Gamma, no. 25, Winter 2013 | **گاما** شماره ی، ۲۵، زمستان ۱۳۹۱

رقم‌ها ی معنی‌دار

احمد شریعتی

گروه فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران، صندوق پستی ۱۹۹۳۵/۶۳۳

چکیده

در این مقاله یِ آموزشی، ابتدا تفاوتِ مفهومِ عدد در ریاضیات با عددها یی که نتیجه یِ سنجش اند بیان می‌شود. سپس اثرِ خطا یِ سنجش در عددها یِ به دست آمده در سنجش، و قاعده یِ سرانگشتی یِ کم‌ترین رقم‌ها یِ معنی‌دار مرور می‌شود. سپس با چند مثال نحوه یِ گزارش کردنِ عددها یِ ناشی از سنجش توصیف می‌شود. دستِ آخر مختصراً به خطاها یِ آماری خواهیم پرداخت.

گاما، شماره ی ۲۵، مقاله ی ۲ (زمستان ۱۳۹۱) ویرایش ۱ (۱۳۹۱/۱۲/۱۱)

Abstract

In this educational article, first the difference between the mathematical concpet of the real numbers, and the numbers which are the result of measurements is discussed. We then deal with the effect of uncertainties, and the thumb rule of least significant figures. Then, we discuss how to reprot measured and computed quantities. Finally, we breifly discuss statistical uncertainlies.

A. Shariati, *Significant Figures*,
Gamma, no. 25, art. 2 (Winter 2013), v. 1 (1 Mar 2013)

URL: http://www.gammajournal.ir

فهرست مطالب

۱ نتیجه ی سنجش یا محاسبه را با چند رقم گزارش کنیم؟

عددها یی که در فیزیک به کار می‌رود با عددها یی که در ریاضیات معرفی می‌شوند فرق دارند. عددِ حقیقی در ریاضیات مفهوم ی است که من فرض می‌کنم خواننده با آن آشنا است: عددها یِ طبیعی، گویا، و گنگ. روشِ متداولِ نوشتنِ عددها هم روشِ دهدهی است. مثلا

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.49999\cdots = 0.4\overline{9}$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$$

$$\pi = 3.141592654\ldots$$

تناظر ی یک به یک هست بینِ عددها یِ حقیقی و خطِ راستِ اقلیدسی. کافی است یک نقطه از خطِ راستِ اقلیدسی را به عنوانِ مبداء (یعنی $x = 0$) و یک نقطه را به عنوانِ واحد (یعنی $x = 1$) انتخاب کنیم. از این به بعد هر نقطه از خط با یک و تنها یک عددِ حقیقی مشخص می‌شود. عکسِ این قضیه هم درست است، یعنی هر عددِ حقیقی یک و تنها یک نقطه را رو یِ خط مشخص می‌کند.

در فیزیک عددها یِ حقیقی به دو صورت ظاهر می‌شوند. صورتِ اول همان مفهومِ ریاضی یِ عدد است. صورتِ دوم عددها یی است که حاصلِ سنجش اند. بهتر است این را با یک مثال روشن کنیم. فرمولِ مساحتِ کره این است:

$$A = \pi D^2$$

که در این جا D قطرِ کره است. معمولاً این فرمول بر حسبِ شعاع نوشته می‌شود، امّا چون معمولاً قطرِ کره است که با وسیله یِ اندازه‌گیری سنجیده می‌شود، بهتر است از همین شکلِ آن استفاده کنیم. این فرمول، به عنوانِ یک فرمولِ ریاضی دقیق است، به این معنی که اثباتِ دقیقِ ریاضی دارد. این فرمول ارتباطِ بینِ مساحت و قطرِ کره

را بیان می‌کند. در این فرمول π عدد ی است گنگ. اگر D عدد ی گویا باشد، مساحت عدد ی گنگ خواهد بود که حساب کردنِ آن یعنی ضرب کردنِ عددِ گویا ی D^2 در عددِ گنگ π.

