

باشگاه دانشجویان ایران

جزوه دست نویس

نسبیت

دکتر علی شجاعی

استاد دانشگاه تهران

باشگاه دانشجویان ایران

نسبیت

دکتر علی نجفی

ترم بهار ۹۰-۱۳۸۹

مسائل مورد بحث :

- ✓ مکانیک نیوتنی
- ✓ نسبیت خاص
- ✓ الکترو دینامیک
- ✓ میدان های گلا نسبیت نسبی
- ✓ نسبیت عام
- ✓ حل های گرانشی

References:

- Lauden : Special Relativity
- Resnik : Special Relativity
- Weinberg : Gravitation and Cosmology
- Rindler

باشگاه دانشجویان ایران

16.11.89

$$\vec{X}' = \vec{R} \cdot \vec{X} + \vec{u}t + \vec{X}_0$$

$$t' = t_0 + t$$

تميرات خالصة

(در جدول های زیر)

($\bar{w}_t, t$) monotonic

* اگر $\vec{x}$ و t مؤلفه های مکانی و زمانی یک راسخه انرژی باشند، $\vec{x}$ و t هم معقول به راسخه انرژی هستند.

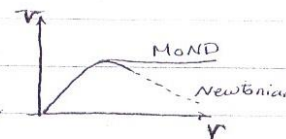
$$* \quad m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, |\vec{v}_i - \vec{v}_j|; t) \quad \rightsquigarrow$$

نیز تابع ایزوتروپ $\vec{r}$ و $\Delta \vec{r}$ است، نه تابع $\vec{r}$ و $\vec{r}$ یا $\vec{r}$ و $\vec{r}$

- * MOND : Modified Newtonian Dynamics:

$$\vec{F} = \mu \vec{ca}$$

فلاح مسافر

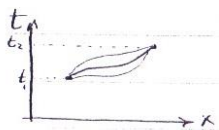


۱. مقدار سرعت (رات) تغییر فاصله از مرکز کهکشان. (یک اصل این است که Dark Matter را داریم).

* Principle of least action

حزب محمد صادق با رعایت اسلامی و انسانی

Configuration space:



$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad \delta A = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) dt \stackrel{\text{by Part}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

شرایک مری کوئی : ۶۹ در سرجا دان شده اند.

q_i : فوجی

خلاصہ : درجہ حرارت در زیر اشک ۹۰ درجہ شد است

باشگاه دانشجویان ایران

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = F_i \rightarrow \text{معمولاً} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = P_i \rightarrow \text{معمولاً}$$

$$\text{Hamiltonian: } H(q_i, P_i; t) \equiv P_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{q}_i - H) dt$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_i \delta P_i + \underbrace{P_i \delta \dot{q}_i}_{\text{by part}} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \right) dt = \left[P_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_i \delta P_i - \dot{P}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q_i \left(-\dot{P}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \delta P_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \right) \right] dt = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{P}_i \\ \frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i \end{cases} \leadsto \text{معادلات هامیلتون}$$

$$\text{Poisson bracket: } \{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}$$

$$* \{P_i, H\} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial P_j} - \frac{\partial P_i}{\partial P_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{P}_i \quad * \{q_i, H\} = \dot{q}_i \quad * \{q_i, q_j\} = 0 \quad * \{P_i, P_j\} = 0$$

$$* \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial P_i} \dot{P}_i = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

$$\rightarrow * \{q_i, P_j\} = \delta_{ij} \rightarrow \text{fundamental P.B.}$$

$$* \{ \{A, B\}, C \} + \{ \{B, C\}, A \} + \{ \{C, A\}, B \} = 0 \quad \text{اگر ابرابری}$$

Equal Time P.B : برای حساب کردن P.B. در یک زمان مشخص به این روش عمل کنید

$$* \{q_i, A(P_i)\} = \frac{\partial A}{\partial P_i} \quad * \{P_i, B(q_i)\} = -\frac{\partial B}{\partial q_i}$$

more study: Goldstein $\rightarrow$ chapter 8

باشگاه دانشجویان ایران

18.11.89

Generators of the Galilei group

$$B(\vec{x}) \xi^i = B(\vec{x}) + \frac{\partial B}{\partial x_i} \xi^i + \dots$$

$$= B(\vec{x}) + \xi^i \{ B(\vec{x}), P_i \} + \frac{1}{2} \xi^i \xi^j \{ \{ B(\vec{x}), P_i \}, P_j \} + \dots$$

$$\equiv \exp(\xi^i \{ \cdot, P_i \}) B(\vec{x})$$

تایید $B(\vec{x})$ را در نظر بگیرید:

$$\xi^i \{ \cdot, P_i \} = \hat{P}_i$$

مولد انتقال مکانی

$$A(\vec{p} + \vec{\pi}) = \exp(\pi^i \{ \cdot, P_i \}) A(\vec{p})$$

مقیاس در پلان تغییر می‌دهد

به همین ترتیب:

$$A(t + \tau) = \exp(\tau \{ \cdot, H \}) A(t)$$

explicit dependence

اگر تابعی وابسته به صریح زمان نداشته باشد $(\frac{\partial A}{\partial t} = 0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

* مولد دوران: $\hat{L}_z$ (برای دایره رادیوس $\delta\theta$ در جهت $\hat{z}$)

$$\exp(\theta (x \hat{p}_y - y \hat{p}_x)) = \exp(\theta \{ \cdot, \hat{L}_z \}) = \exp(\theta \{ \cdot, \hat{L}_z \})$$

در حالت کلی:

$$A(\vec{r}, \vec{x}) = \exp(\vec{\theta} \cdot \hat{\vec{L}}) A(\vec{x})$$

* مولد Boost

$$A' = \exp(\vec{u} \cdot \{ \cdot, \hat{\vec{B}} \}) A$$

مولد حرکت نسبی $\hat{\vec{B}}$:

$$\exp(\tau \hat{H} + \vec{\xi} \cdot \hat{\vec{P}} + \vec{\theta} \cdot \hat{\vec{L}} + \vec{u} \cdot \hat{\vec{B}}) \rightarrow \exp(\epsilon_a G^a) \quad a=1,2,\dots,10$$

$$\exp(\epsilon_a^{(1)} G^a) \exp(\epsilon_b^{(2)} G^b) = \exp(\epsilon_c^{(3)} G^c)$$

دسته‌بندی سه‌گانه:

$$S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1 = S' \rightarrow$$

$$\hat{G}^a \hat{G}^b = f_{abc} \hat{G}^c$$

$$\epsilon_c^{(3)} = -f_{abc} \epsilon_a^{(1)} \epsilon_b^{(2)}$$

$$= 1 - \epsilon_a^{(1)} \epsilon_b^{(2)} [\hat{G}^a, \hat{G}^b] + \dots = S' = 1 + \epsilon_c^{(3)} G^c + \dots$$

در فضای میکروسکوپیک با ϵ بسیار کوچک از ϵ اعظمی بزرگتر.

باشگاه دانشجویان ایران

در scale مکان و زمان اگر داریم:

$$S_1 S_2 = e^{+1} S_3$$

$$\rightarrow [\hat{G}_a, \hat{G}_b] = f_{abc} \hat{G}_c + C_{ab} \hat{1} \quad \text{central charge}$$

* اگر G^a و G^b از یک جنس باشند (مثلاً هر دو $\hat{H}$ باشند)، C_{ab} برابر صفر است.
 در حالت کلی C_{ab} می‌تواند در سه دسته تقسیم شود:
 1/ دسته‌ای که آن‌ها نیک صفر می‌شوند،
 2/ دسته‌ای که ~~شماره قابل حذف هستند~~ (با بارهای زوجی گیت)،
 3/ دسته‌ای که غیر صفر و دایره‌ای فرساخته می‌شوند. در این مورد فقط یکی از این‌ها باقی می‌ماند که از آن تغییر حجم رو را می‌کنیم.

- برای این تغییر تبدلات کالسم را به هم می‌زنیم. باید حباب‌هایی هم مولد را با هم ملد باشیم، یعنی ضرایب f و C مشخص کنیم.

