به نام خدا

سوالات دوره تابستانی المپیاد فیزیک

سال 90

درخت تو گر بار دانش بگیرد　　　　به زیر آوری چرخ نیلوفری را

جمع آوری:

محمد طینتی

سری اول

امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

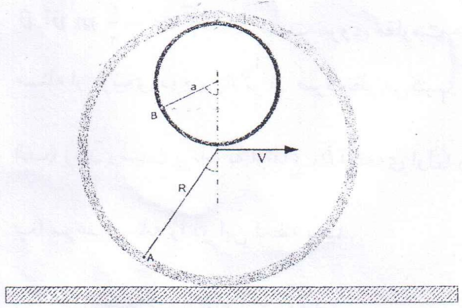
وقت: ۳٫۵ ساعت

۹۰/۴/۳۰

مسئله‌ی ۱

دو استوانه‌ی غلتان

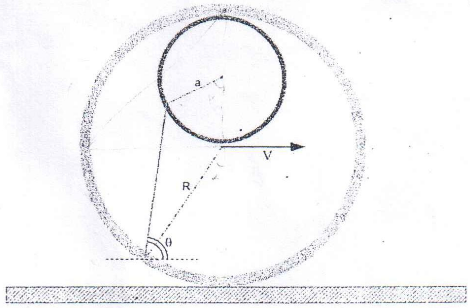
دو پوسته‌ی استوانه‌ای نازک در داخل یکدیگر قرار گرفته‌اند و نسبت به یکدیگر حرکت غلتشی دارند. شعاع استوانه‌ی بزرگتر R، و شعاع استوانه‌ی کوچکتر $a = R/2$ می‌باشند؛ سازوکار دستگاه به‌گونه‌ای است که ارتفاع مرکزهای دو استوانه تثبیت شده‌اند و با گذشت زمان تغییر نمی‌کنند؛ در این‌صورت استوانه‌ی کوچکتر همواره در بالاترین مکانِ ممکن (ارتفاع مرکزِ آن $y = R + a$) قرار دارد. در $t = 0$ دو نقطه‌ی A و B در پایین‌ترین مکان ممکن قرار گرفته‌اند. حال استوانه‌ی بزرگتر را روی سطح حاشور خورده می‌غلتانیم؛ به‌طوریکه مرکز استوانه با سرعت $V\hat{x}$ حرکت می‌کند.



الف – مختصات نقطه‌ی A را در دستگاه دکارتی بیابید. (2 نمره)

ب – مختصات نقطه‌ی B را بیابید. (3 نمره)

در بخش بعدی دو نقطه‌ی A و B را با یک میله‌ی انعطاف پذیر به هم متصل می‌کنیم. طول میله به راحتی کم و زیاد می‌شود؛ اما میله مستقیم‌الخط باقی می‌ماند. زاویه‌ی میان میله و سطح افق را θ می‌نامیم.



اگر در زمان $t = 0$ زاویه‌ی θ مقدار $\pi/2$ را داشته باشد:

پ – مطلوبست پیدا کردن رشته زمان‌هایی که $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ می‌شود؟ (3 نمره)

ت- منحنی θ را برحسب زمان را رسم نمایید. (2 نمره)

ث – موفق باشید. (؟ نمره)

دقت کنید که تمام حرکت‌ها غلتش محض می‌باشند و هیچ لغزشی رخ نمی‌دهد.

مسئله‌ی ۲

جسمی به جرمِ m با سرعتِ اولیه‌ی v_0 به طورِ عمودی به سمتِ بالا پرتاب می‌شود. شتابِ گرانش g به سمتِ پایین و ثابت است. نیروی مقاومتِ محیط در ناحیه‌ی بینِ سطحِ زمین تا ارتفاعِ $h_1 = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g}$ برابر با $\vec{f} = -\epsilon\, m\, v^2\, \hat{v}$ است (که در آن ϵ ثابتی معلوم است). از این ارتفاع به بالا، نیروی مقاومتِ هوا $\vec{f} = -\frac{\epsilon}{2}\, m\, v^2\, \hat{v}$ است. نسبتِ نیروی مقاومتِ هوا به وزنِ جسم (یعنی $\frac{\epsilon v^2}{g}$) خیلی کوچک است و در کلِ مسئله از مرتبه‌ی دوم و بالاترِ آن صرف‌نظر می‌کنیم.

الف) زمانِ رسیدنِ پرتابه به ارتفاعِ h_1 (دفعه‌ی اول) را حساب کنید.

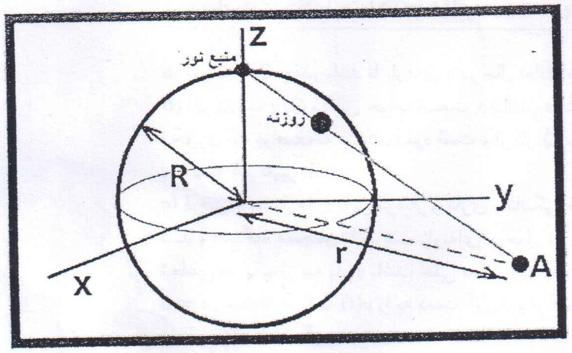
ب) سرعتِ پرتابه را در این لحظه بیابید.

پ) زمانِ رسیدن به ارتفاعِ اوج را بیابید.

ت) ارتفاعِ اوج را بیابید.

مسئله ۳

یک پوسته‌ی کروی به شعاعِ R به مرکزِ مبدأ مختصات داریم. نقطه‌ای نورانی در قطبِ شمالِ آن قرار دارد. سطحِ کره کدر است و روزنه‌ای شفاف در آن قرار دارد. در نتیجه نوری که از روزنه عبور می‌کند نقطه‌ای نورانی روی صفحه‌ی xy ایجاد می‌کند. این نقطه را A می‌نامیم. می‌خواهیم حرکتِ این نقطه‌ی نورانی را بررسی کنیم.



در لحظه‌ی t=۰ روزنه در مختصاتِ کروی در $\theta = \theta_0$ و $\phi = 0$ قرار دارد و شعاعِ کره نیز R_0 است. شعاعِ کره و موقعیتِ روزنه با آهنگ‌های ثابت $\dot{R} = v$، $\dot{\theta} = \omega$ و $\dot{\phi} = \Omega$ تغییر می‌کنند. (فقط مکانِ روزنه تغییر می‌کند. مکان منبعِ نقطه‌ای همیشه قطبِ شمالِ کره است و عوض نمی‌شود.) در طولِ این مسئله زمان‌هایی را در نظر می‌گیریم که $\theta < \frac{\pi}{2}$ است.

الف) فاصله‌ی نقطه‌ی A را از مبدأ (r در شکل) را در لحظه‌ی t=۰ بر حسبِ R_0 و θ_0 در مختصاتِ دکارتی بیان کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ را بر حسبِ زمان بیابید.

پ) تعریف می‌کنیم $x \equiv \pi \frac{\omega}{\Omega}$. می‌خواهیم پارامترهای مسئله در معادله‌ای صدق کنند که وقتی ϕ نسبت به لحظه‌ی نخست یک دورِ کامل زد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ همان مقدارِ لحظه‌ی t=۰ را داشته باشد. این معادله به صورتِ $\tan(x) = f(x)$ است. $f(x)$ را بر حسبِ ω، R_0، v، θ_0 و x بیابید.

ت) منحنی تابعِ $f(x)$ را بر حسبِ x رسم کنید.

ث) فرض کنید $\Omega > 2\omega$ است. شرطی بینِ ω، R_0، v، θ_0 بیابید که برای x جوابی وجود داشته باشد که اتفاقِ موردِ نظر در بندِ (پ) بیفتد.

مسئله‌ی ۴) بار نقطه ای Q در مرکز یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a و بارهای یکسان q روی رئوس آن قرار دارند.

جواب‌هایِ خود را حتماً در جعبه‌هایِ مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) نسبت Q/q چقدر باشد تا بارهای q در حال تعادل باشند.

b) اگر نسبت Q/q مطابق جواب قسمت a نباشد، دستگاه را با چه سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که بر صفحه مثلث عمود است و از بار Q می گذرد بچرخانیم تا موقعیت بارها نسبت به هم تغییر نکند.

c) فرض کنید بارهای q بر اثر ساز و کاری مکانیکی فقط بتوانند در راستای شعاع حرکت کنند و دستگاه همچنان با سرعت زاویه‌ای ω حول محور یاد شده می‌چرخد. اگر r_i مختصه شعاعی هر یک از سه بار q باشد، حلی به صورت $r_i(t) = \frac{2}{3}a + \rho(t)$ را در نظر بگیرید که $a \gg \rho$. معادله حرکت $\rho(t)$ را به دست آورید و از آنجا ω_r بسامد نوسان شعاعی هماهنگ سه ذره را به دست آورید.

بسمه تعالی

ادامه‌ی امتحان اول الکترومغناطیس (تابستان ۹۰)

وقت: ۲ ساعت

۹۰/۴/۳۰

مسئله‌ی ۵

وقتی دو بارِ الکتریکی q و q– در فاصله‌ی d از هم قرار داشته باشند، اگر d به سمتِ صفر و q به سمتِ بینهایت میل کند به طوری که حاصل‌ضربِ qd مقداری محدود بماند، به این موجود دوقطبی الکتریکی می‌گوییم. گشتاورِ دوقطبی الکتریکی را برداری به بزرگی qd تعریف می‌کنیم که جهتِ آن از بارِ منفی به بارِ مثبت است.

