$$dx = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{t}}dt$$

از آنجاکه عملا حد می‌گیریم، این نتیجه کامل است حال انتگرال اصلی را می‌توان بر حسب t به‌صورت زیر نوشت

$$\int_a^b xe^{x^۲}dx = \int_{t_۱}^{t_۲} \sqrt{t}\, e^t \left(\frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{t}}dt\right) = \frac{۱}{۲}\int_{t_۱}^{t_۲} e^t\, dt$$
$$= \frac{۱}{۲}(e^{t_۲} - e^{t_۱})$$

که در آن $t_۱ = a^۲$ و $t_۲ = b^۲$ است.

مسائل

۱ـ۱ دو بردار $\mathbf{A} = (۲\hat{\mathbf{i}} - ۳\hat{\mathbf{j}} + ۷\hat{\mathbf{k}})$ و $\mathbf{B} = (۵\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + ۲\hat{\mathbf{k}})$ مفروض‌اند، پیدا کنید (الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$، (ب) $\mathbf{A}-\mathbf{B}$، (ج) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، (د) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

جواب: (الف) $۲\hat{\mathbf{j}} - ۷\hat{\mathbf{i}}$، (ج) ۲۱ .

۱ـ۲ کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{A} = (۳\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ و $\mathbf{B} = (-۲\hat{\mathbf{i}} - ۳\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ را به دست آورید.

جواب: ۰٫۸۰۵− .

۱ـ۳ کسینوسهای هادی یک بردار، کسینوس زوایایی هستند که آن بردار با محورهای مختصات می‌سازد، کسینوس زوایای بین یک بردار و محورهای x، y و z را معمولاً با α، β، γ نشان می‌دهند. با استفاده از هندسه و یا جبر برداری ثابت کنید که $\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲ = ۱$.

۱ـ۴ نشان دهید، اگر $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = |\mathbf{A}-\mathbf{B}|$ باشد، آنگاه، $\mathbf{A}$ عمود است بر $\mathbf{B}$.

۱ـ۵ ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر هم عمودند.

۱ـ۶ با استفاده از ضرب برداری، قانون سینوسها را در دو یا سه سطر ثابت کنید. (راهنمایی: مساحت مثلثی راکه از سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ تشکیل شده در نظر بگیرید که برای آن $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C} = ۰$.)

۱ـ۷ فرض کنید $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ بردارهای یکه در صفحهٔ xy باشند، و با محور xها بترتیب زوایای θ و ϕ بسازند. نشان دهید $\hat{\mathbf{a}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{b}} = \cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\hat{\mathbf{j}}$ و با استفاده از جبر برداری ثابت کنید

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

۱ـ۸ بردار یکه‌ای بیابید که بر بردارهای $\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$ و $\mathbf{B} = (۲\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + ۳\hat{\mathbf{k}})$ عمود باشد.

جواب: $\hat{\mathbf{n}} = \pm(۲\hat{\mathbf{i}} - ۵\hat{\mathbf{j}} - ۳\hat{\mathbf{k}})/\sqrt{۳۸}$.

۱ـ۹ نشان دهید که حجم یک متوازی السطوح به ابعاد $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ از رابطهٔ $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ به دست می‌آید.

۱ـ۱۰ دو نقطه را که در $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ واقع شده و به فاصلهٔ $r = |\mathbf{r}_۱ - \mathbf{r}_۲|$ از یکدیگر واقع شده‌اند در نظر می‌گیریم. بردار $\mathbf{A}$ را که از مبدأ به نقطه‌ای روی خط واصل $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ و به فاصلهٔ xr از $\mathbf{r}_۱$ وصل می‌شود پیدا کنید، درصورتی‌که x یک عدد مشخص است.

۱ـ۱۱ فرض کنید $\mathbf{A}$ برداری اختیاری و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه در جهتی معین باشد، نشان دهید

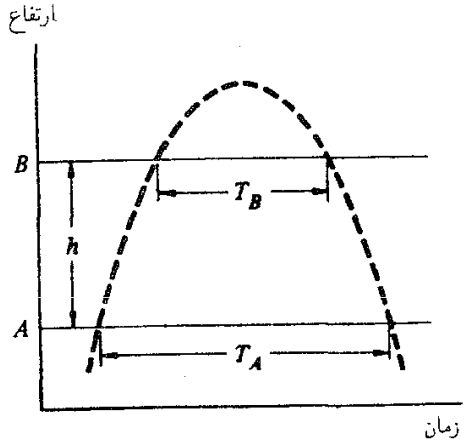
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}}$$

۱ـ۱۲ شتاب گرانشی را می‌توان با پرتاب یک جسم به‌طرف بالا و اندازه‌گیری زمان لازم برای عبور از دو نقطهٔ معین مسیر در هر دو جهت اندازه گرفت.

اگر زمان لازم برای عبور جسم از یک خط افقی A در هر دو جهت برابر با T_A و برای خط دیگر B برابر T_B باشد، با فرض ثابت بودن شتاب نشان دهید که اندازهٔ این شتاب برابر است با

$$g = \frac{۸h}{T_A^۲ - T_B^۲}$$

که در آن h ارتفاع خط B نسبت به خط A است (شکل ۱ـ۶۷).



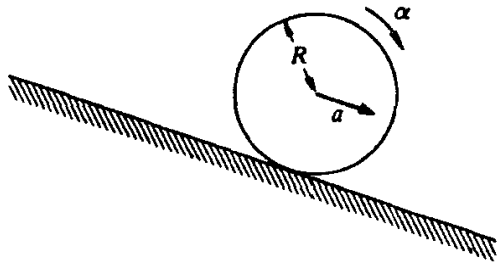
شکل ۱ـ۶۷

۱ـ۱۳ آسانسوری با سرعت یکنواخت از زمین به‌طرف بالا شروع به حرکت می‌کند در زمان $T_۱$ یکی از سرنشینان سنگی را از کف آن رها می‌سازد. این سنگ با شتاب ثابت $g = ۹٫۸\text{m/s}^۲$

سقوط می‌کند و بعد از T_2 ثانیه به زمین می‌رسد. ارتفاع آسانسور از زمین را در لحظهٔ T_1 پیدا کنید.

جواب: حالت خاص: اگر $T_1 = T_2 = 4\ \mathrm{s}$ باشد، $h = 39{,}2\ \mathrm{m}$.

۱ـ۱۴ استوانه‌ای به شعاع R روی سطح شیبداری، بدون لغزش به‌طرف پایین می‌غلتد (شکل ۱ـ۶۸). محور آن دارای شتاب a موازی با سطح شیبدار است. α شتاب زاویه‌ای استوانه، چقدر



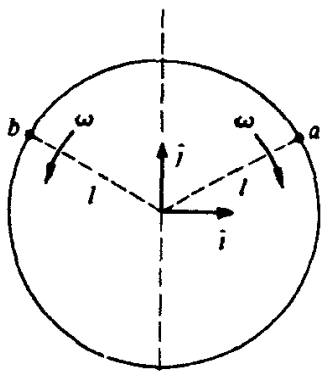
شکل ۱ـ۶۸

است؟

۱ـ۱۵ منظور از سرعت نسبی، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصات موردنظر است. (از واژهٔ سرعت، به‌تنهایی معنای سرعت نسبت به دستگاه مختصات ناظر استنباط می‌شود.) (الف) مشاهده شده است که نقطه‌ای دارای سرعت $\mathbf{v}_A$ نسبت به دستگاه مختصات A است. سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات B که به اندازهٔ $\mathbf{R}$ از دستگاه A فاصله دارد، چقدر است؟ ($\mathbf{R}$ نسبت به زمان می‌تواند تغییر کند.)

جواب: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A - d\mathbf{R}/dt$.

(ب) ذرات a و b در دو جهت مخالف هم روی دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت‌اند (شکل ۱ـ۶۹). در $t = 0$ هر دوی آنها در نقطهٔ $\mathbf{r} = l\hat{\mathbf{j}}$ قرار دارند، که l شعاع دایره است. سرعت a را نسبت



شکل ۱ـ۶۹

به b پیدا کنید.

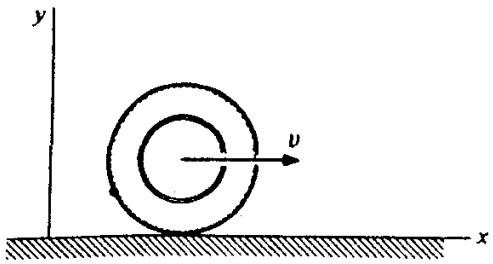
۱ـ۱۶ یک اتومبیل مخصوص مسابقه، در ۳۰ ثانیه می‌تواند به‌طور یکنواخت شتاب بگیرد و به سرعت ۲۰۰ کیلومتربرساعت برسد. بیشینهٔ شتاب کندکنندهٔ ناشی از ترمز آن نمی‌تواند از $0.7g$ تجاوز کند. زمان کمینهٔ‌لازم برای پیمودن نیم کیلومتر چقدر است؟ فرض می‌کنیم که اتومبیل در زمان شروع و پایان کار در حالت سکون است. (راهنمایی: نمودار سرعت بر حسب زمان می‌تواند مفید باشد.)

۱ـ۱۷ ذره‌ای با سرعت شعاعی ثابت $\dot{r} = 4\,\mathrm{m/s}$ در صفحه حرکت می‌کند.سرعت زاویه‌ای آن ثابت و به مقدار $\dot{\theta} = 2\,\mathrm{rad/s}$ است. وقتی‌که ذره در فاصلهٔ ۳ متر از مبدأ قرار دارد (الف) بزرگی سرعت و (ب) بزرگی شتاب آن‌را پیدا کنید.

جواب: (الف) $v = \sqrt{52}\,\mathrm{m/s}$.

۱ـ۱۸ آهنگ تغییر شتاب را گاهی اوقات "جرک" می‌گویند.اندازه و جهت جرک را برای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند پیدا کنید. با رسم نمودار برداری، مکان، سرعت، شتاب و جرک لحظه‌ای را نشان دهید.

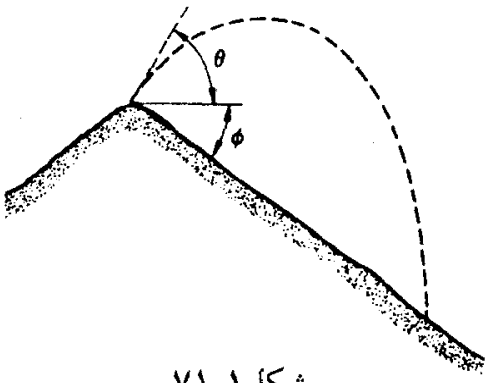
۱ـ۱۹ لاستیک اتومبیلی در امتداد خط راست و بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۱ـ۷۰). مرکز آن با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. ریگ کوچکی در شیار آن جاگرفته است که در $t = 0$ با زمین تماس پیدا می‌کند. مکان، سرعت، و شتاب ریگ را به‌صورت تابعی از زمان به دست آورید.



شکل ۱ـ۷۰

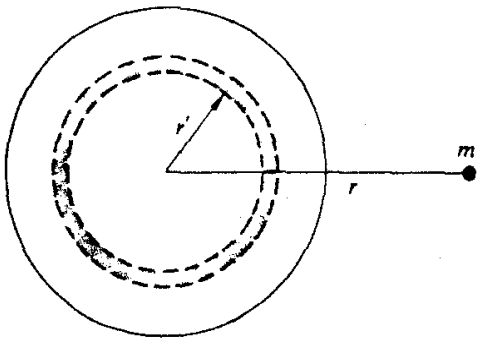
۱ـ۲۰ ذره‌ای در امتداد یک مارپیچ و به‌طرف خارج آن در حرکت است. مسیر آن به وسیلهٔ رابطهٔ $r = A\theta$ مشخص شده است که در آن A مقدار ثابت و برابر است با $A = (1/\pi)\,\mathrm{m/rad}$. مقدار θ هم با زمان مطابق رابطهٔ $\theta = \alpha t^2/2$ افزایش می‌یابد که در آن α مقداری ثابت است. (الف) شکل مسیر حرکت را رسم کنید، و سرعت و شتاب تقریبی را در چند نقطه نشان دهید. (ب) نشان دهید که شتاب شعاعی وقتی‌که $\theta = 1/\sqrt{2}\,\mathrm{rad}$ است، برابر صفر می‌شود. (ج) در چه زاویه‌ای شتاب مماسی و شعاعی با هم برابرند؟

۱ـ۲۱ پسربچه‌ای در بالای تپه‌ای ایستاده است، این تپه دارای شیب یکنواخت (با زاویهٔ ϕ) به‌طرف پایین است. با چه زاویه‌ای از خط افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا بیشترین برد را داشته باشد (شکل ۱ـ۷۱)؟



شکل ۱ـ۷۱

جواب: حالت خاص: اگر $\phi = ۶۰^\circ$ باشد، $\theta = ۱۵^\circ$.