فرض کنید می‌خواهیم مساحتِ یک توپِ پینگ پُنگ را حساب کنیم. با اندازه‌گیری معلوم می‌شود که قطرِ توپِ پینگ پُنگ $D = 39.6\,\mathrm{mm}$ است. این عدد با یک کولیس با دقّتِ $0.02\,\mathrm{mm}$ به دست آمده است، و البته برا یِ یک توپِ خاص. توپها یِ مختلف ی که یک کارخانه یا کارخانه‌ها یِ مختلف می‌سازند ممکن است با این توپ خاص کم ی فرق داشته باشند. خودِ این توپ هم ممکن است به علت ی کاملا کروی نباشد. معمولا سنجش به این ترتیب است که یک یا چند قطر را می‌سنجیم و بعد میانگین می‌گیریم. فعلاً فرض کنید با توپ ی سر و کار داریم که با این کولیسِ خاص برا یِ قطر ش عددِ بالا به دست آمده است. سؤال این است که مساحتِ این توپ چه قدر است. پاسخ این است که مساحتِ این توپ، به معنی یِ ریاضی، خوشتعریف نیست. زیرا در ریاضیات مساحت را با یک فرایندِ حدگیری تعریف می‌کنند. فرآیند ی که در آن ابعادِ مثلثها یی که برا یِ تخمین زدنِ سطح به کار می‌رود به سمتِ صفر میل می‌کند. در واقعیّت نمی‌توان چنین کرد. مثلاً اگر با یک میکروسکپِ الکترونی از سطحِ توپِ پینگ پُنگ عکس بگیریم، معلوم می‌شود که به هیچ وجه هموار نیست. پس باید ابتدا از خود بپرسیم که مساحت ی که می‌خواهیم به این توپ نسبت بدهیم قرار است به چه کار ی بیاید. برا یِ بسیار ی از کاربردها یِ معمول می‌توان توپِ پینگ پُنگ را یک کره، به معنی یِ ریاضی، پنداشت، و با استفاده از فرمولِ مساحتِ کره مساحت ی برا یِ توپ تعریف کرد. باید از فرمول ی که بالاتر آمد استفاده کنیم. با یک ماشینِ حساب می‌توان مساحت را حساب کرد. عدد ی که به دست می‌آید این است.

$$A = \pi\,(39.6)^2 = 4926.51993565\,\mathrm{mm}^2.$$

این عدد ی است که اغلبِ دانشجویان در پاسخِ این پرسش که مساحتِ این توپ چه قدر است می‌نویسند. اما عدد ی که انتظار می‌رود گزارش کنند این است:

$$A = 4.927 \times 10^3\,\mathrm{mm}^2 = 4.927 \times 10^1\,\mathrm{cm}^2$$

یا از آن بهتر

$$A = 49.27 \pm 0.05\,\mathrm{cm}^2$$

یا مثلاً

$$A = 49.2(7)\,\mathrm{cm}^2$$

که در این شکل نوشتن، پرانتز نشان دهنده یِ رقم‌ها یی است که به آنها اطمینان نداریم.

نکته ای که باید به یاد داشت این است که عددها یی که با سنجش به دست می‌آیند، در واقع عدد به معنی یِ ریاضی نیستند، بازه اند. وقت ی قطرِ توپِ پینگ پنگ را می‌سنجیم، آن چه می‌یابیم این است که این قطر عدد ی است نزدیک به $39.6\,\mathrm{mm}$ یا به عبارت ی، عدد ی است در بازه یِ $[39.58, 39.62]\ \mathrm{mm}$ شعاعِ این بازه $0.02\,\mathrm{mm}$ است که این را سازنده یِ کولیس به ما یادآور شده، به این نحو که رو یِ کولیس نوشته شده که دقّتِ آن $0.02\,\mathrm{mm}$ است. باید دقّت کرد که حتّا اگر عدد ی که رو یِ کولیس می‌خوانیم بی ابهام خوانده شود، و مثلاً $39.6\,\mathrm{mm}$ باشد، باز هم نمی‌توانیم این عدد را دقیق به حساب بیاوریم، به این معنی که اگر این عدد را چند نفر با چند کولیسِ مختلف بسنجند، احتمالِ بسیار بسیار ضعیف ی هست که همه یِ آنها دقیقاً همین $39.6\,\mathrm{mm}$ را گزارش کنند.

خطا یِ محاسبه یِ مساحتِ توپ چه طور محاسبه می‌شود؟ ریاضیات آن ساده است. به یاد بیاوریم که

$$df = \frac{df}{dx}\,dx, \qquad \frac{df}{f} = d\ln f(x)$$

محاسبه می‌کنیم.

$$A = \pi D^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = d\ln\left(\pi D^2\right) = 2\,\frac{dD}{D}$$

از سنجش می‌دانیم که $D = 39.6\,\mathrm{mm}$ است، و چون از کولیس ی با دقّتِ $0.02\,\mathrm{mm}$ استفاده کرده ایم، می‌دانیم که

$$dD = 0.02\,\mathrm{mm}.$$

به کمیتِ بی بُعدِ زیر خطا یِ نسبی یِ سنجشِ D می‌گوییم.

$$\frac{dD}{D} = \frac{0.02\,\mathrm{mm}}{39.6\,\mathrm{mm}} \simeq 5\times 10^{-4}.$$

اینک داریم

$$dA = 2\,A\,\frac{dD}{D} = 2\times 49.3\,\mathrm{cm}^2 \times \frac{0.02\,\mathrm{mm}}{39.6\,\mathrm{mm}} \simeq 5\times 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$$

می‌بینیم که دقّتِ سنجشِ مساحتِ این توپ حدودِ $5\,\mathrm{mm}^2$ است. بنا بر این رقمِ یکان در عددِ مساحت (بر حسبِ میلی‌مترِ مربع) بی‌معنی است. چون مساحت با مجذورِ قطر متناسب است، خطا یِ سنجشِ مساحت، دو برابرِ خطا یِ نسبی یِ سنجشِ قطر است،

$$\frac{dA}{A} = 2\frac{dD}{D}.$$

خوب است حجمِ این توپ را هم حساب کنیم.