از انتقال در زمان شروع می‌کنیم؛ (در واقع تبدلات مولای $S_1^1 S_2^1 S_3^1 S_4^1$ را در نظر می‌گیریم).

$$t_0 \rightarrow t_0 + \tau_a \rightarrow t_0 + \tau_a + \tau_b \rightarrow t_0 + \tau_a + \tau_b - \tau_a \rightarrow t_0 + \tau_a + \tau_b - \tau_a - \tau_b = t_0$$

با این ترتیب نهایی باید صفر باشد: $\epsilon_c^{(3)} = 0 \leftarrow f_{abc} = 0 \leftarrow C_{ab} = 0$

* $[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k$

$\hat{A} = \{A\}$

$\rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \{A\} \{B\} - \{B\} \{A\} = \{\{B\}, A\} + \{A, \{B\}\} = -\{B, A\}$ (Jacobi)

$= -\{A, B\}$

$\{A, B\} = C$

$\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = -\{C\} = -\hat{C}$

$\{L_i, L_j\} = +\epsilon_{ijk} L_k$

$\rightarrow [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = -\epsilon_{ijk} \hat{L}_k$

در مورد دوران:

باشگاه دانشجویان ایران

این عملگر روی فضای فاز عمل می کند در کوانتوم کلاسیک فضای فاز $\leftarrow$ فضای هیلبرت. عملگرهای کلاسیک هم این صورت تبدیل می یابند:

$$\hat{A}_Q \rightarrow \frac{i}{\hbar} \hat{A}_Q \Rightarrow [\hat{A}_Q, \hat{B}_Q] = i\hbar C_Q$$

بریک زبان دیگر: $\{ \dots \} \xrightarrow{\text{classic}} -\frac{i}{\hbar} [\dots] \xrightarrow{\text{Quantum}}$

Reference: Q.M. : Ballentine $\rightarrow$ chapter 3.

$$S = \prod_{\alpha=1}^{10} e^{\epsilon_{\alpha} G^{\alpha}} \quad \text{if all the parameters } \epsilon_{\alpha} \text{ become infinitesimally small} \quad S = 1 + \sum_{\alpha=1}^{10} \epsilon_{\alpha} G^{\alpha}$$

$$S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1 = 1 - \epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} [G^{\alpha}, G^{\beta}] + O(\epsilon^3) \quad \text{از طرفی حاصل این عبارت باید باید یک تبدیل صورتی در فضا باشد، اما در یک فضا P}$$

$$1 - \epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} [G^{\alpha}, G^{\beta}] = e^{\omega S} = e^{\omega (1 + \epsilon_{\alpha}^{(3)} G^{\alpha})} = (1 + \omega) (1 + \epsilon_{\alpha}^{(3)} G^{\alpha}) = 1 + \epsilon_{\alpha}^{(3)} G^{\alpha} + \omega 1$$

فاز، آرای عمل داریم: $\leftarrow$ در واقع این یک مورد از این خواص است $\{ \epsilon_{\alpha} \}$ که همه آنها باید کوچک باشند.

$$[G^{\alpha}, G^{\beta}] = f_c^{ab} G^c + C^{ab} 1 \quad (*)$$

$$-\epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} f_c^{ab} G^c - \epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} C^{ab} 1 = \epsilon_{\alpha}^{(3)} G^c + \omega 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\alpha}^{(3)} = -\epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} f_c^{ab} \\ \omega = -\epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} C^{ab} \end{array} \right.$$

حالا باید این عملگرهای مختلف گروه کالبر را در رابطه (۵۵) بگذاریم. صاحب جایی آنها را به دست آوریم. روش کار این صورت است که دو ابراتور را انتخاب و آنها را در

$$e^{\epsilon_{\alpha}^{(1)} G^{\alpha}} e^{\epsilon_{\beta}^{(2)} G^{\beta}} e^{-\epsilon_{\alpha}^{(1)} G^{\alpha}} e^{-\epsilon_{\beta}^{(2)} G^{\beta}} = 1 - \epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} [G^{\alpha}, G^{\beta}]$$

در صده بعد مشخص کنیم اگر این چهار ابراتور را از هم، بکشیم یا هم ابراتور را برابر است

صاحب جایی دو ابراتور طبق (۵۵) فقط باید فوق ثابت در ابراتور واحد (1) با ابراتور حاصل (G^c) تفاوت دارد

باشگاه دانشجویان ایران

$$H \begin{matrix} \nearrow P \\ \rightarrow L \\ \searrow B \end{matrix} + P \begin{matrix} \nearrow L \\ \rightarrow B \\ \searrow B \end{matrix} + L \begin{matrix} \nearrow L \\ \rightarrow B \\ \searrow B \end{matrix} + B \rightarrow B = 10 \text{ commutators}$$

بر حسب آمار و درون جابجایی ابراز می شود:

1 Pure displacements in space and time :

$$\vec{X} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(1)} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(1)} + \vec{X}_0^{(2)} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(2)} \rightarrow \vec{X} \Rightarrow G_c^0 = 0 \Rightarrow P_c^{ab} = 0 \Rightarrow [P_a, P_b] = 0 + (?) \mathbb{1}$$

(2,3) دران C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند. C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند. C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند. C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند.

از طرف دیگر $[P_a, P_b] = 0$ C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند. C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند. C^{ab} به بیرون از C^{ab} باقی می ماند.

4 $[P_a, H] = 0 + (?) \mathbb{1}$ (obviously)

5 Space displacements and velocity transformations :

$$\vec{X}, t \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0, t \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0 + \vec{V}t, t \rightarrow \vec{X} + \vec{V}t, t \rightarrow \vec{X}, t \Rightarrow [P_a, B_b] = 0 + (?) \mathbb{1}$$

6 Rotation and displacement :

$$x, y, z \rightarrow (\cos \theta x + \sin \theta y), (-\sin \theta x + \cos \theta y), z \rightarrow (\cos \theta x + \sin \theta y + x_0), (-\sin \theta x + \cos \theta y + y_0), z + z_0$$

$$\rightarrow (\cos^2 \theta x + \cos \theta \sin \theta y + x_0 \cos \theta + x \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta y - y_0 \sin \theta)$$

$$\rightarrow (\sin \theta \cos \theta x + \sin^2 \theta y + \sin \theta x_0 - \sin \theta \cos \theta x + \cos^2 \theta y + y_0 \cos \theta), z + z_0$$

$$\rightarrow (x + x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta - x_0), (y + x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta - y_0), z$$

$$x, y, z \rightarrow x, y, z$$

$$\Rightarrow [L_a, P_a] = 0 + (?) \mathbb{1}$$

اگر $\sin \theta = 0$ و $\cos \theta = 1$ باشد: $P_b = P_b$ یعنی اندیس های L و P یکی باشند.

7 Rotation and velocity transformation :

$$[L_a, B_a] = 0 + (?) \mathbb{1}$$

مثل B_a باشد:

$$8 [L_a, H] = 0 + (?) \mathbb{1}$$

باشگاه دانشجویان ایران

2 Boost and time transformation:

$$x, y, z, t \rightarrow x + v_x t, y, z, t \rightarrow x + v_x t, y, z, t + t_0 \rightarrow x + v_x t - v_x(t + t_0), y, z, t + t_0$$

$$\rightarrow x - v_x t_0, y, z, t \quad \leadsto \text{This is just a space displacement by } -v_x t_0 \text{ along the } x \text{ axis.}$$

$$\leadsto S_2^{-1} S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 = \exp(-v_x t_0 P_x) \quad \leadsto -v_x t_0 [B_x, H] = -v_x t_0 P_x \Rightarrow [B_x, H] = P_x + (?) \mathbb{1}$$

2 Rotation and Rotation: (Proof in text)

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k + (?) \mathbb{1}$$

$$[L_1, B_2] = ?$$

$$: [L_a, B_b] \text{ حالت } x \text{ در } y \text{ و } z \text{ } a=1, b=2$$

$$x, y, z \rightarrow x, (y \cos \theta + z \sin \theta), (-\sin \theta y + \cos \theta z) \rightarrow x, (y \cos \theta + z \sin \theta + v_y t), (-y \sin \theta + z \cos \theta)$$

$$\rightarrow x, y + v_y t \cos \theta, z + v_y t \sin \theta \rightarrow x, y + v_y t \cos \theta - v_y t, z + v_y t \sin \theta$$

$$\theta \ll 1 \leadsto x, y, z \rightarrow x, y, z + v_y \theta t \quad \leadsto \text{Boost along the } z \text{ axis. } \rightarrow [L_1, B_2] = B_3 + (?) \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow [L_i, B_j] = \epsilon_{ijk} B_k + (?) \mathbb{1}$$

$$i=1, j=2$$

$$: [L_i, P_j] \text{ حالت } x \text{ در } y \text{ و } z$$

$$x, y, z \rightarrow x, (y \cos \theta + z \sin \theta), (-\sin \theta y + \cos \theta z) \rightarrow x, (y \cos \theta + z \sin \theta + y_0), (-\sin \theta y + \cos \theta z)$$

$$\rightarrow x, y + y_0 \cos \theta, z + y_0 \sin \theta \rightarrow x, y + y_0 \cos \theta - y_0, z + y_0 \sin \theta$$

$$\theta \ll 1 \rightarrow x, y, z \rightarrow x, y, z + y_0 \theta \quad \leadsto \text{displacement by } y_0 \theta \text{ along the } z \text{ axis} \rightarrow [L_1, P_2] = P_3 + (?) \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow [L_i, P_j] = \epsilon_{ijk} P_k + (?) \mathbb{1}$$

