تمرین سری اول منطق
زبان و معناشناسی منطق گزاره ها

حسین نادری

۱۵ اسفند ۱۳۹۴

۱ تمرین یک [۱]

۱.۱ صورت سوال

به ازای هر گزاره بدون $\rightarrow$ مانند ϕ ، گزاره ϕ^* به صورت زیر تعریف می شود:

- $\phi^* = (\neg\phi)$ برای هر ϕ اتمی
- $\phi^* = (\psi^* \vee \theta^*)$ اگر $\phi = (\psi \wedge \theta)$
- $\phi^* = (\psi^* \wedge \theta^*)$ اگر $\phi = (\psi \vee \theta)$
- $\phi^* = (\neg\psi^*)$ اگر $\phi = (\neg\psi)$

ثابت کنید برای هر گزاره بدون $\rightarrow$ مانند ψ داریم:

$$\models (\psi^* \leftrightarrow (\neg\psi))$$

۲.۱ پاسخ سوال

از اصل استقرا کمک می گیریم[۲].

۱. بدیهی است که حکم برای هر گزاره اتمی و $\perp$ برقرار است.

۲. اگر حکم برای گزاره های θ و ψ برقرار باشد، داریم:

$$\begin{aligned}(\psi \vee \theta)^* &= (\psi^* \wedge \theta^*)\\ &= (\neg\psi \wedge \neg\theta)\end{aligned}$$

از قضیه ۸ صفحه ۳۵ کتاب [۱] کمک می گیریم:

$$(\neg\psi \wedge \neg\theta) = \neg(\psi \vee \theta)$$

۳. اگر حکم برای گزاره های θ و ψ برقرار باشد، داریم:

$$\begin{aligned}(\psi \wedge \theta)^* &= (\psi^* \vee \theta^*)\\ &= (\neg\psi \vee \neg\theta)\end{aligned}$$

از قضیه ۹ صفحه ۳۵ کتاب [۱] کمک می گیریم:

$$(\neg\psi \vee \neg\theta) = \neg(\psi \wedge \theta)$$

۴. اگر حکم برای گزاره ی θ برقرار باشد، داریم:

$$(\neg\theta)^* = (\neg\theta^*)$$

پس،

$$\omega^* \leftrightarrow \neg\omega$$

$\diamond$

۲ تمرین دو

۱.۲ سوال ها

۱. برای هر گزاره ψ نشان دهید تعداد پرانتز های چپ و راست ظاهرشده در ψ برابراند.

[۱] درگام استقرا طبق گفته سوال $\rightarrow$ منظور نشده است.

[۲] پایه و گام های استقرا را مشابه با روند مطرح شده درکتاب شماره گذاری می کنیم.

۲. برای هر پاره آغازین از ψ تعداد «)» ظاهر شده به طور اکید بزرگتر از تعداد «)» است.

۳. نشان دهید هر گزاره غیراتمی σ به طور یکتا به یکی ازصورت های $\sigma = (\neg\phi)$ ، $\sigma = (\phi \to \psi)$، $\sigma = (\phi \vee \psi)$ یا $\sigma = (\phi \wedge \psi)$ قابل تجزیه است.

۲.۲ پاسخ ها

۱. از اصل استقرا استفاده می کنیم.
۱. به وضوح حکم برای گزاره های اتمی و $\perp$ برقرار است، چون هیچ پرانتزی ندارند.
۲. اگر حکم برای گزاره های θ و ψ برقرار باشد، برای $(\theta\wedge\psi), (\theta\vee\psi), (\theta \to \psi)$ هم برقرار است. چون به تعداد پرانتز های بازشونده و بسته شونده دقیقا یک واحد افزوده می شود.
۳. اگر حکم برای گزاره ی θ برقرار باشد، مشابه بالا برای $(\neg\theta)$ هم برقرار است.

$\diamond$

۲. ۱. حکم برای گزاره های اتمی برقرار است، چون این گزاره ها اصلا پاره ی آغازین ندارند. [3]

۲. اثبات می کنیم اگر حکم برای گزاره های θ و ψ برقرار باشد، برای $(\theta \wedge \psi)$، $(\theta \vee \psi)$،$(\theta \to \psi)$ هم برقرار است. اگر پاره آغازین $(\theta * \psi)$ شامل کل گزاره θ نشود، پرانتز باز شونده ی ابتدایی را از پاره آغازین حذف می کنیم، حال عبارتی که باقی مانده، پاره آغازین است که درستی حکم را در مورد آن فرض کرده بودیم.
اگر پاره آغازین دقیقا شامل گزاره θ شود(کل θ بدون ψ)، از قسمت قبل می دانیم تعداد پرانتز های باز شونده و بسته شونده در θ با یک دیگر برابر اند. حال θ را از پاره حذف می کنیم، تنها یک پرانتز باز شونده ابتدایی می ماند که حکم برای آن صادق است. اگر θ را به پاره برگردانیم باز هم حکم برقرار است.
اگر پاره آغازین $(\theta * \psi)$ شامل گزاره ψ هم بشود، طبق قسمت قبل می دانیم تعداد پرانتز های باز شونده و بسته شونده در θ با یک دیگر برابر اند. پس θ را حذف می کنیم. حال می دانیم برای هر پاره از ψ تعداد پرانتز های باز شونده بزرگتر یا مساوی تعداد پرانتز های بسته شونده است. یک پرانتز بازشونده هم که در ابتدای عبارت از قبل موجود بوده، پس تعداد کل پرانتز های باز شونده اکیدا بزرگتر از تعداد پرانتز های بسته شونده است.
۳. اگر حکم برای گزاره ی θ برقرار باشد، برای $(\neg\theta)$ هم برقرار است. کافی است پرانتز ابتدایی و $\neg$ را از پاره حذف کنیم، طبق فرض برای عبارت جدید حکم برقرار است. حال اگر $\neg($ را به ابتدای عبازت باز گردانیم، باز هم تعداد پرانتز های باز شونده اکیدا بزرگتر از تعداد پرانتز های بسته شونده است.