$$V = \frac{4}{3}\pi\,R^3 = \frac{\pi}{6}\,D^3 = 3.252\times 10^4\,\mathrm{mm}^3 = 3.252\times 10^1\,\mathrm{cm}^2 = 32.52\,\mathrm{cm}^3$$

و خطا یِ آن را هم تخمین بزنیم.

$$dV = 3\,V\,\frac{dD}{D} \simeq 5\times 10^{-2}\,\mathrm{cm}^3$$

بنا بر این، وقت ی حجم را بر حسبِ سانتی‌مترِ مکعب می‌نویسم، بهتر است آن را به این شکل بنویسیم.

$$V = 32.52 \pm 0.05\,\mathrm{cm}^3$$

یا مثلاً به این شکل

$$V = 32.5(2)\,\mathrm{cm}^3$$

در این شکلِ اخیر، پرانتز نشان دهنده یِ این است که رقمِ 2 در مقدارِ فوق نادقیق است.

۲ یک قاعده ی سرانگشتی

محاسبه‌ها یِ بالا را می‌توان با یک قاعده یِ سرانگشتی به راحتی انجام داد. این قاعده یِ سرانگشتی رعایت کردنِ تعدادِ رقم‌ها یِ معنی‌دار است. قاعده این است که اگر دو عددِ حاصل از سنجش را در هم ضرب می‌کنیم یا بر هم تقسیم می‌کنیم، حاصل را با کمترین تعدادِ رقمها یِ معنی‌دارِ دو عددِ اول بنویسیم. مثلاً اگر یک عدد با سه رقمِ معنی‌دار نوشته شده و دیگر ی با چهار رقمِ معنی‌دار، حاصلِ ضرب یا خارجِ قسمت را با سه رقمِ معنی‌دار بنویسیم.

عددها یی که در فرمولها ظاهر می‌شوند دو دسته اند. برخ ی مثلِ π یا $\frac{4}{3}$ دقیق اند. اما برخ ی، مثلِ $39.6\,\mathrm{mm}$ حاصلِ سنجش اند. در موردِ این عددها تعدادِ رقم‌ها یِ معنی‌دار مهم است. مثلاً عددِ بالا با سه رقمِ معنی‌دار نوشته شده است. اگر بخواهیم همین عدد را بر حسبِ متر بنویسیم، باید بنویسیم $0.0396\,\mathrm{m}$ یا $39,600\,\mu\mathrm{m}$، که در این شکل‌ها واضح نیست که تعدادِ رقم‌ها یِ معنی‌دار چند است. بنا بر این این عددها را (که نوعاً حاصلِ سنجش اند) با نمادِ علمی می‌نویسیم. مثلا

$$D = 3.96 \times 10\,\mathrm{mm} = 3.96\,\mathrm{cm} = 3.96 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 3.96 \times 10^{-5}\,\mathrm{km}$$

همان طور که می‌بینید، در این شکل مهم نیست که واحد ی که انتخاب کرده ایم چیست؛ همیشه تعدادِ رقمها یِ معنی‌دار یعنی تعدادِ رقم‌ها یی که در ضریبِ 10^N ظاهر می‌شود. حال اگر می‌خواهیم این عدد را به توان برسانیم، حاصل را نیز با فقط همین تعداد رقمِ معنی‌دار می‌نویسیم، که در موردِ مثالِ بالا یعنی با سه رقمِ معنی‌دار. پس مثلاً داریم

$$D^2 = 1.57 \times 10^1\,\mathrm{cm}^2, \quad D^3 = 6.21 \times 10^1\,\mathrm{cm}^3.$$

اگر با کمیّت ی سر و کار داریم که متناسب است با D^n که در این جا n یک عددِ بزرگ است، مثلاً $n = 100$، در این صورت خطا یِ نسبی یِ سنجشِ این کمیّت صد برابرِ خطا یِ نسبی یِ سنجشِ قطر است، و قاعده یِ سرانگشتی یِ تعدادِ رقمها یِ معنی‌دار کار نمی‌کند، زیرا باید این کمیت را با تعدادِ کمتر ی رقمِ معنی‌دار گزارش کرد. امّا در فرمولها یی که معمولاً در فیزیک به کار می‌رود توانها نوعاً عددها یی از مرتبه یِ دو و سه اند، و برا یِ این عددها قاعده یِ سرانگشتی یِ تعدادِ رقمها یِ معنی‌دار خوب کار می‌کند.