شکل ۲ـ۴۹

یک کرهٔ توپر را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از پوسته‌های کروی تصور کرد. تعمیم این نتیجه درحالتی که چگالی کره $\rho(r')$ فقط تابع شعاعی فاصلهٔ r' از مرکز کره است، کار مشکلی نیست. جرم پوستهٔ کروی به‌شعاع r' و ضخامت dr' به‌صورت $\rho(r')۴\pi r'^{۲}dr'$ است. نیرویی که این پوسته برجرم m اِعمال می‌کند چنین است (شکل ۲ـ۴۹):

$$dF = \frac{GM}{r^{۲}}\rho(r')۴\pi r'^{۲}dr'$$

ازآنجاکه نیروی اِعمال شده از طرف هر لایه به‌طرف مرکز کره است، نیروی کل برابر است با

$$F = \frac{GM}{r^{۲}}\int_{۰}^{R}\rho(r')۴\pi r'^{۲}dr'$$

اما، این انتگرال همان جرم کل کره است. نتیجه می‌گیریم که درحالت $r > R$ نیروی بین m و کره با نیروی دو ذره‌ای که با فاصلهٔ r ازهم جدا شده‌اند یکسان است.

مسائل

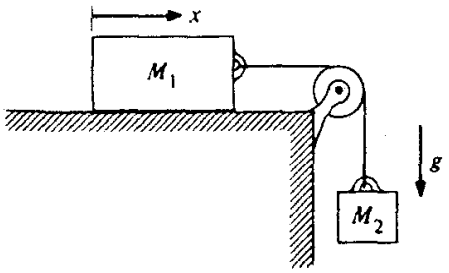
۲ـ۱ یک جرم ۵ کیلوگرمی تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = (۴t^{۲}\hat{\mathbf{i}} - ۳t\hat{\mathbf{j}})\mathrm{N}$ حرکت می‌کند که درآن t زمان برحسب ثانیه است (۱ نیوتون= ۱N). این جرم در لحظهٔ $t = ۰$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. پیدا کنید: (الف) سرعت، (ب) مکان، (ج) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ برای این جسم در زمانهای بعد.

جواب حالت خاص: (ج) اگر $t = ۱\mathrm{s}$ باشد، $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = ۶٫۷ \times ۱۰^{-۳}\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{m}^{۲}/\mathrm{s}$.

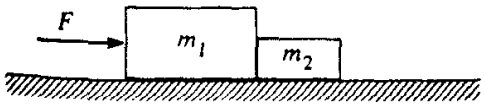
۲ـ۲ در مکعب مطابق شکل ۲ـ۵۰ به‌وسیلهٔ نخی باجرم قابل اغماض به‌هم متصل شده‌اند. اگر سیستم از حالت سکون رها شود، پیدا کنید مکعب $M_۱$ در زمان t چقدر می‌لغزد. از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M_۱ = M_۲$ باشد، $x = gt^{۲}/۴$ است.

۲ـ۳ مطابق شکل ۲ـ۵۱ دو مکعب روی یک میز افقی درحال تماس با یکدیگرند. یک نیروی



شکل۲ـ۵۰



شکل۲ـ۵۱

افقی به‌یکی ازاین مکعبها وارد شده است. اگر $m_1 = 2\text{kg}$، $m_2 = 1\text{kg}$، و $F = 3\text{N}$ باشد، نیروی تماس بین مکعبها را پیدا کنید.

۲ـ۴ دو ذره به‌جرمهای m و M که در فاصلهٔ R از یکدیگر قرار دارند تحت اثر نیروی جاذبهٔ F با حرکت یکنواخت دایره‌ای به‌دور یکدیگر درگردش‌اند. سرعت زاویه‌ای ω رادیان در ثانیه است. نشان دهید که $R = (F/\omega^2)(1/m + 1/M)$.

۲ـ۵ مطابق شکل ۲ـ۵۲ ماشین آتوود دارای قرقره‌ای باجرم قابل اغماض است. کشش طناب و شتاب M را پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M = 2m$ باشد، $A = 1/3g$ و $T = 2/3Mg$ است.

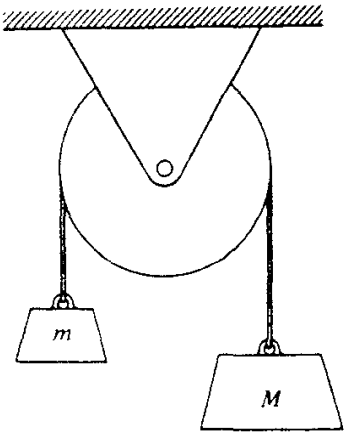
۲ـ۶ دریک مخلوط‌کن بتون، سیمان، شن، و آب از طریق غلتیدن دریک محفظهٔ استوانه‌ای که به‌آرامی دوران می‌کند مخلوط شده‌اند. اگر این محفظه خیلی سریع بچرخد، ذرات شن به‌جای مخلوط شدن به‌دیوارهٔ ظرف می‌چسبند.

فرض کنید که این محفظهٔ مخلوط‌کن دارای شعاع R است و برمحوری افقی سوار شده باشد. بیشترین سرعتی که این محفظه می‌تواند با آن دوران کند، بدون اینکه ذرات به‌دیوارهٔ آن بچسبند، چقدر است؟ فرض کنید $g = 32\ \text{ft/s}^2$ است.

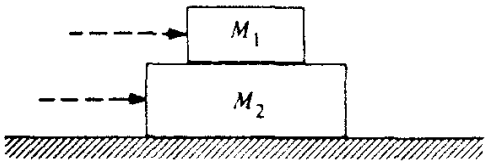
جواب حالت خاص: اگر $R = 1\text{m}$ باشد، آنگاه دور در دقیقه $\omega_{\max} = 3\text{rad/s} \approx 38$.

۲ـ۷ مکعبی به‌جرم M_1 مطابق شکل ۲ـ۵۳ روی مکعب دیگری به‌جرم M_2 واقع شده است و جرم اخیر نیز روی میز بدون اصطکاکی قرارگرفته است. ضریب اصطکاک بین مکعبها μ است. نیروی افقی بیشینه که می‌توان بر مکعبها وارد کرد تا آنها بدون لغزیدن روی یکدیگر شتاب بگیرند، در حالتهایی که (الف) نیرو بر مکعب ۱، (ب) نیرو بر مکعب ۲ وارد آید، چقدر است؟

۲ـ۸ یک مکعب ۴ کیلوگرمی مطابق شکل ۲ـ۵۴ روی یک مکعب ۵ کیلوگرمی که روی یک میز بدون اصطکاکی قرارگرفته، واقع شده است. ضریب اصطکاک بین دو مکعب چنان است که اگر نیروی افقی F برابر با ۲۷ نیوتون بر مکعب پایینی وارد شود، مکعبها شروع به لغزیدن می‌کنند. فرض کنید که این نیروی افقی اینک فقط به مکعب بالایی وارد شده است. مقدار نیروی بیشینه برای اینکه مکعبها بدون



شکل ۲ـ۵۲

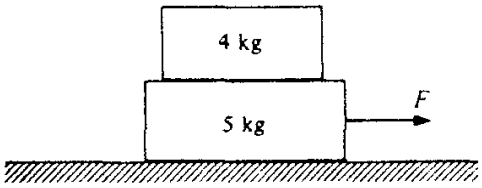


شکل ۲ـ۵۳

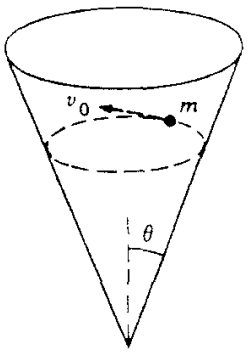
سُرخوردن نسبت به همدیگر بلغزند چقدر است.

جواب: $F = ۲۱/۶\text{N}$.

۲ـ۹ ذره‌ای به‌جرم m در درون مخروطی بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۲ـ۵۵). محور مخروط



شکل ۲ـ۵۴



شکل ۲ـ۵۵

قائم است، جهت نیروی گرانی به‌طرف پایین است. نیم زاویهٔ رأس مخروط طبق شکل θ است.

مسیر ذره به‌صورت دایره و در یک صفحهٔ افقی است. سرعت ذره v_0 است.

یک نمودار نیرو رسم کنید و شعاع مسیر دایره‌ای ذره را برحسب v_0، g و θ پیدا کنید.

۲ـ۱۰ شعاع مدار یک ماهوارهٔ همگام با کرهٔ زمین را پیدا کنید (یک ماهوارهٔ همگام درهر ۲۴ ساعت یک‌بار به‌دور زمین می‌چرخد، به‌طوری که مکان آن نسبت به‌یک ایستگاه زمینی همواره ثابت به‌نظر می‌آید). ساده‌ترین راه برای پیدا کردن جواب این‌است که مسافتها را برحسب شعاع زمین بیان کنید.

جواب: $۶٫۶R_e$.

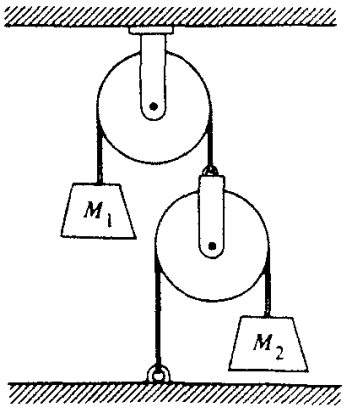
۲ـ۱۱ مطابق شکل ۲ـ۵۶، جرم m به‌وسیلهٔ دو نیم سیم به‌طول l، به‌یک محور دوران کننده و

قائم متصل‌اند و با محور زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند. محور و جرم m هردو با سرعت زاویه‌ای ω درحال دوران‌اند. جهت نیروی گرانی به‌طرف پایین است. (الف) یک نمودار نیروی واضح برای m بکشید. (ب) کشش سیمهای بالایی $T_{\text{بالا}}$ و پایینی $T_{\text{پایین}}$ را پیدا کنید.

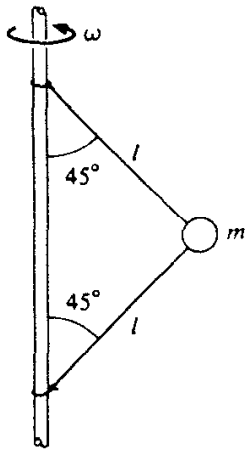
جواب حالت خاص: اگر $l\omega^2 = \sqrt{2}g$ باشد، آنگاه $T_{\text{بالا}} = \sqrt{2}mg$.

۲ـ۱۲ اگر قوی و باجرأت باشید، می‌توانید یک رومیزی را از زیر ظروف واقع برآن به‌طور ناگهانی بکشید و خارج سازید. طولانیترین زمانی‌که طی آن رومیزی می‌تواند بیرون‌کشیده شود چقدر باید باشد تا لیوانی که در ۱۵ سانتیمتری لبهٔ میز قرار دارد قبل از سقوط از میز به‌حالت سکون درآید. فرض کنید ضریب اصطکاک لیوان برای لغزیدن بر روی رومیزی یا روی میز برابر با ۰٫۵ باشد. (برای اینکه این عمل جالب توجه‌تر باشد باید پارچهٔ چنان به‌سرعت‌کشیده شود که لیوان هیچ حرکت قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد.)