$\diamond$

۳. ازکتاب [۱] می دانیم هر گزاره تجزیه پذیر است[4] .می خواهیم ثابت کنیم هر گزاره به طور یکتا تجزیه پذیر است. فرض کنید یک گزاره به چند طریق تجزیه پذیر باشد. دو حالت پیش می آید:

(آ) دست کم دو تجزیه که هر کدام دو گزاره یا یک ادات دو موضعی میان آن دو باشد.

(ب) دست کم دو تجزیه که حداقل یکی به صورت نقیض و دیگری یک تجزیه با یک ادات دو موضعی باشد.

(ج) همه تجزیه ها به صورت نقیض یک عبارت (ادات تک موضعی) باشند. بدیهی است که این حالت رخ نمی دهد.

حالت (ب) غیر ممکن است، چون آخرین ادات استفاده شده یا تک موضعی است یا دو موضعی؛ که در این صورت عبارت نمی تواند به هر دو روش با دو ادات با تعداد موضع مختلف تجزیه شود.

[3] به علت این که پاره آغازین در صورت سوال تعریف نشده است، فرض کرده ایم کل گزاره نمی تواند پاره آغازین باشد.
[4] پس از اثبات معادل بودن تعریف بالا و پایین $Prop$ در کتاب از تجزیه استفاده شده است.
[5] طول یک عبارت را برابر تعداد پرانتزهای(ادات ها) به کار رفته در آن تعریف می کنیم.

در حالت (آ) نیز σ را به دو صورت $(\phi \circ \psi)$ و $(\theta \circ \omega)$ نوشت. که در این صورت طول[5] ϕ و θ یکسان نمی تواند باشد. بدون کاستن از کلیت مساله اگر طول ϕ کمتر از θ باشد، $\eta = \sigma - (\phi + \omega)$ هم یک گزاره است [۶]. حال گزاره ما به صورت $(\phi \circ \eta \circ \omega)$ هم تجزیه می شود که چون ادات های مطرح شده در سوال حداکثر دو موضعی اند، چنین چیزی ممکن نیست.

۳ تمرین سه

۱.۳ صورت سوال

نشان دهید تنها ادوات دو موضعی کامل دو ادات زیر هستند:

- ادات شفر با تابع ارزش $I(\psi|\phi) = ۰$ اگر و فقط اگر $I(\phi) = I(\psi) = ۱$
- ادات پیرس با تابع ارزش $I(\psi \downarrow \phi) = ۰$ اگر و فقط اگر $I(\phi) = I(\psi) = ۰$

راهنمایی: اگر o ادات دو موضعی کاملی باشد، نشان دهید $I(\top \circ \top) = ۰$ و $I(\bot \circ \bot) = ۱$

۲.۳ پاسخ سوال

برهان خلف را در پیش می گیریم. ابتدا فرض می کنیم ادات دو موضعی $\circ$ وجود داشته باشد که $I(\top \circ \top) = ۱$ یا $I(\bot \circ \bot) = ۰$. پس روشی وجود دارد که $\neg$ را بتوان بر حسب ادات دو موضعی o نوشت. کوچکترین گزاره ای (کمترین تعداد ادات $\circ$ را داشته باشد) را در نظر می گیریم $(\neg p)$ را نتیجه بدهد. به سادگی می توان نشان داد که می توان آن را به صورت $(A \circ B)$ تجزیه کرد (حالت خاصی از قسمت سوم تمرین دو). اکنون با حالت بندی مساله را حل می کنیم:

- اگر $I(A) = I(B)$ نباشد، ارزش یکی از این دو با ارزش p یکسان نیست و در نتیجه $(A \circ B)$ کوچکترین معادل برای $\neg$ نبوده است.
- اگر $I(p) = I(A) = I(B) = I(A \circ B)$ باشد، در عمل این دستور معادل نقیض نبوده است، پس این حالت نیز امکان ندارد.
- $I(A) = I(B) \neq I(A \circ B)$ تنها حالتی است که باقی مانده، که همان حکم سوال است.

$\diamond$

مراجع

[۱] محمد اردشیر. *منطق ریاضی*. انتشارت هرمس، چاپ سوم، ۱۳۹۳.

[2] Logic Group of SUT
`http://logic.sharif.ir`

[۶] می توان ثابت کرد شرط لازم و کافی برای معتبر بودن یک گزاره شرط های قسمت یک و دو سوال می باشند. با استفاده از این دو شرط نشان می دهیم یک گزاره معتبر است.