۳ تفاضلِ دو کمیّت

دو توپِ پینگ پنگ در نظر بگیرید با قطرها یِ

$$D_1 = 39.6 \pm 0.02\,\mathrm{mm}, \qquad D_2 = 39.8 \pm 0.02\,\mathrm{mm}$$

اختلافِ قطرِ این دو توپ چه قدر است؟ برا یِ پاسخ به این پرسش ابتدا توجه می‌کنیم که با توجّه به خطا یِ سنجشِ قطر، آن چه می‌دانیم این است که قطرِ این دو توپ در بازه‌ها یِ زیر است.

$$D_1 \in [39.58, 39.62]\ \mathrm{mm}, \qquad D_2 \in [39.78, 39.82]\ \mathrm{mm}.$$

به این ترتیب آن چه در موردِ اختلافِ این دو قطر می‌توانیم بگوییم این است که این اختلاف در بازه یِ زیر است.

$$\Delta D = D_2 - D_1 \in [39.78 - 39.62, 39.82 - 39.58]\ \mathrm{mm} = [0.16, 0.24]\ \mathrm{mm}.$$

که این را می‌توانیم به شکلِ زیر بنویسیم.

$$\Delta D = (0.20 \pm 0.04)\ \mathrm{mm}.$$

می‌بینیم که خطا یِ مطلقِ سنجشِ این کمیّت، ΔD، $0.04\,\mathrm{mm}$ است که یعنی دو برابرِ خطا یِ مطلقِ سنجشِ قطر. خطا یِ نسبی یِ سنجشِ اختلافِ قطر چیست؟

$$\frac{0.04\,\mathrm{mm}}{0.20\,\mathrm{mm}} = 0.2 = 20\%.$$

بنا بر این کاملاً بی‌معنی است اگر بخواهیم اختلافِ این دو شعاع را با بیش از یک رقمِ معنی‌دار گزارش کنیم. یعنی نوشتنِ $\Delta D = 0.20$ درست نیست. یا باید بنویسیم $\Delta D = 0.2$، یا $\Delta D = 0.20 \pm 0.04\,\mathrm{mm}$.

حجمها یی که برا یِ این دو توپ به دست می‌آوریم اینها است:

$$V_1 = (32.52 \pm 0.05)\ \mathrm{cm}^3, \qquad V_2 = (33.01 \pm 0.05)\ \mathrm{cm}^3$$

اختلافِ این دو حجم چه قدر است؟

$$\Delta V = V_2 - V_1 \in [0.40, 0.60]\ \mathrm{cm}^3$$

حتّا در مقدارِ اوّلین رقمِ بعد از ممیّز هم اطمینان نداریم. گزارش کردنِ $0.50\,\mathrm{cm}^3$ درست نیست. بهتر است یا $0.(5)\ \mathrm{cm}^3$ گزارش کنیم، یا از آن بهتر به شکلِ زیر.

$$\Delta V = (0.5 \pm 0.1)\ \mathrm{cm}^3.$$

مبنا یِ ریاضی یِ این کم شدنِ دقّت ساده است.

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \frac{dV_2 - dV_1}{V_2 - V_1} \le \frac{|\,dV_2\,| + |\,dV_1\,|}{V_2 - V_1} = \frac{2 \times 0.05\,\mathrm{cm}^3}{0.5\,\mathrm{cm}^3} = 0.2$$

نکته ای که در محاسبه یِ بالا باید دقّت کرد این است که نمی‌توانیم بگوییم $dV_2 - dV_1 = 0$ زیرا نمی‌دانیم که dV_2 و dV_1 هم‌علامت اند. وقت ی می‌نویسیم $dV_2 = 0.05\,\mathrm{cm}^3$ در واقع یعنی $|\,dV_2\,| = 0.05\,\mathrm{cm}^3$ چون نمی‌دانیم خطا باعث شده که حجمِ کمتر ی به دست آوریم یا حجمِ بیشتر ی.

۴ چند مسئله

۴-۱ سقوطِ آزاد.

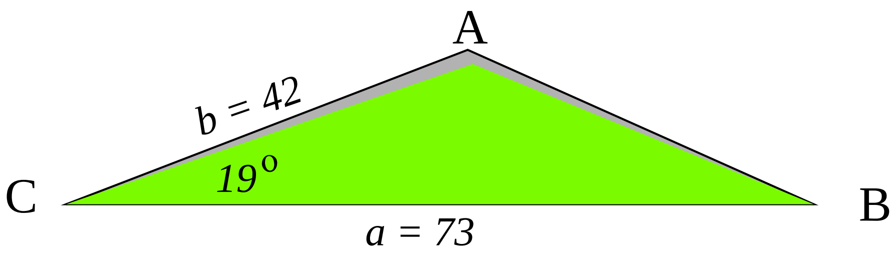
یک ی از آزمایشها یی که در آزمایشگاهِ فیزیکِ عمومیِ یک انجام می‌شود، آزمایشِ سقوطِ آزادِ یک گلوله یِ فلزی است که به کمکِ آن می‌توان شتابِ گرانش را به دست آورد. اساسِ آزمایش بسیار ساده است. گلوله ای فلزّی از ارتفاعِ h سقوط می‌کند، و زمانِ سقوط را یک زمانسنج ثبت می‌کند، و داریم