۲ـ۱۳ جرمهای M_1 و M_2 مطابق شکل ۲ـ۵۷ به مجموعه‌ای از نخها و قرقره‌ها متصل شده‌اند.



شکل ۲ـ۵۷



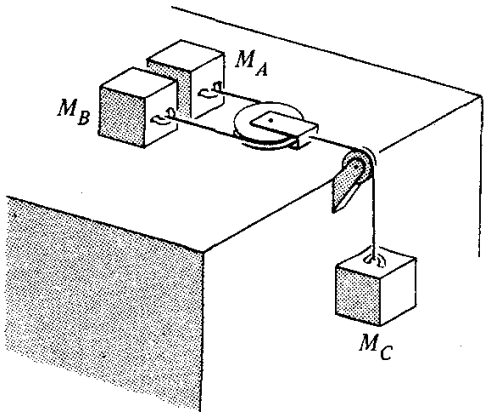
شکل ۲ـ۵۶

نخها بدون جرم و غیرقابل انبساط‌اند و قرقره‌ها بی‌جرم و بدون اصطکاک هستند. شتاب M_1 را پیدا کنید.

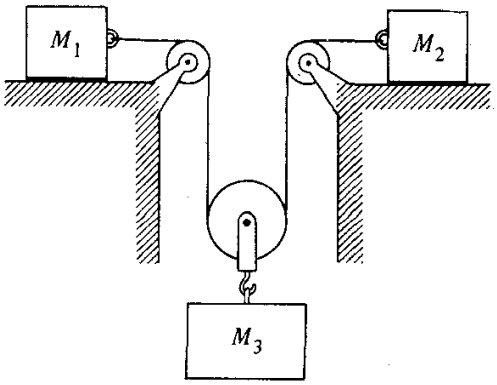
جواب حالت خاص: اگر $M_1 = M_2$ باشد، $\ddot{x} = g/5$ است.

۲ـ۱۴ دو جرم A و B روی یک میز بدون اصطکاکی قرار دارند (شکل ۲ـ۵۸). جرمها به‌دو سر طنابی سبک به‌طول l که از روی قرقره‌ای به‌جرم قابل اغماض عبور می‌کند، متصل‌اند. این قرقره به طنابی که جرم C به‌آن آویخته است متصل است. شتاب هریک از جرمها را پیدا کنید. (می‌توانید صحیح بودن جواب خود را با بررسی حالت خاص امتحان کنید. برای مثال حالتهای $M_A = 0$ یا $M_A = M_B = M_C$.)

۲ـ۱۵ در شکل ۲ـ۵۹ از قرقره و طناب بی‌جرم استفاده می‌شود. ضریب اصطکاک بین جرمها



شکل ۲ـ۵۸



شکل ۲ـ۵۹

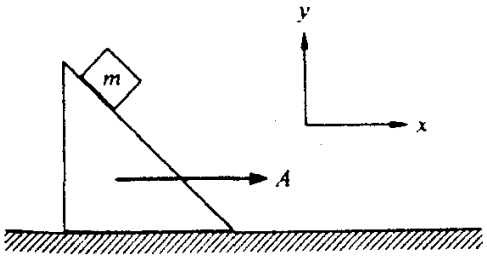
و سطوح افقی μ است. فرض کنید که M_1 و M_2 درحال لغزیدن است و جهت نیروی گرانی به‌طرف پایین است. (الف) بارسم یک نمودار نیرو تمام مؤلفه‌های مورد استفاده را نشان دهید. (ب) شتابها چگونه به‌هم مربوط‌اند؟ (ج) کشش طناب (T) را پیدا کنید.

جواب: $T = (\mu + 1)g/[2/M_3 + 1/(2M_1) + 1/(2M_2)]$.

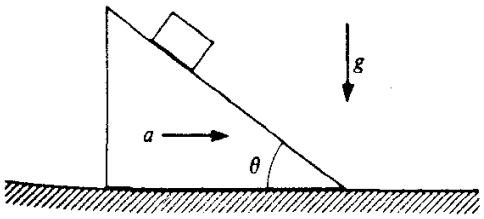
۲ـ۱۶ یک گوه ۴۵ درجه‌ای در امتداد نیرو با شتاب ثابت A مطابق شکل ۲ـ۶۰ کشیده می‌شود. مکعبی به‌جرم m بدون اصطکاک روی گوه می‌لغزد. شتاب این مکعب را پیدا کنید. (جهت نیروی گرانی به‌طرف پایین است.)

جواب حالت خاص: اگر $A = 3g$ باشد، آنگاه $\ddot{y} = g$.

۲ـ۱۷ مکعبی روی گوه‌ای با زاویهٔ شیب θ قرار دارد (شکل ۲ـ۶۱). ضریب اصطکاک بین



شکل ۲ـ۶۰



شکل ۲ـ۶۱

مکعب و سطح μ است. (الف) پیدا کنید بیشینهٔ مقدار θ را برای اینکه مکعب بدون حرکت روی گوه باقی بماند درصورتی‌که گوه درجای معینی ثابت است.

جواب: $\tan\theta = \mu$.

(ب) مطابق شکل، به‌گوه شتاب افقی a داده می‌شود. بافرض اینکه $\mu < \tan\theta$ باشد. پیدا کنید

کمینهٔ شتاب را برای اینکه مکعب روی گوه بتواند بدون لغزش باقی بماند.

جواب حالت خاص: اگر $\theta = \pi/۴$ باشد، آنگاه $a_{\min} = g(۱ - \mu)/(۱ + \mu)$.

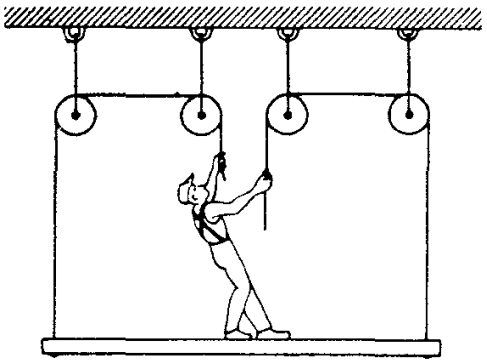
(ج) حالت ب را تکرارکنید ولی این‌بار بیشینهٔ مقدار شتاب را پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $\theta = \pi/۴$ باشد، آنگاه $a_{\max} = g(۱ + \mu)/(۱ - \mu)$.

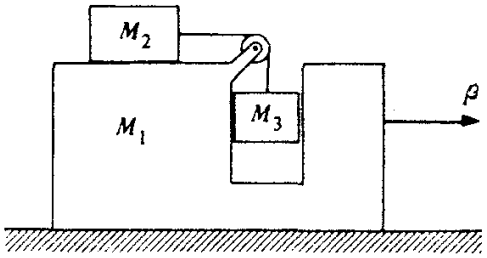
۲ـ۱۸ نقاشی به‌جرم M روی سکویی به‌جرم m ایستاده و خود را توسط دو طنابی که مطابق شکل ۲ـ۶۲ از روی قرقره‌ها می‌گذرند بالا می‌کشد. او هردو طناب را با نیروی F می‌کشد و با شتاب ثابت a به‌طرف بالا شتاب می‌گیرد. شتاب a را پیدا کنید ـ و از این واقعیت که هیچ‌کس این عمل را برای مدت طولانی نمی‌تواند انجام دهد، صرفنظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M = m$ و $F = Mg$ باشد، آنگاه $a = g$.

۲ـ۱۹ در دستگاه آموزشی شکل ۲ـ۶۳، همهٔ سطوح بدون اصطکاک‌اند. نیروی F وارد بر $M_۱$



شکل ۲ـ۶۲



شکل ۲ـ۶۳

چقدر باید باشد تا مانع سقوط یا صعود $M_۲$ شود؟

جواب حالت خاص: برای جرمهای مساوی، داریم $F = ۳Mg$.

۲ـ۲۰ دستگاه آموزشی شکل ۲ـ۶۳ را درحالتی که F صفر است درنظر بگیرید. شتاب $M_۱$ را پیدا کنید.

جواب: $a_۱ = -M_۲M_۳g/(M_۱M_۲ + M_۱M_۳ + ۲M_۲M_۳ + M_۳^۲)$.

۲ـ۲۱ طناب یکنواختی به‌جرم m و به‌طول l به مکعبی به‌جرم M متصل است. طناب با نیروی F کشیده می‌شود. کشش را در فاصلهٔ x از انتهای طناب پیدا کنید. از گرانش صرفنظر کنید.

۲ـ۲۲ طناب یکنواختی به‌وزن W بین دو درخت مطابق شکل ۲ـ۶۴ آویخته شده است. دوسر طناب ارتفاع یکسانی دارند و هرکدام از آنها با درختها زاویهٔ θ می‌سازند. پیدا کنید: (الف) کشش را در دو انتهای طناب. (ب) کشش را در وسط طناب.

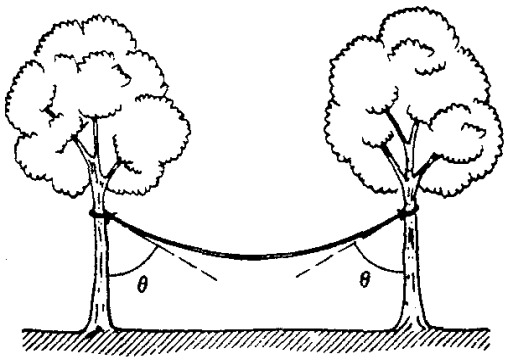
جواب حالت خاص: اگر $\theta = ۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه $T_{\text{وسط}} = W/۲$ و $T_{\text{انتها}} = W/\sqrt{۲}$.

۲ـ۲۳ قطعه سیمی به‌طول l و به‌جرم M به‌شکل حلقهٔ دایره‌ای بسته شده است و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω طول مرکز دایره دوران می‌کند. کشش سیم را پیدا کنید.

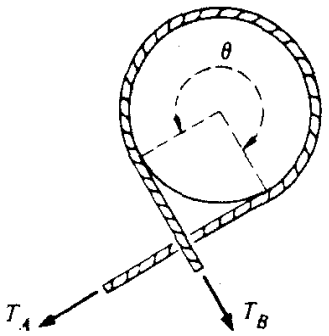
پیشنهاد: نمودار نیرو را برای قطعهٔ کوچکی از حلقه که مقابل به زاویهٔ $\Delta\theta$ است، رسم کنید.

جواب: $T = M\omega^۲ l/(۲\pi)^۲$.

۲ـ۲۴ وسیله‌ای به‌نام چرخ تسمه در روی کشتی برای کنترل طناب تحت کشش زیاد به‌کار می‌رود. این طناب (معمولا باچندین دور) حول استوانهٔ ثابتی پیچیده می‌شود. (شکل ۲ـ۶۵ فقط سه‌چهارم



شکل ۲ـ۶۴



شکل ۲ـ۶۵

دور را نشان می‌دهد.) بار روی طناب، آن‌را با نیروی T_A می‌کشد، ملوان آن‌را با نیروی کمتری مانند T_B نگه می‌دارد. آیا می‌توانید نشان دهید $T_B = T_A e^{-\mu\theta}$، که درآن μ ضریب اصطکاک و θ زاویهٔ کل احاطه و تماس طناب و استوانه است.

۲ـ۲۵ کوتاهترین زمان تناوب ممکن برای دوران دوکرهٔ توپر همسان راکه تحت جاذبهٔ گرانشی در فضای تهی در مدار دایره‌ای حول نقطه‌ای در وسط خط واصل مراکز خود دوران می‌کنند، پیدا کنید. (کره‌ها را از هرجنسی که قابل دسترسی باشد می‌توانید درنظر بگیرید.)

۲ـ۲۶ نیروی گرانشی وارد بر جسمی که به‌فاصلهٔ R از مرکز یک جرم کروی یکنواخت واقع است، صرفاً به‌خاطر جرمی است که در فاصلهٔ $r \leqslant R$ نسبت به مرکزکره، قرار دارد. نیرویی که این جرم وارد می‌کند درست مانند آن‌است که یک جرم نقطه‌ای واقع در مبدأ آن‌را اعمال کرده است.