الف) یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای در مکانِ $\vec{r_1}$ قرار دارد و گشتاورِ دوقطبی‌اش $\vec{p}$ است. یک بارِ نقطه‌ای q در مکانِ $\vec{r_2}$ است. بردارِ نیرویی که دوقطبی به بار وارد می‌کند را بر حسبِ بردارهای $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{p}$ و q حساب کنید. یعنی $\vec{F}(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{p}, q)$ را بیابید.

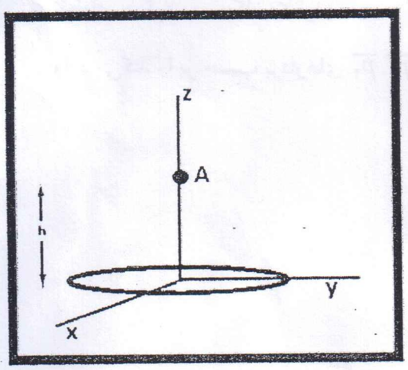
ب) یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای در مکانِ $\vec{r_1}$ قرار دارد و گشتاورِ دوقطبی‌اش $\vec{p_1}$ است. دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای دیگری در مکانِ $\vec{r_2}$ قرار دارد و گشتاورِ دوقطبی‌اش $\vec{p_2}$ است. بردارِ نیرویی که دوقطبی اول به دومی وارد می‌کند را بر حسبِ بردارهای $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{p_1}, \vec{p_2}$ حساب کنید. یعنی $\vec{F}(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{p_1}, \vec{p_2})$ را بیابید.

مسئله ۶

وقتی دو بارِ الکتریکی q و q− در فاصله‌ی d از هم قرار داشته باشند، اگر d به سمتِ صفر و q به سمتِ بی‌نهایت میل کند به طوری که حاصل‌ضرب qd مقداری محدود بماند، به این موجود "دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای" می‌گوییم. گشتاورِ دوقطبی الکتریکی را برداری به بزرگی qd تعریف می‌کنیم که جهتِ آن از بارِ منفی به بارِ مثبت است. اگر یک دوقطبی در مبدأ در جهت $\hat{z}$ داشته باشیم پتانسیلِ نقطه‌ای به فاصله‌ی r از مبدأ که بردارِ مکانش با محورِ $\hat{z}$ زاویه‌ی θ می‌سازد برابر است با:

$$V_{\text{دوقطبی}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, p\, \frac{\cos\theta}{r^2}$$

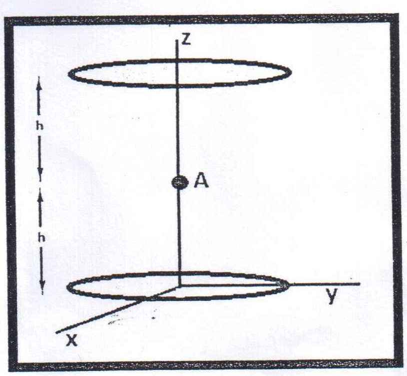
دیسکی به شعاعِ R داریم که محورش در راستای $\hat{z}$ است و مرکزش واقع در مبدأ مختصات است. دیسک دارای چگالی سطحی دوقطبی الکتریکی یکنواختِ $D\,\hat{z}$ است. یعنی عنصری کوچک به مساحت dA دارای گشتاورِ دوقطبی الکتریکی برابر با $D\,dA$ در جهتِ $\hat{z}$ است. نقطه‌ای را که روی محورِ دیسک در فاصله‌ی h از مرکزِ آن قرار دارد، A می‌نامیم (یعنی مختصاتِ آن (۰,۰,h) است.)



الف) پتانسیلِ الکتریکی را در نقطه‌ی A حساب کنید.

ب) یک بارِ نقطه‌ای q در نقطه‌ی A قرار می‌دهیم. نیرویی که به بار وارد می‌شود را بیابید.

پ) دیسکی مشابهِ اولی موازی با آن در فاصله‌ی ۲h از مرکز قرار می‌دهیم طوری که محورهایشان منطبق باشند. دیسکِ بالایی دارای چگالی مشابه با دیسکِ پایینی، ولی در جهتِ $-\hat{z}$ است. بارِ الکتریکی نقطه‌ایq به جرم m را در نقطه‌ی A قرار می‌دهیم و در تعادل می‌ماند. حال آن‌را اندکی در راستای عمودی جابه‌جا می‌کنیم. بسامدِ نوساناتِ کوچکِ بار حولِ نقطه‌ی A را حساب کنید.



سه‌تایی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

۲۰/۵/۹۰

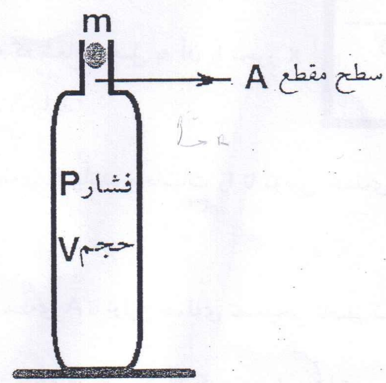
وقت: ۳/۵ ساعت

مسئله‌ی ۱

الف) نوسان‌گرِ Ruchhardt

ظرفی به حجمِ V حاوی گازی با فشارِ P است. دهانه‌ی ظرف دارای سطحِ مقطعِ A است و جسمی به همین سطحِ مقطع و به جرمِ m روی دهانه‌ی آن قرار گرفته و دستگاه به حالتِ تعادل است. حجمِ دهانه در برابرِ حجمِ خودِ لوله قابلِ صرف‌نظر است. جسمِ m را اندکی از موضع تعادل خارج می‌کنیم. با تحلیلِ ابعادی، دوره‌ی تناوبِ نوساناتِ کوچک جسم را بر حسب m و V و P و A به دست آورید.

(راهنمایی: به استقلالِ ابعادِ طولی در جهاتِ مختلف توجه کنید.)



ب) اثرِ کازیمیز (Casimir)

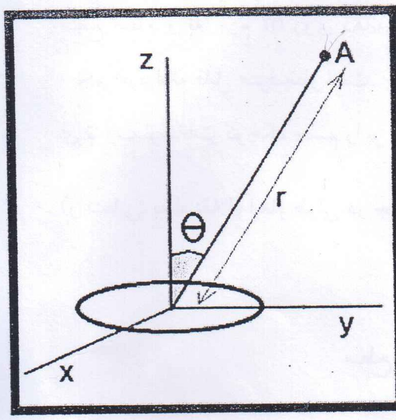
دو صفحه‌ی فلزی بسیار بزرگ با فاصله‌ی d از هم قرار گرفته اند. صفحات بدونِ بار هستند. به علتِ افت و خیز های کوانتومی خلأ موجود بینِ این دو صفحه، نیروی جاذبه‌ای بینِ آنها مشاهده می‌شود. این نیرو در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی مشاهده می‌شود و انتظار داریم سرعتِ نور C و ثابتِ پلانک h در آن نقش داشته باشند.

با تحلیلِ ابعادی، نیروی واحدِ سطحِ وارد بر هر صفحه را بیابید.

(راهنمایی: برای یافتنِ بُعدِ ثابتِ پلانک، از این که انرژی یک فوتون برابر با حاصل‌ضربِ بسامدِ آن در ثابتِ پلانک است استفاده کنید)

مسئله‌ی ۲

حلقه‌ای به شعاعِ R به مرکزِ مبدأ مختصات در صفحه‌ی xy قرار دارد و دارای بارِ کلِ Q است که به طورِ یکنواخت روی آن توزیع شده. اگر شعاعِ حلقه صفر بود، میدان و پتانسیلِ آن، همان میدان و پتانسیلِ بارِ نقطه‌ای می‌شد. این حالت را که شعاعِ حلقه صفر باشد، "حالتِ صفر" می‌نامیم. حال برای یک نقطه به فاصله‌ی r از مبدأ، با فرضِ این‌که $\frac{R}{r}$ خیلی کوچک باشد، می‌توان جملاتِ تصحیحی میدان و پتانسیل را نسبت به حالتِ صفر محاسبه کرد. نقطه‌ی A را که به فاصله‌ی r از مبدأ در صفحه‌ی yz واقع است در نظر بگیرید که با محورِ z زاویه‌ی θ می‌سازد.



الف) فاصله‌ی عنصری از حلقه که شعاعِ واصل به آن با محورِ x زاویه‌ی ϕ می‌سازد را از نقطه‌ی A بیابید.

ب) پتانسیلِ الکتریکی را در نقطه‌ی A بیابید. محاسبات را تا دومین جمله‌ی تصحیحی ناصفر نسبت به حالتِ صفر پیش ببرید.

پ) بردارِ میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی A تا اولین جمله‌ی تصحیحی ناصفر نسبت به حالتِ صفر بیابید.

ت) حلقه‌ای فرضی موازی با این حلقه در نظر بگیرید که محورش منطبق بر محورِ z است و در ارتفاعِ H بالای این حلقه قرار گرفته است. شعاعِ حلقه‌ی فرضی a است. a و H هم‌مرتبه اند. شارِ الکتریکی گذرنده از داخلِ این حلقه‌ی فرضی را تا تصحیحِ اولِ ناصفر نسبت به حالتِ صفر بیابید.

ث) فرض کنید حلقه‌ای کاملاً مشابه با این حلقه در ارتفاعِ R بالایش قرار گیرد (محورهای دو حلقه منطبق است). معادله‌ی خطوطِ میدانِ الکتریکی را برای نقاطِ دور از مبدأ تا تصحیحِ اول نسبت به حالتِ صفر به صورتِ: $f(z,\rho) =$ ثابت به دست آورید، که در آن ρ فاصله از محورِ z است.

