولاها[27]» و اصول متعارفه یا «آکسیومه‌ها[28]» نامیده می‌شوند و تمام گزاره‌های دیگر مبحث، منطقاً باید از آن‌ها منتج شوند. تعریف‌هایی که در مقاله‌ی «I» اصول آمده (هیث B، ص ۲-۱) مشمول «تعریف خط راست»، «تعریف صفحه»، «تعریف قطر دایره» و در نهایت «تعریف خط‌های راست متوازی» است که خط‌هایی اند در یک صفحه و اگر آن‌ها را تا بی‌نهایت امتداد دهیم، هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

علوم (اصول) متعارفه‌ای که در کتاب «اصول» آمده‌اند، عبارت اند از: ۱- چیزهایی که با یک چیز مساوی اند، با یک‌دیگر نیز مساوی اند ۲- اگر چیزهای مساوی به چیزهای مساوی اضافه شوند، کل‌ها مساوی اند ۳- اگر چیزهای مساوی از چیزهای مساوی کم شوند، باقی‌مانده‌ها مساوی اند ۴- چیزهایی که بر یک‌دیگر منطبق شوند با یک‌دیگر مساوی اند ۵- کل از جزء بزرگ‌تر است (هیث B، ص ۲).

اصول موضوعه‌ای که در کتاب «اصول» آمده‌اند، به شــرح ذیل اند: ۱- از هر نقطه می‌توان خط مستقیمی به هر نقطه‌ی دیگر کشید ۲- هــر خط مســتقیم متناهی را می‌توان روی همان خط به شــکلی نامحــدود امتــداد داد ۳- می‌توان دایره‌ای با هــر نقطه‌ی دل‌خواه به عنوان مرکز آن و با شعاعی مساوی هر پاره‌خط رسم شده از مرکز آن ترســیم کرد ۴- همه‌ی زوایای قائمه با هم مســاوی اند ۵- اگر خط مســتقیمی دو خط مســتقیم را قطع کند به طوری که مجموع زوایای داخلی یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشــد، این دو خط مستقیم اگر نامحدود امتداد داده شــوند، در طرفی که دو زاویه مجموعاً از دو قائمه کمترند، هم‌دیگر را قطع خواهنــد کرد. این اصل به «اصل توازی[29]» مشــهور است. اصول بر آن است که همه‌ی ۴۶۵ قضیه خود را از این ۱۰ گزاره استخراج کنند (ایوز، ج ۱، ص ۱۳۰). مختصراً کفایت می‌کند بدانیــم تفاوت اصول متعارفه و اصول موضوعه در آن اســت که علوم (اصول) متعارفه فرضی هســتند مشترک در همه‌ی علوم، در حالی که اصول موضوعه فرضی هســتند کــه مختص علم خاص تحت مطالعه است (همان، ج ۱، ص ۱۲۷؛ هارولد، ص ۲۰).

قضایای مقاله‌ی «I» کتاب «اصول» شامل ۴۸ عدد بوده که ۲۶ تــای اول آن عمدتاً به خواص مثلث‌ها می‌پردازد و قضایای ۲۷ تا ۳۲، نظریــه‌ی خطوط موازی را بنا می‌نهند و قضایای ۳۳ تا ۴۸ به متوازی الاضلاع‌ها، مثلث‌ها، مربع‌ها و... می‌پردازند (هیث B، ص ۲۹-۲).

مقالــه‌ی «V»، بیــان نظریه‌ی تناســب در بــاره‌ی کمیت‌های اندازه‌پذیــر و اندازه‌ناپذیــر (گنــگ) و کمیت‌هایــی اســت از هر نوع «مســتقیم‌الخط»، «زاویه‌ها»، «مســاحت‌ها»، «حجم‌ها»، «اعداد»، «زمان» و... که بحث و بررسی شده است (هیث B، ص ۹۸-۸۱).

ج) «رسالة حل شــکوک المقالة الاولی من کتاب اقلیدس»: این رســاله متعلق به ابن هیثم[30] (۳۵۴-۴۳۰ ق) اســت. آن گونه که خیام نقل می‌کند (قربانی الف، ص ۴۷؛ راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۱؛ همایی، ص ۲۲۸) اولین بار که این رساله از ابن هیثم را می‌بیند، تعیین می‌کند که وی معترض آن مصادره (منظور اصل توازی ۵-P) شــده و آن را با براهین کافی حل کرده اســت. خیام (همــان جا) می‌گوید: «پس با خوشــحالی هر چه تمام آن کتاب را مطالعه کردم و پس از مطالعه پی بردم که ابن هیثم به راه خطا افتاده و روش حل او نادرســت اســت». امّــا علت این که اســم ابن هیثم و رســاله‌ی او را در فهرســت منابع رســاله‌ی خیام آوردیم آن اســت که به نظر روزنفلد و یوشکویچ، فکر مربوط به چهار ضلعی که خیام به وسیله‌ی آن خواست تا اصل توازی را به اثبات برســاند (ادامه‌ی مقاله) ممکن اســت از ابن هیثم به خیام رسیده باشد (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۶۷؛ «مجله‌ی سخن» الف، ص ۱۸۵). البتــه ابن هیثــم به غیر از این تألیف، پنج اثــر دیگر در باره‌ی مصادرات و مشــکلات کتاب «اصول» اقلیدس تصنیف کرده اســت (ابن ابی اصیبعــه، ص ۵۵۴-۵۶۰) که دو مورد از آن تصنیفات؛ یعنی اصل توازی و نظریه‌ی تناســب و نسبت مؤلفه، دقیقاً مربوط به همان مسائلی اند که خیام در رساله‌ی خود بدان‌ها پرداخته است. احتمالاً آن پنج رساله به دست خیام نرسیده بودند (همایی، ص ۶۱).

د) رســاله‌ای از ابوالعبــاس فضل بن حاتم نیریــزی، ریاضی‌دان نیمه‌ی دوم ســده‌ی ســوم و اوایل ســده‌ی چهارم (قربانی، الف، ص ۵۱۳): خیام در جایی از رســاله‌ی خود (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۱ و ۳۰۶؛ همایــی، ص ۲۲۸ و ۲۳۴) بــه نیریزی اشــاره می‌کند که وی در صدد بوده مشــکل مصادره‌ی تــوازی را حل کند اما از عهده‌ی آن برنیامد و در جایی دیگر از همین رســاله می‌آورد که در میان متأخران تنها کسی که در تحقیق نسبت و تناسب، سخن فلسفی داشته، نیریزی بوده است که کتابی هم در این باره به تفصیل نوشته است. پس خیام با مطالعه‌ی اثر او متوجه می‌شــود که تحقیقات او کافی نیست (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۲؛ همایی، ص ۲۳۰). اما خیام اســمی از رساله‌ی نیریزی نمی‌آورد. ابن ندیم (ص ۳۷۱) رســاله‌ای را به نام «رســاله‌ی شــرح کتاب اصول اقلیدس» به نیریزی منسوب کرده که این شرح را نیریزی بر ترجمه‌ی کتاب «اصول» از حجاج بن یوســف مطر نوشته اســت (قربانی، ب، ص ۷۸). هم‌چنین رســاله‌ای دیگــر را به نیریزی نسبت داده به نام «رســالة فی [بیان] المصادرة المشهورة اقلیدس» و بعد آورده که ســوتر[31] نوشته ممکن است این رساله جزوه‌ای از کتاب شــرح نیریزی بر اصول اقلیدس بوده باشد (همان جا). احتمالاً خیام از این دو رساله به مثابه‌ی منبع بهره برده است.

ه) رســاله‌هایی از ابوالفتح عبدالرحمان خازنی، ریاضی‌دان سده‌ی ششــم ق و ابوعبداله محمد بن احمد الشّــنی ســده‌ی چهارم و پنجم قمری: خیام نامی از رســاله‌های آن دو نفر نیاورده و فقط آورده است که آن‌ها به حل مصادره‌ی توازی دست زدند و از عهده‌ی آن برنیامدند (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۱؛ همایــی، ص ۲۲۸). قربانی به اثری از آن‌ها در این زمینه اشاره نکرده است (قربانی الف، ص ۲۲۹ و ۲۲۸).

و) ترجمه‌های حجاج بن یوســف بن مطر حاسب، مترجم سده‌ی دوم و اوایل سده‌ی سوم قمری

خیام می‌گویــد او در کتاب «اصول» تأمل کرده و فقط وظیفه‌ی مترجمی را بر عهده داشــته و اصلاح مطالب کتاب، کار او نبوده است (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۵؛ همایی، ص ۲۳۴). احتمالاً خیام برای مطالعه‌ی کتاب اصول از ترجمه‌ی توانمند حجاج بهره برده است.

ظ) اصلاحات ثابت ابن قرّه حرانی(۲۲۱-۲۸۸ ق)

خیــام می‌گوید هر چند که ثابــت بعضی از اصلاحات را در کتاب «اصــول» انجــام داده، ولی در حقیقت وظیفــه‌ی او نیز همان نقل و ترجمه است (همان جا). قربانی (الف، ص ۲۰۶ و ۲۰۸) در قسمت آثار ریاضی یونانی که ثابت بن قره ترجمه یا اصلاح کرده، نام ســه اثر را ذکر کرده اســت به نام‌های «کتاب فی انه اذا وقع خط مســتقیم علی خطین مســتقیمین فصیر الزاویتین فی جهه واحــدة اقل من قائمتین فان الخطین التقیا اذا اخرجا فی تلک الجهه» که از آثار تألیف شــده‌ی خود ثابت است و دو اثر دیگر یعنی «اصلاح ترجمه‌ی اصول» اقلیدس بــه قلم اســحاق بن حنین (ابن ندیــم، ص ۳۷۱) و «مقالة فی برهان المصادره المشــهوره من اقلیــدس» که ثابت یکی را ترجمه و دیگری

را اصــلاح کرده اســت. احتمالاً منظور خیام از آن‌چه به ثابت نسـبت داده، همین دو اثر اســت. ابن ابی اصیبعه در فهرست تألیفات ثابت دو کتــاب را در قضیه‌ی خطوط متوازیـه آورده (ص ۲۹۹) که عبارت اند از: «کتاب فی اعمال و مســائل اذا وقع خطّ مســتقیم علی خطّین» و «مقالة اخری لة فی ذلک».

علم‌الدیــن قیصــر حنفــی در نامه‌ای کــه به خواجه‌ی طوســی می‌نویســد، به دو رســاله در باره‌ی خطوط متوازی اشــاره می‌کند که ثابت آن دو را تألیف کرده اســت (همایی، ص ۵۱-۵۲). احتمال دارد خیام این دو رســاله را دیده باشد. در باره‌ی روش ثابت بن قره در حل مشکل اصل توازی، آن طور که هارولد[32] آورده، ثابت بن قره از مفهوم حرکت در اثبات اصل موضوع کمک گرفته بوده اســت (رشدی راشد ب، ص ۵۹۶) و در اثبات آن اصل موضوع موفق نشــده است (هارولد، ص ۱۰). شــاید ابن هیثم که روشــش مطابق روش ثابت اســت (در اثبــات اصل تــوازی)، حلقه‌ی اتصال بین ثابت و خیام بوده باشــد که جای تحقیق دارد.

ح) ایرن[33] مخانیقی: خیام به او بدون اشــاره به اثرش اشاره کرده اســت (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰ و ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۲۸ و ۲۳۴) ولی به ســبب صعوبتــی که وی در آن مصــادره می‌بیند، معترض آن نمی‌شــود. ایرن در باره‌ی مصادرات و مشکلات کتاب «اصول» اثری به نام «کتاب حل شکوک اقلیدس» تألیف کرد (ابن ندیم، ص ۳۷۱ و ۳۷۶). بر اســاس اطلاعاتی که خیام به ما می‌دهد، گویا در این کتاب، در باره‌ی مصادره‌ی خطوط متوازی به چیزی اشــاره نشده بوده و نظر ایرن معطوف به سایر مشــکلات کتاب «اصول» بوده است (همایی، ص ۴۹). نســخه‌ی رساله‌ی ایرن تا زمان خیام، مســلماً وجود داشته است (همایی، ص ۴۸).

ط) اطولوقــوس[34]: خیام آن‌چــه را که در باره‌ی ایــرن گفته، در باره‌ی اطولوقوس نیز تکرار می‌کند. ابن ندیم (ص ۳۷۵) او را از جمله حکمای قدیم می‌داند که در شرح مشکلات «اصول» اقلیدس صاحب تألیــف بوده، اما از تألیفش چیزی باقی نمانده اســت، البته خیام حتماً نسخه‌ی او را دیده بوده است (همایی، ص ۴۹).