با استفاده از نتیجهٔ فوق نشان دهید که اگر حفره‌ای در زمین ایجاد کنید و سپس به‌داخل آن سقوط کنید، حرکت هماهنگ ساده‌ای نسبت به مرکز زمین انجام خواهید داد. پیداکنید زمانی راکه طول می‌کشد تا به نقطهٔ شروع حرکت برگردید و نشان دهید که این مقدار برابر است با زمانی‌که یک ماهواره نیاز دارد تا زمین را دریک مدار سطح پایین $r \approx R_e$ دور بزند. برای رسیدن به‌این نتیجه، لازم است زمین را به‌عنوان یک کره با چگالی یکنواخت درنظر بگیرید، و نیز باید از همهٔ اصطکاکها و اثرهای مربوط به

دوران زمین صرفنظر کنید.

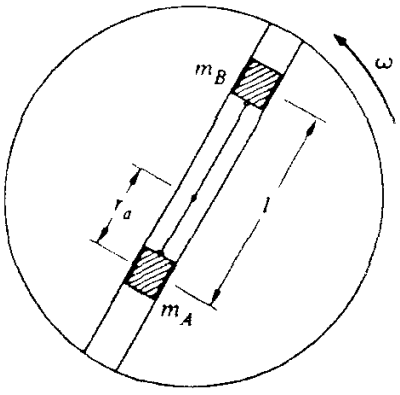
۲ـ۲۷ به‌عنوان شکل دیگری از مسئلهٔ قبل، نشان دهید که اگر این حفره خیلی دورتر از مرکز هم عبورکرده باشد، شما بازهم حرکت هماهنگ ساده‌ای با همان زمان تناوب انجام خواهید داد.

۲ـ۲۸ اتومبیلی مطابق شکل ۲ـ۶۶ وارد پیچی به‌شعاع R می‌شود. این جاده دارای زاویهٔ θ است، و ضریب اصطکاک بین چرخها و جادهٔ μ است. بیشینه و کمینهٔ سرعتها را برای اینکه اتومبیل بدون سُرخوردن به اطراف روی جاده بماند پیدا کنید.

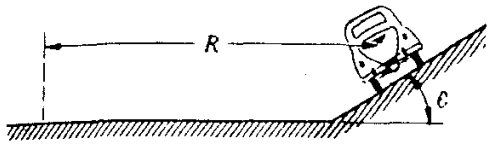
جواب حالت خاص: اگر $\mu = ۱$ و $\theta = \pi/۴$ باشد، هر سرعتی قابل قبول است.

۲ـ۲۹ اتومبیلی روی سکوی بزرگی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، درحالت حرکت است. در $t = ۰$ راننده مبدأ را ترک و در امتداد یکی از شعاعهای سکو و به‌طرف خارج با سرعت ثابت $V_۰$ حرکت می‌کند. وزن کل اتومبیل W و ضریب اصطکاک بین اتومبیل و سکو μ است. (الف) بااستفاده از مختصات قطبی شتاب اتومبیل را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید. بارسم یک نمودار برداری، مؤلفه‌های شتاب را در زمانی‌که $t > ۰$ است نشان دهید. (ب) زمانی راکه درآن اتومبیل شروع به سرخوردن می‌کند پیدا کنید. (ج) جهت نیروی اصطکاک را نسبت به بردار لحظه‌ای مکان $\mathbf{r}$ درست قبل از سُرخوردن اتومبیل پیدا کنید. نتایج خود را در یک نمودار به‌طور واضح نشان دهید.

۲ـ۳۰ صفحه‌ای مطابق شکل ۲ـ۶۷ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. دو جرم m_A



شکل ۲ـ۶۷



شکل ۲ـ۶۶

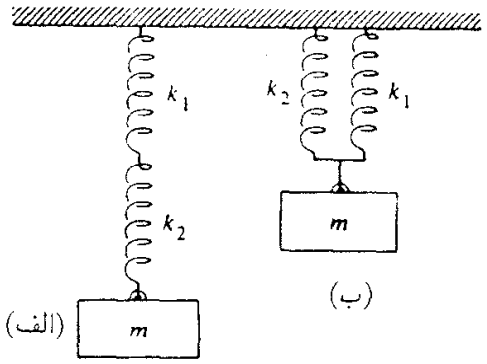
و m_B در شیاری که از مرکز صفحه می‌گذرد بدون اصطکاک می‌لغزد. در ابتدا جرمها به‌وسیلهٔ سیم سبکی به‌طول l به‌هم متصل‌اند و توسط گیره‌ای چنان قرار می‌گیرند که جرم m_A در فاصلهٔ r_A از مرکز باشد. دراینجا ازگزارش صرفنظر کنید. در $t = ۰$ گیره برداشته می‌شود و جرمها برای لغزیدن آماده می‌شوند.

$\dot{r}_A$ را بلافاصله بعدازاینکه گیره برداشته می‌شود برحسب m_A، m_B، l، r_A، ω پیدا کنید.

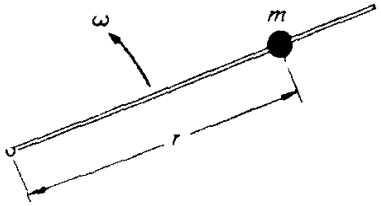
۲ـ۳۱ در هر یک از دو وضعیت نشان داده شده (شکل ۲ـ۶۸)، بسامد نوسان جرم m را که توسط دو فنر با ثابتهای k_1 و k_2 آویزان شده است، پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $k_1 = k_2 = k$ باشد، $\omega_a = \sqrt{k/2m}$، $\omega_b = \sqrt{2k/m}$.

۲ـ۳۲ چرخی به‌شعاع R با سرعت V روی زمین می‌غلتد. سنگریزه‌ای را با احتیاط در بالای چرخ طوری روی آن رها کرده‌ایم که به‌طور لحظه‌ای درحال سکون است. (الف) نشان دهید که اگر $V > \sqrt{Rg}$ باشد این سنگریزه بلافاصله از چرخ جدا می‌شود. (ب) نشان دهید در حالتی که $V < \sqrt{Rg}$ و ضریب اصطکاک $\mu = 1$ است. سنگریزه وقتی شروع به لغزش می‌کند چرخ به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \arccos[(1/\sqrt{2})(V^2/Rg)] - \pi/4$ دوران کرده باشد.



شکل ۲ـ۶۸



شکل ۲ـ۶۹

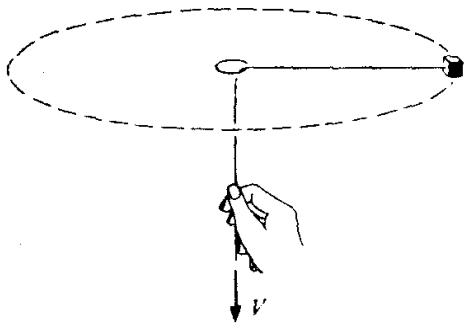
۲ـ۳۳ ذره‌ای به‌جرم m می‌تواند روی میلهٔ نازکی مطابق شکل ۲ـ۶۹ بلغزد. این میله حول یک انتهای خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در یک صفحه دوران می‌کند. نشان دهید که حرکت به‌وسیلهٔ رابطهٔ $r = Ae^{-\gamma t} + Be^{+\gamma t}$ معین می‌شود که در آن γ مقدار ثابتی است که باید پیدا شود و A و B ثابتهای اختیاری‌اند. از گرانش صرفنظر کنید.

نشان دهید با انتخاب شرایط اولیه بخصوص [یعنی، $r(t = 0)$ و $v(t = 0)$] امکان پیدا کردن جوابی که در آن r به‌طور پیوسته با زمان کاهش یابد وجود دارد، ولی با هر شرط دیگری r سرانجام افزایش خواهد یافت. (حالتهایی را که ذره با مبدأ برخورد می‌کند مستثنیٰ کنید.)

۲ـ۳۴ جرم m مطابق شکل ۲ـ۷۰ به‌وسیلهٔ تاری که از میان حلقه‌ای عبور می‌کند می‌چرخد. از گرانش صرفنظر کنید. در ابتدا این جرم در فاصلهٔ r_0 از مرکز قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ω_0 دوران می‌کند. نخ در $t = 0$ با سرعت ثابت V کشیده می‌شود به‌طوری‌که فاصلهٔ شعاعی جرم کاهش می‌یابد. نمودار نیرو را رسم کنید و معادلهٔ دیفرانسیلی برای ω بیابید. این معادله خیلی ساده است و می‌توان آن‌را یا از راه تجسس و یا به وسیلهٔ انتگرال‌گیری معمولی حل کرد. موارد زیرا را پیدا کنید. (الف) ωt.

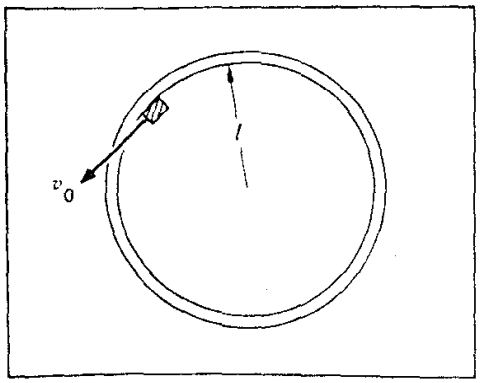
جواب حالت خاص: برای $Vt = r_0/2$ داریم $\omega = 4\omega_0$.

(ب) نیروی لازم برای کشیدن نخ.



شکل ۲ـ۷۰

۲ـ۳۵ این مسئله مستلزم حل یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده‌ای است. مکعبی به‌جرم m بر روی میز بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۲ـ۷۱). این مکعب مقید است که داخل حلقه‌ای به‌شعاع l که به



شکل ۲ـ۷۱

میز متصل است حرکت کند. در $t = 0$، مکعب در مسیر داخلی حلقه با سرعت v_0 در حرکت است. (یعنی، در امتداد مماس). ضریب اصطکاک بین مکعب و حلقهٔ μ است. (الف) سرعت مکعب را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

جواب: $v_0/[1 + (\mu v_0 t/l)]$.

(ب) مکان مکعب را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

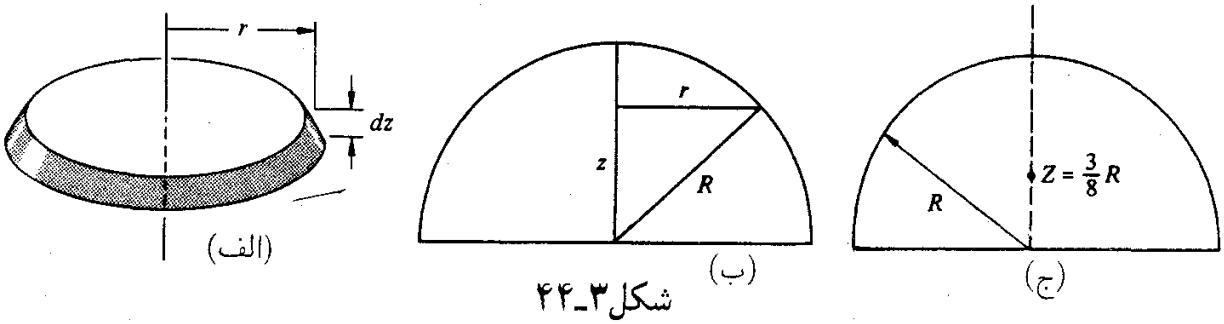
۲ـ۳۶ این مسئله شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده‌ای است. باید بتوانید بعداز مختصر تغییراتی ازآن انتگرال بگیرید.

ذره‌ای به‌جرم m در امتداد خط راستی حرکت می‌کند، و نیروی بازدارندهٔ $F = be^{\alpha v}$ برآن وارد

می‌شود (که همواره درخلاف جهت حرکت است). b و α مقادیر ثابت و v سرعت است. در $t = 0$ ذره با سرعت v_0 حرکت می‌کند. سرعت را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

جواب: $v(t) = (1/\alpha)\ln[1/(\alpha bt/m + e^{-\alpha v_0})]$.