راهنمایی:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \sin^{۲}(x)dx = \frac{۱}{۲}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sin^{۳}(x)dx = \frac{۱}{۱۲}(\cos(۳x) - ۹\cos(x)) + C$$

$$\int \sin^{۴}(x)dx = \frac{۱}{۳۲}(۱۲x - ۸\sin(۲x) + \sin(۴x)) + C$$

مسئله‌ی ۳

ظرفی به شکلِ سهمی‌وارِ دورانی داریم که معادله‌ی مقطعِ قائمِ آن $y = \frac{x^2}{k}$ است. ظرف را تا ارتفاعِ h. از آب پُر می‌کنیم. روزنه‌ای بسیار کوچک به مساحتِ A در کفِ ظرف (که در مبدأ مختصات است) ایجاد می‌کنیم. اگر u سرعتِ نقطه‌ای در داخلِ ظرف باشد، در هر لحظه برای نقاطِ مختلف کمیتِ $\frac{1}{2}u^2 + g\,Y$ با هم برابر است، که در آن Y ارتفاعِ آن نقطه (یعنی فاصله‌ی عمودی آن نقطه از روزنه) است. حال برای ساده‌گی فرض می‌کنیم از سرعتِ افقی آب در هر نقطه می‌توان چشم‌پوشی کرد و آن‌را قائم گرفت.

الف) آهنگِ تغییرِ ارتفاعِ سطحِ آب یعنی $\dot{h}$ را به صورتِ تابعی از h بیابید.

ب) فرض کنید $\epsilon \equiv \frac{A}{h\,k}$ کوچک است. زمانی را که طول می‌کشد حجم آبِ داخلِ ظرف نصف شود، تا دومین مرتبه‌ی ناصفر نسبت به ϵ محاسبه کنید. (راهنمایی: پاسخ یک جمله متناسب با $\frac{1}{\epsilon}$ و یک جمله متناسب با ϵ دارد.)

٤- متحرکی مسافتی به طولِ L را با سرعتِ ثابت طی می‌کند. سرعت در بازه‌ی $(v_۱, v_۲)$ قرار دارد و احتمالِ همه‌ی مقادیرِ داخلِ این بازه با هم برابر است.

الف) چه قدر احتمال دارد سرعت کمتر از $\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ باشد؟

با سرعتِ $v_۱$ مدت زمانِ حرکت $t_۱$ و با سرعتِ $v_۲$ مدت زمانِ حرکت $t_۲$ می‌شود.

ب) چه قدر احتمال دارد مدت زمانِ حرکت کمتر از $\frac{t_۱+t_۲}{۲}$ باشد؟

حال فرض کنید همچنان سرعت در بازه‌ی فوق قرار دارد اما این بار همه‌ی مقادیرِ داخلِ این بازه هم‌احتمال نیستند.

پ) اگر $P(v)\ dv$ احتمالِ این باشد که سرعت بینِ v و $v+dv$ باشد و داشته باشیم: $P(v)=\alpha\ e^{-\lambda v}$، که در آن α و λ پارامترهای ثابت اند، مقدارِ α را بر حسبِ $v_۱, v_۲, \lambda$ به دست آورید به طوری‌که جمعِ احتمالات ۱ شود.

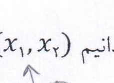
ت) در این حالت چه قدر احتمال دارد سرعت کمتر از $\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ باشد؟

ث) چه قدر احتمال دارد مدت زمانِ حرکت کمتر از $\frac{t_۱+t_۲}{۲}$ باشد.

ج) اگر مقدارِ λ کوچک باشد توزیعِ سرعت به حالتِ یکنواخت نزدیک است. با فرضِ کوچک بودنِ λ تفاوتِ پاسخِ قسمتِ قبل را با پاسخِ (ب) تا اولین مرتبه‌ی ناصفرِ λ بیابید. خطای نسبی (یعنی این تفاوت تقسیم بر پاسخ در حالتِ یکنواخت) را تا اولین مرتبه‌ی ناصفرِ λ بیابید. (راهنمایی: $e^x = \sum_{۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$).

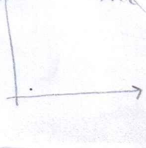
اگر سرعت بینِ v و $v+dv$ باشد، مدت زمانِ حرکت بینِ t و $t+dt$ خواهد بود. در این حالت $P(t)dt$ احتمالِ این است که مدت زمانِ حرکت بینِ t و $t+dt$ باشد، و داریم: $P(v)dv=P(t)dt$.

همچنین برای کمیتی مثلِ x که توزیعِ احتمالِ آن با تابعِ $P(x)$ داده شده باشد و بدانیم $x\in(x_۱,x_۲)$، مقدارِ $\int_{x_۱}^{x_۲} x P(x)dx$ را "مقدارِ میانگینِ" آن کمیت می‌نامیم.



چ) مقدارِ میانگینِ زمانِ حرکت را برای دو توزیعی که در بالا برای سرعت بیان شد (یکنواخت و نمایی) جداگانه بیابید. (در حالتِ نمایی، تا اولین مرتبه‌ی ناصفرِ λ).

$\cancel{\int \frac{x\,dx}{x_2-x_1}}$ $\cancel{\int \frac{x}{x_2-x_1}dx}$



ح) خطای نسبیِ مقدارِ میانگینِ زمانِ حرکت را تا اولین مرتبه‌ی ناصفرِ λ بیابید.

$\frac{\int x P(x) dx}{\int P(x) dx}$

بسمه تعالی

ادامه‌ی امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

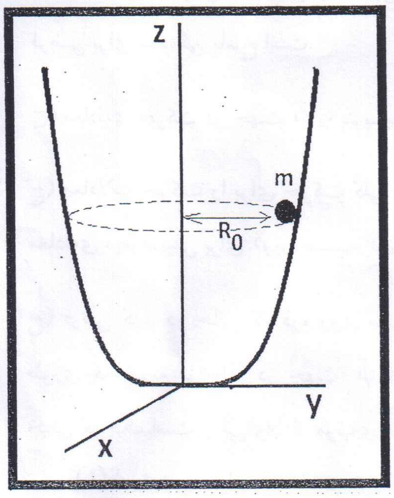
۹۰/۵/۶

وقت: ۹۰ دقیقه

مسئله‌ی ۵

یک سطحِ دورانی که محورِ تقارنش محورِ $\hat{z}$ است و معادله‌ی مقطعِ قائمش $z = K\,\rho^4$ است (دستگاهِ مختصاتِ استوانه‌ای) در نظر بگیرید که سطحِ داخلی‌اش بدونِ اصطکاک است و جرمِ نقطه‌ای m می‌تواند آزادانه روی آن حرکت کند. حرکتِ جسم را در دستگاهِ مختصاتِ استوانه‌ای یعنی (ρ, ϕ, z) بیان می‌کنیم. شتابِ گرانش g به سمتِ پایین است.

الف) جرم روی سطح روی مسیری دایره‌ای به شعاعِ معلومِ R_0 حرکت می‌کند به طوری که شعاعش عوض نمی‌شود. سرعتِ زاویه‌ای یعنی $\dot{\phi}$ را برای این حرکت بیابید.



می‌دانیم به یک بارِ نقطه‌ای q که با سرعتِ $\vec{v}$ در میدانِ مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند نیروی $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ وارد می‌شود. حال فرض کنید روی محورِ $\hat{z}$ سیمی قرار دارد که میدانِ مغناطیسی $B = \frac{\alpha}{\rho}\hat{\phi}$ ایجاد می‌کند، که α ثابتی معلوم است. بارِ ذره‌ی متحرک را q بگیرید.

ب) معادله‌ی نیرو در جهتِ $\hat{\phi}$ را برای حالتِ کلی حرکتِ ذره بنویسید و حل کنید. یعنی $\dot{\phi}$ را بر حسبِ ρ و R_0 و K و g به دست آورید.

پ) معادلات حرکت برای حالتِ کلی حرکتِ ذره در جهتِ $\hat{\rho}$ و $\hat{z}$ را نیز بنویسید و با استفاده از هندسه‌ی مسئله، معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\ddot{\rho}$ بر حسبِ $\rho, \dot{\rho}$ بیابید. همچنین نشان دهید حلِ "$\rho =$ ثابت" برای این معادلات، همان است که در قسمتِ الف به دست آمد.

ت) فرض کنید در حالی که ذره روی مسیرِ قسمتِ الف حرکت می‌کند یک ضربه‌ی کوچک به آن وارد کنیم طوری که ضربه مؤلفه‌ای در جهتِ $\hat{\phi}$ نداشته باشد. در نظر بگیرید $\rho(t) = R_0 + \delta(t)$ که در آن $\delta(t)$ خیلی کوچک است و می‌توان از مرتبه‌ی دوم و بالاترِ آن در مقایسه با R_0 صرف‌نظر کرد. معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\delta(t)$ بیابید و بسامدِ نوساناتِ کوچک حولِ شعاعِ اولیه را به‌دست آورید.

ادامه‌ی مسئله‌ی ۵

حال فرض کنید سیمی روی محورِ $\hat{z}$ وجود ندارد بلکه میدانِ مغناطیسی یکنواختِ $B = -B_\circ \hat{z}$ وجود دارد، که در آن $B_\circ$ مقداری مثبت دارد.