باشگاه دانشجویان ایران

- * تعیین central charge برای ارتاورهای مختلف سه دلیل:
- 1- اگر $[G^a, G^b]$ ، $a=b$ ، C_{ab} مربوطه صفر است:
 - 2- با استفاده از اتحاد Jacobi برای ارتاورهای همان نشان دارد:

$$[H, H] = [P_i, P_i] = [L_i, L_i] = [B_i, B_i] = 0$$

$$[P_\alpha, H] = [P_\alpha, P_\beta] = [B_\alpha, B_\beta] = [L_\alpha, H] = 0$$

First type of central charge (البته نه برای همگی همان نشان دارند!)
 C_{ab} مربوط به این عملگر (بخصوصی که قبلاً به دست آمده بود) صفر است.

- نوع دوم این ضرایب: کمپانی هستند که مقدارشان (کوانتایزاسیون) با بار تعریف بر روی مشخصه مقدارشان را به صفر اکتفا دارد؛ این نوع ضرایب مربوط به جابجایی‌های این ارتاور است: $[L_i, L_j]$ ، $[L_i, P_j]$ و $[L_i, B_j]$.
 مثلاً برای $[L_i, L_j]$ چون جابجایی نسبت به بعضی اندیس‌ها با هم صفر است، C_{ab} مربوط به هم با بار یک ثابت با هم صفر است، پس $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k + \epsilon_{ijk}^{(0)} L_k$.
 redefinition $\rightarrow L_i + b_i \rightarrow L_i \Rightarrow [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \rightarrow$ $C_{ij} = 0$ صفر شد.
 به همین ترتیب برای $[L_i, P_j]$ و $[L_i, B_j]$ در رابطه جابجایی هم با هم صفر کرد. (البته ابتدا باید ثابت کنیم این جابجایی‌ها نسبت به بعضی اندیس‌ها با هم صفر است و در متن کتاب با استفاده از نتایج بالا و اتحاد Jacobi برای همان نشان داریم $[B_i, H] = 0$ $C_{ij} = 0$ صفر است.)

$$[B_i, P_j] = \delta_{ij} M$$

Jacobi: $[[L_1, B_2], P_1] = [[P_1, B_2], L_1] + [[L_1, P_1], B_2]$

$$\Rightarrow [B_3, P_1] = [L_1, L_1] + [0, B_2] = 0$$

$$* [[L_1, B_2], P_3] = [[P_3, B_2], L_1] + [[L_1, P_3], B_2]$$

$$\Rightarrow [B_3, P_3] = 0 + [-P_2, B_2] = [B_2, P_2] \Rightarrow [B_i, P_j] \propto \delta_{ij}$$

$$\sum (* \omega = -\epsilon_{\alpha}^{(1)} \epsilon_{\beta}^{(2)} C^{\alpha\beta} = -u_{\alpha} x_{\beta} M \delta^{\alpha\beta} = -M \vec{u} \cdot \vec{x}_0)$$

- نکته در $[B_i, P_j]$ ضریب صفر ندارد.

به این ترتیب:

$$\Rightarrow [B_i, P_j] = 0 \quad i \neq j$$

باشگاه دانشجویان ایران

11.89

$$\{A, B\} = C \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = -\hat{C} \quad : \text{CJ}$$

به جای $\{A, B\}$ ، $\{A, B\}$ ، احصاء کنیم .

$\{q_i, \hat{H}\} = \dot{q}_i = v_i$ $\{q_i, B_j\} = ?$ $\hat{B} \rightarrow \hat{H}$ *معمولاً*

$$e^{a_j} \{ \cdot, B_j \} q_i = q_i + u_i t \xrightarrow{1} a_j \{ q_i, B_j \} = u_i t \rightarrow \{ q_i, B_j \} = t \delta_{ij}$$

[illegible]

در بیان کینماتیک معادل $\vec{p}$ و $\vec{q}$ به $\vec{B}$ اضافه کرد که اعتنا کرد

* * *

$$\{B_i, H\} = P_i \rightarrow \{mq_i + tP_i, H\} = P_i \rightarrow \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{P_i}{m} \rightarrow H = \frac{P_i P_i}{2m} + H_0$$

دلیل اینکه فضا در زمان تغییرات گالیلی دارد،
 در مختصات به شکل $\frac{P^2}{2}$ است.

^۵ /^۴/^۳/ ^۲مرفقا و زمان آهائی، دست ای بد نشسته باشد ، منجمله مکتوبی در این فصل حاجی کو احمد مانده است که آنجا که به دست خاص می افتد.

جمله بیانگر این است که $\vec{r}$ به سمت مرکز بین دو ذره با فاصله r از مرکز است.

اگر زمین مولد را بودی مستحق با دوزخ آزاری اگر چه، ثم تا بعد ۷ مرتبه می آید.
و تا فصل زمستان مرکزی تاخیر ناصدق دوزخ است، مری اعتدال تاخیر بعد نفس دوزخ است مری هم حرکت می کند.

$m \leftarrow$ واکنش فضایی مخلوط، P و B : ایزومر C_{ab} که از آن می‌توانید که S_1, S_2 را حفظ کنید یا S_3 حرارت را کم، نه خورد S_3 یک هالو دار سرد.

از t_0 شروع کنیم و چهار تریل متوالی زیرشده را روی آنها اعمال کنیم، به t_0 می‌گوییم، اما این t_0 با t_0 متفاوت است! وقتی زره را صاف

در طبقه آن را با فضای مطلق برهم کنش می‌دهیم. این برهم کنش تفاوت فضاهای (m) که در جاذبه سرعت (دره محض) می‌شود

دستگاه این جسم انرژي به نقل درگي ظاهر می شود. $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}$ ستاره این $\frac{1}{m}$ می شود. (مدر)

باشگاه دانشجویان ایران

در رد به نسبت خاص

اندازه سری هفتا - زمان
سرعت استاندارد در هر دخی سرعت برعکس است؛ نه اینکه با اندازه سری به دست بیاید که در هر دخی $\hat{c} = c$ ثابت است.
مقن کنیم!

- در مکانیک نیوتنی حرکت واحد زمان مثبتی بر حرکت یک نسیم است. لذا در تعریف حرکت هم از نسیم زمان استفاده می شود.
پس باید یک حرکت استاندارد تعریف کنیم؛ یک استاندارد بنیادی.

- در مکانیک نیوتنی هم این فرض بود که سرعت برعکس در همه دستگاه ها یکسان است، اما با وجود تبدیلات گالیلئ، این سرعت نادره بهر حال می ماند.

حالا هم فرض می کنیم اصول سرعت نسیم کش نادره است، هم همین یک مقدار دارد. نادره بودن سرعت برعکس را فرض کنیم، نه اینکه جداگانه در نسیم های مختلف به دست آوریم و بعد نادره بودن آن را نتیجه بگیریم.
* $\hat{c}$ is equal to c IDENTICALLY

- اگر بخواهیم ماکسیکون موردی عرفا نشان می دهد نسیم انحراف نسیم نسیم خوب است!

- با این فرض که تبدیلات گالیلئ نامساوی است به تبدیلات لورنتس و تبدیلات پوانکاره.

- اصول موضوعه نسبیت خاص همان اصول موضوعه مکانیک نیوتنی است؛ اصل نسبیت گالیلئی. فقط مشکل استاندارد زمان را حل می کند.

- کاری که ما در نسبیت می توانیم انجام دهیم همه شکر است!

- در یک نظریه کامل همه کتبی های واحد هستند. (QFT)

باشگاه دانشجویان ایران

30.11.89

در مکانیک نیوتنی بین scale های مختلف زمان و مکان تغییری وجود ندارد ، اما باید طوری باشند که سرعت تغییر کنند.