۲ـ۳۷ شرکتی به‌منظور تبلیغات تصمیم به برگزاری مسابقهٔ سرعت هاورکرافت می‌گیرد. هاورکرافت با دمیدن هوا به‌طرف پایین، خود را نگه می‌دارد و دارای پروانهٔ بزرگ ثابتی در بالای بدنه‌است که برای حرکت به‌جلو است. متأسفانه هاورکرافت وسیله‌ای به‌عنوان فرمان ندارد، و درنتیجه خلبان در چرخش با سرعتهای زیاد دچار اشکال می‌شود. شرکت برای برطرف کردن این مشکل تصمیم گرفت یک سکوی پروازکاسه شکلی طراحی کند به‌طوری‌که وقتی هاورکرافت با سرعت زیاد وارد آن می‌شود بدون احتیاج به فرمان بتواند در امتداد مسیری دایره‌ای قرارگیرد. برای طراحی و ساختن این سکو با مهندسی قرارداد بسته شد. مهندس مزبور پس‌از پایان کار باعجله کشور را ترک کرد. پس‌از برگزاری اولین مسابقه شرکت دریافت که دقیقاً یک زمان ثابت T برای هاورکرافت لازم است تا صرفنظر از سرعت بتواند این مسیر را دور بزند. معادله‌ای برای سطح مقطع این سکو برحسب T پیدا کنید.



شکل۳ـ۴۴

آن برابر $dM = \rho\, dV = (M/V)(dV)$ است که $V = ۲/۳\pi R^۳$ است. از این رو

$$Z = \frac{۱}{M}\int \frac{M}{V} z\, dV$$
$$= \frac{۱}{V}\int_{z=۰}^{R} \pi r^۲ z\, dz$$

برای تعیین انتگرال باید r را برحسب z پیدا کنیم (شکل ۳ـ۴۴ ب). از آنجاکه $r^۲ = R^۲ - z^۲$ است، داریم

$$Z = \frac{\pi}{V}\int_{۰}^{R} z(R^۲ - z^۲)dz$$
$$= \frac{\pi}{V}\left(\frac{۱}{۲}z^۲R^۲ - \frac{۱}{۴}z^۴\right)\Bigg|_{۰}^{R}$$
$$= \frac{\pi}{V}\left(\frac{۱}{۲}R^۴ - \frac{۱}{۴}R^۴\right)$$
$$= \frac{\frac{۱}{۴}\pi R^۴}{\frac{۲}{۳}\pi R^۳}$$
$$= \frac{۳}{۸}R$$

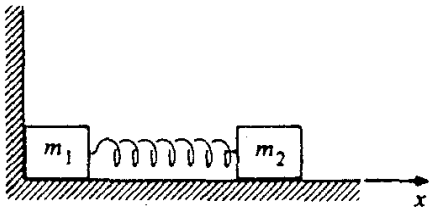
مسائل

۳ـ۱ چگالی میلهٔ نازکی به‌طول l برحسب فاصلهٔ x از یک انتهای آن طبق رابطهٔ $\rho = \rho_۰ x^۲/l^۲$ تغییر می‌کند. مرکز جرم آن را پیدا کنید.

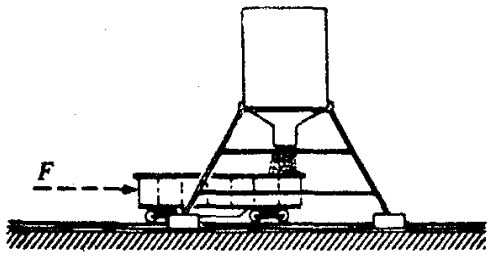
جواب: $X = ۳l/۴$.

۳ـ۲ مرکز جرم یک ورقهٔ نازک یکنواخت به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را پیدا کنید.

۳ـ۳ فرض کنید سیستمی از چندین جسم تشکیل شده است، و مرکز جرم هرکدام از اجسام معلوم است. ثابت کنید که مرکز جرم سیستم را با در نظرگرفتن هر جسم به‌عنوان ذره‌ای که در مرکز جرم خود متمرکز شده می‌توان پیدا کرد.



شکل ۳ـ۴۵



شکل ۳ـ۴۶

۳ـ۴ یک پرتابهٔ حامل وسایل سنجش به‌طور اتفاقی در بالای مسیر خود منفجر می‌شود. مسافت افقی بین نقطهٔ پرتاب و نقطهٔ انفجار L است. پرتابه به دو تکه تقسیم می‌شود که به‌طور افقی ازهم دور می‌شوند. تکهٔ بزرگتر دارای جرمی به‌اندازهٔ سه برابر جرم تکهٔ کوچکتر است. در مقابل تعجب دانشمندان دست‌اندرکار این مسئله، تکهٔ کوچکتر در ایستگاه پرتاب به زمین برمی‌گردد. تکهٔ بزرگتر چقدر دورتر از آن به زمین می‌نشیند؟ از مقاومت هوا و اثر انحنای زمین صرفنظر کنید.

۳ـ۵ یک بازیگر آکروبات سیرک به جرم M با سرعت اولیهٔ v_0 از روی تور مخصوص آکروبات مستقیماً به‌طرف بالا پرش می‌کند. هنگام پریدن به‌طرف بالا، در ارتفاع h بالای تور میمون تربیت شده‌ای را از جایگاهش برمی‌دارد و با خود همراه می‌برد.

حداکثر ارتفاعی که این دو کسب می‌کنند چقدر است؟

۳ـ۶ یک هواپیمای کوچک به وزن ۱۰۰۰ کیلوگرم در یک باند کوتاه فرود اضطراری می‌کند، و با موتور خاموش با سرعت $40\ \mathrm{m/s}$ روی باند می‌نشیند. قلابی روی این هواپیما قرار دارد که به‌وسیلهٔ کابلی به کیسهٔ شنی به وزن ۱۰۰ کیلوگرم متصل است و آن‌را در امتداد حرکت بر روی زمین می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک بین کیسهٔ شن و باند هواپیما ۰٫۴ باشد، و ترمزهای هواپیما هم نیروی کاهندهٔ اضافی ۱۵۰ کیلوگرم نیرو ایجاد کنند. این هواپیما تا توقف کامل چقدر راه خواهد رفت؟

۳ـ۷ سیستمی مطابق شکل ۳ـ۴۵ تشکیل شده از دو مکعب به جرم m_1 و m_2 که توسط فنر بدون جرمی با ثابت فنری k به‌هم متصل‌اند. این مکعبها روی صفحهٔ بدون اصطکاک می‌لغزند. طول فنر کشیده شده l است. در آغاز m_2 طوری نگهداشته شده که فنر تا طول $l/2$ فشرده می‌شود و m_1 مطابق شکل به مانعی تکیه دارد. m_2 در لحظهٔ $t = 0$ رها می‌شود.

حرکت مرکز جرم سیستم را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید.

۳ـ۸ شخصی به جرم ۵۰ کیلوگرم به‌طور مستقیم به‌هوا می‌پرد، و ۰٫۸ متر از کف زمین بالا می‌رود. برای رسیدن به‌این ارتفاع، این شخص از طرف زمین چه ضربه‌ای دریافت می‌کند؟

۳ـ۹ یک واگن باری به جرم M محتوی مقداری شن به جرم m است. در لحظهٔ $t = 0$ نیروی ثابت افقی F در جهت غلتش برآن وارد می‌شود و همزمان با آن دریچه‌ای در ته آن باز می‌شود که شن با آهنگ ثابت dm/dt از آن خارج می‌شود. سرعت واگن باری را وقتی‌که تمام شن خارج شده است

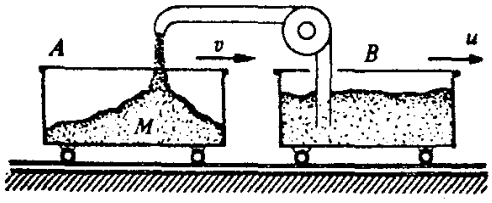
پیدا کنید. فرض کنید در لحظهٔ $t = ۰$ واگن باری در حال سکون است.

۳ـ۱۰ یک واگن باری خالی به جرم M از حالت سکون تحت اثر نیروی F شروع به حرکت می‌کند (شکل ۳ـ۴۶). در همین زمان، از قیف مخصوصی که در امتداد مسیر در حالت سکون قرار دارد، شن با آهنگ ثابت b به‌داخل واگن شروع به ریزش می‌کند.

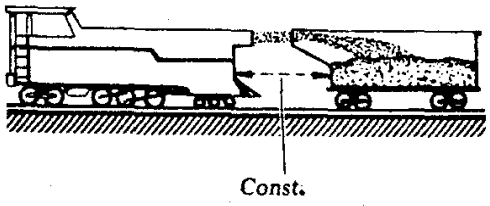
سرعت را پس از انتقال جرم m شن پیدا کنید. (راهنمایی: این مسئله را می‌توان به‌سادگی در یکی دو سطر حل کرد.)

جواب حالت خاص: اگر $M = ۵۰۰\,\mathrm{kg}$، $b = ۲۰\,\mathrm{kg/s}$، و $F = ۱۰۰\,\mathrm{N}$ باشد، آنگاه در زمان $t = ۱۰\,\mathrm{s}$، $v = ۱{,}۴\,\mathrm{m/s}$ است.

۳ـ۱۱ از ارابهٔ B موادی با آهنگ b کیلوگرم در ثانیه مطابق شکل ۳ـ۴۷ به‌داخل ارابه ریخته



شکل ۳ـ۴۷



شکل ۳ـ۴۸

می‌شود. این مواد دهانهٔ مسیر را به‌صورت قائم و به‌طرف پایین ترک می‌کنند، به‌طوری‌که سرعتشان همان سرعت افقی ارابهٔ B یعنی u است. مطابق شکل، در لحظهٔ مورد نظر ارابهٔ A دارای جرم M و سرعت v است. شتاب لحظه‌ای A یعنی dv/dt را پیدا کنید.

۳ـ۱۲ یک لوکوموتیو شن‌پاش، مطابق شکل ۳ـ۴۸ شن را به‌صورت افقی به‌داخل یک واگن باری می‌پاشد. لوکوموتیو و واگن باری به‌هم متصل نیستند. راننده لوکوموتیو سرعت خود را چنان نگه می‌دارد که فاصلهٔ آن تا واگن باری ثابت بماند. شن با آهنگ $dm/dt = ۱۰\,\mathrm{kg/s}$ و سرعت $۵\,\mathrm{m/s}$ نسبت به لوکوموتیو انتقال می‌یابد. واگن از حالت سکون با جرم ۲۰۰۰ کیلوگرم شروع به‌کار می‌کند. سرعت واگن را بعد از ۱۰۰ ثانیه پیدا کنید.

۳ـ۱۳ یک بالابر اسکی متشکل از یک تسمهٔ بلند است که حول دو قرقره که یکی در پایین و دیگری در بالای شیب قرار دارد می‌چرخد. قرقره‌ها توسط یک موتور الکتریکی قوی به‌حرکت درمی‌آیند به‌طوری‌که تسمه با سرعت ثابت ۱٫۵ متر بر ثانیه حرکت می‌کند. قرقره‌ها به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از یکدیگر قرار دارند، و زاویهٔ شیب ۲۰ درجه است.

اسکی‌بازها با گرفتن تسمه به بالا کشیده می‌شوند، و در آنجا با رها کردن طناب به پایین سُر می‌خورند.

اگر در هر ۵ ثانیه یک‌بار اسکی‌بازی به جرم ۷۰ کیلوگرم از بالابر استفاده کند، نیروی متوسط مورد نیاز برای کشیدن تسمه چقدر است؟ از اصطکاک بین برف و اسکی صرفنظر می‌کنیم.