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2\,h}{t^2}$$

ببینیم با چنین آزمایش ی شتابِ گرانش را با چه دقّت ی می‌توان سنجید. دقّتِ سنجشِ ارتفاع را dh و دقّتِ سنجشِ زمان را dt می‌نامیم. واضح است که داریم

$$\frac{dg}{g} = \frac{dh}{h} - 2\frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{dg}{g}\right| \le \frac{|\,dh\,|}{h} + 2\frac{|\,dt\,|}{t}$$

دقّتِ زمانسنجی با زمانسنجها یِ دیجیتالِ معمول در آزمایشگاه‌ها بهتر از $5\,\mathrm{ms} = 0.005\,\mathrm{s}$ نیست. اگر ارتفاع حدودِ یک متر باشد، زمانِ سقوط حدودِ نیم ثانیه است، و به این ترتیب $2\,dt/t$ حدودِ 0.02 است. حتّا اگر دقّتِ سنجشِ ارتفاع در حدِ یک میلیمتر باشد، یعنی اگر $dh/h \simeq 0.001$ باز هم، دقّتِ سنجشِ شتابِ گرانش با این



شکل ۱: فرقِ مثلث ی که ضلعها یش سیاه است با مثلثِ سبز فقط در این است که زاویه یِ راسِ C در مثلثِ سیاه دو درجه بیشتر از زاویه یِ راسِ C در مثلثِ سبز است. به تفاوتِ مساحتِ این دو مثلث (ناحیه یِ خاکستری) توجه کنید. نتیجه این که خطا یِ دو درجه در سنجشِ زاویه ی راس منجر به خطا ی نسبتا زیاد ی در مساحت می‌شود. اندازه یِ خطا به زاویه بسته‌گی دارد.

آزمایش حدودِ 0.02 است، که یعنی اگر شتابِ گرانش مقدارِ $9.80\,\mathrm{m/s^2}$ باشد، بازه یِ زیر برا یِ جوابها معقول است.

$$9.80 \times (1 - 0.02) = 9.60\,\mathrm{m/s^2}, \qquad 9.80 \times (1 + 0.02) = 10.00\,\mathrm{m/s^2}$$

حالا فرض کنید زمانسنجها یی داریم که با دقّتِ $0.001\,\mathrm{s}$ زمان را می‌سنجند. اگر ارتفاعِ دو متر را با دقّتِ یک میلیمتر سنجیده باشیم، آن وقت داریم

$$\frac{dh}{h} = 0.001, \quad \frac{dt}{t} = 0.0015 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dg}{g} \le 0.004$$

که یعنی اگر $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ باشد، بازه یِ زیر برا یِ جوابها یی که به دست می‌آید معقول است.

$$g_{\min} = 9.76\,\mathrm{m/s^2}, \qquad g_{\max} = 9.84\,\mathrm{m/s^2}$$

دقت کنید که وقت ی این دو عدد را فقط با دو رقمِ معنی‌دار گزارش می‌کنیم، هر دو یک ی می‌شوند.

$$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

پس در این مورد گزارش کردنِ شتاب با بیش از دو رقمِ معنی‌دار کارِ درست ی نیست. نتیجه آن که خیلی‌وقتها قاعده یِ سرانگشتی یِ تعدادِ رقمها یِ معنی‌دار درست نیست. در این موردِ خاص، هم طول و هم زمان را با سه رقمِ معنی‌دار سنجیده ایم، امّا در موردِ مقدار ی که برا یِ شتاب به دست می‌آوریم فقط به دو رقمِ آن اطمینان داریم. رقمِ سوّم دقیق نیست. در یک کارِ جدی یِ فیزیک، چه آزمایشگاهی و چه نظری، باید محاسبه یِ برآوردِ خطا را انجام داد و بر اساسِ آن نتیجه را گزارش کرد.

۴-۲ مسّاحی: دو ضلع و زاویه یِ بین.

فرض کنید می‌خواهیم مساحتِ یک قطعه کاغذ به شکلِ مثلث را اندازه‌گیری و گزارش کنیم. فرض کنید خط‌کش ی داریم با دقّتِ میلی‌متر و نقاله ای داریم با دقّتِ درجه. دو ضلع و زاویه یِ بینِ آن دو ضلع را می‌سنجیم. فرض

کنید این عددها به دست آمده باشند.

$$a = 73\,\mathrm{cm}, \quad b = 42\,\mathrm{cm}, \quad \theta = 19^\circ$$

مساحتِ این مثلث با فرمولِ ساده یِ زیر داده می‌شود.

$$A = \frac{1}{2} a\, b\, \sin\theta$$

عدد ی که با استفاده از این فرمول به دست می‌آید این است:

$$A = 499.09598\,\mathrm{cm}^2$$

با دیفرانسیل‌گیری داریم

$$\frac{dA}{A} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \cot\theta\, d\theta$$