مثلاً فرض از دید تقارن های گالیلی برای فضا و زمان ، یعنی تغییر scale طول و زمان.

در نسبیت خاص فضا برای یکی از دو مورد مکان و زمان scale مشخص می شود ، با استفاده از مکانیک کوانتومی دلتای انرژی ΔE و Δx می شود.

استاندارد طول را مشخص می کند: $1m$. حال با داشتن استاندارد طول ، سرعت استاندارد را این طور می سازیم که دو جسم را به فاصله واحد طول

از یکدیگر در نظر می گیریم ، و دما در زمان را به صورت رفت و برگشت یک سیگنال بین این دو تعریف می کنیم: این سیگنال با اطلاعات می تواند

از همین بزرگ آشنایی برای اکثر فضا ها ، گرانشی یا متغیر و حتی هسته ای باشد که با سرعت استاندارد حرکت می کند: $c=1$ (برون داهل)

واحد زمان: $t = 1m$. نوری به تعریف ثانیه است. (می توان واحد مکان و زمان را ثانیه هم در نظر گرفت ، از تعریف زمان به مکان می رسم.)

تفاوت زمان و فضا در scale های مختلف می خورد: فضا-زمان مطلق ، و چارچوب های انرژي نسبت به این مورد با سرعت ثابت حرکت می کنند.

پیدا کردن تبدیلی که این دستگاه های انرژي را به هم مربوط می کند:

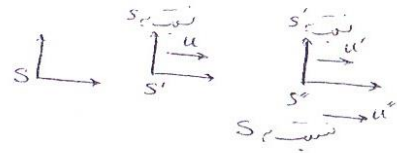
$$ds^2|_{\text{signal}} = dt^2 - |dx|^2 = 0 \rightarrow \text{باید در هم چارچوب های انرژي برقرار باشد}$$

در واقع شرط انرژي بودن دستگاه این است که ds^2 برای signal صفر باشد.

باشگاه دانشجویان ایران

برای زرات: ds'^2 تابعی از ds^2 است، آن تنها تابعی ممکن به شکل $ds'^2 = A ds^2$ است، چون ds'^2 و ds^2 هر دو تفاضل های مرتبه دوم هستند.

A در حالت کلی تابعی از x, t و $\vec{u}$ (سرعت نسبی (در دستگاه) می تواند باشد، اما به دلیل چگونی و همسانگردی فضا و همچنین زمان، تابع t و x و



اندازه $\vec{u}$ نسبت: $A = A(u)$

$$ds'^2 = A(u) ds^2$$

$$ds''^2 = A(u') ds'^2 = A(u') A(u) ds^2$$

$$ds''^2 = A(u'') ds^2$$

پس $A(u') A(u) = A(u'')$. $\vec{u}''$ جمع برداری $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ است. در این حالت u'' به معنی تابع برداری بین u و u' می

خواهد شد. آن همسانگردی فضا همین اجازه ای را به A می دهد که A تابع اندازه u هم باشد یا نه. $A = \text{const.}$
 $A^2 = A \rightarrow \begin{cases} A=0 \\ A=1 \end{cases}$ قابل قبول نیست، چون ممکن است ds^2 صفر و درگیری غیر صفر باشد.
 (یعنی یک پرتو (نور) چرخش سفید در درگیری رو باشد:) $A=1 \rightarrow ds'^2 = ds^2$

* Reference: the classical theory of fields: Landau $\rightarrow$ chapter one.
 (courses of theoretical physics: vol. 2)

باشگاه دانشجویان ایران

$$X^\mu = (t, x, y, z)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

به صورت آسان تبدیلات لورنتز:

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

از نامعادله ds^2 رابطه x^μ و x'^μ را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$$

معادله دیفرانسیل برای چهار مجهول

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \text{const.}$$

چون ضرایب معادله ثابت است باید ضرایب هم باشد. تنها راه حل این است که:

$$\square \text{ اثبات دقیق: از طریق معادله نسبت به } x^\gamma \text{ مشتق می گیریم: } \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} = 0$$

چون عبارت برای هر ضرایبی انبوهی

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0$$

لازم و ضروری به نظر می آید: Weinberg معادله است!

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \Lambda^\alpha_\beta$$

$$\Rightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha$$

a^α که کامل نخواهیم داشت:

$$\eta = \tilde{\Lambda} \eta \Lambda$$

یا $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu$ در رابطه

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu$$

$$\Lambda^\alpha_\beta: 16 \text{ کمیت مستقل دارد. اما در اصل رابطه 10 پارامتر مستقل متغیر در آن، 10 معادله برای این 16 کمیت صحت می کند. 6 کمیت مستقل وجود دارد}$$

$$a^\alpha: 4 \text{ کمیت مستقل دارند. 10 پارامتر در تبدیلات لورنتز وجود دارد.}$$

باشگاه دانشجویان ایران

□ معنای فیزیکی α^0 : α^0 به انتقال زمانی ، α^i به مؤلفه های انتقال مکانی .

- مثال از ماتریس Λ : $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \end{array} \right)$. باید بسیم $\eta = \tilde{\Lambda} \eta \Lambda$ صحت می گذاریم ؟ از قرارداد این معادله $R R^T = 1$ می بسیم .

سه R ماتریس دوران (سطح های چگالت است) (زمان را تغییر نمی دهد) سه پارامتر (سه زاویه دوران) در R وجود دارد .

درجه سه پارامتر دیگر درجه Boost است .

- یک مثال از Λ برای Boost : $\left(\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ (در راستای محور x) . شرط $\eta = \tilde{\Lambda} \eta \Lambda$ باید برقرار باشد :

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{array} \right)$$

$d = a \equiv \cosh \xi$
 $b = c \equiv \sinh \xi$

$a = d > c = b$ را می توان بر حسب یک کیت دیگر نوشت .

حالا باید ξ را بدست آوریم :
 مختصات مبدأ (سطح هم از روی ناظر اول) $x' = 0$ $x = ut$
 $x' = cx + dt \Rightarrow 0 = c ut + dt \Rightarrow tgh \xi = -u$

$$\Rightarrow \Lambda^\alpha_\beta \Big|_{\text{Boost along the } x \text{ axis}} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma & -u\gamma & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$t' = \gamma(t - ux) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} t' = t - ux$$

$$\text{if } c \neq 1 \Rightarrow t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \rightarrow$$

اگر $\gamma \rightarrow 1$ ، انتظار داریم : تبدیلات گالیلئیم ، اما تبدیلات زمان این انتقال را نشان نمی دهد .
 اگر order از $\frac{u}{c}$ را کم کنیم ، باز هم $t' \neq t$.
 در نسبیت خاص وقتی $\gamma \rightarrow 1$ ، $\frac{u}{c} \rightarrow 0$ ، $\frac{u}{c^2} \rightarrow 0$ ، $\frac{u}{c} \rightarrow 0$ ، $\frac{u}{c^2} \rightarrow 0$ ، $\frac{u}{c} \rightarrow 0$ ، $\frac{u}{c^2} \rightarrow 0$. (مثلا در فضاگر فضاگشت)

باشگاه دانشجویان ایران

✓

$$\eta = \tilde{\Lambda} \eta \Lambda \rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

$$\eta_{00} = 1 = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_0 = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \Lambda^0_0 \geq 1 \\ \text{or} \\ \Lambda^0_0 \leq -1 \end{cases}$$

د اگر اسیال مکانی و زمانی را منفرد نظر کنیم: تبدیلات پراکنده و تبدیلات لورنتس.

	$\det \Lambda$	Λ^0_0	
Proper	+1	≥ 1	$L_+ \uparrow$
	+1	≤ -1	$L_- \uparrow$
Improper	-1	≥ 1	$L_- \uparrow$
	-1	≤ -1	$L_- \downarrow$

تبدیلات خاص لورنتس

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{Parity}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{Time reversal}$$

در حالت کلی چهار حالت وجود دارد.

د اگر $\Lambda^0_0 > 1$: تبدیل مستقیم جهت زمان
تغییر نمی کند. اگر $\Lambda^0_0 < -1$: بازتاب مستقیم.

باشگاه دانشجویان ایران

7-12-89

- برای اندازه گیری فواصل مکانی در زمانی احتیاج به تعریف یک سرعت استاندارد داریم که این سرعت، سرعت انتشار اطلاعات یا سرعت گشتن سیگنال در فضا باشد و در این اساس تبدیلات بین (سیستم های انیرسی به نسبت می آیند) در واقع چارچوب های انیرسی چارچوب هایی هستند که نسبت به فضا-زمان مطلق به این شکل تبدیل می یابند.