ی) کتاب «المجســطی[35]» از بطلمیوس[36] (ابن ندیم، ص ۳۷۴): خیام در مقاله‌ی سوم این رساله به او اشاره کرده و تألیف نسبت را در «مجســطی»، امری بس مهم دانسته که شکل قطاع به وسیله‌ی آن رابطه شکل می‌یابد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۳؛ همایی، ص ۲۷۴).

ک) کتــاب «مخروطات» از آپولونیــوس[37] (ابن ندیم، ص ۳۷۳): خیام در مقاله‌ی سوم این رساله به او اشاره کرده و کتاب «مخروطات» او را مقدمه‌ای عظیم برای بیشتر فنون هندسه، خصوصاً «مجسمات» دانسته است (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۳، همایی، ص ۲۷۴).

۶- ریاضی‌دانانــی کــه در حل مصادرات و مشــکلات کتاب اصول اقلیدس، کتاب نوشته‌اند

از میان کســانی که در باره‌ی مشــکلات کتاب «اصول» (بعد از ترجمه‌ی آن به عربی) به بحث و تألیف پرداخته‌اند، در حدود ۶۰ نفر از ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی را می‌شناسیم (قربانی الف، ص ۴۹۵) که در حال حاضر شمار کمی از آثار آنان از جمله مقالات و رسالاتشان به دست ما رسیده اســت. معروف‌ترین آن‌ها شش رساله از ابن هیثم در باره‌ی مصادرات «کتاب اصول» است و همین رساله‌ی مذکور خیام و دو رساله‌ی «تحریر اقلیدس» و «رسالة الشافیه» از خواجه نصیرالدین طوسی است.

۷- خیام- معرفی عناصر ســازنده‌ی علوم - پیشــنهاد ۱۰ گزاره‌ی جدید به عنوان مقدمات هندسه

خیام بر آن است که تبیین مبادی و حدود ریاضیات و در نتیجه «مبادی هندســه»، به عهده‌ی فیلســوف است (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۶). او به «کتاب البرهان» ارســطو (منظور ارغنون) اســتناد جســته و هماننــد وی به طبقه‌بنــدی اجزای علوم می‌پــردازد (همان جا). خیام اجزای علوم و عناصر ســازنده‌ی علم را ســه چیز می‌داند: ۱- موضوع ۲- مسائل ۳- مقدمات (مبادی). برای روشــن شدن مطلب، به معرفی اجزای علوم مطابق نظر علمای منطق می‌پردازیم و به نظر خیام در هر قســمت استناد می‌کنیم. اجزای علوم بر سه قسم است (همایی، ص ۱۴-۱۷):

۱- موضــوع: خیــام موضوع را عبــارت از چیــزی می‌داند که از عوارض ذاتیه‌ی آن گفت‌وگو می‌شــود (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۶)؛ مثلاً موضوع فن حساب «کم منفصل/ عدد» است و موضوع فن هندسه «کم متصل قار الذات/ خط، سطح، حجم و...».

۲- مســائل: خیام مسائل را قضایایی می‌داند که در خودِ آن علم مطرح شــده‌اند و به کمک مبادی اثبات می‌شوند (همان جا). مثلاً در فن هندســه، طرح و اثبــات قضیه‌ی «۳ زاویه‌ی هــر مثلث، ۲ قائمه است».

۳- مبادی (مقدمات): مبادی پایه و اساس علوم را تشکیل می‌دهد و به قول خیام (همان جا) اموری اند که پایه‌ی براهین و دلایل و علت مســائل بر آن متکی است. خواجه‌ی طوسی در تعریف مبادی، آوردن برهان را لازم نمی‌بیند؛ از آن لحاظ که واضح است یا در مسائل علمی دیگر باید ثابت شود. مبادی بر دو قسم است:

الف) مبادی تصوریه: که به آن «حدود» هم می‌گویند و مطالب ویژه‌ای از هر علم را معرفی می‌کند؛ مثل تعریف نقطه، خط، دایره و... در علم هندسه. خیام هم همین تعریف را عرضه کرده و اثبات حقیقی این دســته از مبادی را وظیفه‌ی فلسفه‌ی اولی و علم حکمت می‌داند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۷).

ب) مبادی تصدیقیه که شامل دو دسته است:

۱- اصول متعارفه (بدیهیات/ اولیّات/ آکسیوم) که در نفس خود بیّن و آشکارند (طوســی، ص ۳۹۵) و به سبب بداهت، اثبات‌ناپذیرند. خیام می‌گوید مانند این گزاره، «هر کل از جزء بزرگ‌تر اســت» (راشد و وهــاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۶)، کســی که درصدد اثبات

اصول متعارفه برآید ناگزیر باید از اصول متعارفه‌ی دیگر برای این کار استفاده کند و بدین ترتیب دچار «دور محال» می‌شود؛ مثلاً «هرگاه برابرها را از برابرها کم کنیم، مانده‌ها برابرند».

۲- اصول موضوعه (مصادرات/ پوستولاتوم) قضایایی اند که جزو بدیهیات نیستند و اثباتشان محتاج دلیل و برهان است. تفاوت علوم (اصول) متعارفه و اصول موضوعه در ۲ چیز است: اولاً اصول موضوعه (مصادرات) بر خلاف اصول متعارفه، روشن و بدیهی نیستند و ثانیاً مصادره محتاج به اثبات است. خیام مبادی تصدیقیه را بر سه قسم می‌داند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۳۹ و ۲۲۶-۲۲۷) که عبارت اند از: «علوم متعارفه»، «اصول موضوعه» و «مصادرات». خیام مصادرات را قضایایی می‌داند که نه داخل اولیّات (اصول متعارفه) هستند و نه جزو آن قضایا که در فن دیگر مبرهن شده باشند (اصول موضوعه)، بلکه آن‌ها هم‌چون دیگر مسائل و قضایا باید اثبات شوند. ابوعلی سینا و خواجه نصیر طوسی و پیروان وی جملگی هم‌رأی خیام بودند (همایی، ص ۳۲-۳۳).

چنین به نظر می‌رسد خیام بر خلاف اقلیدس که بر آن بود آکسیوم‌ها و پوستولای‌ها بدیهی و بی‌نیاز از اثبات اند، نظری را مطرح می‌کند (منظور تعریف مجزایی برای مصادرات) که او را در نهایت، مجبور به اثبات اصل توازی (پوستولای پنجم 5P) می‌کند. اگر بخواهیم موشکافانه‌تر از آن‌چه خیام در تفاوت اصول موضوعه و مصادرات بیان کرده، سخنی بگوییم، باید گفت (خوانساری، ص ۱۸۳) قضایایی اند که منظم در آغاز تعلیم آن‌ها را می‌پذیرد تا بعد از آن در همان علم، یا علوم دیگر، اثبات شود. حال اگر این تسلیم به طریقه‌ی شک و استنکار باشد. آن قضایا را «مصادرات» و اگر این تسلیم به طریقه‌ی تسامح و طیب نفس باشد، آن قضایا را «اصول موضوعه» می‌گویند. خواجه‌ی طوسی در «اساس الاقتباس» (ص ۳۹۵-۳۹۶) در تعریف مصادرات بر این قول است که یا چنان بُوَد که نَفْس متعلّم در بدایت تعلیم به‌آسانی [چیزی] را اعتقاد کند (قبول کند)، اعتقادی ظنّی یا تقلیدی یا نه چُنان بُود و اول را «اصول موضوعه» و دوم را «مصادرات» گویند و چون تفاوت این گونه قضایا در «بداهت» است، ممکن است یک قضیه برای کسی «اصل موضوع» و برای کسی دیگر «مصادره» واقع شود. مثلاً گزاره‌ی «هر مقدار متناهی قابل تجزیه، نامتناهی بود» در حکم مصادره و گزاره‌ی «خط مستقیم متناهی بر استقامت اخراج توان کرد» در حکم اصل موضوع است (طوسی، ص ۳۹۶)، امّا اصل پنجم اصول (5P) در توازی برای خیام در حکم چه نوع قضیه‌ای است؟

خیام مصادرات را بر حسب بداهت و عدم بداهت به ترتیب، «قضایای اولیّه» و «قضایای غیر اولیّه» می‌نامد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۰؛ همایی، ص ۲۴۰). قضایای اولیه را آن‌هایی می‌داند که موضوع و محمول آن‌ها به روشنی یا به کمک اندکی تأمل تصور شوند (مثل A=C و A=B ← B=C) و قضایای اولیه حکمش مستند به فطرت عقل است (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۱؛ همایی، ص ۲۴۲)، اما در قضایای غیر اولیه، رابطه‌ی بین موضوع و محمول بدیهی نیست؛ مثل اصل توازی اقلیدس (5P).

در این‌جا به ده گزاره‌ای که خیام آن‌ها را به عنوان «مصادرات هندسه» معرفی کرده، می‌پردازیم (و بعداً در اثبات لازم می‌آید). این بدان منظور است که خیام می‌گوید (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۴): «این مقدار مبادی (منظور آکسوی‌ها و پوستولای‌ها) که اقلیدس در ابتدای کتاب خود، معرفی کرده، برای اثبات مسائل و قضایای هندسه بسنده نیست و قضایای بسیار دیگری داریم که در مقدمات هندسه، محل احتیاج است». البته خیام مدعی نیست که فهرست ده‌گانه‌ی ذیل کامل است. مصادرات هندسی پیشنهادی خیام در دو دسته‌ی گزاره‌های اولیه و غیر اولیه اند:

۱- گزاره‌های اولیه: (1M) هر مقداری تا بی‌نهایت قابل تقسیم است و مرکب از اجزای لایتجزا نیست (اصل پیوستگی یا اصل ارشمیدس[۳۸]- ادوکسس[۳۹])، (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۴)، (2M) ۲ خط نمی‌توانند سطحی را اشغال کنند، (3M) هرگاه دو خط که با خط سومی قطع شده‌اند در یک طرف این خطِ قاطع همگرا باشند، نمی‌توانند در جهت دیگر هم همگرا باشند و بر عکس (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۲ و ۳۰۹-۳۱۰؛ همایی، ص ۲۳۹، ۲۴۱ و ۲۴۳). این گزاره را به علت اهمیتی که در نظریه‌ی خطوط متوازی دارد «مصادره‌ی خیام» نامیده‌ایم، (4M) دو خط مستقیم که یک‌دیگر را قطع کنند از نقطه‌ی تقاطع رو به فراخی می‌روند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۵)، (5M) دو خط مستقیم که فاصله‌ی بین آن‌ها رو به تنگی می‌رود، هرگاه آن‌ها را امتداد دهیم، یک‌دیگر را قطع خواهند کرد و ممکن نیست که دو خط در حال فراخی، رو به تنگی و در حال تنگی، رو به فراخی داشته‌باشند(همان‌جا).

این دو گزاره‌ی اخیر (منظور 4M و 5M) حالت خاصی از مصادره‌ی سوم خیام اند، (6M) دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند نه رو به تنگی روند و نه رو به گشادگی (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۹؛ همایی، ص ۲۳۸). در واقع، بیان خیام در باره‌ی گزاره‌ی (6M) بدین صورت است: «هر دو خط متوازی، بُعد میان آن‌ها (منظور فاصله‌ی میان ۲ خط) تغییر نمی‌کند» (همان جا).

۲- گزاره‌های غیر اولیه: (7M) هر مقدار تا بی‌نهایت قابل قسمت است و مرکب از جزو لایتجزا نیست (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۷). (8M) هرگاه دو مقدار متناهی که مابین آن‌ها تفاضل یعنی «کم و زیادی» و «کوچک و بزرگی» باشد، ممکن است بر مقدار کوچک‌تر چندان بیفزاییم که بزرگ‌تر از مقدار بزرگ‌تر شود (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۵). (9M) می‌توان از نقطه‌ای مفروض به نقطه‌ی مفروض دیگر، خط راستی عبور داد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۷). (10M) ممکن است خط راستی را تا بی‌نهایت امتداد داد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۵).