داریم

$$\frac{da}{a} = \frac{0.1}{73} = 0.00137, \quad \frac{db}{b} = \frac{0.1}{42} = 0.00238, \quad \cot\theta\, d\theta = 2.90421 \times 0.01745 = 0.05069$$

در موردِ محاسبه یِ آخر باید به یاد داشته باشیم که $1^\circ = 0.01745\,\mathrm{Rad}$. واضح است که

$$\frac{dA}{A} \le 0.05$$

که یعنی دقّتِ نسبی یِ سنجشِ مساحت با این روش 5% است و این یعنی

$$dA = 499.096 \times 0.05 \simeq 25\,\mathrm{cm}^2$$

یعنی مساحت عدد ی در بازه یِ $[474, 524]\,\mathrm{cm}^2$ است. بنا بر این گزارش کردنِ مساحت به صورتِ $A = 499.096\,\mathrm{cm}^2$، هر چند که از یک ضربِ دقیق به دست آمده، درست نیست. بهتر است آن را به یک از صورتها یِ زیر گزارش کنیم.

$$A = 499 \pm 25\,\mathrm{cm}^2 \quad A = 5(00)\,\mathrm{cm}^2, \quad A = 5 \times 10^2\,\mathrm{cm}^2$$

۴-۳ مسّاحی: دو زاویه و ضلعِ بین.

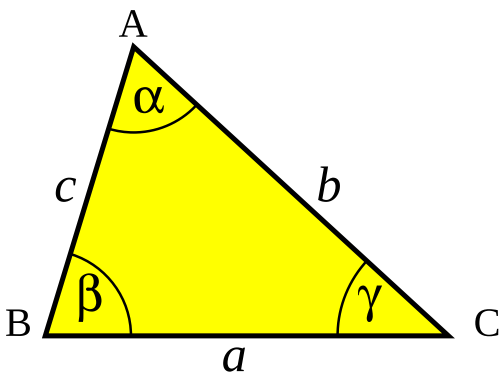
فرض کنید می‌خواهیم مساحتِ یک مثلث را با سنجیدنِ یک ضلع و دو زاویه یِ مجاورِ آن بسنجیم. می‌دانیم که روابطِ زیر برقرار است.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \qquad \alpha = \pi - \beta - \gamma$$

$$A = \frac{1}{2} a\, c\, \sin\beta = \frac{1}{2}\, a\, \left(a\, \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) \sin\beta = \frac{1}{2}\, a^2\, \frac{\sin\beta\, \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}\, a^2\, f(\beta,\gamma)$$

با مشتق‌گیری می‌توان نشان داد که داریم

$$\frac{dA}{A} = 2\,\frac{da}{a} - \frac{\csc^2\beta\, d\beta + \csc^2\gamma\, d\gamma}{\cot\beta + \cot\gamma}$$



شکل ۲: با دانستنِ دو زاویه و طولِ ضلعِ بینِ آن دو می‌توان مساحتِ مثلث را به دست آورد. اگر a و β و γ معلوم باشند، مساحتِ مثلث $A = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$ است.

فرض کنید در یک سنجش عددها ی زیر به دست آمده باشند.

$$\beta = 58^\circ, \quad \gamma = 63^\circ, \quad d\beta = d\gamma = 1^\circ = 0.02\,\mathrm{Rad}, \quad a = 76.3\,\mathrm{m}, \quad da = 0.1\,\mathrm{m}$$

با محاسبه معلوم می‌شود که داریم

$$2\,\frac{da}{a} \simeq 0.002, \qquad \frac{df}{f} \simeq 2.34 \times 0.02 \simeq 0.05$$

که از این جا معلوم می‌شود که عمده ی خطا ناشی از خطا در سنجشِ زاویه‌ها است، و این خطا حدودِ 5% است. مساحت را می‌توانیم حساب کنیم. با ماشینِ حساب به دست می‌آوریم

$$A = \frac{1}{2}\,(76.3)^2\;\frac{\sin 58^\circ \times \sin 63^\circ}{\sin(58^\circ + 63^\circ)} = 2565.98937\,\mathrm{m}^2$$

اما این عدد را نباید به این شکل گزارش کنیم، زیرا معنی ندارد، زیرا خطا یِ آن از مرتبه یِ زیر است.

$$dA \simeq 2570 \times 0.05 \simeq 130\,\mathrm{m}^2.$$

پس می‌نویسیم:

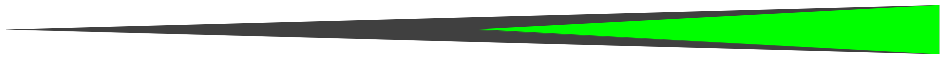
$$A = (2.56 \pm 0.13) \times 10^3\,\mathrm{m}^2.$$