- در فضای سه بعدی، بردار را به صورت مؤثری حرف می کنیم که به شکل "جانب جایی" تبدیل می یابند. (جانب جایی: تغییرات جویست، نه "موقعیت")

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$$
 در فضای چهار بعدی فضا-زمان هم باید تبدیل dx^{μ} را بررسی کنیم:

$\Rightarrow$ 4-vector: $v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$
 $T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta}$

به همین ترتیب: چهار-اسکالر: $\phi' = \phi$ و چهار-تانسور مرتبه 2:

- در مورد متریک η : تبدیلات بین دستگاه های انیرسی را از شرط ناوردان بودن (اسکالر بودن) ds^2 به دست آوریم که
 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$
 طبق قضیه Quotient (قضیه خارج قسمت) $\eta_{\mu\nu}$ یک تانسور مرتبه 2 است
 dx^{μ} و dx^{ν} بردار (در واقع 4-بردار) و ds^2 اسکالر است. $\eta'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta}$ که همان رابطه ای است که بین η و η' برقرار است؛ درجه آزادی معاری η' و η با هم برابرند. η یک تانسور ثابت است.

η یک تانسور است، ترجمه عبارت $\eta_{\mu\nu} v^{\nu}$ باید یک بردار باشد، که چنین از v ساخته شده است، اصطلاحاً به آن v_{μ} می گویند.

$v'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\alpha} v^{\alpha}$
 نحوه تبدیل v_{μ} را چنان می بینیم که $v_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v^{\nu}$ باید استفاده کنیم و v^{ν} را به حسب v_{μ} می نویسیم: $v^{\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1} v_{\mu}$
 آنگاه باید v'_{μ} را بر حسب v_{μ} بنویسیم. از رابطه $v_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v^{\nu}$ باید استفاده کنیم و v^{ν} را به حسب v_{μ} می نویسیم: $v^{\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1} v_{\mu}$

می دانیم: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ معکوس ماتریس η خوش خواهد شد. داریم $\eta^{\mu\nu}$ را با $\eta^{\mu\nu}$ نشان می دهیم (این دو با هم برابرند).

باشگاه دانشجویان ایران

در نتیجه داریم: $v^\nu = \eta^{\nu\mu} v_\mu$. (در واقع با مایوس تریک می توانیم اندیس بالا و پایین بچرخانیم)

برای اینکه عبارت $\eta^{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\alpha$ را به حسب مایوس ۸ بنویسیم، به رابطه ای که بین ۸ که به کار بردیم

یعنی $\eta_{\nu\alpha} = \eta_{\alpha\nu}$ توجه می کنیم. طبق این رابطه داریم: $\tilde{\Lambda} \eta \Lambda = \eta$ $\Leftrightarrow \eta \Lambda = (\tilde{\Lambda})^{-1} \eta$ $\Leftrightarrow \tilde{\Lambda} \eta \Lambda = \eta$

شکل ماتریس: $\eta \Lambda \eta$

پس این یک چاردار با اندیس پایین با $(\tilde{\Lambda})^{-1}$ تبدیل پیدا می کند، در حالی که چاردار با اندیس بالا با Λ تبدیل پیدا می کرد.

$v^\mu \rightarrow$ contra variant 4-vector

$v_\mu \rightarrow$ covariant 4-vector

این دو موجود دو غایش مختلف از یک چهارچاردار هستند. (دوایع dual هم هستند.)

به همین ترتیب می توان چهار-تانسورهای مرتبه ای بالاتر covariant و contra variant تعریف کرد.

تقارنی که به هم فضا و زمان اعمال شده منجر به رانگ (مستطایف ای اندیسی) معادله می باشد، باعث شده است که تریک یک تانسور ثابت باشد.

در نسبت تمام به این تقارن شکل کلی تر دارد، نوعاً مقدار مؤلفه ای تریک در (مستطایف ای مختلف ثابت) است.

* عکس متشق (گرادیان در فضا-زمان چهار بعدی):

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

عکس گرادیان covariant است. $\partial_\nu = \Lambda^\mu_\nu \partial_\mu = (\tilde{\Lambda})^\nu_\mu \partial_\mu$

[می دانیم $x^\nu = \Lambda^\mu_\nu x'^\mu \Leftrightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\nu_\mu$ مایوس داریم ۸ است]

ترادار کنیم که: اندیس بالا در فضا $\Rightarrow$ حالت اندیس پایین (در صورت)، و اندیس پایین در فضا $\Rightarrow$ حالت اندیس بالا (در صورت) است.

+ حساب تانسوری: جمع و تفریق تانسورهای هم مرتبه، ضرب تانسور، تقسیم تانسور (که جواب یکسانی ندارد)

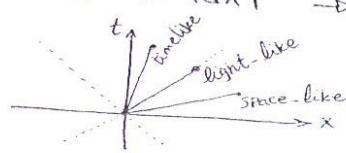
- کاننر تانسوری: متشق گیری از تانسور + انکزال گیری از تانسور $\Rightarrow$ مقنای گایس و استوکس در فضا-زمان چهار بعدی و ...

باشگاه دانشجویان ایران

* از نظر هندسی، معنای ds^2 ، طول برابر dx^μ است، چون
 است. معنای طول چهار برابر با طول برابر در فضای سه بعدی متفاوت است. (فضای سه بعدی صفر بعدی، طول برابر نه با معنای صفر بعدی)
 تمام مؤلفه‌های برابر است؛ چون طول برابر از مجموع مربع عبارت مثبت (منفی) تشکیل شده است:
 $|\vec{V}| = 0 \iff \vec{V} = 0$

لذا: $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ ، یعنی امکان دارد dt ، dx ، dy و dz هیچ کدام صفر نباشند اما طول چهار برابر صفر باشد،
 همان اتفاقی که برای سیگنال می افتد.

همین در این جا ds^2 می تواند هم مقدار مثبت بزرگتر هم منفی
 (مؤلفه های زمانی از مؤلفه های فضایی بزرگتر است)
 $\begin{cases} ds^2 > 0 \Rightarrow dt^2 > |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{Time like} \\ ds^2 < 0 \Rightarrow dt^2 < |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{Space like} \\ ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 = |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{light like} \end{cases}$



با استفاده از نمودار فضا زمان هم می توان نشان داد:

- تغییر فرکانس ds^2 : ابتدا می دانیم ds^2 در فضا (سطح های انیتری) نادر است. و در ضمن می فهمیم حرکت ذات را بررسی کنیم.

روای را در نظر بگیرید که از بین چارچوب انیتری S بر می می شود. در این چارچوب زده می تواند حرکت شتاب دار داشته باشد. در لحظه، دستگاه مختصات S_i (برای
 لحظه t_i) را تصور می کنیم که مبدأ آن در مکان زده و سرعت آن نسبت به S ، سرعت زده در آن لحظه باشد.
 دستگاه های S_i همواره نسبت به S با سرعت های ثابت v_i حرکت می کنند. انیتری هستند.
 پس ds^2 در فضا این مجموعه دستگاه ها و دستگاه نادر است.
 در فضا این دستگاه ها، چارچوب های مختصات سکون زده هستند.
 $ds^2_i = dt_i^2 - 0 = dt_i^2$



باشگاه دانشجویان ایران

dS^2 زمانی است که خود زره اندازه گیری می کند: Proper time (زمان ویژه) که گیت مشاهده بریندی نسبت چون از در چارچوب های مختلف اندازه گیری می شود.

با وجود اینکه در نسبت خاص زمان مکان در غالب x^M در تمام مسیر حرکت زره را $\vec{X}(t)$ مشخص می کند. (تعداد نظریه های مابین $x^M(t)$ را در نظر بگیریم؛ که مؤلفه ضمیمه آن $t(t)$ و مؤلفه های فضایی آن $\vec{X}(t)$ است. ما خود t به عنوان به عبارت مابین $\vec{X}(t)$ می بینیم. برای تعریف سرعت، می توانیم از رابطه سرعت نویی: $\frac{d\vec{X}}{dt}$ استفاده کنیم، اما این مورد عبارت است از تقسیم سه مؤلفه از یک چارچوب به یک مؤلفه دیگران، که معنی خاص ندارد.