۸- براهین خیام برای اثبات مصادرات کتاب «اصول» اقلیدس

خیام برای اثبات مصادرات دو نوع برهان را پیشـنهاد می‌کند که به شرح ذیل اند:

الف) برهان إنّی[۴۰]: برهانی است که در آن از معلول پی به وجود علت می‌برند و مقدمات این برهان فقط در عقل مقدم بر نتیجه‌اند (خوانساری، ص ۱۸۸– ۱۸۹). خیام بر آن است که فقط فیلسوف می‌تواند برای اثبات وجود یا خاصیّت گزاره‌های بنیادین ریاضیات به این برهان توسل جوید و با این برهان است که فیلسوف می‌تواند ثابت کند یک خط تا بی‌نهایت تقسیم‌پذیر است (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۴). مثال دیگری که با این برهان اثبات شـدنی است، عبارت است از «هرگاه دو خط غیر مشـخص مفروض باشند، خط سومی وجود دارد که این دو را قطع کرده و با هر دو، زاویه‌های مسـاوی تشـکیل دهد». برهان انّی را گاهی خیام، «برهان فلسفی» و گاهی «شبه برهان» نامیده است. مُراد از این برهان، برهانی واقعی نیسـت، بلکه توصیفی است شهودی برای کسـانی که به قول خیام از شـهود کافی برخوردار نیستند. برای درک بیشتر مطلب به اثبات خیام بر گزاره‌ی (۳M) می‌پردازیم که او آن را به طریقه‌ی برهان انّی ثابت کرده اسـت. خیام برای اثبات مصادره‌ی سومِ پیشنهادی خود (منظور ۳M)؛ (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۰؛ همایی، ص ۲۴۱) از دو دایره‌ی متحدالمرکز (مطابق شـکل زیر) اسـتفاده می‌کند و فرض می‌کند که اضلاع زاویه‌ی مرکزی مفروضِ زاویه‌ی «O» این دو دایره، وترهای «AC» و «BD» را به ترتیب روی این دوایر جدا کنند. آن‌گاه می‌گویـد وتر «BD» متعلق بـه دایره‌ی خارجی، بزرگ‌تر از وتر «AC» متعلق به دایره‌ی داخلی اسـت و این برای آنان که بتوانند یک زاویه و یک خط و نیز یک دایره را تصور کنند، امری اسـت بدیهی و با این برهان شـهودی یا به قول خیام، «انّی» از معلول یعنی «هم‌گرایی دو خط AB و CD» به وجود علّت یعنی «تقاطع آن‌ها در نقطه‌ی O» پی می‌بریم. هم‌چنین به نظر خیام، با برهان انّی می‌توان تعدادی دیگر از گزاره‌های بنیادین هندسه را از جمله «۹M، ۴M، ۳M، ۱M» ثابت کرد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایی، ص ۲۳۴–۲۳۵).

ب) برهان لِمّی[۴۱]: برهانی اسـت کـه در آن از علت، پی به وجود معلـول می‌برند و مقدمات ایـن برهان در وجـود و در عقل مقدم بر نتیجه‌انـد (خوانسـاری، ص ۱۸۸). این برهان بر خـلاف برهان انّی، برهانی است حقیقی. اغلب قضایای ریاضی نیز به کمک همین برهان ثابت می‌شـوند و خیام هم در رساله‌ی مذکور (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۷؛ همایـی، ص ۲۳۶) تلاش می‌کند با همین برهان «اصل توازی ۵P» اقلیدس را ثابت کند.

۹- مقاله‌ی اول رساله‌ی خیام در «متوازیات و حل شبهه‌ی آن»

از همان قرون اولیه‌ی مطرح شـدن اصل توازی (منظور از زمان خود اقلیدس) تا اوایل قرن ۱۹ میلادی، هندسه‌دانان بسیاری در صدد برآمدنـد کـه اصل موضوع توازی را که از حیث بیان و سـاختار مانند قضایا بود، بر اسـاس چهار اصل موضـوع دیگر (۱M تا ۴M) اثبات کنند. اولین کسی که از هندسـه‌ی اقلیدسی (منظور هندسه‌ای که بر اصل پنجم – مشـهور به توازی – بنا شده است) ناخشنود بود و چشم به پیدایش هندسـه‌ی نااقلیدسـی دوخته بود، اقلیدس بود زیرا او ۲۸ قضیـه‌ی اول از مقالـه‌ی اول کتاب «اصول» خـود را (I.1 تا I.28) بـدون توجه به اصل موضـوع پنجم و با در نظـر گرفتن چهار اصل موضـوع دیگر اثبات کرد (گرینبـرگ، ص ۱۲۴؛ هارولد، ص ۱۰)، اما گویا بطلمیوس[۴۲] نخستین کسی است که برای اثبات اصل توازی، در قرن دوم میلادی، کوشش کرده بود (اسمیت، ج ۱، ص ۲۴۹؛ هارولد، ص ۴۲). بعـد از او پروکلس[۴۳] (قـرن ۵ م)، أغانیس[۴۴] (قرن ۵ و ۶ م) و سمپلیسـیوس[۴۵] (قرن ۵ و ۶ م) و عده‌ای دیگر، براهینی را بر اثبات مصادره‌ی پنجم اقلیدس آوردند (راشـد و مورلن، ص ۵۹۵). در شرق و در حوزه‌ی جهان اسـلام برای اثبـات این مصادره، به همت عباس بن سـعید جوهری (اواخر سـده‌ی دوم و اوایل سـده‌ی سوم ق، نک: قربانـی الـف، ص ۲۱۵)، ثابت ابن قره، ابن هیثم، خیام، طوسـی و... تلاش‌هایی صورت گرفت (راشد و مورلن، ص ۵۹۵–۵۹۹) و نتیجه‌ی این کوشش‌ها در قرون اولیه‌ی رنسانس وارد حوزه‌ی اروپا شد و ادامه یافـت تا این که بلترامی[۴۶] در سـال ۱۸۶۷ م اثبات‌ناپذیری این اصل موضوعه را مبرهن ساخت (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۴۴).

پوسـتولای پنجم اقلیدس در حکم اصل اثبات‌ناپذیر، ذهن خیام را اقنـاع نمی‌کرد؛ زیرا اقلیدس اصول پنج‌گانه‌ی موضوعه‌ی خود را بر بداهت شـهودی و تجربی قرار داده بود و خیـام وقتی با آن‌ها مواجه شد، چهار اصل اول آن را پذیرفت؛ آن هم بدان سبب که صرفاً بدون علت و از طریق شـهود و تجربه قابل درک و پذیرش بود، ولی اصل موضوع پنجم را نتوانست بپذیرد؛ زیرا نمی‌توانست از راه تجربه تحقیق کند که دو خط عمود بر یک پاره‌خط تا بی‌نهایت ادامه دارند و هم‌دیگر را قطـع نمی‌کنند. تفکر خیام بی‌اسـاس نبود؛ زیرا بـرای دو پاره‌خط بـه طول محدود که عمود بر پاره‌خطی دیگرند، به وسـیله‌ی ترسـیم می‌تـوان موازی بودن آن‌ها را به عینه دیـد، ولی در باره‌ی خطوط با طول نامحدود به طریقه‌ی ترسیمی (تجربی) نمی‌توان بررسی کرد که آیـا تا بی‌نهایت به موازات هم در حرکت اند یا خیر. از همین رو خیام،ماننـد چند ریاضی‌دان پیش از خود، به اثبات پوسـتولای پنجم همت گمارد و قسمت اول رساله‌ی مذکور را بدان اختصاص داد.

خیـام برای اثبات (۵P) در مقام یک ریاضی‌دان و یک فیلسـوف بـزرگ جلوه می‌کند و می‌کوشـد تا وابسـتگی تنگاتنگـی را که بین ریاضیات و فلسـفه وجود دارد به روشنی نشـان دهد تا به این طریق ناکامی ریاضی‌دانان پیشین را در اثبات اصل توازی توجیه کند.

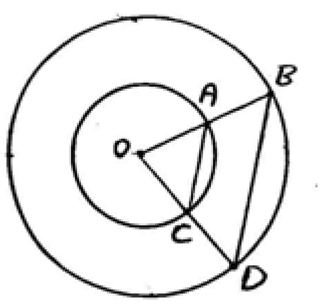
۹-۱) چرا کسـانی که قبل از خیام در اثبات اصل توازی تلاش کردند، به خطا رفتند؟ از نظر خیام اشـتباه دانشـمندان سـابق در این بـود که «مبادی مأخوذ از فلاسـفه را در نظر نمی‌گرفتند» (راشـد و وهـاب‌زاده، ص ۳۰۴؛ همایـی، ص ۲۳۱) و منظـور او همان مبادی

فلســفه‌ی ارســطو بود. یکی از این مبادی که خیام آن را به منزله‌ی اصل بدیهی برای نظریه‌ی خطوط موازی قبول می‌کند (و تا آن‌جا که از آثار شــناخته شده‌ی ارسطو معلوم اســت، مربوط به ارسطو نیست) این اســت که: «دو خطی کــه به هم نزدیک می‌شــوند، یک‌دیگر را قطــع می‌کننــد و برای دو خطــی که از هم دور می‌شــوند، در طرفی که فاصله‌ی آن‌ها زیاد می‌شــود، نقطه‌ی تلاقی وجود ندارد» (راشــد و وهــاب‌زاده، ص ۳۰۶؛ همایــی، ص ۲۳۵). روزنفلد که این گزاره را «اصل ارســطو - خیــام» نامیده، محتوای آن را معادل با پوســتولای پنجم می‌داند (روزنفلد و یوشــکویچ، ص ۶۶؛ مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۴) و بر آن است که خیام به کمک این اصل جدید، همه‌ی قضایایی را که مســتقیماً از اصل موضوع پنجم اقلیدس به دست می‌آیند، ثابت کنــد (مجله‌ی ســخن الــف، ص ۱۸۴). به نظر دکتر چاوشــی که در ایــن باره تحقیق کرده، اســتفاده از گزاره‌هــای «۱M» و «۹M» در اثبات‌های ریاضی‌دانان اســلامی قبل از خیام دیده شــده است و تنها «مصادره‌ی خیام - ۳M» مورد توجه آن‌ها واقع نشــده اســت، بنا بر این، به نظر خیام، خطای آن‌ها ناشــی از عدم بهره‌مندی «۳M» بوده است (مجله‌ی فرهنگ، ص ۱۵۷).

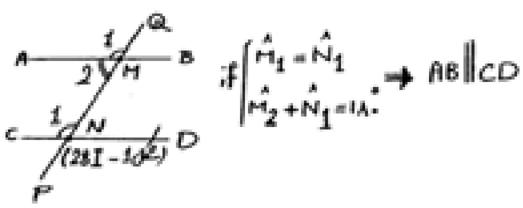
۹-۲) اِشکال و ایراد وارده بر «اصل توازی اقلیدس»

از نظر خیام، اقلیدس چون خود نتوانســت اصل توازی را از چهار اصــل موضوعِ دیگر نتیجه بگیرد (یعنی آن را در دســته‌ی قضایا قرار دهد) بنا بر این آن اصل را در ردیف سایر اصول موضوعه‌ی خود قرار داد و آن را به ناچار پذیرفت (تمپل، ص ۴۶۲). به نظر خیام، ایراد وارد بر پوســتولای اصل توازی آن اســت که چرا اقلیدس آن را در کتاب «اصــول» جزو «مبادی تصدیقیــه» ذکر کرده با این که این قضیه نه جزو اصول متعارفه (آکســیوم) اســت که محتاج به اثبات نباشــد و نه داخل در آن دســته از اصول موضوعه (پوستولای‌ها) که در فن دیگر، غیر از خود هندسه، توضیح و اثبات شده باشد، بلکه این قضیه هم‌چون دیگر مسائل علم هندسه است که باید قبل از قضیه‌ی ۲۹ مقاله‌ی اول (I.۲۹) کتاب «اصول» قرار گیرد (قضیه‌ی ۲۹، اولین قضیه‌ای اســت کــه برای اثبات، نیاز به مصادره‌ی خطوط تــوازی دارد) و آن را مانند دیگر مســائل هندسی اصول، اثبات کرد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۸-۲۲۷). خیام با بررسی کتاب «اصول» درمی‌یابد که اقلیدس قضایای ساده‌تر از مصادره‌ی پنجم را جزو مسائل قرار داده و اثبات کرده اســت، حال آن که در مقایسه با «اصل توازی» شایسته‌تر می‌بیند کــه آن قضایا را به جای اصل توازی، جزو مبادی قرار می‌داد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۵؛ همایی، ص ۲۳۳). مثالی که خیام در این زمینــه، از کتاب اقلیدس، می‌آورد (همان جا)، قضیه‌ی (V.۵) هفتم از مقاله‌ی پنجم «اصول» است: «نسبت یک مقدار به دو مقدار متساوی یکی است». خیام این قضیه را به حدّی ساده می‌بیند که همان مبادی هندسه را برای اثباتش کافی می‌داند (همان جا).