حالتِ حدّی یِ زیر جالب است. فرض کنید

$$a = 10.000\,\mathrm{m}, \quad da = 1\,\mathrm{mm}, \quad \beta = \gamma = 88^\circ, \quad |\,d\beta\,| = |\,d\gamma\,| = 1^\circ$$

با محاسبه یِ فرمولها یی که در بالا آمد به دست می‌آید:

$$A = 286.36253\,\mathrm{m}^2, \qquad dA \simeq 140\,\mathrm{m}$$



شکل ۳: اگر بخواهیم مساحتِ یک مثلثِ دراز را با سنجشِ طولِ ضلعِ کوچکتر و دو زاویه یِ نزدیک به قائمه یِ آن بسنجیم، باید دقّت کنیم که سنجش به شدّت به دقّتِ زاویه‌سنجی حساس است. در موردِ شکل ی که می‌بینیم، هر دو مثلث متساوی‌الساقین اند و قاعده یِ هر دو مشترک است. در این شکل، زاویه یِ ساقها با قاعده در مثلثِ سبز $87°$ و در مثلثِ خاکستری (که بخش ی از آن زیرِ مثلثِ سبز است) $88°.5$ است.

یعنی حدودِ 50% خطا. پس باید مساحتِ این مثلثِ دراز را به این شکل گزارش کنیم.

$$A = (3.0 \pm 1.5) \times 10^2\,\mathrm{m}^2.$$

این نمونه به خوبی نشان می‌دهد که وقت ی با زاویه سر و کار داریم، باید حتماً یک برآوردِ خطا انجام دهیم و با توجه به آن نتیجه را گزارش کنیم. قاعده یِ سرانگشتی یِ عددها یِ معنی‌دار وقت ی با زاویه‌ها سر و کار داریم خوب عمل نمی‌کند. در موردِ مثال ی که هم اینک دیدیم، طول را با پنج رقمِ معنی‌دار، و زاویه‌ها را با دقّتِ 2% می‌دانیم، امّا مساحت را فقط می‌توانیم با دقّتِ 50% تخمین بزنیم!

۴-۴ زمانِ مشخصه یِ خازن.

اگر دو پایانه یِ یک خازنِ پُر شده را با یک مقاومت (مثلاً مقاومتِ درونی یِ یک ولتمتر) به هم وصل کنیم، شروع به خالی شدن می‌کند. می‌توان نشان داد که اگر اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ خازن در لحظه یِ $t_0 = 0$ برابرِ V_0 بوده باشد، در لحظه یِ t با فرمولِ زیر داده می‌شود.

$$V(t) = V_0\, e^{-t/\tau}, \qquad \tau = RC$$

که در این جا R مقاومت و C ظرفیتِ خازن است. فرض کنید می‌خواهیم τ را بسنجیم. یک آزمایش که در آزمایشگاهِ فیزیکِ ۲ انجام می‌شود این است که ابتدا خازن را پُر کنیم، و بعد در مدار قرار دهیم (که عملاً یعنی دو طرفِ آن را از باطری قطع کنیم و به ولتمتر وصل کنیم). کمیّت‌ها یی که سنجیده می‌شوند V_0، $V(t)$، و t است. دقّتِ سنجشِ اختلافِ پتانسیل معمولاً حدودِ $0.1\,\mathrm{V}$ است. زمانسنجی، اگر با یک کرونومترِ معمولی و با دست انجام شود، دقّت ی بهتر از $1\,\mathrm{s}$ ندارد. (هر چند می‌توان عددها یِ رو یِ کرونومتر را با دقّت ی در حدِ دهمِ ثانیه خواند. نکته این جا است که قطع و وصل کردنِ کرونومتر با دست، خطا یی در حدِ نیم ثانیه دارد؛ نیم ثانیه در قطع، و نیم ثانیه در وصل.) حالا می‌خواهیم دقّتِ سنجشِ τ را تخمین بزنیم.
ابتدا فرمولها

$$V = V_0\, e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{t}{\ln V - \ln V_0}$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dt}{t} - \frac{d\ln V - d\ln V_0}{\ln V - \ln V_0}$$

$$\left|\frac{d\tau}{\tau}\right| \le \left|\frac{dt}{t}\right| + \frac{\left|\frac{dV}{V}\right| + \left|\frac{dV_0}{V_0}\right|}{\left|\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\right|}$$

$$\frac{dt}{t} \simeq \frac{1}{20} = 0.05, \qquad \left|\frac{dV}{V}\right| \simeq \left|\frac{dV_0}{V_0}\right| \simeq \frac{0.1\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{V}} \simeq 0.03$$

$$\frac{d\tau}{\tau} \simeq 0.1 = 10\%$$

یعنی با این ابزارها اگر زمانِ مثلاً $67\,\mathrm{s}$ برا یِ τ به دست آید، جواب را باید به یک ی از اشکالِ زیر گزارش کرد.