این تعریف سرعت به این شکل انجام می دهیم؛ که $\frac{dx^M}{dt}$ را با اندازه گیری dt را یک ناظر دیگر. اگر آن ناظر نخواهد نتیجه اندازه گیری اش را با این گیت هم غیر فیزیکی است. چون dx^M را با اندازه گیری dt را یک ناظر دیگر. اگر آن ناظر نخواهد نتیجه اندازه گیری اش را به ما خبر دهد. با فرستادن سیگنال. تجربه با لایه های فیزیکی می شود که در نسبت خاص مواقع می شود. (با شمارش تقویم می توانیم). راه دیگر این است که ما در آن ناظر نسبت به هم اتفاق کنیم و data را با هم بگیریم. این offline-measurement. با این اندازه گیری u^M از چنین اندازه گیری های معمول نیست. می توانیم u^M را به چند سرعت نویی بنویسیم:

$$u^M = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

$$d\tau^2 = dt^2 - |d\vec{x}|^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left| \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right|^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 1 - v^2 = \frac{1}{\gamma(v)^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v)$$

$$\Rightarrow u^M = (\gamma(v), \gamma(v)\vec{v})$$

γ را در نظر می گیریم. تحت زمان راستای خود می بینیم (تبدیلات مسافرت)

در نتیجه با "اندازه گیری" سرعت نویی، چهار بردار سرعت (u^M) را "محاسبه" می کنیم. مقدار u^M به نویی وابسته است، مستقیماً نمی توان اندازه گیری اش کرد. تقریباً همه آزمایش های فیزیکی theory-dependent هستند، استنباطی هم مثل آزمایش با معیاری بل (در کوانتوم مکانیک وجود دارد که به نویی وابسته نیستند)

تئوری با تجربه ثابت می شود، بلکه فقط خرد سازه های آنها تأیید می شود.

* به همین ترتیب می توان چهار رار شتاب تعریف کرد:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d\gamma}{d\tau} \vec{v} + \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right)$$

- مؤلفه فضایی a^μ هم در راستای $\vec{a}$ هم در راستای $\vec{v}$ مؤلفه دارد.
- اگر در $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ یک m ضرب کنیم، به شکل $\vec{v} \cdot \vec{F}$ یا توان در می آید. به مؤلفه زمانی a^μ ، توان نسبی می گویند.

* طول چهار رار سرعت همیشه 1 است: $u_\mu u^\mu = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 (1 - v^2) = \frac{1 - v^2}{1 - v^2} = 1 \rightarrow \text{time like}$

* چهار رار شتاب همیشه بر چهار رار سرعت عمود است: $u_\mu a^\mu = u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) = 0 \rightarrow$

* با فرض به چهار رار که در آن $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ ، بر ارض به سرعت می آید: $a_\mu a^\mu = -\gamma^4 a^2 < 0 \rightarrow \text{space like}$

$$\mathcal{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\mathcal{L}(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau); \tau) - \lambda (u^\mu u_\mu - 1)^2 \right]$$

تعریف کنش با توجه به کمیت $\mathcal{L}$ جدید، باید با τ یا متر زمان میل شود:

فرض می کنیم اصل کمترین کنش برقرار است.

در باره دار کردن جمله دیری به عبارت لگاریتمی:
به دلیل وجود تدریج 4 در معادله آماري و وجود لگاریتم: کمترین درجه آزادی هست. جمله دیری را باید ضریب لگاریتم (λ) دارد عبارت لگاریتمی کنیم.

به دلیل که بعداً در محاسبات خرد انسان می دهیم، جمله دیری را با توان دوم دارد می کنیم.

اول فرض می شود چهار کمیت مستقل از یکدیگر، و هنگام در نظر گیری از λ هم به عنوان پارامتر جدید در نظر می گیریم، عبارت دیری خوب جو اعمال می شود.

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu - 4\lambda (u^\nu u_\nu - 1) u_\mu \delta \dot{x}^\mu - (u^\mu u_\mu - 1)^2 \delta \lambda \right] = 0$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\delta x^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right) + 4\lambda \frac{d}{d\tau} (u^\nu u_\nu - 1) u_\mu - \delta \lambda (u^\mu u_\mu - 1)^2 \right] + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right|_{\tau_1}^{\tau_2} - 4\lambda (u^\nu u_\nu - 1) u_\mu \delta x^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$$

شرایط حری: در ابتدا و انتهای مسیر: $\delta x^\mu = 0$

$$\begin{cases} u^\mu u_\mu - 1 = 0 \rightarrow \text{بازسازی قید مسئله} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0 \quad (u^\mu u_\mu = 1 \text{ قید}) \end{cases}$$

اگرچه قید را به صورت $u^\mu u_\mu = 1$ در نظر می‌گیریم، تمسک به قید را در انتهای مسیر می‌کنیم.

چون اعمال قید در معادلات نهایی تأثیر نمی‌گذارد، خط باید عباری که به لاگرانژی اضافه می‌شود، همان باشد، صفر شود. در نتیجه عبارت مورد نظر را چنان داریم که مناسب تر است.

9.12.89

$$H(x^\mu, p_\mu; \tau) = p_\mu u^\mu - \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_\mu u^\mu - H)$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\delta p_\mu u^\mu + \underbrace{p_\mu \delta u^\mu}_{= p_\mu \delta \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \delta p_\mu \right)$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\text{by parts} \Rightarrow \delta \mathcal{A} = \left. P_\mu \delta x^\mu \right|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\delta x^\mu \left(-\dot{P}_\mu - \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \right) + \delta P_\mu \left(u^\mu - \frac{\partial H}{\partial P_\mu} \right) \right]$$

با اِعمال شرایط مرزی مناسب (برای همگرایی جمله اول) : به معادلات لاگرانژی نسبت می‌دهیم :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\dot{P}_\mu \\ \frac{\partial H}{\partial P_\mu} = \dot{x}^\mu (= u^\mu) \end{cases}$$

در این معادلات اندیس μ از 0 تا 3 تغییر می‌کند و علامت dot مربوط به مشتق گیری نسبت به زمان ویژه (τ) است.

- حال باید شکل لاگرانژی یا همسترینی را مشخص کنیم :

لاگرانژی در حالت کلی تابع x^μ ، u^μ و τ می‌تواند باشد، اما از لحاظ فیزیکی باید یک تبدیل لورنتس ناورد را باشد تا معادلات حرکت (یا معادلات لاگرانژی) تحت تبدیلات پوانکاره ناورد باشد. طبق تبدیلات پوانکاره انتقال کمی فضا-زمانی در سیستم تقییری ایجاد نمی‌کند، بنابراین لاگرانژی

تابع x^μ نمی‌تواند باشد. تابع τ هم نمی‌تواند باشد؛ چون با انتقال مبدأ t ، مبدأ τ هم منتقل می‌شود (چون t و τ با هم رابطه دارند: $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$).

[به شکل دیگری هم می‌توان این مسأله را بیان کرد: دستگاه لحظه‌ای سکون زده اگرچه با سرعت ثابت حرکت می‌کند یک دستگاه انرژتی است، و در

کین دستگاه τ در واقع همان t است، پس وقتی تغییرات مبدأ t روی سیستم می‌تابد، انتقال τ هم نباید تقییری ایجاد کند.]

طبق تعریف تبدیلات پوانکاره (بولان و Boost)، لاگرانژی به جهت سرعت هم نباید وابسته باشد، بلکه فقط می‌تواند تابعی از طریق

باشگاه دانشجویان ایران

چهار درجه آزادی (۴) باشد: $L = L(u^\mu, u_\mu)$ ، اما در واقع $u^\mu u_\mu = 1$ ، بنابراین لاگرانژی همواره یک عدد ثابت است؛ و می توان آن را به صورت هر تابع دیگری از $u^\mu u_\mu$ نوشت. به همین سیستم های که لاگرانژی و مبدل های ثابتی دارند، سیستم های Singular می گویند. اگر خواهیم از این کاری عمل بکنیم نوشتن هم لاگرانژی استفاده کنیم در ضمن خواهیم مشاهده مکانیک نیوتنی باشد، به این شکل می نویسیم: $L = \frac{1}{2} m u^\mu u_\mu$ که البته هنوز مشخص نیست که m چه معنی است. یا می توان نوشت $L = -\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$ (این هم هم استفاده می شود). و به تابع کنواک می گویند.

★ هر طریقی که بتوانیم نوشتن برای این سیستم نسبتی است. ما این شیوه اندون لاگرانژی، P, B یک برزلات و فضا و ناورد است. $\{A(x, p; \tau), B(x, p; \tau)\} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu} \frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu} \frac{\partial B}{\partial x^\mu}$ مشابه نوشتن در این معنی که نمی عبارات را در یک زمان (t) می نویسیم (Equal time P.B.) و اینجا هم باید در یک زمان (τ) بنویسیم. (Equal Proper time P.B.)