ایــراد دیگــری که خیام بر اقلیــدس وارد می‌داند، آن اســت که اقلیدس قضیه‌ی ۲۸ مقاله‌ی اول را (I.۲۸)، (ادامه‌ی مقاله) که درست بــه منزله‌ی عکس «اصل توازی» اســت، در بخــش قضایا به اثبات رســانده اســت. ایراد خیام وارد است؛ زیرا نمی‌شــود دو قضیه‌ای که عکس هم‌دیگرند، یکی را جزو مبادی آورد و دیگری را جزو مسائل و آن را اثبات کرد (همایی، ص ۴۲). قضیه‌ی «I.۲۸» به شرح زیر است (هیث ب، ص ۱۸): هرگاه دو خط مستقیم (AB و CD) را خط ثالثی (PQ) قطــع کند و زاویه‌ی خارجــه (M_1) با زاویه‌ی داخله‌ی مقابلش (N_2) مســاوی باشــد، یا دو زاویــه‌ی داخله در یک طــرف خط قاطع (منظور N_1 و M_2) معادل با دو قائمه باشــند، آن دو خط اول متوازی اند. به بیان ریاضی و مطابق شکل (۱) داریم:



اگــر گزاره‌ی اصل تــوازی را به بیان ریاضی مطابق شــکل (۲) نمایش دهیم،

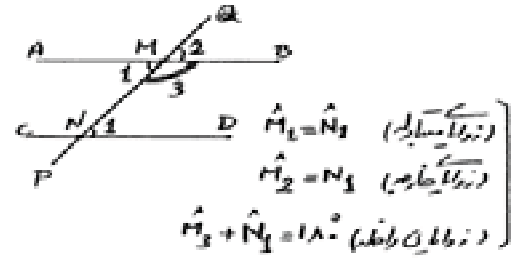


به روشنی متعاکس بودن «۵P» و «I.۲۸» را درمی‌یابیم.

۹-۳) خیام و اثبات اصل توازی

قبل از ارائه‌ی روش خیام در اثبات این اصل، جالب اســت بدانیم در مواردی که خیام از کتاب «اصول» نقل می‌کند، کلمه‌ی «متوازی» را بــه کار می‌بــرد، همان طور کــه اقلیدس به کار می‌بــرد، اما وقتی قضایای ابتکاری خودش را طرح و پیشنهاد می‌کند (منظور ۸ قضیه‌ی پیشنهادی خیام به عنوان پیش‌زمینه‌ی اثبات اصل توازی) برای احتراز از کلمــه‌ی «متوازی» لفظ «متحاذی» را بــه کار می‌برد و منظورش همان معادل متوازی اســت؛ برای این که از شــرّ اعتراض مصادره بر مطلوب، ایمن و مصون باشــد (راشــد و وهــاب‌زاده، ص ۳۱۲-۳۱۳؛ همایی، ص ۲۴۴-۲۴۶).

خیـام قضیه‌ی ۲۹ مقاله‌ی اول (I.۲۹) اصـول را اولین قضیه‌ای می‌داند که محتاج به «اصل موضوع خطوط توازی» اسـت (راشـد و وهـاب‌زاده، ص ۳۰۷؛ همایـی، ص ۲۳۶). امـا «I.۲۹» چه می‌گوید (هیـث ب، ص ۱۸)؛ مطابق شـکل، هرگاه دو خط متـوازی (AB و CD) را خـط ثالثی (PQ) قطع کند، دو زاویـه‌ی متبادله (M_1, N_1)) بـا یک‌دیگر و هم‌چنین زاویه‌ی خارجه (M_2) و زاویه‌ی داخله‌ی (N_1) مقابل آن، با یک‌دیگر مساوی اند و دو زاویه‌ی داخله (N_1, M_3)) که در یک سمت خط قاطع واقع شده‌اند، معادل با دو قائمه است.

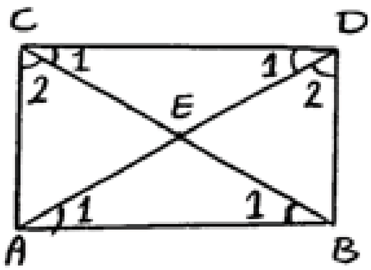


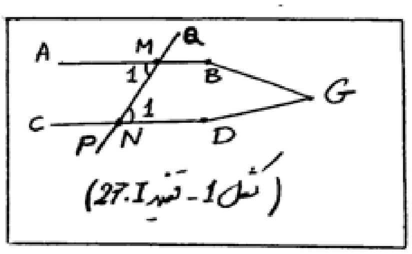
خیام برای اثبـات «اصل توازی»، آن هم به وسـیله‌ی «برهان لمّی»، هشت قضیه‌ی جدید هندسی را که آخرین آن‌ها همان قضیه‌ی «مصادره‌ی اصل توازی» اسـت، بـه طریقه‌ی ابتکاری طرح، اثبات و پیشنهاد می‌کند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۷، ۳۱۵؛ همایی، ص ۲۳۶، ۲۴۹). این هشـت قضیه باید، به ترتیب و پشـت سرهم، بین قضیه‌ی ۲۸ و ۲۹ مقالـه‌ی اولِ اصـول قرار گیرند تا به لحاظ روش هندسـی «که هر قضیه باید توسـط قضیه‌ی قبل اثبات شود و الی آخر»، ذهن برای پذیرش «اصل توازی» که خیام آن را قضیه‌ی هشـتم ابتکاری خود قرار داده اسـت، آماده شـود. از هشت قضیه‌ی خیام به شرح سه قضیـه‌ی اول آن می‌پردازیـم و از ذکر بقیـه صرف‌نظر می‌کنیم؛ زیرا دانستن قضیه‌ی سوم (پیشنهادی خیام) بسیار مهم است و پایه و بنیاد هندسـه‌ی نااقلیدسـی در رسـاله‌ی خیام بر همین قضیه‌ی سوم قرار دارد. گفتنی اسـت که اولاً نوع بیان ریاضـی خیام به صورت «لفظی - متعارف» اسـت و ثانیاً خیام برای معرفـی زوایا و خطوط از حروف ابجد استفاده می‌کند.

• قضیـه‌ی اول پیشـنهادی خیام (راشـد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۷؛ همایی، ص ۲۳۶-۲۳۷)

ایـن قضیه بـه بیـان جبری امـروزی معادل اسـت بـا فرض (صورت مسـأله): بر خـط «AB»، دو پاره‌خط «AC» و «BD»، که «AC=BD» اسـت را عمـود می‌کنیم. پس ایـن دو پاره‌خط مطابق قضیـه‌ی ۲۷ مقالـه‌ی اول اصول (هرگاه خـط PQ، دو خط CD و AB را قطع کند، مطابق شـکل ۱، زوایای مساوی متبادل ($\hat{N}_1, \hat{M}_1$) می‌سـازد، پس خطوط CD وAB موازی خواهند بود؛ (نک هیث ب، ص ۱۷) بـا هـم موازی‌اند (AC||BD). پس اگر ضلع CD را رسـم کنیـم، (حکم:) $\hat{C} = \hat{D}$ اسـت. برهان: اقطار AD و BC را رسـم می‌کنیـم ← [AB , AD=BC مشـترک $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (ΔABE)، متساوی‌الساقین است)]

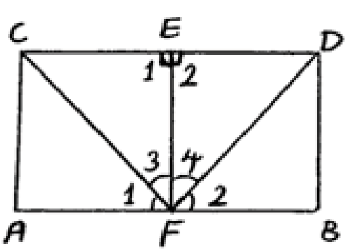
$[\hat{C} = \hat{D} \qquad \hat{C}_2 = \hat{D}_2 \ , \ \hat{C}_1 = \hat{D}_1] \leftarrow AE=BE \leftarrow \leftarrow EC=ED$





• قضیه‌ی دوم پیشنهای خیام (راشـد و وهـاب‌زاده، ص ۳۰۸؛ همایی، ص ۲۳۷-۲۳۸)

ایـن قضیه معادل اسـت با: فرض (صورت مسـأله): مسـتطیل «ABCD» را رسـم می‌کنیم، ضلع «EF» را بر وسط «AB»، عمود می‌کنیم. (حکم:) بنا بر این CE=ED و $EF \perp CD$.



برهان:

$$\left[\hat{F}_3 = \hat{F}_4 \qquad \hat{F}_1 = \hat{F}_2 \ , \ CF = FD\right] \leftarrow AC = BD \, , \ \hat{A} = \hat{B} \, , \ AF = FB$$

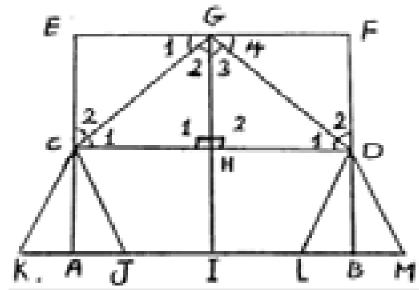
چـون $\leftarrow \left[\ EF \, , \ \hat{F}_3 = \hat{F}_4 \, , \ FD = FC \ \right]$ مشـترک

$$EF \perp CD \leftarrow \left[\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \, , CE = ED\right] \leftarrow \left[\ \Delta CEF = \Delta DEF \right.$$

• قضیه‌ی سـوّم پیشـنهای خیام (راشـد و وهاب‌زاده، ص

۳۰۸-۳۰۹؛ همایی، ص ۲۳۸-۲۴۰)

خیـام فرضیات این قضیه را همانند قضیه‌ی دوم در نظر می‌گیرد و مطابـق شـکل (۱) در صفحه‌ی بعد درصدد اسـت که نشـان دهد $\angle ACH = \angle BDH$ =۹۰°



برهـان: خیام بـه روش برهان خلف در این بـاره می‌پردازد؛ به طـوری که خـط «IH» را بر وسـط «AB» در نقطه‌ی «I» عمود می‌کنیـم و امتـداد می‌دهیـم و خـط «HG» را بـر «EF» عمود می‌کنیـم، پس خطـوط «AC» و «BD» را امتـداد می‌دهیم و از آن‌جایـی که IG || BD اسـت، پـس پاره‌خـط «EF» را در «E» و «F» قطع می‌کننـد، ← خط «BD» را موازی «IG» و خط «GF» را مـوازی خط «HD» تا بی‌نهایت امتداد می‌دهیـم و آن‌ها ناچار با یک‌دیگر تلاقی خواهند کرد. در واقع خیام درصدد است تا نشان دهد کـه خطوط «BD» و «AC» به موازات «IH» هسـتند، همان طور کـه امتداد «IH» در نقطه‌ی «G» عمود بر «EF» اسـت. امتداد دو ضلـع «AC» و «BD» هم به علت موازی بودن با «IH» و «EF» را در دو نقطـه قطع می‌کننـد و در آن‌جا بر «EF» عمودند. برای این منظور «CG» و «DG» را رسم می‌کنیم.

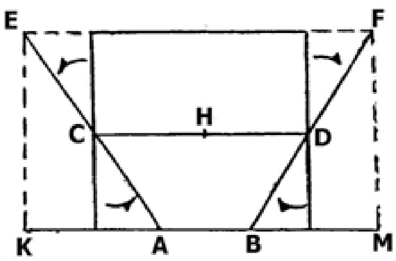
$$[\text{مشترک}\ HG,\ \hat{H}_1=\hat{H}_2,\ HC=HD]\leftarrow$$

$$[\hat{C}_1=\hat{D}_1, CG=GD \qquad \Delta CHG = DHG\Delta]\leftarrow$$

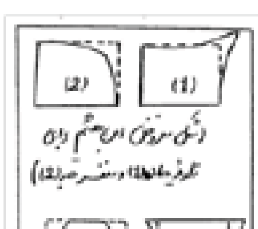
$$\hat{E}=\hat{F}\leftarrow[EG=GF, DF=CE, CG=GD, \hat{G}_1=\hat{G}_4, \hat{D}_2=\hat{C}_2, \hat{G}_2=\hat{G}_3]\leftarrow$$

پس خیام سـه شـرط ذیل را در مسـأله جـاری می‌بیند [اگر $\angle ACH = \angle BDH$ = ۹۰° آن‌چه گفته شـد درسـت اسـت و در غیـر ایـن صـورت هر یـک از آن دو زاویـه، حاده یا منفرجه اسـت].

فرض ۱): $\angle ACH = \angle BDH$ = ۹۰°. خیام درصدد اسـت که به روش برهان خلف این فرض را به تناقض بکشاند. پس با قبول این فرض، مطابق شـکل (۱) پایین صفحه‌ی قبل، سـطح «CF» را حول محور «CD» بر سـطح «AD» منطبق می‌کنیم. پس خطوط «HG» و «IG» بر هم منطبق و خطوط «EF» و «AB» هم برهم منطبق خواهند شـد. مطابق شکل EF>AB و EF=KM است؛ زیرا مطابق فرضی که در نظر گرفته‌ایم BDH ∠ FDH ∠. پس خیام از این‌جـا نتیجـه می‌گیرد که خطـوط «AC» و «BD» که در یک طـرف خط «AB» اند (شـمال خط AB) واگرا هسـتند و امتداد این دو خـط به دلیل تقارن در طرف دیگر هـم (منظور جنوب خط AB) واگرا خواهند بود.