$$\tau = 67 \pm 7\,\mathrm{s}, \qquad \tau = 7 \times 10^1\,\mathrm{s}.$$

فرض کنید در مدار ی که گفته شد، V_0، τ، و t را با دقّتِ خوب ی، مثلاً 0.001 می‌دانیم. مقدار یِ را که برا یِ $V(t)$ می‌توانیم محاسبه کنیم با چه دقّت ی باید گزارش کنیم؟ خطا را تخمین می‌زنیم

$$V(t) = V_0\, e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln V = \ln V_0 - \frac{t}{\tau}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dV_0}{V_0} - \frac{dt}{\tau} + \frac{t\,d\tau}{\tau^2} \le \left|\frac{dV_0}{V_0}\right| + \left|\frac{dt}{\tau}\right| + \frac{t}{\tau}\cdot\left|\frac{d\tau}{\tau}\right| \le 0.001 + 0.001 + 0.001 \times \frac{t}{\tau}$$

می‌بینیم که اگر t مثلاً پنج برابرِ τ باشد، داریم

$$\left|\frac{dV_0}{V_0}\right| \le 0.007 \simeq 0.01 = 1\%$$

یعنی هرچند هر سه کمیّتِ V_0، t، و τ را با دقّتِ 0.1% می‌دانیم، اما نمی‌توانیم مقدارِ $V(t)$ را با دقّت ی بهتر از 1% گزارش کنیم.

۵ خطاها یِ تصادفی

سنجشِ بسیار ی از کمیّت‌ها ماهیّت ی آماری دارد. مثلاً دانه‌ها یِ لوبیا را در نظر بگیرید. هر دانه یِ لوبیا جرم ی مشخص دارد که می‌توان با یک ترازو یِ دقیق سنجید. امّا جرمِ تک تکِ لوبیاها کمیّتِ چندان به‌دردبخور ی نیست. اگر با تعدادِ زیاد ی لوبیا سر و کار داریم، میانگینِ جرمِ لوبیاها کمیّتِ به‌دردبخورتر ی است. فرض کنید بسته ای شاملِ N دانه یِ لوبیا داشته باشیم. می‌توانیم جرمِ میانگین را نسبتاً به ساده‌گی به دست آوریم.

$$\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$$

وردایی، یا واریانسِ جرمِ این لوبیاها یعنی کمیّتِ زیر:

$$\operatorname{var} m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (m_i - \overline{m})^2$$

جذرِ واریانس انحرافِ معیار نام دارد و معمولاً با σ نشان داده می‌شود. انحرافِ معیارِ جرمِ لوبیاها معیار ی است از انحرافِ مقدارِ جرمِ لوبیاها از مقدارِ میانگین. همواره وقت ی میانگینِ یک کمیّت را گزارش می‌کنیم، باید انحرافِ معیارِ آن را هم گزارش کنیم. مثلاً، در یک سنجشِ جرمِ تعداد ی لوبیا این عددها به دست آمده است.

$$\overline{m} = 0.398\,\mathrm{g}, \qquad \sigma = 0.098\,\mathrm{g}.$$

(رقم‌ها یِ دوم و سومِ پس از ممیّز در این دو کمیّت، کاملاً به تصادف یک ی شده اند.) هر وقت کمیّت ی را با تکرارِ آزمایش سنجیدیم، باید میانگین و انحرافِ معیارِ آن را گزارش کنیم.

اکنون فرض کنید بسته ای داریم شاملِ لوبیاها یی با مشخصاتِ بالا، و نخودها یی با مشخصاتِ زیر

$$\overline{m'} = 0.412\,\mathrm{g}, \qquad \sigma = 0.108\,\mathrm{g}.$$

فرض کنید بسته‌ها یی درست کنیم که در هر کدام یک لوبیا و یک نخود باشد. میانگینِ جرمِ این بسته‌ها مجموعِ میانگینِ جرمِ لوبیا و میانگینِ جرمِ نخود است.

$$\overline{M} = \overline{m} + \overline{m'}.$$

می‌توان نشان داد که واریانسِ جرمِ این بسته‌ها، مجموعِ واریانسِ جرم‌ها یِ لوبیا و نخود است، که این یعنی

$$\operatorname{var} M = \operatorname{var} m + \operatorname{var} m' \quad \Rightarrow \quad \sigma_M = \sqrt{\sigma^2 + (\sigma')^2} = 0.146\,\mathrm{g}$$

اثباتِ این را می‌توانید در کتابها یِ آمار و احتمال، مثلا در [1] ببینید.

۶ پیشنهاد برا یِ مطالعه یِ بیشتر

این مطالب بیشتر در کتابها و جزوه‌ها یِ آزمایش‌گاه‌ها، به خصوص آزمایش‌گاه‌ها یِ شیمی، می‌آید. کتابِ تیلُر [2] کتابِ کامل ی در این مورد است.

مراجع

[1] M. H. DeGroot, *Probability and Statistics*, second edition, Addison Wesley, 1989, p. 197, Theorem 4.

[2] J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis. The study of uncertainities in physical measurements*, University Science Books, 1997, pp. 30–43.