این نوشته در این معنی که نوشته می توان نوشت را دارد: یاد مقارن است، در آید یا یکی صریح می کند و ...

★ Fundamental P.B.:

$$\{x^\mu, p^\nu\} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial p^\nu}{\partial p_\alpha} - 0 = \delta^\mu_\alpha \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial p^\nu}{\partial p_\beta} = \delta^\mu_\alpha \eta^{\alpha\beta} \delta^\nu_\beta = \delta^\mu_\alpha \eta^{\alpha\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

نتیجه حاصل ضرب این نتیجه این است که p^μ تابع از p_μ هستند و در یک برزلات مشتق p^μ نسبت به p_μ یک می شود، بلکه باید به طریقی که در نوشتن می نویسیم. بنابراین: $\{x^0, p^0\} = \{t, p^0\} = 1$ و $\{x^1, p^1\} = -1$ ، ...

باشگاه دانشجویان ایران

$$* \{X^\mu, X^\nu\} = 0$$

$$* \{P^\mu, P^\nu\} = 0$$

$$* \{A, P^\mu\} = \frac{\partial A}{\partial X^\alpha} \frac{\partial P^\mu}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial A}{\partial X^\alpha} \eta^{\alpha\mu} = \frac{\partial A}{\partial X_\mu} = \partial^\mu A$$

(در همین جایی فهمیدیم که P^μ مولد انتقال مکانی است)

$$A(X_\mu + \xi_\mu) = A(X_\mu) + \xi_\mu \partial^\mu A \Big|_{\xi=0} + \frac{1}{2!} \xi_\mu \xi_\nu \partial^\mu \partial^\nu A \Big|_{\xi=0} + \dots$$

به این ترتیب:

$$= A(X_\mu) + \xi_\mu \{A, P^\mu\} + \frac{1}{2!} \xi_\mu \xi_\nu \{\{A, P^\mu\}, P^\nu\} + \dots$$

$$= \exp(\xi_\mu \{, P^\mu\}) A$$

این یک نکته مهم را می بینیم که این P^μ از 3 تا 3 هم می گذرد و سگ بلبل $P^0 = 0$ داریم:

$$A(X_0, \xi_0) = \exp(\xi_0 \{, P^0\}) A$$

(بعبارتی فهمیدیم که تغییر انرژی دارد)

در نتیجه مؤلفه صفرم این عکس، مولد انتقال زمانی و مؤلفه های فضایی آن مولد انتقال مکانی است. پس دامیونی این سیستم مولد انتقال زمانی نیست. (در صفت مکانیک نیوتن). پس دامیونی که تعریف شد، انرژی سیستم نیست، $(P^0$ انرژی است). بنابراین به آن Super Hamiltonian گفته می شود.

چون اگر انرژی یک علامت ثابت است، پس انرژی دامیونی هم ثابت است، و اگر می خواست انرژی باشد به این معنی می بود که انرژی هم سیستم ثابت و گسیل است!

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial X^\mu} \frac{dX^\mu}{d\tau} + \frac{\partial A}{\partial P_\mu} \frac{dP_\mu}{d\tau}$$

پس حالا باید ببینیم که H مولد چیست؟

باشگاه دانشجویان ایران

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial x^M} \frac{\partial H}{\partial p_M} - \frac{\partial A}{\partial p_M} \frac{\partial H}{\partial x^M} = \frac{\partial A}{\partial \tau} + \{A, H\}$$

با استفاده از معادلات هامیلتونی:

اگر $\frac{\partial A}{\partial \tau} = 0$ $\rightarrow \frac{dA}{d\tau} = \{A, H\}$. بنابراین هامیلتونی موارد انتقال در زمان ویر است:

$$A(\tau + \tau_0) = \exp(\tau_0 \{H, \cdot\}) A$$

و به این معنی است که از دید ناظر سکون دات، انرژی همیشه ثابت است.

حال بایر مولد دات و Boost را هم تعیین کنیم. برای این کار، همین معادله هامیلتونی را میزنیم.

$$L_{\mu\nu} = (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)$$

این تعریف این کمیت از تعریف کانه زاویه ای در مکانیک کلاسیک گرفته شده. $L = \vec{r} \times \vec{p}$ ، که مثلاً برای شتاب 2 داریم $L_z = x p_y - y p_x$.
 حال در نسبیت زمان و مکان با هم تقاطع دارند و بایر همین کمیت هامیلتونی را میزنیم و در برگیرنده هم مکان را.

$L_{\mu\nu}$ هم مؤلفه های مقادیر دارد و هم زمانی، پس بایر هم مولد دات باشد و هم Boost. بایر $\{L_{\mu\nu}, \cdot\}$ را میزنیم که صفت

بایر تبدیل را به شکل $\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}$ در نظر میگیریم. (کمیت با هم تقاطع دارند چون $L_{\mu\nu}$ با هم تقاطع است)

$$\begin{aligned} & \left\{ x^\alpha, \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \{ x^\alpha, (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) \} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} (x_\mu \delta^\alpha_\nu - x_\nu \delta^\alpha_\mu) = \frac{1}{2} (x_\mu \epsilon^{\mu\alpha} - x_\nu \epsilon^{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (x_\mu \epsilon^{\mu\alpha} - x_\mu \epsilon^{\alpha\mu}) = \frac{1}{2} (x_\mu \epsilon^{\mu\alpha} + x_\mu \epsilon^{\mu\alpha}) = x_\mu \epsilon^{\mu\alpha} \end{aligned}$$

و این فرقی ندارد

(اگر از اول در تعریف بایر $\epsilon^{\mu\nu}$ ، $\frac{1}{2}$ را نمیگذاشتیم، نتیجه ما در برابر به جهت می آمد)

باشگاه دانشجویان ایران

حالا باید ثابت کنیم این عبارت معروف تبدلات لورنتس است. از پیش می دانیم $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ (که تبدلات لورنتس را نشان می دهد)

فرض کنید پارامتر تبدیل لورنتس infinitesimal باشد. اگر اصل تبدیلی وجهه باشد، Λ باید 1 می بود، یعنی $x'^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

حالا که تبدیل بسیار کوچک مد نظر ما است، یک جمله کوچک Z^{μ}_{ν} هم به Λ اضافه می کنیم: $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + Z^{\mu}_{\nu}$

Z^{μ}_{ν} چه چیزی می تواند باشد، چک Λ^{μ}_{ν} در این شرط صدق می کند که: $\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow (\delta^{\mu}_{\alpha} + Z^{\mu}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + Z^{\nu}_{\beta}) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow \eta_{\alpha\beta} + \underbrace{(\delta^{\mu}_{\alpha} Z^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu})}_{\eta_{\alpha\nu} Z^{\nu}_{\beta}} + (Z^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} \eta_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha\beta}$$

(تا مرتبه اول Z نوشته شده است.)

$$\Rightarrow Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\alpha} = 0 \Rightarrow Z \text{ باید متقارن باشد}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + Z^{\mu}_{\nu} \Rightarrow x'^{\mu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + Z^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + Z^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \rightarrow \text{مولد دوران و Boost}$$

در تغییر برای تبدیل های بسیار کوچک محاسبه اول بسط به دست آورید: $x'^{\mu} = x^{\mu} + Z^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ (که Z باید متقارن است). این جمله دقیقاً

همان چیزی هستند که ما می خواهیم. اگر $\{L_{\mu\nu}\}$ و $\{e^{\mu\nu}_{\text{exp}}\}$ مولد دوران و Boost باشد، (و جمله اول بسط $\exp$

$$\text{به شکل } e^{\mu\alpha} x_{\mu} + x^{\alpha} \text{ می شود (که } e \text{ باید متقارن است).}$$

بنابراین می توانیم مولد P_{μ} مولد انتقال مکانی و زمانی، و $L_{\mu\nu}$ مولد دوران و Boost را بنویسیم.

