

۱- به کمک مطلب درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$A. \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & , x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & , x < -1 \end{cases}$$

$$B. 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \pi$$

(در سال ۱۷۰۶، به کمک فرمول B جان ماشن عدد π را تا صد رقم اعشار حساب نمود.)

۲- ریشه های چند جمله ای $8x^5 - 3x^3 + 2x^2 = 3$ را به کمک مطلب محاسبه کنید. سپس نمودار این چند جمله ای را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید.

۳- به کمک دستور subplot نمودار تابع $y = \sin(x)$ را به همراه ۳ تقریب آن یعنی $y_1 = x, y_2 = x - \frac{x^3}{3}, y_3 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ را در بازه $[0, \pi]$ و در یک صفحه به صورت زیر هم رسم کنید.

$$-4 \text{ می دانیم: } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

و اینکه اگر تعریف کنیم: $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{2n+1}$ آنگاه داریم: $\left| \frac{\pi}{4} - S_k \right| < \frac{1}{2k+3}$ به کمک این روابط عدد π را با تقریب خطای کمتر از 10^{-5} حساب کنید.

۵- به کمک این نکته که اگر دو ناحیه A, B در فضا داشته باشیم به طوری که $A \subseteq B$ ، و یک نقطه از داخل ناحیه B انتخاب کنیم، احتمال اینکه این نقطه در ناحیه A قرار داشته باشد برابر است با: $\frac{V_A}{V_B}$ (حجم ناحیه A به حجم ناحیه B). و نیز می

دانیم $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ به مفهوم حجم زیر نمودار تابع $f(x, y)$ است که بالای ناحیه $[a, b] \times [c, d]$ در صفحه XY واقع شده است. (به شرطی که $f(x, y)$ در این ناحیه نامنفی باشد). به کمک این اطلاعات انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^2 \int_0^1 e^{(\sin^2 y + x^3)} dy dx$$

۶- فرض کنید نرخ بهره ماهانه r درصد باشد. میزان ارزش n واحد پول بعد از k ماه برابر است با: $\frac{n}{(1+r)^k}$.

الف) تابعی به نام *sarmaye* در مطلب بنویسید که به عنوان ورودی یک ماتریس سرمایه گذاری با دو ستون که درایه ستون اول هر سطر نشان دهنده میزان پول دریافت شده (با علامت مثبت) یا پول پرداخت شده (با علامت منفی) و درایه ستون دوم هر سطر تعداد ماه هایی است که بعد از زمان فعلی قرار است این دریافت و یا پرداخت انجام شود، را به اضافه نرخ بهره سالانه بگیرد و میزان ارزش فعلی آن سرمایه گذاری را به عنوان خروجی مشخص کند.

ب) به کمک تابعی که در قسمت الف نوشته اید مشخص کنید کدامیک از ۴ طرح زیر برای شما سودآور تر است؟

فرض کنید هزینه اجاره اتاق در خوابگاه در ترم حاضر ۱۰۰ هزار تومان است که هر سال به آن ۲۰ درصد اضافه می شود. اگر دانشجویی در آخر هر ترم پول خوابگاه را بپردازد مشمول ۳۰ درصد تخفیف می شود. و اگر دانشجویی پول ترمی را پرداخت نکند در زمان فارغ التحصیلی باید یکجا کل هزینه خوابگاه را بدهد. فرض کنید نرخ بهره سالانه ۲۰ درصد باشد. شما چه کار میکنید: ب) پول خوابگاه را آخر هر ترم پرداخت می کنید.

ب) تا ترم پنجم پول خوابگاه را پرداخت نمی کنید و از ترم ششم تا ترم ۸ در آخر هر ترم پول خوابگاه را پرداخت می کنید و باقی پول را زمان فارغ التحصیلی تصفیه میکنید.

ب) تا ترم آخر پول نمی دهید و در زمان فارغ التحصیلی همه پول را یکجا پرداخت می کنید.

ب(۴) پول خوابگاه را پرداخت نمی کنید ولی اگر دانشگاه قبول کند و بعد از فارغ التحصیلی به شما ۱۰ سال برای بازپرداخت پول خوابگاه زمان دهد حاضرید بعد از ۱۰ سال به مدت ۵۰ سال هر سال ۱ میلیون تومان بابت خوابگاه به دانشگاه پرداخت کنید.

۷- به کمک روش تکراری زیر (روش نیوتن) ریشه تابع $f(x) = \sin(x) + x^3 + 2x + \arctan(x) - 1$ را به دست آورید.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 = 0$$

شرط توقف این باشد که: $|x_{n+1} - x_n| < Tol1$ and $f(x_{n+1}) < Tol2$

۸- ماتریس و بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -11 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) به کمک مطلب تعیین کنید که آیا دستگاه $Ax = b$ دارای جواب است یا نه؟

ب) در صورتی که دستگاه جواب داشته باشد، آیا جواب یکتا است یا نه؟

ج) در صورت وجود، یک جواب دستگاه و در صورتی که جواب وجود نداشته باشد یک جواب که کمترین مربعات خطای آن مینیمم باشد را بیابید.