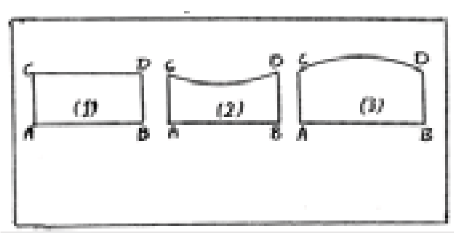


پس خیام این نتیجه‌ی به دسـت آمـده را مخالف اصل «۳M» (مصـادره‌ی خیام) دانسـته و بنا بر این زوایـای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ نمی‌توانند منفرجه باشـند. پس خیام در مورد فرض دیگر، یعنی زاویه‌ی منفرجه ($\angle ACH = \angle BDH > 90^\circ$) بـه همین طریق بـه نتیجه‌ی فـوق می‌رسـد کـه EF<AB و EF=KM. پس نتیجـه می‌گیرد خطوط «AC» و «BD» که در یک طرف خط «AB» همگرا هستند. قرینـه‌ی آن‌ها در طرف دیگر خـط «AB» هم، همگرا خواهند بود و این بر خلاف اصل «۳M» است. زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ نمی‌توانند منفرجه باشـند. خیام بـا بطلان این دو فرض (حـاده و منفرجه)، فرض دیگر یعنـی $\angle ACH = \angle BDH$ = ۹۰° را نتیجه می‌گیـرد. به نظر روزنفلد و یوشـکویچ فکر مربوط به در نظر گرفتـن «چهار ضلعی دو قائمه‌ی متساوی الساقین» ممکن است از ابن هیثم به خیام رسیده باشد (ص ۶۷؛ مجلـه‌ی سـخن الف، ص ۱۸۵)؛ زیرا ابن هیثـم که قبل از خیام بـه اثبات این مصـادره می‌پردازد، به جای «چهـار ضلعی دو قائمه‌ی خیام»، «چهار ضلعی با سه زاویه‌ی قائمه» را بررسی می‌کند (روزنفلد و یوشـکویچ، ص ۶۷؛ راشد و مورلون، ص ۵۹۶-۵۹۷). مطابق شکل روبه‌رو (راشـد و مورلون، ص ۵۹۷). احتمالاً خیام در یک سلسـله از نقاط اساسی کار از ابن هیثم تأثیر پذیرفته است (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۶۷). خیـام پس از اثبات قضیه سـوم به سـادگی «اصل موضوع توازی اقلیدس» را ثابت می‌کند (مجله‌ی سخن، الف، ص ۱۸۵).

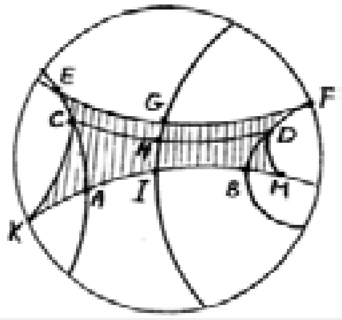


۹-۴) تأثیر خیام و قضیه‌ی سوم پیشنهادی‌اش بر پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی در قرن ۱۹ م

لباچفسکی[۴۷] (۱۷۹۳-۱۸۵۶ م) و ریمان[۴۸] (۱۸۲۶-۱۸۶۶ م) در قرن ۱۹ م هندسه‌های نااقلیدسی را کشف کردند، اما این دو ریاضی‌دان مستقیم یا غیر مستقیم با نظریات ساکری[۴۹] (۱۶۶۷-۱۷۳۳ م)، که پیش از آن‌ها ناخودآگاه چند قضیه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی را کشف کرده بود، آشنا بودند و از آن قضایا در کشفیات خود الهام گرفتند. تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که ساکری نیز به نوبه‌ی خود در ارائه‌ی این نظریات از خیام متأثر بوده و حق تقدم با خیام است (مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۵؛ هارولد، ص ۱۴۱)؛ یعنی خیام در مسیر اثبات اصل توازی اقلیدس در قضیه‌ی سوم پیشنهادی خود به طرح گزاره و اشکالی می‌پردازد که این قضیه و آن اشکال، کاملاً مطابق گزاره‌هایی بود که چندین قرن بعد والیس[۵۰] (۱۶۱۶-۱۷۰۳ م) و ساکری مطرح کردند. روزنفلد بر آن است که خیام در رساله‌ی خود، نطفه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی را تکوین داد و او بود که اولین کار اساسی منطقی را در این باره انجام داد و کارهای اساسی که در اروپا تا قبل از قرن ۱۹ صورت گرفتند، همه در حدود کار خیام بودند (مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۵). خیام بدون آن که خود متوجه شود قرن‌ها بعد در اروپا بانی و باعث جریانی در هندسه شد (منظور پیدایش هندسه‌ی نااقلیدسی) که در اصل نسبیت و تئوری کوانتوم و رد عقیده‌ی کانت در باره‌ی قبلی بودن مفهوم فضا، مؤثر بوده است (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۶۵). برای ملموس شدن قضیه همان طور که دیدیم، خیام سه فرض زاویه‌ی قائمه، حاده و منفرجه را برای زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ (مطابق شکل ۱) در نظر گرفت.

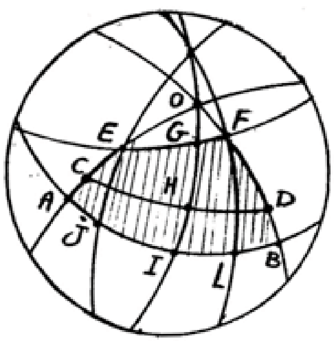


تا قبل از قرن ۱۹ میلادی هیچ ساختمان رقیبی در برابر ساختمان اصل «توازی- اقلیدس» به وجود نیامد تا آن که در قرن ۱۹ میلادی فرض زاویه‌ی حاده‌ی خیام به هندسه‌ی لباچفسکی (شکل ۲) و فرض منفرجه‌اش به هندسه‌ی ریمانی (شکل ۳) مشهور شد. هرگاه ساختمان خیام را در «هندسه‌ی هذلولی لباچفسکی» و «هندسه‌ی بیضوی ریمان» مورد مطالعه و تطبیق قرار دهیم، مطابق سه شکل زیر خواهیم داشت:



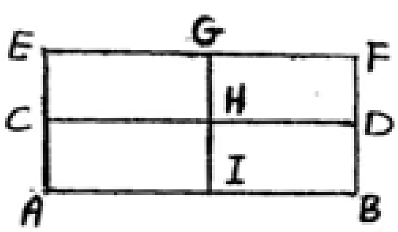
جای شکل ۱۲

در هندسه‌ی لباچفسکی AB<EF و خطوط «BF» و «AE» عمود بر «AB» اند و هم‌دیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.



جای شکل ۱۳

در هندسه‌ی ریمانی AB>jL و خطوط «BF» و «AE» عمود بر «AB» اند و هم‌دیگر را در نقطه‌ی «o» قطع می‌کنند.

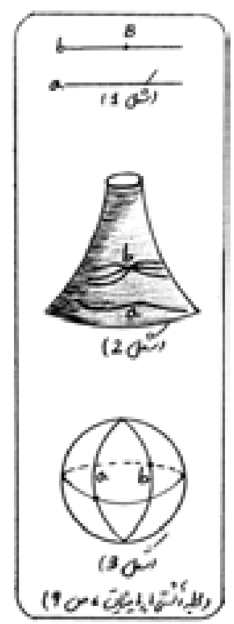


در شکل پیشنهادی خیام AB=EF و خطوط «AE» و «BF» عمود بر «AB» و تا ∞ موازی اند.

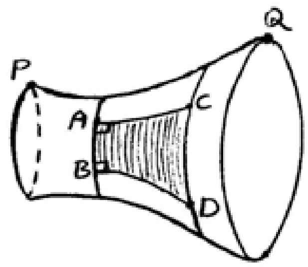
برای آشنایی مختصر و کلی با این سه هندسه کافی است بدانیم (هارولد، ص۱۸۰): صفت بارز هندسه‌ی اقلیدسی عبارت است از: «از هر نقطه‌ی (B) بیرون یک خط (a)، یک و فقط یک خط (b) می‌توان کشید که با آن موازی باشد» و هر دو خط راست موازی، فاصله‌ای ثابت از هم دارند (انستیتوی ریاضی، ص ۱۴۰) (مطابق شکل ۱).

صفت بارز هندسه‌ی لباچفسکی عبارت است از: «از هر نقطه‌ی (B) بیرون یک خط (a)، تعداد بی‌شمار (نامتناهی) خط موازی با آن می‌توان کشید» و از طرفی دو خط راست موازی (مطابق شکل ۲)، در یک سمت به صورت مجانبی به هم نزدیک و در سمت دیگر تا بی‌نهایت از هم دور می‌شوند یا از هر دو سمت تا بی‌نهایت از هم دور می‌شوند (انستیتوی ریاضی، ص ۱۴۳).

صفت بارز هندسه‌ی ریمانی عبارت است از: «از هر نقطه‌ی (B) خارج یک خط (a)، هیچ خطی را نمی‌توان به موازات آن رسم کرد» (مطابق شکل ۳) و در واقع در هندسه‌ی ریمانی، هیچ دو خط مستقیم موازی وجود ندارد.

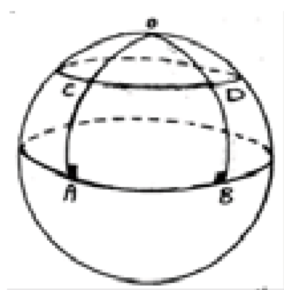


با توجه به آن‌چه توضیح دادیم، هرگاه خیام از «مصادره‌ی M۳» که در حقیقت هم‌ارز پوستولای اقلیدس است، استفاده نمی‌کرد؛ یعنی به جای تجسم «خط راست تا بی‌نهایت در یک امتداد است» به دو تجسم هندسی «خطوط منحنی رو به داخل- مقعر» و «خطوط منحنی رو به خارج- محدب» می‌پرداخت. شاید آن معما که بعد از او به دست لباچفسکی و ریمان گشوده شد، در همان زمانِ او گشوده می‌شد. اما ریمان و لباچفسکی چگونه از فرضیات سه گانه‌ی خیام در قضیه‌ی پیشنهادی سوم خیام بهره جستند؟ خیام فرض زاویه‌ی حاده را در باره‌ی زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ به تناقض کشاند؛ زیرا امتداد خطوط را مستقیم در نظر می‌گرفت، ولی لباچفسکی با صحیح شمردن فرض زاویه‌ی حاده، آن هم به دلیل نگاه منحنیایی به خطوط، هندسه‌ی هذلولی[۵۱] را پایه گذاشت که مطابق شکل (۱) کاملاً درک‌پذیر است. اگر «سطح حجم‌دار شیپوری» مانندی را مطابق شکل (۱) در نظر بگیریم



شکل ۱- البته طول «PQ» باید زیاد باشد.

و مطابق فرض خیام در قضیه‌ی اول پیشنهادی، دو پاره‌خط «AC» و «BD» را بر پاره‌خط «AB» عمود کنیم (با فرض AC=BD) و نقاط «C» و «D» را به هم وصل کنیم، پس روی سطح شیپوری مانند، چهارضلعی «ABCD» به وجود می‌آید که نظیر همان شکل (۲) از قضیه‌ی پیشنهادی سوم خیام است، در حالتی که زاویه‌ی حاده را فرض کرده است.



همین طور خیام فرض زاویه‌ی منفرجه را در باره‌ی زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ به تناقض کشاند، به همان دلیل قبلی که گفتیم، ولی ریمان با صحیح شمردن فرض زاویه‌ی منفرجه، آن هم به سبب داشتن نگاه منحنیایی به خطوط، هندسه‌ی بیضوی[۵۲] را پایه گذاشت که مطابق شکل (۲) کاملاً درک‌پذیر است. اگر سطح کروی شکلی مانند کره‌ی زمین را در نظر بگیریم و مطابق فرض خیام در قضیه‌ی اول پیشنهادی، دو پاره‌خط «AC» و «BD» را بر «AB» عمود کنیم (با فرض AC=BD) و نقاط «C» و «D» را به هم وصل کنیم، پس روی سطح کره، چهارضلعی «ABCD» به وجود می‌آید. زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ آن منفرجه هستند. بنا بر این، مشاهده شد که هر ۳ فرض «قائم، حاده و منفرجه» خیام در سه حالت به ترتیب «سطح مسطح، کروی و شیپوری» صحت دارد و اگر خیام به جای تقلید از اقلیدس «که وی با نگاه مسطحه به هندسه نگریسته بود» با نگاهی «غیر مسطحه و منحنیایی، مطابق واقعیت سطح کره‌ی زمین» توجه می‌کرد، مطمئناً افتخار کشف دو هندسه‌ی نااقلیدسی مذکور به نام خیام ثبت می‌شد.