ث) جرم m روی مسیری دایره‌ای به شعاعِ ثابت و معلومِ R_1 حرکت می‌کند ($\dot{\phi}$ اش در مختصاتِ استوانه‌ای مثبت است). سرعتِ زاویه‌ای یعنی $\dot{\phi}$ را برای این حرکت بیابید.

توجه کنید دو سرعتِ ممکن وجود دارد. فقط پاسخی را که بزرگ‌تر است به‌دست آورید.

از اینجا به بعد فرض کنید این رابطه بینِ پارامترهای مسئله برقرار است: $K\, g\, R_1^2 = \frac{3}{64}\left(\frac{qB_\circ}{m}\right)^2$، که صرفاً فرضی برای ساده‌گی پاسخ است.

ج) معادله‌ی حرکت در جهتِ $\hat{\phi}$ را بنویسید و حل کنید. یعنی $\dot{\phi}$ را بر حسبِ ρ و R_1 و q و $B_\circ$ و m بیابید.

چ) معادلاتِ حرکت را برای حرکتِ کلی ذره در جهت $\hat{\rho}$ و $\hat{z}$ را بنویسید و با استفاده از هندسه‌ی مسئله، ، معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\ddot{\rho}$ بر حسبِ $\dot{\rho}, \rho$ بیابید.

ح) فرض کنید در حالی که ذره روی مسیرِ قسمتِ ث حرکت می‌کند یک ضربه‌ی کوچک به آن وارد کنیم طوری که ضربه مؤلفه‌ای در جهت $\hat{\phi}$ نداشته باشد. فرض کنید $\rho(t) = R_1 + \delta(t)$ که در آن $\delta(t)$ خیلی کوچک است و می‌توان از مرتبه‌ی دوم و بالاترِ آن در مقایسه با R_1 صرف‌نظر کرد. معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\delta(t)$ بیابید و بسامدِ نوساناتِ کوچک حولِ شعاعِ اولیه را به‌دست آورید. (اگر لازم است شرطی بین پارامترهای مسئله باشد تا حرکت حولِ شعاعِ تعادل یعنی R_1 پایدار باشد، آن را بیان کنید.)

۳۶۰/۸۵/۸
وقت: ۲:۴۵ ساعت

هوالحکیم

امتحان [illegible] المپیاد فیزیک (آبان ۸۷)

۱ـ دو سرِ ریسمانِ یکنواختی با چگالی جرمی λ به دو نقطه‌ی هم ارتفاع بسته شده و ریسمان در میدانِ گرانشی g قرار دارد. پایین‌ترین نقطه‌ی ریسمان را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. کششِ ریسمان در این نقطه را معلوم فرض می‌کنیم و آنرا با T_0 نشان می‌دهیم. یک عنصرِ کوچکِ جرم به طولِ ds را در نظر بگیرید که در آن، خطِ مماس بر ریسمان با افق زاویه‌ی θ می‌سازد.

الف) $T(\theta)$ (یعنی کششِ ریسمان) را در این نقطه بر حسبِ θ و T_0 بیابید.

ب) با صفر قرار دادنِ برایندِ نیروهای وارد بر این عنصر در راستای عمودی، معادله ای بینِ $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ بیابید.

پ) این معادله را حل کنید و معادله‌ی شکلِ ریسمان $y(x)$ را بیابید.

حال فرض کنید چگالیِ جرمی ریسمان یکنواخت نیست و به صورتِ $\lambda = \lambda_0(1 - \alpha T(\theta))$ با کشش تغییر می‌کند، که در این معادله α و λ_0 پارامترهای ثابت و معلوم اند.

ت) با صفر قرار دادنِ برایندِ نیروهای وارد بر یک عنصر در راستای عمودی، معادله‌ای بینِ $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ بیابید.

حال فرض کنید جمله‌ی αT خیلی کوچک است و در واقع یک اختلالِ کوچک بر مسئله‌ی ریسمانِ یکنواخت به حساب می‌آید. در این مسئله از مرتبه‌ی دوم و بالاترِ α صرفِ‌نظر می‌کنیم.

(ادامه در صفحه‌ی بعد)

اگر پاسخِ (پ) را که شکلِ بی اختلالِ ریسمان است با $y = f(x)$ نشان دهیم، پاسخِ این قسمت را به صورت $y = f(x) + \delta(x)$ بگیرید که در آن $\delta(x)$ از مرتبه‌ی اول است.

ث) معادله‌ای بینِ $\frac{d\delta}{dx}$ و $\frac{d^2\delta}{dx^2}$ بیابید.

ج) $\delta(x)$ را محاسبه کنید و از آنجا معادله‌ی شکلِ ریسمان را بنویسید.

راهنمایی: پاسخِ معادله‌ای به شکلِ $\frac{dy}{dx} + y(x)\,p(x) = q(x)$ به صورتِ:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x) q(x) dx + C\right]$$

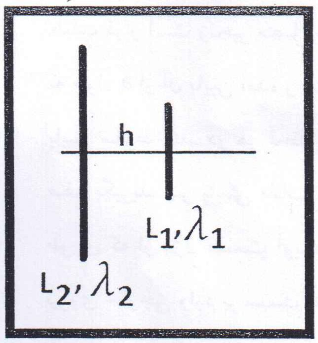
است که در آن C یک ثابت است که با توجه به مسئله باید تعیین شود و تابعِ $\mu(x)$ نیز به این صورت تعریف می‌شود: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

راهنمایی:

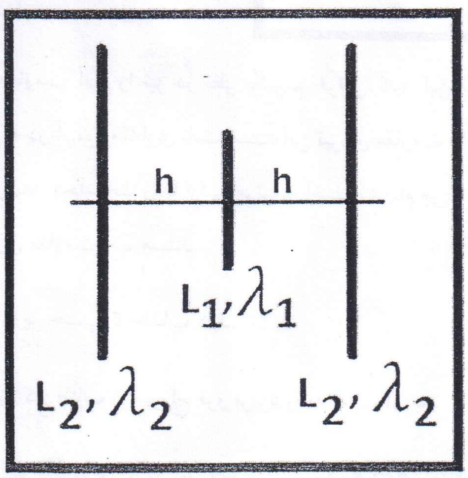
$$\int \sec(x)\,dx = \ln(sec(x) + tan(x)) + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln(u) + C$$

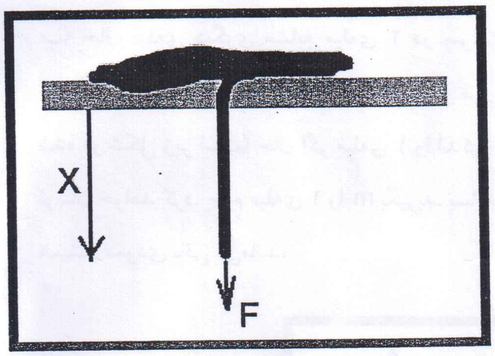
2-الف) یک میله‌ی باردار با چگالی بارِ خطی یکنواختِ λ_1 و طولِ l_1 داریم. میله‌ی دیگری با چگالی بارِ خطی یکنواختِ λ_2 و طولِ l_2 به طورِ موازی با آن مطابقِ شکل قرار گرفته است. فاصله‌ی میله‌ها h است. نیروی کل افقیِ وارد شده بر میله‌ی ۱ را بیابید. (عمودمنصفِ هر دو میله، محورِ افقی نشان داده شده در شکلِ روبه‌رو است)



ب) حال میله‌ی دیگری مشابهِ میله‌ی ۲ در سوی دیگرِ میله‌ی ۱ در فاصله‌ی h از آن به طورِ موازی مطابقِ شکلِ زیر قرار می‌دهیم (عمودمنصفِ هر سه میله، محورِ افقی نشان داده شده در شکلِ زیر است) حال اگر میله‌ی ۱ را اندکی از این مکان به طورِ افقی در صفحه‌ی شکل جابه‌جا کنیم، نوسان خواهد کرد. جرمِ میله‌ی ۱ را m بگیرید. بسامدِ نوساناتِ کوچک را حساب کنید. فرض کنید هر سه میله همیشه عمودی باقی می‌مانند.



3- در این مسئله می‌خواهیم فرایندِ انداختنِ لنگر در داخلِ آب توسطِ یک کشتی را بررسی کنیم. فرض کنید طنابی به طولِ کلِ L با چگالیِ جرمیِ یکنواختِ خطیِ λ داریم که دورِ خود کلاف شده و روی میزی قرار دارد (این طناب قرار است زنجیرِ متصل به لنگر را مدل کند). فرض کنید سوراخی در میز ایجاد شده و قسمتی از طناب به طولِ a از آن پایین آمده و ساکن نگه داشته شده است. طناب را در لحظه‌ی t=0 رها می‌کنیم تا از سوراخ به پایین سقوط کند. در هر لحظه سرعتِ قسمت‌هایی از طناب که هنوز سقوط نکرده اند و روی میز هستند را صفر بگیرید. سرِ پایینی طناب با نیروی ثابتِ F به پایین کشیده می‌شود که خیلی از وزنِ طناب بیشتر است، طوری که از وزنِ قسمتِ آویزانِ طناب در هر لحظه در مقابلِ آن صرف‌نظر می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم تنها نیروی خارجی وارد بر سیستم همین F است (این F در واقع وزنِ لنگر را مدل می‌کند، که خیلی از وزنِ زنجیر بیشتر است).



الف) $x(t)$ را بر حسبِ زمان حساب کنید.

ب) زمانی که طول می‌کشد کلِ طناب از سوراخ فرو بریزد را به دست آورید.