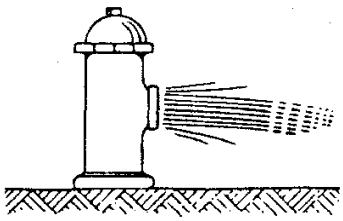
۱۴ـ۳ N نفر هر یک به جرم m روی واگن تخت راه‌آهن به جرم M ایستاده‌اند. این افراد از یک انتهای این واگن با سرعت u نسبت به واگن به‌خارج می‌پرند. در نتیجه، واگن بدون اصطکاک در جهت مخالف به‌حرکت درمی‌آید. (الف) اگر همهٔ افراد در یک زمان به‌خارج بپرند، سرعت نهایی واگن چقدر است؟ (ب) اگر این افراد هرکدام به‌دنبال دیگری به‌خارج بپرند، سرعت نهایی واگن چقدر خواهد بود؟ (جواب را می‌توانید به‌صورت مجموع جملات بنویسید). (ج) درکدامیک از حالتهای (الف) با(ب)، بزرگترین سرعت نهایی برای واگن حاصل می‌شود؟ آیا می‌توانید توضیح فیزیکی ساده‌ای برای جواب خود ارائه دهید؟

۱۵ـ۳ طنابی به جرم M و به‌طول l روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد، قسمت کوچک l_0 آن از میان سوراخی آویزان است. ابتدا طناب در حالت سکون است. (الف) جواب کلی $x(t)$ را برای طولی از طناب که از سوراخ می‌گذرد به‌دست آورید.

جواب: $x = Ae^{\gamma t} + Be^{\gamma t}$ که در آن $\gamma^2 = g/l$.

ب) مقادیر ثابت A و B را طوری پیدا کنید که شرایط اولیه صادق باشد.

۱۶ـ۳ از یک شیر آتش‌نشانی که قطر دهانهٔ آن D است مطابق شکل ۳ـ۴۹ آب با سرعت V_0



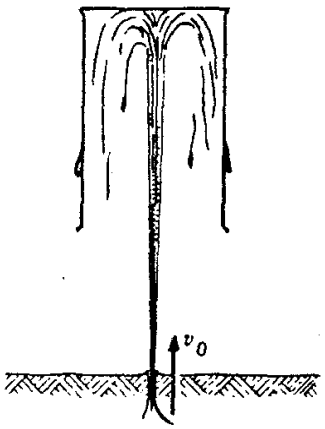
شکل ۳ـ۴۹

خارج می‌شود. نیروی واکنش وارد بر شیر آتش‌نشانی چقدر است؟

۱۷ـ۳ یک ظرف زبالهٔ وارونه به وزن W توسط آب حاصل از یک آبفشان مطابق شکل ۳ـ۵۰ به‌صورت معلق در هوا قرار دارد. آب با سرعت v_0 از زمین با آهنگ ثابت dm/dt فوران می‌کند. حداکثر ارتفاعی که این ظرف زباله کسب می‌کند چقدر است؟ برای رسیدن به‌حداکثر ارتفاع چه فرضی باید پذیرفته شود؟

جواب حالت خاص: اگر $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ و $W = 10\,\mathrm{kg}$ و $dm/dt = 0.5\,\mathrm{kg/s}$ باشد، $h_{\max} \approx 17\,\mathrm{m}$ است.

۱۸ـ۳ یک قطرهٔ باران به جرم اولیهٔ M_0 از حالت سکون تحت اثر گرانش شروع به سقوط می‌کند.



شکل۳ـ۵۰

فرض می‌کنیم که جرم این قطره با آهنگی متناسب، حاصلضرب جرم لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای آن در ابر افزایش می‌یابد

$$\frac{dM}{dt} = kMV$$

که در آن k مقدار ثابتی است.

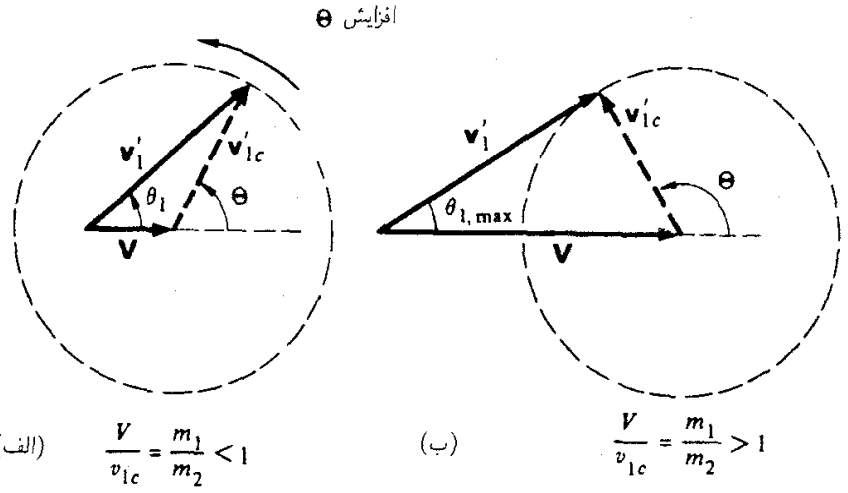
نشان دهید که سرعت قطره سرانجام عملا به‌صورت ثابت درمی‌آید، و رابطه‌ای برای سرعت نهایی به‌دست آورید. از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

۱۹ـ۳ کاسهٔ پر از آبی در معرض ریزش باران قرار دارد. مساحت سطح آن ۵۰۰ سانتیمتر مربع است. باران با سرعت ۵ متر بر ثانیه با آهنگ $10^{-3}\,\mathrm{g/cm^2 s}$ مستقیماً به‌طرف پایین می‌آید. اگر آبهای اضافی با سرعتی قابل اغماض از کاسه خارج شود، نیروی وارد بر کاسه را براثر ریزش باران پیدا کنید.

اگر کاسه با سرعت یکنواخت ۲ متر بر ثانیه به‌طرف بالا حرکت کند، این نیرو چقدر است؟

۲۰ـ۳ موشکی در یک میدان یکنواخت گرانشی با خارج ساختن گاز با سرعت ثابت u از حالت سکون صعود می‌کند. فرض کنید آهنگ خروج جرم از موشک با رابطهٔ $dm/dt = \gamma m$ داده می‌شود، که در آن m جرم لحظه‌ای موشک و γ مقدار ثابتی است. موشک توسط مقاومت هوا با نیروی mbv کُند می‌شود که در آن b مقدار ثابتی است. سرعت موشک را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید.

جواب حالت خاص: سرعت نهایی عبارت است از $(\gamma u - g)/b$.



شکل ۴ـ۴۸

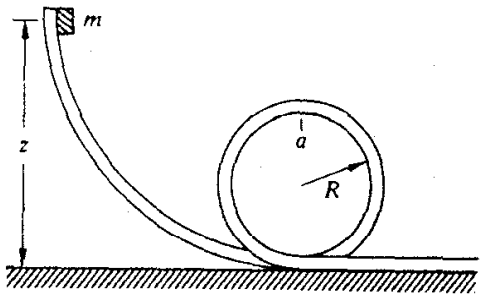
منحرف کند. ذرهٔ فرودی می‌کوشد درجهت خود به پیشروی ادامه دهد، بدون توجه به اینکه ذرهٔ سبک چگونه عمل می‌کند. ■

مسائل

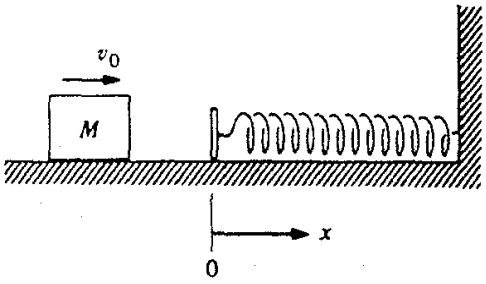
۴ـ۱ قطعهٔ کوچکی به‌جرم m از حالت سکون روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی مطابق شکل ۴ـ۴۹ شروع به‌لغزیدن می‌کند. ارتفاع اولیهٔ آن (z) چقدر باید باشد تا اینکه m در بالای مسیر (در نقطهٔ a) با نیرویی برابر با وزن خود به‌طرف خارج فشار وارد کند.

جواب: $z = 3R$.

۴ـ۲ قطعه مکعبی به‌جرم M روی یک میز افقی با سرعت v_0 می‌لغزد. در $x = 0$ این قطعه با فنری که ثابت آن k است برخورد می‌کند و در این لحظه مطابق شکل ۴ـ۵۰ اعمال نیروی اصطکاک



شکل ۴ـ۴۹



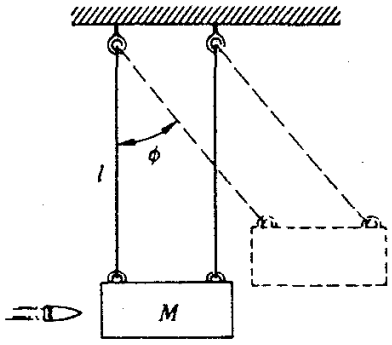
شکل ۴ـ۵۰

شروع می‌شود. ضریب اصطکاک متغیر است و از رابطهٔ $\mu = bx$ به‌دست می‌آید، که در آن b مقدار ثابتی است. انرژی مکانیکی ازدست رفته را در زمانی‌که قطعه برای اولین بار به‌طور آنی به‌حالت سکون می‌رسد، تعیین کنید.

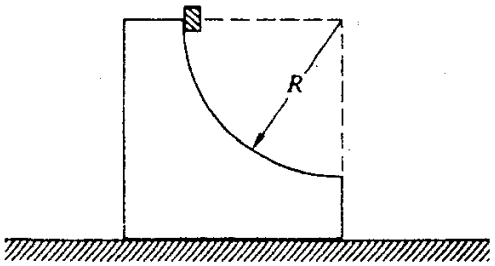
۴ـ۳ ساده‌ترین راه اندازه‌گیری سرعت یک گلوله، استفاده از آونگ بالیستیک است. طبق شکل ۴ـ۵۱، این آونگ از یک قطعه مکعب چوبی به‌جرم M تشکیل شده است که گلوله به‌داخل آن شلیک می‌شود. این قطعه توسط کابلهایی به‌طول l به‌صورت معلق درآمده است و برخورد گلوله باعث می‌شود که این قطعه چوب با یک زاویهٔ بیشینهٔ ϕ مطابق شکل به‌نوسان درآید. سرعت اولیهٔ گلوله v و جرم آن m است. (الف) بلافاصله بعداز اینکه این گلوله به‌حالت سکون درآمد، قطعه با چه‌سرعتی حرکت می‌کند؟ (فرض کنید این عمل خیلی سریع اتفاق می‌افتد.) (ب) نشان دهید که با اندازه‌گیری m، M، l، و ϕ می‌توانیم سرعت گلوله را پیدا کنیم.

جواب حالت ب: $v = [(m + M)/m]\sqrt{2gl(1 - \cos\phi)}$.

۴ـ۴ مکعب کوچکی به‌جرم m در مسیر دایره‌شکلی به‌شعاع R که از قطعهٔ بزرگی به‌جرم M بریده شده مطابق شکل ۴ـ۵۲ به‌طرف پایین می‌لغزد. قطعهٔ M روی میزی قرار دارد و هر دو قطعه بدون



شکل ۴ـ۵۱



شکل ۴ـ۵۲

اصطکاک حرکت می‌کنند. این قطعات ابتدا در حالت سکون‌اند و m از بالای مسیر شروع به‌حرکت می‌کند. سرعت v مکعب را وقتی‌که از قطعه جدا می‌شود پیدا کنید.

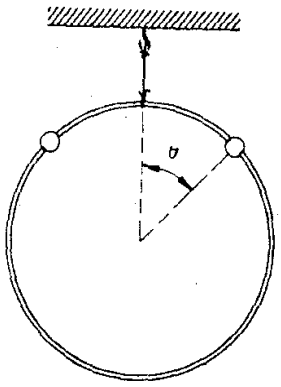
جواب حالت خاص: اگر $m = M$ باشد، آنگاه $v = \sqrt{gR}$.