۹-۵) ساکاری و شباهت کارهای هندسی او به عمر خیام

مهم‌ترین کوشش در زمینه‌ی اثبات «اصل توازی» را کشیشی به نام ساکری[۵۳] در اروپا انجام داد؛ در کتابی با عنوان «اقلیدس عاری از هر گونه نقص[۵۴]» که در سال ۱۷۳۳ م در میلان به چاپ رسید (هارولد، ص ۴۶). او با کارهای خواجه نصیرالدین طوسی در باره‌ی خطوط متوازی از طریق ترجمه‌های لاتینی والیس آشنایی داشت (مجله‌ی آشتی با ریاضیات، ص ۴). او درصدد بود تا با اثبات این اصل موضوع مزاحم (به روش برهان خلف) برای همیشه اقلیدس را از انتقاد برهاند (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۶۴). ساکری برای اثبات اصل توازی همان چهارضلعی «متساوی‌الساقین دو قائمه‌ی» خیام را بررسی کرد (مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۵). متأسفانه چهارضلعی خیام امروزه به «چهارضلعی ساکری» مشهور است (مجله‌ی سخن ب، ص ۱۲۵). او همانند خیام سه فرض قائم، حاده و منفرجه را طرح کرد و فقط توانست فرض زاویه‌ی منفرجه را به تناقض بکشاند، اما در باره‌ی فرض زاویه‌ی حاده به سبب صعوبت کار، نتوانست تناقضی را که در پی آن بود به دست آورد و در این مسیر، ناخواسته به نتایجی رسید که بسیاری از آن‌ها قضایای هندسه‌ی لباچفسکی را تشکیل می‌دهند (هارولد، ص ۴۸؛ مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۶۴). شباهت فراوان گزاره‌های ساکری با خیام، محققان تاریخ ریاضیات را متقاعد کرده که او از کارهای خیام بهره برده است. حتی رساله‌های این دو ریاضی‌دان از نظر سبک نگارش، نیز به هم شبیه‌اند (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۶۵).

اسمیت[۵۵]، ریاضی‌دان آمریکایی، (۱۹۴۴-۱۸۶۰ م) نخستین کسی بود که در سال ۱۹۳۵ میلادی به شباهت گزاره‌های خیام با ساکری پی برد و این دو نوشته را با هم مقایسه کرد و در نهایت، نتیجه را در اثر مهم خود به نام «عمر خیام و ساکری» طی مقاله‌ای نقل کرد (اسمیت ب، ص ۱۰- ۵). اسمیت به سبب در دست نداشتن اصل رساله‌ی خیام، به استنادات خواجه‌ی طوسی از رساله‌ی مذکور خیام متوسل شده بود و مقایسه‌ای ناقص را صورت داده بود تا این که در سال ۱۹۶۷ م، خلیل جاویش با در دست داشتن هر دو رساله‌ی خیام و ساکری متوجه شد که این شباهت بیشتر از آن است که اسمیت کشف کرده بود، پس او نیز نتایج کار خود را طی مقاله‌ای منتشر کرد (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، به نقل از جاویش، ص ۹۷-۱۱۳). نتیجه‌ی این مقایسه آن است که ساکری از نظریه‌ی خطوط توازی خیام از طریق آن‌چه خواجه نصیر طوسی در باره‌ی کار خیام در «رسالة‌الشافیه» آورده بوده، بهره برده است و در واقع، عامل این بهره‌مندی ساکری از خیام، شخص والیس با ترجمه‌ی لاتینی از «رسالة‌الشافیه» خواجه نصیر طوسی بوده است (اسمیت الف، ص ۱۰-۵).

۹-۶) زنجیره‌ی اتصال براهین خیام در باره‌ی اصل توازی تا رسیدن به هندسه‌ی نااقلیدسی

۱- خواجه نصیرالدین طوسی در «رسالة‌الشافیه» در کنار روش خود در اثبات اصل توازی، بر پایه‌ی برهان مستقیم، روش «خیام و جوهری» را هم مطرح می‌سازد. به نظر روزنفلد، خواجه بر اساس اندیشه‌های خیام و جوهری، برهان خود را عرضه کرده است و همانند خیام دو فرض زاویه‌ی حاده و منفرجه را رد کرده است (ص ۶۸-۶۷؛ مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۵). هم‌چنین طوسی در رساله‌ی دیگر خود، «تحریر کتاب شرح اصول اقلیدس»، ضمن بیان روش خیام، اصل «ارسطو- خیام» را با اصل دیگری شبیه به آن عوض می‌کند (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۶۸؛ مجله‌ی سخن الف، ص ۱۸۵).

۲- والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳ م) با ترجمه‌ی «رسالة‌الشافیه» طوسی (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۷۸) به کار طوسی دل‌بستگی پیدا کرد و در ۱۶۵۱ م استدلال او را در مباحث درسی خود در آکسفورد به کار برد و در ۱۶۶۳ میلادی استدلال خودش را در باره‌ی اصل توازی به روش برهان مستقیم عرضه کرد (هارولد، ص ۴۵؛ «مجله‌ی آشتی با ریاضیات»، شهریاری، ص ۴). والیس بلافاصله بعد از به دست آوردن برهان طوسی، اشاره می‌کند که به وسیله‌ی فردی به نام یوکوک به دو نسخه‌ی خطی عربی دیگر هم دست یافته است که نامی از مؤلفان آن به میان نمی‌آورد، ولی احتمال دارد یکی از این دو نسخه‌ی خطی رساله فی شرح... خیام بوده باشد (مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۷۸).

۳- ساکری (۱۶۶۷-۱۷۳۳ م) در کتاب خود که شرح دادیم، نامی از خیام نمی‌آورد، ولی همان طور که گفتیم از طریق والیس با نظریات خیام آشنا می‌شود. او دقیقاً همان اشکال و فرضیات خیام را دنبال کرد (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۶۸).

۴- آدرین ماری لژاندر[۵۶] (۱۷۵۲-۱۸۳۳ م) از جمله ریاضی‌دانانی بود که ذهن خود را معطوف به اصل توازی کرد (گرینبرگ، ص ۱۸).

۵- بلترامی[۵۷] (۱۸۳۵-۱۹۰۰ م) که افتخار اولین اثبات کننده‌ی سازگاری هندسه‌ی نااقلیدسی نصیب او شد (هارولد، ص ۷۶)، با اثر ساکری آشنایی داشت و مقاله‌ی مهمی در باره‌اش به چاپ رسانده بود (مجله‌ی آشتی با ریاضیات، شهریاری، ص ۴)

۶- لامبرت[۵۸] به پژوهش‌هایی در باره‌ی اصل توازی پرداخت و کارهایی شبیه به ساکری عرضه کرد (هارولد، ص ۴۸).

۷- کلوگل[۵۹] در سال ۱۷۸۳ م در دانشگاه گوتینگن آلمان که مرکز بسیار مهم بحث در مورد اصل توازی بود، رساله‌ی دکتری خود را در باره‌ی خطوط موازی نوشت و کتاب ساکری را نقد کرد و اولین کسی بود که در امکان اثبات اصل توازی تردید کرد (هارولد، ص ۴۸؛ مجله‌ی فرهنگ، چاوشی، ص ۱۷۸).

۸- گاوس[۶۰] (۱۸۷۷-۱۷۵۵ م) با اثر ساکری و لامبرت آشنا بود و درصدد بود تا همانند ساکری با برهان خلف، اصل توازی را ثابت

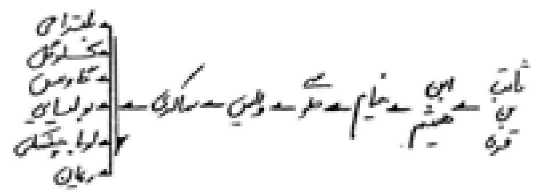
کند، ولی زود به اثبات‌ناپذیری آن پی برد و هندســه‌های نااقلیدسی را پیش از ریمان و لباچفسکی کشف کرد (هارولد، ص ۶۰)، ولی از خود پایداری نشــان نداد که نظریه‌ی هندســه‌ی نااقلیدسی را تا مرز لازم پیش ببرد (انستیتوی ریاضی، ص ۱۳۴).

۹- بولیایــی[۶۱] (۱۷۷۵-۱۸۵۶ م). کار او در اثبات اصل توازی در امتــداد مســیر گاوس بود (هارولــد، ص ۶۴-۶۳) و بعد از او فرزندش یانوش بولیایی[۶۲] (۱۸۰۲-۱۸۶۰ م) به تقریب، هم‌زمان با لباچفســکی، ناممکن بــودن اثبات اصل توازی اقلیدس و امکان وجود هندســه‌ی نااقلیدسی را کشف کرد (انستیتوی ریاضی، ص ۱۳۳).

۱۰- لباچفســکی (۱۸۵۶-۱۷۹۳ م) هندسه‌ی نااقلیدسی هذلولی را کشف کرد. او با یوهان بارتلس[۶۳] کار کرده بود و بارتلس با گاوس و نظریاتش در این باره آشنایی داشت (هارولد، ص ۶۸-۶۷). او در واقع در ۱۸۲۶ م توانســت قضیه‌ی اصل توازی را که حدود ۲۰۰۰ سال بر سر آن بحث بود به سرانجام برساند و نشان دهد که اثبات‌ناپذیر است (انستیتوی ریاضی، ص ۱۳۴).

۱۱- ریمــان (۱۸۲۶-۱۸۶۶ م) شــاگرد گاوس بود و هندســه‌ی نااقلیدسی بیضوی را ابداع کرد (هارولد، ص ۷۴).

نمودار زیر نشان دهنده‌ی این زنجیر اتصال هندسه‌ی نااقلیدسی به کارهای خیام و قبل او است.

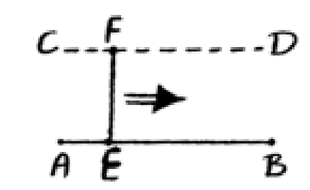


۹-۷) تفــاوت اصــل توازی با «اصل موضــوع پنجم (۵M)» اقلیدس در کتاب‌های درسی دبیرستان

اصل توازی که در کتب دبیرستانی معرفی شده، می‌گوید: «از یک نقطه‌ی خارج از یک خط، تنها یک خط موازی با آن می‌توان ترســیم کرد». این اصل مشهور به «اهل موضوع پلی‌فیر[۶۴]» است که به علت اختصار و ســادگی ظاهری جانشــین (۵M) شده اســت (هارولد، ص ۳۶-۳۷). اصل پلی‌فیر اگرچه از اصل موضوع پنجم اســت، ولی همان تعریفی که اقلیدس بیان کرده، نیست (هیث ب، ص ۲). بدون در نظر گرفتــن اصل موضوع پنجم (۵M)، دریافت تاریخچه‌ی هندســه‌های نااقلیدسی ناممکن است آن هم به عللی که قبلاً شرح دادیم.

۹-۸) روش ابن هیثم در اثبات «اصل توازی» و ایراد خیام بر روش او

ابــن هیثم روش اثبات خود را این گونه مطرح می‌کند (راشــد و وهــاب‌زاده، ص ۳۰۱؛ همایــی، ص ۲۲۸): او پاره‌خط «EF» را عمود «AB» اخراج می‌کند و نشان می‌دهد که اگر پاره‌خط «EF» را روی «AB» بــه گونه‌ای حرکت دهیم که نقطــه‌ی «E» از روی «AB» منحرف نشود و در طول مسیر حرکت همواره، «EF» عمود بر «AB» باشد، آن‌گاه خط مســتقیم دیگری به نام «CD» به وجود می‌آید که حاصل حرکت پیوسته‌ی نقطه‌ی «F» است (مطابق شکل).



خیام در رســاله‌ی خود به چهار ایراد و انتقاد اساسی بر روش ابن هیثم می‌پردازد:

(الف) خیام معترض است که چطور می‌توان خط «EF» را بر دو خط «AB» و «CD» حرکت داد، به طوری که قائمه بودن آن حفظ شود (راشد و وهاب‌زاده، ص ۱ و ۳ ؛ همایی، ص ۲۲۹).