حال می‌خواهیم نیروی مقاومتِ آب را نیز در نظر بگیریم. فرض کنید این نیرو به صورتِ $\epsilon\,\dot{x}^{2}$ در جهتِ مخالفت با حرکت است که در آن، ϵ مقداری ثابت است. این نیروی مقاومت را در برابرِ F خیلی کوچک فرض می‌کنیم و در قسمت‌های بعد محاسبات را تا اولین مرتبه‌ی اختلال انجام می‌دهیم. بنابراین تنها نیروی خارجی وارد بر سیستم، F و نیروی مقاومتِ آب هستند.

پ) در این حالت $x(t)$ را بر حسبِ t حساب کنید.

ت) زمانی که طول می‌کشد کلِ طناب از سوراخ فرو بریزد را به دست آورید.

راهنمایی: $\int \frac{Ln(1+a^{2}x^{2})}{x^{2}}\,dx = 2\,a\tan^{-1}(ax) - \frac{Ln(1+a^{2}x^{2})}{x} + C$

$$\int \frac{x^{2}}{a^{2}+x^{2}}\,dx = x - a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \tan^{-1}(a\,x)\,dx = x\tan^{-1}(a\,x) - \frac{\ln(1+a^{2}x^{2})}{2a} + C$$

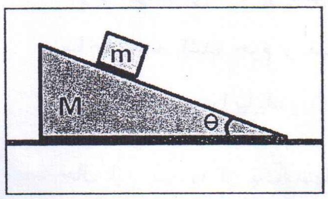
۱۳۹۰/۵/۸

ساعت [illegible]

۱۳۹۰-۹۱

ادامه‌ی مرحله‌ی دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

۴- جسمی به جرمِ m روی گوه‌ای به جرمِ اولیه‌ی M که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد قرار دارد. بینِ جسمِ m و گوه، و بینِ گوه و زمین نیروی اصطکاک وجود ندارد. دستگاه از حالتِ سکون رها می‌شود. مقدارِ جابه‌جایی افقی گوه نسبت به مکانِ اولیه را با X نشان می‌دهیم. گوه با آهنگی متناسب با سرعتش، از زمین جرم بر می‌دارد. یعنی جرمش با آهنگِ $\dot{M} = b\,\dot{X}$ افزایش می‌یابد، که b ثابتی معلوم و خیلی کوچک است.



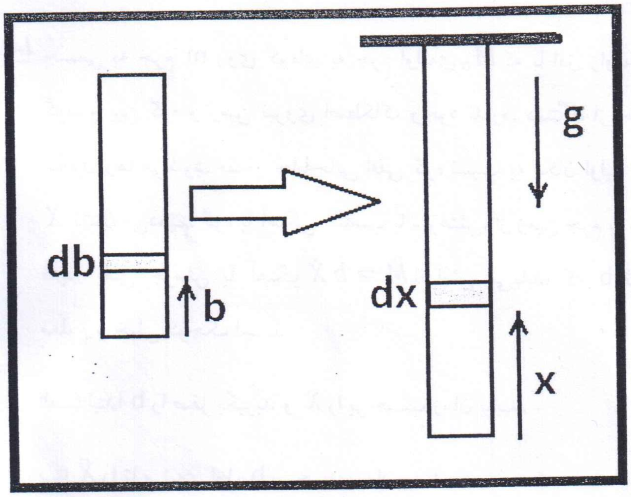
الف) ابتدا b را صفر بگیرید و X را بر حسبِ زمان بیابید.

ب) $\ddot{X}$ را تا مرتبه‌ی اولِ b بر حسبِ زمان بیابید.

پ) X را بر حسبِ زمان تا مرتبه‌ی اولِ b بیابید.

5ـ فنری به جرمِ m و طولِ کشیده‌نشده‌ی L_0 داریم. ثابتِ فنر K است.

الف) یک عنصر از فنر را در حالتِ کشیده‌نشده در نظر بگیرید که در فاصله‌ی b از ابتدای فنر قرار دارد و طولش db است. اگر چگالی جرمی فنر λ_0 (یکنواخت) باشد، و فنر از نظرِ سختی (K) نیز یکنواخت ساخته شده باشد، جرم و ضریبِ سختی این عنصر را بیابید.



حال این فنر را از یک انتها در میدانِ گرانشی g آویزان می‌کنیم.

ب) فاصله‌ی این عنصر از انتهای فنر از b به x تغییر می‌کند. طولِ آن نیز از db به dx تغییر می‌کند. با نوشتنِ شرطِ تعادلِ نیروها، x را بر حسبِ b بیابید.

پ) طولِ فنر در حالتِ آویخته‌شده را بیابید.

ت) در حالتِ آویخته شده، دیگر چگالی جرمی فنر یکنواخت نیست. چگالی جرمی فنر در حالتِ آویخته‌شده را بر حسبِ x بیابید

حال فرض کنید فنر در حالت کشیده نشده به طورِ غیریکنواخت ساخته شده، طوری که چگالی جرمی‌اش بر حسبِ b به صورتِ $\lambda(b) = \lambda_0 + \alpha b$ باشد، که در آن α ضریبی ثابت است. فنر را از نظرِ ضریبِ سختی (یعنی K) یکنواخت بگیرید.

ث) x را بر حسبِ b بیابید.

ج) طولِ فنر در حالتِ آویخته‌شده را بیابید.

چ) با فرضِ این که جمله‌ی αb موجود در چگالی خیلی کوچک‌تر از λ_0 است، چگالی طولی فنر در حالتِ آویخته‌شده را بر حسبِ x بیابید. محاسبات را تا اولین مرتبه‌ی ناصفرِ تصحیح انجام دهید.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

۹۰/۶/۱۶

وقت: ۴ ساعت

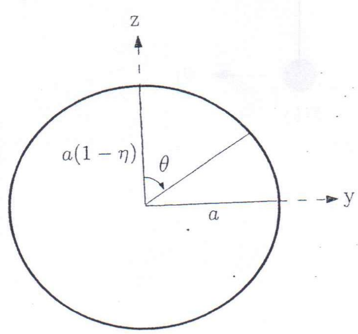
مسئله‌ی 1) کره‌ای با چگالی یکنواخت بار الکتریکی ρ کمی پخت شده است به طوری که قطر قطبی آن $2a(1-\eta)$، از قطر استوایی آن $2a$، اندکی کمتر است ولی حجم آن تغییری نکرده است. هر مقطع قائم این توزیع بار که از دو قطب آن می‌گذرد یک بیضی با نیم قطر بزرگتر a است. مقطع سیستم در صفحه y-z مطابق شکل است. این توزیع بار را می‌توان معادل یک کره یکنواخت و یک توزیع سطحی به چگالی $\sigma(\theta)$ گرفت که θ زاویه شعاع واصل به یک نقطه از کره با محور z است و محور z از قطب می‌گذرد.

راهنمایی: برای بیضی با نیم قطر بزرگتر a و نیم قطر کوچکتر b می توان از معادلات پارامتری $y = a\sin\alpha$ و $z = b\cos\alpha$ استفاده کرد که برای η کوچک تفاوت α و θ از مرتبه η است.

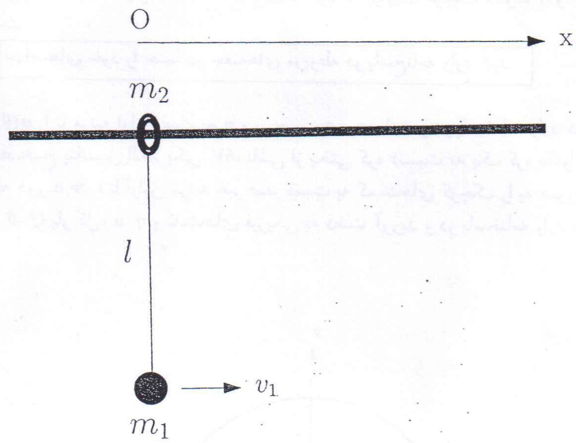
جواب‌های خود را حتماً در جعبه‌های مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) $\sigma(\theta)$ را تا مرتبه اول نسبت به η و بر حسب ρ و a بیابید و در پاسخنامه وارد کنید.

b) تصحیح پتانسیل الکتریکی δV، ناشی از پختی کره (نسبت به یک کره یکنواخت) در فاصله دور $r \gg a$ تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به کمیت‌های کوچک را به صورت تابعی از r، θ، Q بار کل، a، η و ثابت‌های فیزیکی به دست آورید و در پاسخنامه وارد کنید.



مسئله‌ی 2) در شکل زیر جسم m_1 از ریسمانی به طول l آویزان است. سر دیگر ریسمان به جسم m_2 متصل است که می‌تواند آزادانه بر روی میله ای دراز و افقی حرکت کند. در لحظه $t = 0$ در حالی که دستگاه در حال تعادل است ضربه‌ای به جسم m_1 می زنیم تا با سرعت افقی v_1 در صفحه شکل به حرکت در آید. فرض کنید دامنه نوسانات زاویه‌ای کوچک می‌ماند به طوری که جا به جایی m_1 را همواره بتوان افقی گرفت. مبدا محور x را محل اولیه جرم‌ها بگیرید و $x_1(t)$ و $x_2(t)$ مکان افقی جرم‌های m_1 و m_2 را بر حسب زمان به دست آورید.