۴ـ۵ جرم m روی میز بدون اصطکاکی می‌چرخد، این جرم به‌وسیلهٔ سیمی که از سوراخی در سطح یک میز عبور می‌کند در حال حرکت دایره‌ای نگهداشته می‌شود. سیم به‌آرامی از سوراخ کشیده می‌شود به‌طوری‌که شعاع دایره از l_1 به l_2 تغییر می‌کند. نشان دهید کار انجام شده در فرایند کشیدن سیم با افزایش انرژی جنبشی جرم برابر است.

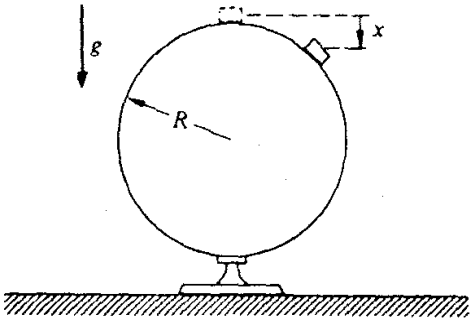
۴ـ۶ قطعهٔ مکعب کوچکی از حالت سکون از بالای کرهٔ بدون اصطکاکی به شعاع R مطابق شکل ۴ـ۵۳ به‌پایین می‌لغزد. باتوجه به شکل، این قطعه چقدر، x پایینتر از رأس کرهٔ، تماس خود را با کره ازدست می‌دهد. فرض کنید که کره حرکت نمی‌کند.

جواب: $R/3$.

۴ـ۷ حلقه‌ای به‌جرم M توسط نخی آویزان است، و دو مهره به‌جرم m روی آن بدون اصطکاک می‌لغزند (شکل ۴ـ۵۴). مهره‌ها از بالای حلقه و به‌طور همزمان رها شده‌اند، و به‌طرف پایین در دو جهت



شکل ۴ـ۵۴

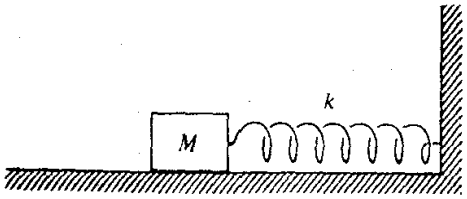


شکل ۴ـ۵۳

مخالف می‌لغزند. نشان دهید اگر $m > 3M/2$ باشد حلقه شروع به بالا رفتن می‌کند، و زاویه‌ای که در آن این عمل اتفاق می‌افتد چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $M = 0$، آنگاه $\theta = \arccos 2/3$.

۴ـ۸ قطعهٔ مکعبی مطابق شکل ۴ـ۵۵ تحت اثر فنری با ثابت k و نیروی اصطکاک ضعیفی با



شکل ۴ـ۵۵

ضریب ثابت f قرار دارد. این قطعه را به‌اندازهٔ فاصلهٔ x_0 از حالت تعادل کشیده و سپس رها می‌کنند. قطعه چندین‌بار نوسان می‌کند و سرانجام به‌حالت سکون درمی‌آید. (الف) نشان دهید کاهش دامنه برای هرچرخهٔ نوسان یکسان است. (ب) پیدا کنید تعداد نوسانهای کامل (n) این جرم را قبل‌از اینکه به‌حالت سکون درآید.

جواب: $n = \frac{1}{4}[(kx_0/f) - 1] \approx kx_0/4f$.

۴ـ۹ یک واکنش شیمیایی ساده و خیلی سریع عبارت است از $H + H \longrightarrow H_2 + 5\,eV$ ($1\,eV = 1{,}6 \times 10^{-19}J$ یکای انرژی در مقیاس اتمی است). اما، وقتی‌که اتمهای هیدروژن در فضای آزاد با هم برخورد می‌کنند به‌سادگی از هم جدا می‌شوند. دلیل این‌است که در یک برخورد سادهٔ دو جسمی که انرژی آزاد می‌شود، برقراری قوانین پایستگی تکانه و انرژی ممکن نیست. آیا می‌توانید این

مسئله را ثابت کنید؟ شما می‌توانید با نوشتن عباراتی برای پایستگی تکانه و انرژی این کار را آغاز کنید. (دقت کنید که انرژی واکنش را در معادلهٔ انرژی دخالت دهید و علامت آن‌را هم درست انتخاب کنید.) با حذف تکانهٔ نهایی مولکولها از دو معادله، می‌توانید نشان دهید که تکانهٔ اولیه باید شرط غیرممکنی داشته باشد.

۴ـ۱۰ قطعه مکعبی به‌جرم M روی یک میز افقی بدون اصطکاک به فنری با ثابت k متصل است. حرکت این قطعه طوری است که حول نقطهٔ تعادل خود با دامنهٔ A_0 نوسان می‌کند و دورهٔ تناوب حرکت برابر $T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$ است. (الف) مقداری از بتونهٔ چسبان به‌جرم m را روی قطعه می‌اندازیم، به‌طوری که بدون برگشت به قطعه می‌چسبد. بتونه لحظه‌ای به M برخورد می‌کند که سرعت M برابر صفر است. پیدا کنید:

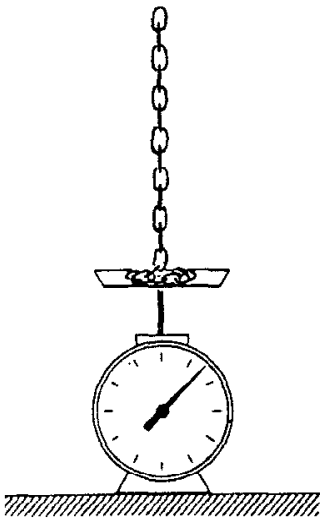
۱. دورهٔ تناوب جدید

۲. دامنهٔ جدید

۳. تغییر انرژی مکانیکی سیستم را.

(ب) قسمت (الف) را با این شرط تکرار کنید که بتونهٔ چسبان در لحظه‌ای که M دارای سرعت بیشینه است با آن برخورد کند.

۴ـ۱۱ زنجیری به‌جرم M و به‌طول l مطابق شکل ۴ـ۵۶ به‌طور قائم معلق است به‌نحوی که انتهای



شکل ۴ـ۵۶

پایینی آن با کفهٔ یک ترازو درتماس است. زنجیر را رها می‌کنیم تا برروی ترازو بیفتد.

وقتی‌که طول x زنجیر روی ترازو می‌افتد درجهٔ ترازو چه‌عددی را نشان می‌دهد. (از اندازهٔ حلقه‌های اتصال صرفنظر کنید.)

جواب حالت خاص: بیشینهٔ درجه ترازو $3Mg$ است.

۴ـ۱۲ در جنگ جهانی دوم روسها که برای انجام عملیات هوابرد دچارکمبود چترنجات بودند، گاهگاهی سربازان را درکیسه‌ای از علف خشک از هواپیما به‌روی برف سقوط می‌دادند. بدن انسان به‌طور متوسط می‌تواند یک فشار برخورد $۲۰ر۷ \times ۱۰ \mathrm{N/m^2}$ را تحمل کند.

فرض کنید هواپیمای راهنما یک محمولهٔ ساختگی راکه ازنظر وزن برابر با یک محمولهٔ واقعی است از ارتفاع ۴۵ متری رها کند. خلبان می‌بیند این محموله به‌اندازهٔ ۶ر۰ متر در برف فرو می‌رود. اگر جرم متوسط سربازها برابر ۶۵ کیلوگرم و سطح مؤثر آنها ۵ر۰ مترمربع باشد، آیا چنین سقوطی برای انسان بی‌خطر خواهد بود؟

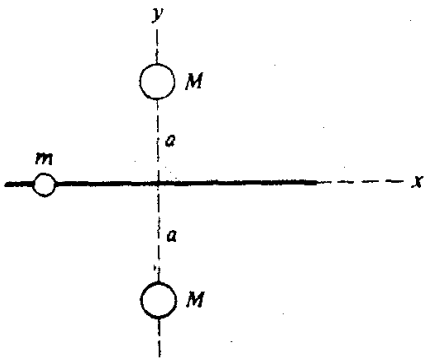
۴ـ۱۳ تابع انرژی پتانسیلی که معمولا برای توصیف برهم‌کنش بین دواتم به‌کار می‌رود عبارت است از پتانسیل ۶ و ۱۲ لِنارد-جونز (شکل ۴ـ۵۷)

$$U = \epsilon \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$

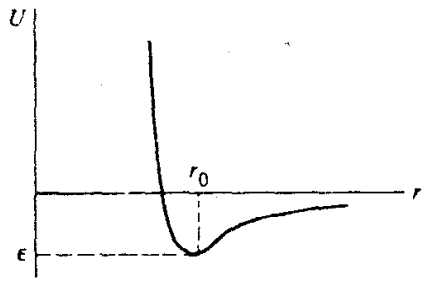
(الف) نشان دهید که شعاع مربوط به پتانسیل کمینه برابر r_0 و عمق چاه پتانسیل برابر ϵ است. (ب) بسامد نوسانهای کوچک حول نقطهٔ تعادل دواتم یکسان به‌جرمهای m راکه ازطریق برهم‌کنش لِنارد-جونز باهم ارتباط دارند پیدا کنید.

جواب: $\omega = 12\sqrt{\epsilon / r_0^2 m}$.

۴ـ۱۴ مهره‌ای به‌جرم m بدون اصطکاک روی میلهٔ صافی درجهت x می‌لغزد. این میله بین دو کره به‌جرمهای M و به‌فاصلهٔ مساوی از آنها قرار دارد. کره‌ها مطابق شکل ۴ـ۵۸ در $x = 0$ و $y = \pm a$



شکل ۴ـ۵۸



شکل ۴ـ۵۷

قرار دارند و مهره را به‌صورت گرانشی جذب می‌کنند. (الف) انرژی پتانسیل مهره را پیدا کنید. (ب) مهره در $x = 3a$ باسرعت v_0 به‌طرف مبدأ رها می‌شود. سرعت آن را وقتی‌که از مبدأ عبور می‌کند پیدا کنید. (ج) بسامد نوسانهای کوچک مهره را حول مبدأ پیدا کنید.

۴ـ۱۵ ذره‌ای به‌جرم m درجهت مثبت x در یک‌بعد حرکت می‌کند. این ذره تحت تأثیر نیروی ثابتی که بزرگی آن B وجهت آن به‌طرف مبدأست، و یک نیروی دافعهٔ تابع قانون عکس مجذور فاصله به‌بزرگی A/x^2 قرار می‌گیرد. (الف) تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ را پیدا کنید. (ب) نمودار انرژی سیستم را وقتی‌که بیشینهٔ انرژی جنبشی آن $K_0 = 1/2mv_0^2$ است رسم کنید. (ج) مکان تعادل x_0 را پیدا کنید. (د) بسامد نوسان کوچک حول x_0 چقدر است؟

۴ـ۱۶ یک ماشین مسابقه ۱۸۰۰ پوندی در ۸ ثانیه تا 60 mile/h سرعت می‌گیرد. توان متوسطی که موتور آن درطی زمان حرکت ماشین مصرف می‌کند چقدر است؟

۴ـ۱۷ یک سورتمهٔ برفی باسرعت 15mile/h از تپه‌ای بالا می‌رود. این تپه دارای شیبی است که هر ۴۰ فوت به‌اندازهٔ یک فوت ارتفاع پیدا می‌کند. نیروی مقاومت مربوط به برف برابر با ۵ درصد وزن سورتمه است. این سورتمه با چه‌سرعتی به‌طرف پایین حرکت می‌کند، با فرض اینکه موتور آن در این‌حالت هم همان‌قدر توان مصرف کند.

جواب: 45mile/h .