(ب) خیــام معترض اســت که چــرا ابن هیثم مبحــث حرکت را که مربوط به مســائل «علوم طبیعی» اســت، وارد هندسه کرده است (همان‌جا). انتقاد خیام نابه‌جاســت؛ زیــرا اولاً به گفته‌ی جلال همایی منظور ابن هیثم از حرکت، آن اســت که برای همه معلوم و مشــهور است، نه حرکت به مفهوم فلسفی (همایی، ص ۱۰۳). ثانیاً در مقدمه‌ی کتــاب «اصول» که خیــام آن کتاب را پایه‌ی همــه‌ی علوم ریاضی می‌داند، (نک راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۰؛ همایی، ص ۲۲۷) و دائماً بدان اســتناد می‌جوید، می‌بینیم اقلیدس تعاریفی چون «می‌توان بین هر دو نقطه را به وســیله‌ی خطی مستقیم وصل کرد» و «بر هر نقطه و به شــعاعی دل‌خواه می‌توان دایره‌ای رســم کرد» (هیث ب، ص ۲) عرضــه می‌کند که این اعمال بدون در نظــر گرفتن حرکت، ناممکن اســت یــا در جایی دیگــر (هیــث، XI، ص ۳۰۲-۳۰۱) حرکت را در تعریــف کــره[۶۵] به صورت «کره آن اســت که از حرکــت و گردش[۶۶] یک دور نیم‌دایره حادث می‌شــود» وارد کرده است. ثالثاً خیام معترض می‌شــود که چطور ممکن اســت «عرض» (در این‌جا منظور ← خط) بدون «موضوعش» (در این‌جا منظور ← ســطح) حرکت کند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۱؛ همایی، ص ۲۲۹) آن‌چه در نزد قدما مشهور بود، آن اســت که «نقطه» حد مشــترک بین دو خط است و قائم است به آن خط، یعنی به تنهایی و مســتقلاً وجود خارجی نمی‌گیرد و «خط» نیز منتهی‌الیه و حد مشــترک بین دو ســطح است و وجودش قائم به ســطح اســت و الی آخر (همایی، ص ۸۹-۹۰). بنا بر این، «خط» که همان «عَرَضْ» است، انتقالش از موضعی به موضعی دیگر تابع انتقال «سطح» است که همان «موضوع عرض» است؛ یعنی خط به تنهایی انتقال‌پذیر نیست، مگر آن که سطح به وجود آورنده‌ی آن منتقل شده باشــد (همان‌جا). این اعتراض خیام به همان دلایل قبل وارد نیست. رابعاً خیام معترض اســت که چرا ابن هیثــم می‌گوید «خط از حرکت

نقطه حاصل می‌شــود» و این به نظر خیام نادرســت است؛ زیرا «خط وجوداً و ذاتاً قبل از وجود نقطه اســت» (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۰۱؛ همایی، ص ۲۲۹) و از وجود خط است که نقطه شکل می‌گیرد، نه این که از وجود نقطه، خط به وجود می‌آید. این اعتراض هم وارد نیست.

۱۰- مقالــه‌ی دوم رســاله‌ی خیام در بیان نســبت و معنی تناسب و حقیقت آن

موضوع این مقاله چندان مهم نیست؛ زیرا مدت‌هاست که موضوع آن حل شده است، پس اجمالاً بدان می‌پردازیم. خیام در ابتدای رساله‌اش (راشــد و وهاب‌زاده ص ۳۰۲؛ همایی، ص ۲۳۰) متذکر می‌شود که قبل از خودش هیچ کس در این موضوع بحث فلســفی کافی نکرده اســت، الا «نیریــزی». البته باید گفت قبل از خیــام فردی به نام ابومحمد بن حسن بن عبیداله بن سلیمان بن وهب کتابی به نام «شرح المشکل من کتاب اقلیدس فی النســبه» نوشته اســت (ابن ندیم، ص ۳۸۱). به نظر می‌رســد خیام از وجود آن کتاب بی‌خبر بوده است. خیام تعریف‌هایی را که اقلیدس در مقاله‌ی پنجم کتاب «اصول» برای اصطلاحات «نسبت» و «تناســب» عرضه کرده، از نظر لغت صحیــح می‌داند ولی هیچ کدام از آن تعاریــف را بــرای ادا کــردن حق مطلب کافی نمی‌بیند (راشــد و وهــاب‌زاده، ص ۳۱۸؛ همایی، ص ۲۵۲). پس خیام شــرحی مفصل بر تفسیر مفهوم تناسب می‌نویسد و لازم می‌داند که تحقیقاتش بر خاتمه‌ی مقاله‌ی پنجم اصول، افزون شــود (همان‌جا). روزنفلد بر آن اســت که تعریف اقلیدس از «تناســب»، خیــام را اقناع نمی‌کــرد؛ زیرا «خواص اندازه‌گیری تناسب‌هایی را که برای ریاضیات کشورهای اسلامی اساسی بود و کاربرد عمده‌ی آن در محاســبه‌ی تقریبی و اعمال با اعداد گنگ بود» روشــن نمی‌ساخت، پس خیام کوشید تا چنان تعریفی را از برابری تناسب‌ها عرضه کند که «تابع عددی تناسب» را کاملاً تشریح کند (ص ۷۱ -۷۲؛ برگرن، ص ۲۴).

اقلیــدس می‌گوید (هیث ب، مقاله‌ی V، تعریف ســوم، ص ۸۱): «نســبت: ســنجیدن دو مقدار متجانس یکی با دیگری». خیام ضمن نقل تعریف اقلیدس، آن تعریف را کامل‌تر می‌کند (راشــد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۶؛ همایی، ص ۲۴۹). خیام نســبت و تناســب را میان «۲ کم متصــل» (منظور طول، ســطح، جســم و زمان) یــا «۲ کم منفصل» (منظــور عدد) برقــرار می‌داند، در صورتی کــه آن دو کمیت از «یک بُعْد» باشــند؛ مثل «نســبت عدد به عدد، زمان به زمان، طول به طول و...»، ولی مثلاً نســبت «خط به ســطح» را برقرار نمی‌داند؛ زیرا خط یک بُعْد اســت و ســطح دو بُعْد (همان‌جا). در واقع، خیام نسبت میان «عــدد به طول، طول به جســم، جســم به زمان، عدد بــه زمان و بر عکــس آن‌ها را» مردود می‌داند (همان‌جا). پس از آن، خیام به تعریف «مقدار نســبت» می‌پردازد (مثلاً مقدار نسبت ۱۰ به ۵ برابر ۲ است) و بعد اشاره می‌کند که گذشتگان دریافتند که می‌شود رابطه‌ی تناسب را عــلاوه بر اعداد، در باره‌ی مقادیر متصل هم به کار برد و چون مقادیر بر خلاف اعداد از «اجزای لایتجزا» تشــکیل نشده است، پس تقسیم آن‌ها بر هم (منظور نســبت آن‌ها به هم) محدود نیســت (یعنی دارای مقدار مشــخص است)؛ با این که مثلاً نســبت ۲ به ۷ دارای مقداری نامشخص و به اصطلاح خیام، قسمت‌پذیری آن‌ها را حدّ محدود است (راشد و وهاب‌زاده، ص۳۱۶-۳۱۷؛ همایی، ۲۵۰-۲۵۱).

برای یادآوری ضروری اســت بدانیم «نســبت عددی (حسابی) دو مقدار - تفاضل آن دو عدد» و «نسبت هندسی دو مقدار - خارج قسمت تقسیم مقدار اول بر دوم» و آن را با علامت (:) نشان می‌دهیم. مهم‌ترین ایراد خیام بر اقلیدس در بیان نسبت مشهور و بیان نکردن نسبت حقیقی است. خیام دو اصطلاح به نام‌های «تناسب مشهور» و «تناسب حقیقی» وضع می‌کند و بر آن است که تمام مقاله‌ی پنجم «اصول»، که در مورد نســبت و تناسب اســت (نک هیث ب، ص ۹۸-۸۱) اعّم از مصادرات و مسائل، عموماً مبتنی بر «تناسب مشهور» است و از این نظر، همه‌ی آن مقاله‌ی پنجم را صحیح می‌داند، جز آن که فاقد مبحث تناسب حقیقی است و به همین منظور پیشنهاد می‌کند برای رفع آن نقیصه، تحقیق او را به انتهای مقاله‌ی پنجم «اصول» بیفزایند (راشد و وهاب‌زاده، ۳۱۸-۳۱۹؛ همایــی، ص ۲۵۲-۲۵۳). در واقع، خیــام آن چه را که مصطلحاً «تناســب مشهور» می‌نامد و آن را به تعاریف اقلیدس از تناسب، نسبت می‌دهد چنین اســت: اقلیدس «تناســب را تشــابه نســبت‌ها می‌داند» (همان‌جا؛ هیث ب، ص ۸۱). در تشریح این تعریف اگر بخواهیم آن‌چه را اقلیدس طی دو تعریف پنجم و هفتم از مقاله‌ی پنج «اصول» (هیث ب، ص ۸۱) بیان کرده و خیام آن را در رســاله‌ی خود نقل کرده اســت (نک راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۸؛ همایی، ص ۲۵۲-۲۵۳) با نماد جبری نشان دهیم، این‌گونه است:

$$\mathrm{I)V.definition5^1 : if}\left[\begin{array}{c} A:B::C:D \\ m,n\in N \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{if } m_A > n_B \to m_C > n_D \\ \text{if } m_A = n_B \to m_C = n_D \\ \text{if } m_A < n_B \to m_C < n_D \end{array}\right]$$

B و D مضرب مشترک (n) و C و A مضرب مشترک (m)

$$\mathrm{II)V.definition7^2 : if}\left[\begin{array}{c} A > B \text{ و } C \le D \\ m,n\in N \end{array}\right. \Rightarrow A:B > C:D$$

۱- تعریف پنجم از مقاله‌ی پنجم اصول

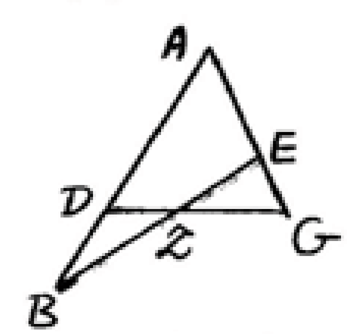
۲- تعریف هفتم از مقاله‌ی پنجم اصول

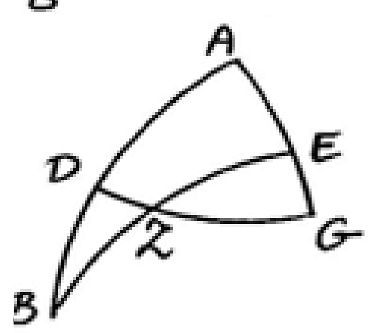
خیــام در مجمــوع، به تعریف اقلیدس از تناســب و به دو شــرط (II, I) که اقلیدس بر آن تعریف می‌افزاید، «تناســب مشهور» می‌گوید. پس خیام به تعریف خود از تناســب که آن را «تناسب حقیقی» می‌داند می‌پردازد و قبلاً ذکر می‌کند که تناســب مشــهور و حقیقی متلازم‌اند (همان‌جا). خیام تعریف «تناســب حقیقی» خــود را (اگر با بیان جبری نشان دهیم) این گونه مطرح می‌کند (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۱۸-۳۱۹؛ همایی، ص ۲۵۳-۲۵۴):

۱۱- مقاله‌ی سوّم رساله‌ی خیام در تألیف نسبت و تحقیق آن

این مقاله به شرح و آموزش «نسبت تألیف» می‌پردازد که اقلیدس آن را به اندازه‌ی کافی توضیح نداده است. البته انگیزه‌ی اصلی خیام برای تألیف این مقاله آن بوده است که «نسبت تألیف» در مثلثات و نجوم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اقلیدس در تعریف «نسبت مؤلفه» آورده است: «نسبت مؤلفه عبارت است از حاصل‌ضرب دو نسبت یا چند نسبت در یک‌دیگر». به زبان ریاضی $\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ ($\frac{E}{F}$ نسبت مؤلفه). ایرادی که خیام بر اقلیدس می‌گیرد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۳؛ همایی، ص ۲۷۴) آن است که: تعریف «نسبت مؤلفه» در مقاله‌ی پنجم کتاب «اصول اصلاً و ابداً در هیچ یک از قضایا نیاز نبوده و در قضیه‌ی ۲۳ مقاله‌ی ششم (یعنی نسبت متوازی الاضلاع‌های برابر با زوایا به یک‌دیگر ترکیبی است از نسبت‌های اضلاع آن‌ها با یک‌دیگر) واقعاً بدان نیازمندیم.

خیام در ضمن بیان دیگر انتقادهای خود بر کتاب «اصول»، روی قضیه‌ی «نسبت مؤلفه» شدیداً تأکید می‌کند؛ زیرا «شکل قطاع» (مطابق شکل روبه‌رو) که پایه و مبنای حل مسائل علم هیئت و اشکال و مثلثات کروی است، بر اساس همین نسبت مؤلفه به دست می‌آید (همان‌جا).