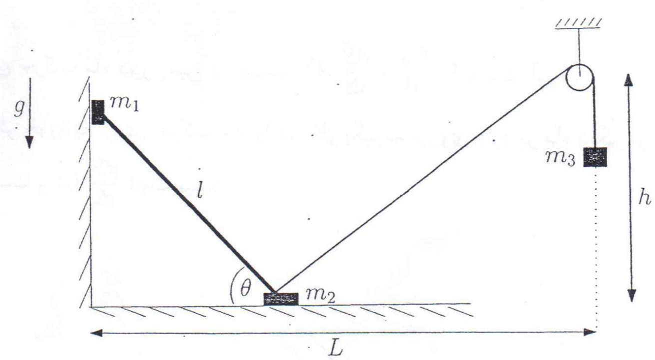
مسئله‌ی 3) در شکل زیر جرم‌های m_1 و m_2 با میله سبکی به طول l به یکدیگر متصل اند. جرم m_1 روی یک دیوار قائم و جسم m_2 روی سطح افقی حرکت می‌کند. جرم‌های m_2 و m_3 در دو انتهای نخی به طول a قرار دارند که از روی قرقره کوچک و سبکی در ارتفاع ثابت h عبور کرده است. فاصله افقی جرم m_3 از دیواری که m_1 بر روی آن می‌لغزد L است. سطوح بدون اصطکاک هستند و شتاب گرانش g است. فرض بدون جرم بودن میله باعث می‌شود نیرویی که به جسم‌های دو سر خود وارد می‌کند در امتداد میله باشد. در شروع حرکت زاویه θ در شکل برابر θ_0 است و جسم m_3 در بالاترین نقطه یعنی در ارتفاع h قرار دارد.

جواب‌هایِ خود را حتماً در جعبه‌هایِ مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) ثابت کنید $\dot{\theta}^2$ تابعی از θ و پارامترهای داده شده مسئله است. این تابع را $f(\theta)$ بنامید و آن را به دست آورید. نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

b) اگرجرم m_1 در زاویه $\theta = \theta_1$ از دیوار جدا شود معادله ای برای تعیین θ_1 به دست آورید و تا جایی که ممکن است آن را ساده کنید. این معادله را در پاسخنامه بنویسید. معادله می تواند شامل $f(\theta)$ نیز باشد.

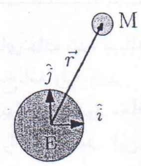
c) فرض کنید اتفاق فرض b نیفتد و به جای آن جرم m_2 در زاویه $\theta = \theta_2$ از زمین بلند شود. معادله‌ای برای تعیین θ_2 به دست آورید و تا آنجا که ممکن است آن را ساده کنید. این معادله را در پاسخ‌نامه وارد کنید. معادله می تواند شامل $f(\theta)$ نیز باشد.



مسئله‌ی ۴)

در این مسئله می‌خواهیم به صورت ساده‌ای اثر خورشید را بر حرکت ماه حول زمین بررسی کنیم. جرم خورشید، زمین و ماه را به ترتیب M_s، M_e و M_m و ثابت جهانی گرانش را G می‌گیریم. همچنین حرکت‌ها را در یک صفحه‌ی ثابت فرض می‌کنیم. برای این منظور:

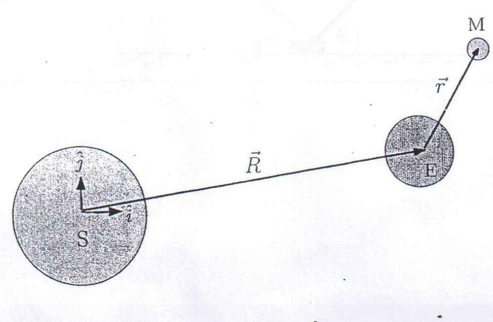
آ) فرض کنید خورشید وجود ندارد و ماه حول زمین که آن را ساکن در نظر می‌گیریم بر روی یک مدار دایره‌ای‌شکل به شعاع r می‌چرخد. اگر بسامد زاویه‌ای این حرکت دورانی ω_m باشد رابطه‌ی بین r و ω_m را بدست آورید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ بردار مکان ماه نسبت به زمین $\vec{r}(t=0) = r\,\hat{i}$ است. $\vec{r}(t)$ را بر حسب بردارهای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بنویسید.



اگر $\vec{r}$ بردار مکان یک ذره نسبت به مبدأ O باشد آهنگ جاروب شدن سطح توسط این بردار را با $\frac{dS}{dt}$ نشان می‌دهیم که $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$. در این تعریف لزومی ندارد مسیر دایره‌ای باشد. برای ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی حول O می‌چرخد $\frac{d\vec{S}}{dt}$ ثابت است. این همان قانون دوم کپلر است.

ب) برای حرکت ماه دور زمین در قسمت آ)، $\frac{d\vec{S}}{dt}$ و $\frac{d^2\vec{S}}{dt^2}$ را بدست آورید.

اگر اثر خورشید روی حرکت ماه را در نظر بگیریم نیروی وارد بر ماه دیگر مرکزی (به سمت زمین) نیست و لذا $\frac{dS}{dt}$ ثابت نیست.



پ) فرض کنید زمین حول خورشید بر روی دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد. اگر بسامد زاویه‌ای این حرکت دورانی ω_e باشد رابطه‌ی بین R و ω_e را بدست آورید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ بردار مکان زمین نسبت به خورشید $\vec{R}(t=0) = R\hat{\imath}$ است. $\vec{R}(t)$ را بر حسب بردارهای $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ بنویسید.

در دو قسمت ت) و ث) برای حرکت کلی ماه بر حسب بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{R}$ (که لزوماً مربوط به حرکت دایره‌ای نیستند) و سایر ثابت‌ها

ت) $\dfrac{d^2\vec{S}}{dt^2}$ را محاسبه و تا جایی که ممکن است ساده کنید.

ث) می‌دانیم که $r \ll R$. اثر در نظر گرفتن خورشید را بر حرکت ماه تا اولین جمله‌ی غیر صفر در $\dfrac{d^2\vec{S}}{dt^2}$ منظور کنید.

ج) $\dfrac{d\vec{S}}{dt}$ را برای حرکت‌های دایره‌ای ماه و زمین بر حسب t محاسبه کنید.

چ) اگر $\dfrac{dS_0}{dt}$ معرف کمیت $\dfrac{dS}{dt}$ برای حالتی که از اثر خورشید بر حرکت ماه صرفنظر کرده بودیم باشد، نسبت $(\langle\frac{dS}{dt}\rangle - \frac{dS_0}{dt})/\frac{dS_0}{dt}$ را بدست آورید که در آن $\langle\frac{dS}{dt}\rangle$ میانگین $\dfrac{dS}{dt}$ در مدت زمان یک دور چرخش ماه به دور زمین است.

ح) مقدار عددی نسبت اخیر را به ازای $\omega_m \approx 12\omega_e$ بدست آورید.

راهنمایی: طبق تعریف متوسط تابع $f(x)$ در بازه‌ی $a \le x \le b$ برابر است با $\langle f\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

۱۷/۶/۹۰

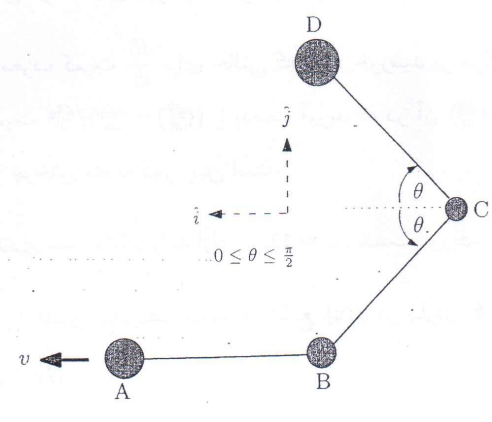
وقت: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۵

چهار مهره به جرم‌های m_A، m_B، m_C و m_D به وسیله‌ی سه نخ هم‌اندازه و سبک مطابق شکل به هم بسته شده‌اند و روی میز افقی بدون اصطکاکی قرار دارند. مطابق شکل ضربه‌ای افقی به مهره‌ی A زده می‌شود به طوری که سرعت مهره‌ی A بلافاصله پس از اعمال ضربه v باشد و ضربه به طور آنی از طریق نخ‌ها به مهره‌ها منتقل شود. فرض کنید زاویه‌ی θ چنان است که به هر یک از سه مهره‌ی دیگر نیز در همان لحظه‌ی اول ضربه وارد می‌شود.

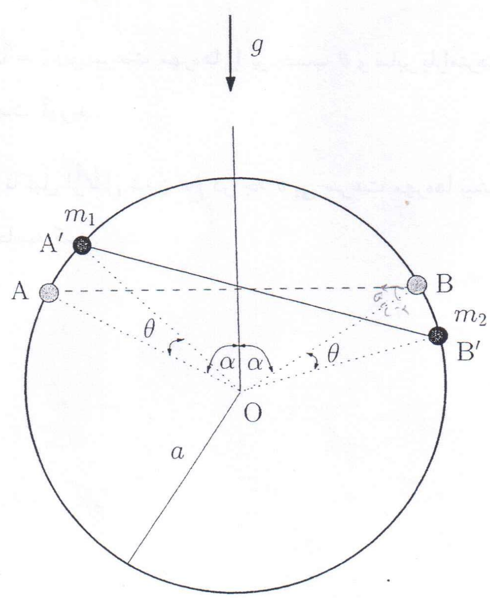
آ) بلافاصله پس از ضربه بردار سرعت سه مهره‌ی دیگر را در راستای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر حسب v، θ و جرم‌ها بدست آورید. جواب‌های آخر را بر حسب $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ یا توانهای صحیح و مثبت آن‌ها بنویسید.