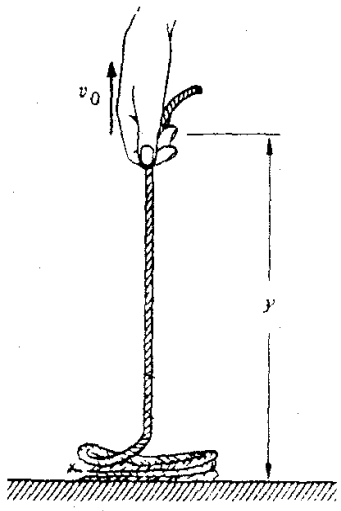
۴ـ۱۸ یک مرد ۱۶۰ پوندی به‌حالت دولا به‌هوا می‌پرد. گرانیگاه او قبل‌از اینکه زمین را ترک کند 1.5ft بالاتر از سطح زمین قرار دارد. سپس این گرانیگاه در انتهای پرش تا 3ft بالا می‌رود. با فرض اینکه مرد با نیروی ثابتی به‌زمین فشار وارد کند، چه‌توانی به‌وجود می‌آورد؟

جواب حالت خاص: بیشتر از ۱ اسب بخار وکمتر از ۱۰ اسب بخار.

۴ـ۱۹ همان شخص مسئلهٔ قبل به‌هوا می‌پرد، اما این‌دفعه نیرویی که اِعمال می‌کند از یک بیشینه درآغاز پرش شروع شده و در لحظه‌ای‌که زمین را ترک می‌کند به‌صفر می‌رسد. به‌عنوان تقریب قابل قبول نیرو را به‌صورت $F = F_0 \cos \omega t$ درنظر بگیرید که در آن F_0 نیروی بیشینه است، و تماس با زمین وقتی از بین می‌رود که $\omega t = \pi/2$ شود. بالاترین توانی راکه این شخص در این پرش تولید می‌کند پیدا کنید.

۴ـ۲۰ ازقیفی با آهنگ dm/dt روی یک تسمهٔ انتقال افقی که توسط موتوری با سرعت ثابت V به‌حرکت درآمده است، شن ریخته می‌شود. (الف) توان لازم برای به‌حرکت درآوردن تسمه را پیدا کنید. (ب) جواب را با آهنگ تغییر انرژی جنبشی شن مقایسه کنید، آیا دلیل اختلاف را می‌توانید بیان کنید؟

۴ـ۲۱ طناب یکنواختی باجرم واحد طول λ روی میز افقی صافی مطابق شکل ۴ـ۵۹ حلقه شده است. یک‌سر آن‌را با سرعت ثابت v_0 مستقیماً به‌طرف بالا می‌کشیم. (الف) نیروی وارد برانتهای طناب برحسب تابعی از ارتفاع y پیدا کنید. (ب) توان داده شده به طناب را با آهنگ تغییر انرژی مکانیکی کل طناب مقایسه کنید.



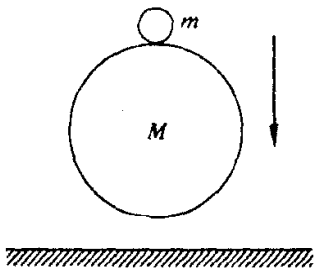
شکل ۴ـ۵۹

۴ـ۲۲ توپی را به‌کف اتاق می‌اندازیم این توپ پس‌از جهشهای متوالی سرانجام به‌حالت سکون درمی‌آید. برخورد بین توپ و کف اتاق ناکشسان است، سرعت پس‌از هر برخورد برابر است با سرعت قبل‌از برخورد ضربدر e، که در آن $e < 1$ است (e را ضریب بازگشت می‌نامند). اگر سرعت لحظه‌ای قبل‌از اولین جهش v_0 باشد، زمان لازم برای ساکن شدن توپ را پیدا کنید.

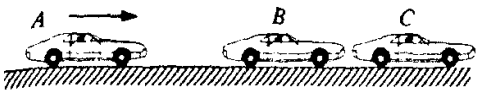
جواب حالت خاص: اگر $v_0 = 5\text{m/s}$ و $e = 0.5$ باشد، آنگاه $T \approx 1\text{s}$ است.

۴ـ۲۳ گلولهٔ کوچکی به‌جرم m مطابق شکل ۴ـ۶۰ روی یک "توپ بزرگ" به‌جرم M قرار دارد. این‌دو را از ارتفاع h به‌کف اتاق می‌اندازیم. گلولهٔ کوچک بعداز برخورد چقدر بالا می‌رود؟ فرض کنید برخورد توپ بزرگ کشسان، و $m \ll M$ باشد. به‌منظور کمک به تجسم مسئله، فرض کنید وقتی‌که توپ بزرگ باکف اتاق برخورد می‌کند گلوله کمی از آن فاصله دارد. (اگر از جواب خیلی تعجب می‌کنید، سعی کنید مسئله را با یک ساچمه و توپ بزرگ امتحان کنید.)

۴ـ۲۴ مطابق شکل ۴ـ۶۱ اتومبیلهای B و C درحالت خلاص و درحال سکون هستند. اتومبیل



شکل ۴ـ۶۰



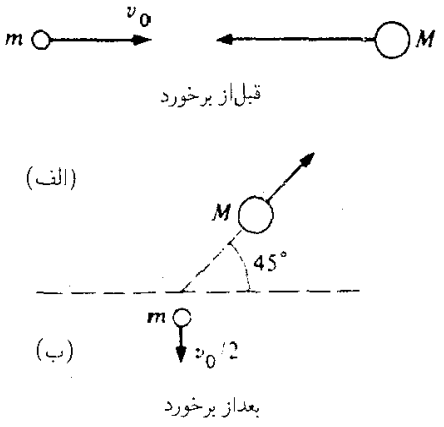
شکل ۴ـ۶۱

A باسرعت زیاد با اتومبیل B برخورد می‌کند و B را به‌طرف C می‌فشارد. اگر برخوردها کاملا ناکشسان باشند، چه‌کسری از انرژی اولیه در اتومبیل C از بین می‌رود؟ درابتدا هر سه اتومبیل مشابه یکدیگرند.

۲۵ـ۴ پروتونی با یک ذرهٔ مجهول درحال سکون برخورد رودررو انجام می‌دهد. پروتون با ۴/۹ انرژی جنبشی اولیهٔ خود مستقیماً به‌عقب برمی‌گردد.

نسبت جرم ذرهٔ مجهول به‌جرم پروتون را با فرض اینکه برخورد کشسان باشد، پیدا کنید.

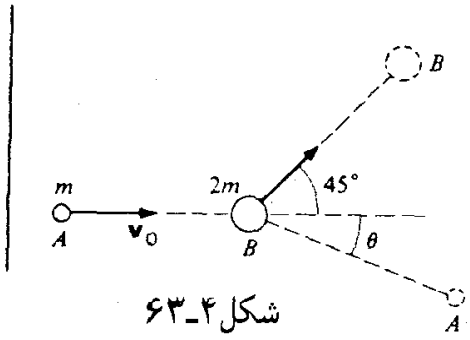
۲۶ـ۴ ذره‌ای به‌جرم m و سرعت اولیهٔ v_0 با ذرهٔ دیگری به‌جرم مجهول M که از جهت مقابل، مطابق شکل ۴ـ۶۲(الف) درحرکت است برخوردی کشسان انجام می‌دهد. بعداز برخورد، m باسرعت



شکل ۴ـ۶۲

$v_0/2$ و زاویهٔ قائم نسبت به‌جهت فرودی به‌حرکت درمی‌آید، و M درجهت نشان داده شده در شکل ۴ـ۶۲(ب) حرکت می‌کند. نسبت M/m را پیدا کنید.

۲۷ـ۴ ذرهٔ A به‌جرم m دارای سرعت اولیهٔ v_0 است. این ذره بعداز برخورد با ذرهٔ B به‌جرم $2m$ که درابتدا در حالت سکون است، مسیری مطابق شکل ۴ـ۶۳ را طی می‌کند. θ را پیدا کنید.



شکل ۴ـ۶۳

۲۸ـ۴ هدف نازکی از لیتیم توسط هسته‌های هلیم با انرژی E_0 بمباران می‌شود. هسته‌های لیتیم درابتدا در هدف درحالت سکون‌اند ولی اساساً مقید نیستند. وقتی‌که هستهٔ هلیم وارد هستهٔ لیتیم می‌شود، یک واکنش هسته‌ای می‌تواند رخ دهد و هستهٔ مرکب حاصل به‌صورت یک هستهٔ بور و یک

نوترون تجزیه شود. برخورد ناکشسان است، و انرژی جنبشی نهایی به‌اندازهٔ ۲٫۸MeV از E_0 کمتر است ($1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-13}\text{J}$). جرمهای نسبی ذرات عبارت‌اند از: جرم هلیم ۴؛ جرم لیتیم ۷؛ جرم بور ۱۰، جرم نوترون ۱. واکنش هسته‌ای را می‌توان به‌طریق زیر خلاصه کرد

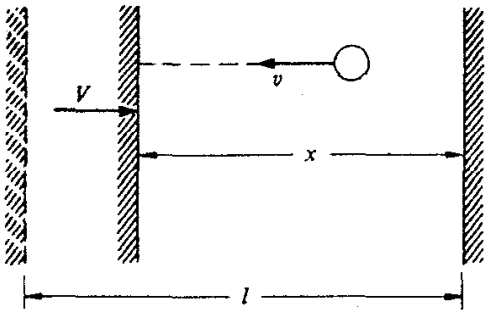
$$^7\text{Li} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{10}\text{B} + {}^1\text{n} - 2{,}8\text{MeV}$$

الف) انرژی آستانه $E_{0,\text{آستانه}}$، یا مقدار کمینه E_0 برای اینکه نوترون تولید شود چقدر است؟ انرژی نوترون در این حالت آستانه‌ای چقدر است؟

جواب: ۰٫۱۵MeV = انرژی نوترون.

ب) نشان دهید که اگر انرژی فرودی در فاصلهٔ $E_{0,\text{آستانه}} < E_0 < E_{0,\text{آستانه}} + 0{,}27\text{MeV}$ باشد، نوترونهایی که رو به جلو بیرون رانده می‌شوند همگی انرژی یکسانی ندارند بلکه باید یکی از دو انرژی ممکن را دارا باشند. (با مطالعهٔ واکنش در دستگاه مرکز جرم می‌توانید منشأ این دوگروه را درک کنید.)

۲۹ـ۴ یک "توپ مخصوص" به‌جرم m مطابق شکل ۴ـ۶۴ باسرعت v_0 بین دودیواره به جلو



شکل ۴ـ۶۴

وعقب می‌جهد. ازگرانش صرفنظر می‌کنیم و برخوردها را کاملا کشسان درنظر می‌گیریم.

الف) نیروی متوسط وارد بر هر دیواره را پیدا کنید.

جواب: $F = mv_0^2/l$.

ب) اگر یکی از دیواره‌ها به‌آرامی و باسرعت $V \ll v$ به‌طرف دیگری حرکت کند، به‌دلیل فاصلهٔ کوتاه بین برخوردها و به‌علت اینکه سرعت توپ هنگام جهش از دیوارهٔ متحرک افزایش می‌یابد آهنگ جهش تندتر خواهد شد. F را برحسب فاصلهٔ بین دیواره‌ها، x، پیدا کنید. (راهنمایی: آهنگ متوسط افزایش سرعت توپ را با حرکت دیواره پیدا کنید.)

جواب: $F = (mv_0^2/l)(l/x)^3$.

ج) نشان دهید که کار لازم برای حرکت دادن دیواره از l تا x برابر است با افزایش انرژی جنبشی توپ. (این مسئله سازوکار گرم شدن گاز را براثر تراکم نشان می‌دهد.)

۴ـ۳۰ ذره‌ای به‌جرم m و سرعت v_0 به‌طورکشسان با ذره‌ای به‌جرم M که درابتدا به‌حالت سکون است برخورد می‌کند، و با زاویهٔ Θ در دستگاه مرکز جرم پراکنده می‌شود.

الف) سرعت نهایی m را در دستگاه آزمایشگاه پیدا کنید.

جواب: $v_f = [v_0/(m+M)](m^2 + M^2 + 2mM\cos\Theta)^{\frac{1}{2}}$.

ب) کسری از انرژی جنبشی m راکه تلف می‌شود، پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $m = M$ باشد، آنگاه

$$(K_0 - K_f)/K_0 = (1 - \cos\Theta)/2$$