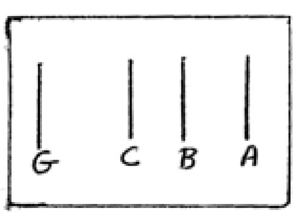


شکل قطاع کروی $\frac{\sin GA}{\sin EA}=\frac{\sin GD}{\sin ZD}\times\frac{\sin ZB}{\sin BE}$

شکل قطاع مسطح $\frac{GA}{EA}=\frac{GD}{ZD}\times\frac{ZB}{BE}$

در ادامه، خیام علم عدد را مقدم بر علم هندسه معرفی می‌کند و علتش را آن می‌داند که مثلاً در هندسه وقتی می‌گوییم «مثلث آن است که سه خط آن را احاطه کرده باشد» پس کسی که عدد سه را درک نکند، نمی‌تواند معنی مثلث را دریابد. خیام اشتباه اقلیدس را در آن می‌داند که در کتاب «اصول»، هندسیات را بر بخش عددیات مقدم داشته است (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۴؛ همایی، ص ۲۷۵-۲۷۶). اما کار عمده و سرنوشت‌ساز خیام در مقاله‌ی سومش آن بود که او در بحث اعداد، از نظریه‌ی ارسطو فاصله می‌گیرد؛ یعنی این نظریه که «عدد یک» منطقاً طوری تلقی می‌شود که انگار خودش یک عدد نیست بلکه اندازه یا واحد آغاز (یا اصل) عدد است (نک هیث الف، ص ۶۹) و به پیروی از گذشتگان که عدد را به معنای «عدد طبیعی»، مجموعه‌ی آحاد می‌دانستند مفهوم گسترده‌تر مجرد در باره‌ی عدد را هم‌چون «عدد مثبت حقیقی»، پیشنهاد می‌کند (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۷۳). او طی این مسیر به ذکر قضیه‌ای می‌پردازد (راشد و وهاب‌زاده، ص ۳۳۵؛ همایی، ص ۲۷۷): «A، B و C، سه مقدار (منظور کم متصل قارالذّات) متجانس اند، پس می‌گوییم نسبت مؤلف است از نسبت مقدار $\frac{A}{B}$ ضرب در $\frac{B}{C}$».

خیام مقدار عددی را برای هر نسبت $\frac{A}{B}$، به صورت $\frac{1}{G}$ قرار می‌دهد. او در باره‌ی «G» می‌گوید که منظور ما، مقدار عددی است نه از این حیث که «خط یا سطح یا جسم یا زمان» باشد بلکه از این حیث که در تصور عقلی، مجرد از این لواحق باشد و از حیث تعلق آن به عدد و نه عدد مطلق حقیقی (همان‌جا).



این فرض خیام گامی بسیار مهم در توسعه‌ی مفهوم عدد بود (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۷۴)؛ زیرا خیام تصمیم مفهوم عدد را پیشنهاد کرد و هر کمیت متصلی را هم‌چون عدد در نظر گرفت، با این که قبل از خیام زیر نام عدد تنها اعداد صحیح و گاه کسری را قرار می‌دادند، ولی خیام این مفهوم را تا عدد مثبت و حقیقی تعمیم داد (مجله‌ی سخن ب، ص ۱۲۵). او تحت تأثیر اعداد جدیدی که خود وارد کرده بود، به عدد جدیدی پی برد که می‌شد آن را با ضرب عوامل تقریبی حقیقی در یک‌دیگر، با هر تقریب دل‌خواه به دست آورد

(همان‌جا). برای واضح شدن منظور ما، خیام نسبت قطر یک مربع ۱×۱ به ضلعش ($\sqrt{2}$) یا نســبت محیط یک دایره به قطرش π $\frac{2\pi r}{2r}$ را نوع جدیدی از عدد دانست (برگرن، ص ۲۵). این مفروضات نظری در نهایت برای محاســبه‌ی ریشــه‌های معادلات جبری و کمیت‌های مثلثاتی استفاده شد (مجله‌ی سخن ب، ص ۱۲۵).

این سلسله تفکرات خیام که در ریاضیات به معرفی اعداد حقیقی منجر شد، مانند اصل توازی، از طریق نوشته‌های خواجه نصیر طوسی بــه ریاضی‌دانان اروپایی منتقل شــد (برگــرن، ص ۲۵). خواجه نصیر طوســی نظریه‌ی نســبت‌ها و آموزش در باره‌ی اعــداد را بعد از خیام پی گرفت (روزنفلد و یوشــکویچ، ص ۷۴). سیمون استوین[۶۷] (۱۵۴۸–۱۶۲۰ م) در اروپــا، مفهوم عدد حقیقی (مثبــت و منفی) را به کار برد و بعــداً دکارت[۶۸] (۱۵۹۶–۱۶۵۰ م) و نیوتــن[۶۹] (۱۶۴۲–۱۷۲۷ م) بــا تعریف عدد هم‌چون «نســبت مجرد کمیّت دل‌خواه به کمیت واحد از همان نوع» در طرح اندیشــه‌ی عدد حقیقی نقش اساســی ایفا کردند، لکن نظریه‌ی کامل و دقیق عدد حقیقی فقط در پایان ســده‌ی ۱۹ م پدید آمد (همان‌جا). به این ترتیب کارهای ریاضی‌دانان اســلامی و در ایــن میان کار خیام، خلق اصلی در زنجیر پژوهش‌هایی اســت که به نظریــه‌ی کامل و دقیق عدد حقیقی و بر پایــه‌ی آن به آنالیز ریاضی انجامید (روزنفلد و یوشکویچ، ص ۷۴).

کتاب‌شناسی

۱- آقایانی چاوشــی، جعفر، «ســیری در افکار علمی و فلســفی حکیم عمر خیام نیشابوری»، تهران، ۱۳۵۸ ش.

۲- ابن ابی اصیبعه، «عیون الانباء فی طبقات الاطباء»، شــرح و تحقیق نزار رضا، منشورات دار مکتبه‌ی الحیاه، بیروت، ۱۹۶۵ م.

۳- ابن ندیم، «الفهرست»، المطبعة الرحمانیه، مصر، ۱۳۴۸ ق.

۴- فارابــی، ابونصر محمد بن محمــد، «احصاء العلوم»، تصحیح حسین خدیوجم، تهران، چ ۳، ۱۳۸۱ ش.

۵- ارانی، تقی، «رســالة فی شــرح ما اشکل فی مصادرات کتاب اقلیدس کلحلیم عمربن ابراهیم الخیامی»، با کلیشه‌ی رساله‌ی خطی کتاب‌خانه‌ی گوپتا، مطبعه‌ی سیروس، تهران، ۱۳۱۴ ش.

۶- اسمیت (الف)، «تاریخ ریاضیات»، غلامحسین صدری افشار، تهران، ۲۵۳۶ شاهنشاهی.

۷- انســتیتوی ریاضی استکلوای شوروی، جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۳، پرویز شهریاری، چ ۱، تهران، ۱۳۸۰ ش.

۸- برگرن، جی. ال.، «گوشه‌هایی از ریاضیات دوره‌ی اسلامی»، محمد قاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی، چ ۱، تهران، ۱۳۷۳ ش.

۹- تمپــل بــل، اریــک، «ریاضی‌دانان نامی»، ترجمه‌ی حســن صفاری، تهران، ۱۳۴۸ ش.

۱۰- خوانســاری، محمد، دوره‌ی مختصر منطق صوری، تهران، ۱۳۵۸ ش.

۱۱- رضــازاده ملک (الف)، رحیم «دانش‌نامه‌ی خیامی»، تهران، ۱۳۷۷ ش.

۱۲- همو (ب)، «عمر خیام (قافله‌ی سالار دانش)»، تهران ۱۳۷۷ ش.

۱۳- رشدی راشــد و بیجان وهاب‌زاده، «ریاضیات عمر الخیام» (سلســله‌ی تاریخ العلوم عندالعرب (۷))، الطبعة الأولی، مرکز دراسات الواحدة العربیه، بیروت، نیسان/ أبریل ۲۰۰۵ م.

۱۴- رشــدی راشــد و ریجیس مورلون، «موســوعه تاریخ العلوم العربیه»، الجزء الثانی، مرکز دراســات الواحــدة العربیه، الطبعة الاولی، بیروت، ۱۹۹۷ م.

۱۵- روزنفلد و یوشــکویچ، «عمر خیام، زندگی و آثار»، ترجمه‌ی باقر مظفرزاده، تهران، ۱۳۸۳ ش.

۱۶- طوسی، خواجه نصیرالدین، «اساس الاقتباس»، به تصحیح مدرس رضوی، تهران، ۱۳۶۷ ش.

۱۷- قربانی، ابوالقاسم، (الف)، زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی از سده‌ی سوم تا یازدهم هجری، چ ۲، تهران، ۱۳۷۵ ش.

۱۸- همو (ب)، «ریاضی‌دانان ایرانی»، نشــریه‌ی شــماره‌ی ۱۴ مدرسه‌ی عالی دختران ایران، تهران، ۱۳۵۰ ش.

۱۹- گرینبرگ، ماروین جی، «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی»، شفیعی‌ها، چ ۲، تهران، ۱۳۶۳ ش.

۲۰- «مجله‌ی آشتی با ریاضیات»، پرویز شهریاری، بهار ۲۵۳۶.

۲۱- «مجله‌ی علمی و فنی ســخن» (الف)، روزنفلد و یوشکویچ، «نظریه‌ی خیام در باره‌ی خطوط موازی»، ترجمه‌ی پرویز شــهریاری (متــن ترجمــه‌ی برگرفته از مقدمه‌ی کتاب «رســائل خیام»)، ســال چهارم، شماره‌ی ۴، شماره‌ی ردیف ۳۴، تیرماه ۱۳۴۴ ش.

۲۲- همــان (ب)، کرانســوا و روزنفلد، «ریاضیات شــرق میانه و نزدیک در قرون وسطی- برگرفته از مجله‌ی ریاضیات در دبیرستان- چاپ شوروی»، ترجمه‌ی پرویز شــهریاری، سال چهارم، شماره‌ی ۳، شماره‌ی ردیف ۳۳، خرداد ماه ۱۳۴۴ ش.

۲۳- مجلــه‌ی فرهنگ، ویژه‌ی بزرگ‌داشــت خیام (۲)، «خیام و هندسه‌ی نااقلیدسی»، جعفر آقایانی چاوشی، سال ۱۴، شماره‌ی ۳-۴، پیاپی ۳۹-۴۰، پائیز- زمستان ۱۳۸۰ ش، تهران.

۲۴- همایــی، جلال‌الدین، «خیامی‌نامــه»، ج ۱، تهران، ۱۳۴۶ ش.

25- Dictionary of Scientific Biography, 7 Vol, New York, 1970, by A.P Youschkevitch and B.A.Rosenfeld, pp 323-334.

26- EI^2, "umar Khayyam", by B.A. Rosenfeld, pp 323-334.

27- Howard Eves, An introduction to the history of mathematics, New York, 1953.

28- Heath (A). Th. L, A history of Greek mathematics, 2 Vol, Oxford, 1921.

29- Heath (B). Th. L, The thirteen Books of Euclid's Elements and the works of Archimedes including the method, Chicago, 1952.

30- K. Jaoui che, "De Lafécondité mathematique: d' omar Khayyam áG, saccheri diogéne 57" (1967).

---

1. Euclides
2. Khayyām
3. Éléments
4. Leiden
5. Sŵami Govinda
6. Markovalt
7. F. Rozen
8. G. jacob
9. Wiedeman
10. T. Erani
11. A. R. Amir Moèz
12. A. I. Sabra
13. Alexandria
14. B. A.Rozenfeld
15. Youschkevitch
16. R. Rashed
17. B. Vahabzadeh
18. Postulates

۱۹. ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی به جای لفظ پوستولای، لفظ مصادره را به کار می‌بردند.

20. Organon
21. Aristotle
22. Definitions
23. Propositions
24. Postulates and common Notions (Axiom)
25. Problems
26. Synthetic
27. Postulate
28. Axiom
29. Parallels Postulate
30. Al - Hazen
31. H. Suter
32. E.W.Harold
33. Heron
34. Autolojkos
35. Almagest
36. Claudius Ptolemy
37. Apollonius
38. Archimedes
39. Eudoxus
40. Argumentation conditionnelle
41. Argumentation causale
42. Ptolémée
43. Proclus
44. Aghânis
45. Simplicius
46. E. Beltrami
47. N.I.Lobat Schefski
48. Raemann
49. G. Saccheri
50. John Wallis
51. Hyper bolaein = to be in creased

مطابق شکل ۱، مشاهده می‌شود فاصله‌ی AC و BD در حال افزایش است

52. Ellipen = to be decreased

مطابق شکل ۲، مشاهده می‌شود فاصله‌ی AC و BDدر حال کوتاه شدن است

53. G. Saccheri
54. Euclides ab omni naevo vindicatus
55. D.E. Smith
56. A. M. Legendre
57. E. Beltrami
58. Johann Lambert
59. G. S. Klügel
60. C. F. Gauss
61. W. Bolyai
62. Janosh Bolyai
63. J. Bartels
64. Playfair
65. Sphere
66. Rotate
67. S. Stoein
68. R. Descartes
69. Newton