ب) به ازای چه مقادیری از θ ضربه‌ی وارد شده به بعضی از مهره‌ها در لحظه‌ی اول ممکن است صفر باشد؟



مسئله ۶

سیم دایره‌ای شکلی به شعاع a در صفحه‌ی قائم در نظر بگیرید. دو مهره به جرم‌های m_1 و m_2 (که سیم از داخل آن‌ها گذشته است) با نخ سبکی به طول ثابت به هم متصل شده‌اند و می‌توانند روی سیم حرکت کنند. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین مهره‌ها و سیم به ترتیب μ_s و μ_k است. در وضعیتی که مهره‌ها در مکان A و B روی سیم قرار دارند و نخ کشیده و افقی است زاویه‌ی شعاع‌های OA و OB با راستای قائم α است.



آ) نسبت $\frac{m_2}{m_1}$ در چه محدوده‌ای باشد تا دو جرم در موقعیت ذکر شده روی سیم ساکن بمانند؟

ب) برای این که چنین محدوده‌ای وجود داشته باشد چه شرطی بین μ_s و α لازم است؟

فرض کنید نسبت $\frac{m_2}{m_1}$ به گونه‌ای است که مهره‌ها روی سیم حرکت می‌کنند. دستگاه از حال سکون رها می‌شود و مهره‌ها از موقعیت A و B شروع به حرکت می‌کنند. هنگامی که مهره‌ها به موقعیت A′ و B′ می‌رسند به اندازه‌ی زاویه‌ی θ نسبت به موقعیت اولیه جابجا شده‌اند.

پ) کشش نخ را در این حالت بر حسب m_1، m_2، α، θ، μ_k و g بدست آورید.

ت) در چه θیی نخ شُل می‌شود؟

می‌توان معادلات حرکت را حل کرد و در حضور نیروی اصطکاک سرعت حرکت مهره‌ها را بر حسب θ بدست آورد ولی برای پرهیز از حل معادله‌ی دیفرانسیل، در قسمت‌های بعد از نیروی اصطکاک چشم‌پوشی می‌کنیم.

ث) فرض کنید $\mu_k = 0$ و سرعت مهره‌ها را بر حسب θ و سایر پارامترهای معلوم تا قبل از شُل شدن نخ بدست آورید.

ج) برای $\mu_k = 0$ تا قبل از شُل شدن نخ در چه θیی سرعت مهره‌ها بیشینه است؟ این بیشینه‌ی سرعت را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷

توجه: در این مسئله بخش‌های الف، ب و پ از بخش‌های ت، ث و ج جدا هستند.

کره ای رسانا به شعاعِ R و مرکزِ مبدأ مختصات در نظر بگیرید که به پتانسیلِ صفر وصل است.

این کره را در میدانِ خارجی یکنواختِ $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ قرار می‌دهیم.

الف) اگر کره وجود نداشت پتانسیلِ فضا در مختصاتِ کروی چه بود؟ پتانسیلِ مبدأ مختصات را صفر بگیرید.

ب) در حالتی که کره وجود دارد، پتانسیلِ بیرونِ کره در مختصاتِ کروی به صورتِ:

$$V = \left(A\, r + \frac{B}{r^2}\right) \cos(\theta)$$

است که در آن A و B ثابتهایی هستند که با توجه به شرایطِ مرزی به دست می‌آیند. این ثابتها را محاسبه وپتانسیلِ فضای بیرونِ کره را در مختصاتِ کروی بیابید. (راهنمایی: در نقاطِ دور می‌توان از اثرِ کره چشم پوشید).

پ) معادله‌ی خطوطِ میدانِ الکتریکی را به صورتِ: ثابت $= f(r,\theta)$ بیابید.

استوانه‌ی بینهایت طویلِ رسانایی به شعاعِ R در نظر بگیرید که به پتانسیلِ صفر وصل است. محورِ استوانه بر محورِ z منطبق است. این استوانه را در میدانِ خارجی یکنواختِ $\bar{E} = E_0 \hat{x}$ قرار می‌دهیم. مسئله را در صفحه x-y در نظر بگیرید.

ت) اگر استوانه وجود نداشت پتانسیلِ فضا در مختصاتِ قطبی چه بود؟ پتانسیلِ مبدأ مختصات را صفر بگیرید. مختصاتِ قطبی را به صورتِ (ρ,ϕ) نشان می‌دهیم که در آن ρ فاصله از مبدأ مختصات و ϕ زاویه‌ی بینِ محورِ x و خطِ واصل از هر نقطه به مبدأ است.

ث) در حالتی که استوانه وجود دارد، پتانسیلِ بیرونِ استوانه در مختصاتِ قطبی به صورتِ:

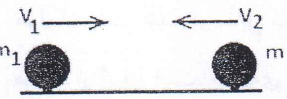
$$V = \left(A\,\rho + \frac{B}{\rho}\right)(C\sin\phi + D\cos\phi)$$

است که در آن A و B و C و D ثابتهایی هستند که با توجه به شرایطِ مرزی به دست می‌آیند. این ثابتها را محاسبه وپتانسیلِ فضای بیرونِ استوانه را در مختصاتِ قطبی بیابید. (راهنمایی: در نقاطِ دور می‌توان از اثرِ استوانه چشم پوشید).

ج) معادله‌ی خطوطِ میدانِ الکتریکی را به صورتِ: ثابت $= f(\rho,\phi)$ بیابید.

مسئله ۸

جسمی به جرم m_1 مطابقِ شکل با جسم ساکنی به جرمِ $m_۲$ برخوردِ رودررو (یک بُعدی) انجام می‌دهد.



ضریبِ جهندگی این برخورد مقدار معلومِ e داده شده است، که به این صورت تعریف می‌شود:

$$e = \left|\frac{v_۲' - v_۱'}{v_۲ - v_۱}\right|$$

که در آن سرعت‌های پریم‌دار مربوط به بعد از برخورد و سرعت‌های بدون پریم مربوط به قبل از برخورد اند.

الف) سرعتِ هر دو جسم را بعد از برخورد بیابید.

حالا می‌خواهیم حرکتِ یک چترباز به جرم M را بررسی کنیم. چترباز در لحظه‌ی صفر از ارتفاع H بالای سطحِ زمین، با سرعتِ اولیه‌ی صفر رها می‌شود و سقوط می‌کند. چتر را مستطیلی با مساحتِ A در نظر بگیرید که همیشه در طولِ حرکت افقی می‌ماند. کلِ نیروهای وارد بر سیستمِ چتر و چترباز را فقط دو نیروی وزنِ چترباز و نیروی موثر حاصل از برخوردِ چتر با ذراتِ ساکنِ هوا در نظر بگیرید. چگالی جرمی ذرات در هوا را با ρ نشان می‌دهیم. ضریبِ جهندگی در برخوردِ چتر به ذرات، مقدارِ معلومِ e است. با فرضِ این‌که چگالی هوا با ارتفاع تغییر نمی‌کند،

ب) سرعت و ارتفاعِ چترباز را بر حسبِ زمان بیابید.

پ) سرعتِ حد را بیابید.

ت) مدت زمانی که طول می‌کشد تا چترباز به زمین برسد را بیابید.

ث) مقدارِ عددی پاسخ را برای:

$$\rho = ۱\,\frac{gr}{cm^۳}\ ,\ e = ۰٫۸\ ,\ A = ۱۰\ m^۲\ ,\ g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲}\ ,\ H = ۵۰۰\ m$$

بیابید.

راهنمایی: $\int \frac{dx}{a^۲ - x^۲} = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| = \frac{۱}{a}\tanh^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)$

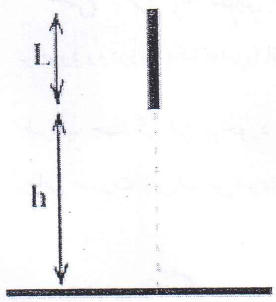
بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۰)

۹۰/۶/۲۰

وقت: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۹



میله‌ای نارسانا به طول L و جرم m با بار کل q که به طور یکنواخت در طولِ آن پخش شده در مقابلِ صفحه‌ی رسانایی با ابعادِ بینهایت و پتانسیلِ صفر قرار گرفته است. فاصله‌ی انتهای میله از صفحه h است. $\frac{L}{h}$ کوچک است و محاسبات را تا اولین مرتبه‌ی تصحیح نسبت به حالتی که میله یک بار نقطه‌ای باشد انجام می‌دهیم.

الف) چگالی بار سطحی القایی روی صفحه را بر حسب فاصله از محورِ تقارنِ مسئله (خط‌چین در شکل روبه‌رو) حساب کنید.

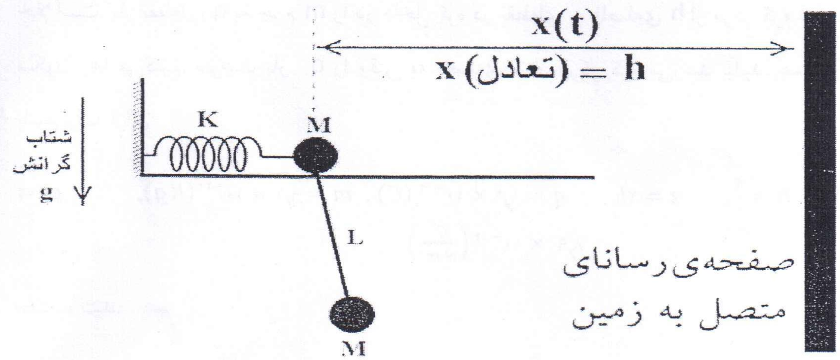
ب) کلِ بارِ القا شده روی صفحه درون دایره‌ای فرضی به شعاعِ r را بیابید که مرکزِ آن روی محورِ تقارن است.

پ) حال فرض کنید صفحه دارای ضخامتِ مؤثرِ کوچکِ D و مقاومتِ ویژه‌ی مؤثرِ ρ است. می‌توان فرض کرد بارِ سطحی محاسبه شده در قسمتِ قبل، در هر r، به طورِ یکنواخت در لایه‌ای به ضخامتِ D پخش شده است. با فرضِ این که میله در راستای محور (خط‌چین) حرکت کند، توان الکتریکی لحظه ای تلف شده در کلِ صفحه را بر حسبِ $\dot{h}$, h بیابید.

ت) معادله‌ی حرکتِ میله را بیابید، یعنی $\ddot{h}$ را بر حسبِ $\dot{h}$, h و بقیه‌ی پارامترهای مسئله به دست آورید. میله فقط تحت تاثیر نیروی الکتریکی بارهای القایی است.

مسئله‌ی ۱۰

جسمی نارسانا به جرم M به فنری که با ضریب K و طول کشیده نشده‌ی l_0 متصل است. جسمِ دیگری با همان جرم، به وسیله‌ی نخی به طولِ L به جسمِ اول متصل است. بینِ سطوح اصطکاک نداریم. جسمِ بالایی دارای بارِ q است و مجموعه در مقابلِ صفحه‌ی رسانای بینهایتی به حالتِ تعادل قرار دارد. در این حالت آونگ عمودی است. شتابِ گرانش نیز g است. فاصله‌ی افقی جسم‌ها از صفحه را در این حالت با h نشان می‌دهیم.



حالا فرض کنیم به دستگاه اختلالِ کوچکی وارد می‌شود و دستگاه با دامنه کوچک نوسان می‌کند. نوسانات آونگ و نوساناتِ جسمِ بالایی کوچک است. حرکتِ آونگ در صفحه‌ی شکل است. مُدهای اصلی نوسان را در نظر بگیرید و برای هر مُد بسامد نوسان و نسبتِ دامنه‌های نوسانِ دو جسم را حساب کنید.

مسئله‌ی ۱۱

توجه: این مسئله از چند بخش مجزا تشکیل شده است.

الف) کره‌ای رسانا به شعاعِ R به مرکزِ مبدأ مختصات به پتانسیلِ صفر وصل است. سیمی نارسانا به معادله‌ی:

$$r = \alpha\, e^{\beta\theta} \ ,\ R < r < ۳R$$

در مختصاتِ قطبی در نظر بگیرید که در صفحه x-z قرار دارد و دارای بارِ طولی با چگالی یکنواختِ λ است. کلِ بارِ القایی روی کره را به دست آورید.

ب) پوسته ای رسانا به شکل کره ای به شعاعِ R به مرکزِ مبدأ مختصات به پتانسیلِ صفر وصل است و داخل آن خلا است. بارِ نقطه‌ای q به جرمِ m را در داخلِ کره در نقطه‌ای به فاصله‌ی h از مرکزِ کره ($h < R$) از حالتِ سکون رها می‌کنیم. سرعتِ بارِ q را وقتی به فاصله‌ی z از مرکزِ کره می‌رسد بیابید. همچنین مقدارِ عددی پاسخ را به ازای:

$$R = ۰{,}۰۱\,(m),\quad h = \frac{R}{۲},\quad z = ۲h\,,\quad q = ۱{,}۶\times ۱۰^{-۱۹}\,(C)\,,\ m = ۹{,}۱\times ۱۰^{-۳۱}(Kg),\quad \epsilon_۰ = ۸{,}۹\times ۱۰^{-۱۲}\left(\frac{C^۲}{N\,m^۲}\right)$$

حساب کنید.

پ) دو صفحه‌ی رسانای نیم‌بینهایت که هر دو به پتانسیلِ صفر وصل شده‌اند در نظر بگیرید که در دستگاه مختصات دکارتی اولی با شرایط z>۰, y=۰ و دومی با شرایط y>۰, z=۰ توصیف می شوند. یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای با گشتاورِ دوقطبی p در نقطه‌ای به مختصاتِ (a,b,c) قرار دارد که $b > ۰$ و $c > ۰$. بردارِ گشتاورِ دوقطبی الکتریکی در صفحه‌ی y-z است و با محورِ y زاویه‌ی θ می‌سازد. بردارِ نیروی الکتریکی وارد شده بر این دوقطبی را به دست آورید.

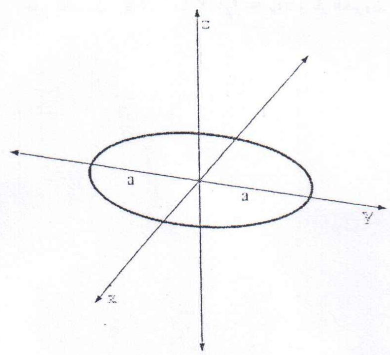
__راهنمایی:__ فرض کنید یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای در مبدا قرار دارد و گشتاورِ دوقطبی‌اش $\overrightarrow{p_۱}$ است. دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای دیگری در مکانِ $\vec{R}$ قرار دارد و گشتاورِ دوقطبی‌اش $\overrightarrow{p_۲}$ است. بردارِ نیرویی که دوقطبی اولی به دومی وارد می‌کند این است:

$$\vec{F} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left[\frac{۳(\overrightarrow{p_۱}.\vec{R})\overrightarrow{p_۲}}{R^۵} + \frac{۳(\overrightarrow{p_۲}.\vec{R})\overrightarrow{p_۱}}{R^۵} + \frac{۳(\overrightarrow{p_۱}.\overrightarrow{p_۲})\vec{R}}{R^۵} - \frac{۱۵(\overrightarrow{p_۱}.\vec{R})(\overrightarrow{p_۲}.\vec{R})\vec{R}}{R^۷}\right]$$

مسئله ۱۲

نوسان یک بار نقطه‌ای در میدان متقارن

حلقه‌ی دایره ای بارداری به شعاعِ a با چگالی بارِ خطیِ λ، در صفحه‌ی xy قرار گرفته است.



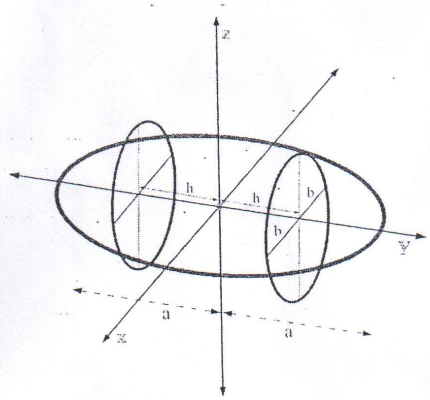
الف – پتانسیل الکتریکی φ را روی محور حلقه پیدا کنید. (۱ نمره)

ب – با استفاده از نتیجه ی بخش الف و نیز با استفاده از تقارن و معادله ی لاپلاس برای پتانسیلِ الکتریکی، مقدار $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi$ و $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi$ و $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi$ را در مبدا مختصات پیدا کنید. (۲ نمره)

می‌دانیم برای جابجایی‌های کوچک می‌توان میدان و پتانسیل‌الکتریکی را حول مبدا بسطِ تیلور داد.

پ – برای نقاطی که روی محور x (یعنی $y = z = 0$)، و روی محور z در نزدیکی مبدا مختصات قرار دارند، میدان الکتریکی را تا مرتبه‌ی اول (نسبت به فاصله از مبدا) بسط تیلور دهید.(۲ نمره)

ت – می‌خواهیم پایداری و نوسانِ بارِ نقطه‌ای q به جرمِ m را که در مرکزِ حلقه قرار گرفته‌است بررسی کنیم. برای کدام علامتِ بارِ q این نوسان در راستای محور x ها پایدار و برای چه علامت باری ناپایدار خواهد بود. در حالت پایدار بسامد نوسان، ω، را بیابید.(۲ نمره)



ث – برای باردار کردن حلقه آن را به یک منبع پتانسیل خارجی وصل می‌کنیم. اگر پتاسیل ناشی از حلقه در مرکزِ آن (نسبت به بی‌نهایت) $V_0 = 50V$ شود و اگر در مرکز حلقه یک الکترون قرار داده باشیم، با فرض اینکه شعاع حلقه $1cm$ باشد، ω را بیابید. (۲ نمره)

حال دو حلقه‌ی مشابه به شعاعِ b و چگالی خطی λ را عمود بر محور yها و به فاصله‌ی h از صفحه‌ی xz قرار می‌دهیم. مرکز هردو حلقه روی محور yها قرار دارد.

ج – مقدار $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi$، $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi$ و $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi$ را در مبدا مختصات پیدا کنید. (۲ نمره)

چ – تحقیق کنید که درچه حالتی بارِ q در راستای محورِ xها نوسان پایدار خواهد داشت؟ برای حالت پایدار، بسامد نوسان بارِ q را در راستای محور xها به شکل پارامتری حساب کنید. (۲ نمره)

راهنمایی: معادله‌ی لاپلاس :رای پتانسیل الکتریکیِ یک توزیع بار در هرنقطه‌ای بیرون آن به صورت $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi = 0$ است.

جرم الکترون: $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{Kg}$ و بار الکترون: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$