باشگاه دانشجویان ایران

$$* \{P_\mu, P_\nu\} = 0$$

حال باید گروه پواسون این مولدها را با هم دیگر چک کنیم:

$$* \{L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\} = -\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}$$

$$\hookrightarrow = \{ (x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu), (x_\rho P_\sigma - x_\sigma P_\rho) \} = \left(\{x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma\} - \{x_\mu P_\nu, x_\sigma P_\rho\} - \{x_\nu P_\mu, x_\rho P_\sigma\} + \{x_\nu P_\mu, x_\sigma P_\rho\} \right)$$

$$\begin{aligned} \{x_\mu P_\nu, x_\rho P_\sigma\} &= \{x_\mu P_\nu, x_\rho\} P_\sigma + x_\rho \{x_\mu P_\nu, P_\sigma\} \\ &= \{x_\mu, x_\rho\} P_\nu P_\sigma + x_\mu \{P_\nu, x_\rho\} P_\sigma + x_\rho x_\mu \{P_\nu, P_\sigma\} + x_\rho \{x_\mu, P_\sigma\} P_\nu \\ &= -x_\mu \eta_{\nu\rho} P_\sigma + x_\rho \eta_{\mu\sigma} P_\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\} = \left(-x_\mu \eta_{\nu\rho} P_\sigma + x_\rho \eta_{\mu\sigma} P_\nu + x_\mu \eta_{\nu\sigma} P_\rho - x_\sigma \eta_{\mu\rho} P_\nu + x_\nu \eta_{\mu\rho} P_\sigma - x_\rho \eta_{\nu\sigma} P_\mu - x_\sigma \eta_{\mu\sigma} P_\mu + x_\sigma \eta_{\nu\rho} P_\mu \right)$$

$$= -\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}$$

$$* \{L_{\mu\nu}, P_\rho\} = \eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu$$

$$\hookrightarrow = \{ (x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu), P_\rho \} = \{x_\mu P_\nu, P_\rho\} - \{x_\nu P_\mu, P_\rho\} = \eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu$$

* چون $L_{\mu\nu}$ با مقادیر ثابت، central charge را می‌توان در تعریف دربارۀ L حذف کرد. (در تعریف خاص central charge صفر هستند.)

پس حجم دیگر برای Scale بودن فضا و زمان را ندارد، (همان طوری که انتگرال را هم در واقع نسبت خاص با تعریف Scale کردن فضا و زمان شروع کرد.) پس حجم باید از طریق دیگری وارد شود...

باشگاه دانشجویان ایران

14.12.89

... راستیم که L^{MV} مولرهای (دولان و Boost را برای ما می سازد. برای همین معنای فیزیکی این موجود، نسبت های مختلف آن را از هم جدا کنیم. اگر m و v اندیس های فضایی باشند (از 1 تا 3 تغییر کنند) $\rightarrow$ L معروف دولان است.

- نسبت های زمان - فضای L^{MV} معروف Boost هستند (چون در واقع فضا و زمان را با هم خلط می کنند). ۱.

پس L^{0i} و L^{i0} را در نظر می گیریم، (به علت یکنواختی دولان L^{MV} ، $L^{00}=0$ ، $L^{i0}=L^{0i}$ ، L^{ij} و L^{ji}) و از روی آنها معادلات میری
بر این شکل تعریف می کنیم:
$$\begin{cases} L^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k L^{ij} \\ K^i = L^{0i} \end{cases} \quad (\rightarrow L^3 = L^{12} \text{ and cyclic permutation})$$

- L^k و K^i همان مولرهای استاندارد برای دولان و فر هستند.
- در واقع مولر دولان نسبتی با مولر دولان نیوتنی (که تکانه را برای سیستم نور) تعریف می دارد؛ اما مولر Boost تغییر کرده است، مثلاً:

$$K^1 = L^{01} = x^0 p^1 - x^1 p^0 \Rightarrow \vec{K} = t \vec{P} - \vec{x} P^0$$

(اگر جهت سلفه های اندیس پایین می نویسیم: $\vec{K} = t \vec{P} + \vec{x} P^0$)

در مکانیک نیوتنی راستیم: $\vec{B} = t \vec{P} + m \vec{x}$. در اینجا P^0 بجای m قرار گرفته است؛ که در اینم P^0 معروف انرژی سیستم است.

همین L^{0i} و K^i را استفاده از آنها، راست از L^{MV} است $\rightarrow$ مناسب است که گروه های پواسون روابط بین این

باشگاه دانشجویان ایران

$$* \{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ij}^k L_k$$

$$* \{K_i, K_j\} = +\epsilon_{ij}^k L_k$$

$$* \{K_i, L_j\} = -\epsilon_{ij}^k K_k$$

$$* \{L_i, L_j\} = \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^{ml}_i L_{ml} - \frac{1}{2} \epsilon^{nk}_j L_{nk} \right\} = \frac{1}{4} \epsilon^{ml}_i \epsilon^{nk}_j \{L_{ml} + L_{nk}\}$$

$$= \frac{1}{4} \epsilon^{ml}_i \epsilon^{nk}_j \left(-\eta_{ln} L_{mk} + \eta_{mn} L_{lk} + \eta_{lk} L_{mn} - \eta_{mk} L_{ln} \right) = \frac{1}{4} \left(\epsilon^{mn}_i \epsilon^{nk}_j L_{mk} - \epsilon^{nl}_i \epsilon^{nk}_j L_{lk} - \epsilon^{mk}_i \epsilon^{nk}_j L_{mn} + \epsilon^{kl}_i \epsilon^{nk}_j L_{ln} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left[(\delta^{mk} \delta_{ij} - \delta^m_j \delta_i^k) L_{mk} - (\delta^{lk} \delta_{ij} - \delta^l_j \delta_i^k) L_{lk} - (\delta^{mn} \delta_{ij} - \delta^m_j \delta_i^n) L_{mn} - (\delta^{ln} \delta_{ij} - \delta^l_j \delta_i^n) L_{ln} \right]$$

$$= \frac{1}{4} (L_{ji} + L_{ji} + L_{ji} + L_{ji}) = L_{ji} = -L_{ij}$$

(توجه: $\delta^{ij} L_{ij} = 0$, L_{ij} فقط در $i \neq j$ غیر صفر است)

$$L_k = \frac{1}{2} \epsilon^{ij}_k L_{ij} \Rightarrow \epsilon_{lm}^k L_k = \frac{1}{2} \epsilon_{lm}^k \epsilon^{ij}_k L_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i) L_{ij} = \frac{1}{2} (L_{lm} - L_{ml}) = L_{lm}$$

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ij}^k L_k$$

$$\{K_i, K_j\} = \{L_{oi}, L_{oj}\} = -\eta_{io} L_{oj} + \eta_{ij} L_{oo} + \eta_{oo} L_{ij} - \eta_{oj} L_{io} = L_{ij} = \epsilon_{ij}^k L_k$$

$$\{K_i, L_j\} = \left\{ L_{oi}, \frac{1}{2} \epsilon^{nk}_j L_{nk} \right\} = \frac{1}{2} \epsilon^{nk}_j \{L_{oi}, L_{nk}\} = \frac{1}{2} \epsilon^{nk}_j \left(-\eta_{in} L_{ok} + \eta_{ik} L_{on} + \eta_{on} L_{ik} - \eta_{ok} L_{in} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\epsilon_i^k L_{ok} - \epsilon_i^n L_{on}) = -\epsilon_{ij}^k L_{ok} = -\epsilon_{ij}^k L_{ok}$$

باشگاه دانشجویان ایران

معنی شرحی اس روایۃ صحابہ علی :

این را به پستان می رهند که اگر شکم سستم را در جهت $\times$ دوران هم پس حول γ دوران هم پس حول $\times$ در جهت معکوس حرکت می دهند و به همین جهت حول γ سستم به جای اولش بر می گردد ، بلکه حول محور γ دوران یافته است .

حالت ۱، سیستم به جای اولس برنگی گردد، طبقه سولفوریک
طبق این رابطه اگر در جهت $\times$ قرار داشته باشیم و در جهت $\downarrow$ در پسین بکوشیم این تبدیل به سیستم به جای اول که برنگی گردد هیچ، بلکه در جهت
به دوران یافته است!
مخالف با یکدیگر نیستی که در آن $\{B_\alpha, B_\beta\} = 0$.

این رابطه نشان می دهد اگر سگ زده باشد x خوراکه تا نیم و بعد سیستم داخل خود را در آن دهیم و حکوس این عملیات، در زمان سیستم
خود به خوراکه داشته (در مکانیک نیوتن هم همین صورت بود).
هم چنین این رابطه به این معنیست که R یک دوران به شکل سه - برابر رفتار می کند. به این علت که سه - برابر موقعیت هم چنین رفتاری

$$\{X, L_2\} = \{X, L_{31}\} = \{X, \mathbb{Z}P_1 - XP_3\} = \mathbb{Z}\{X_i, L_j\} = \in_{ijk} X_k$$

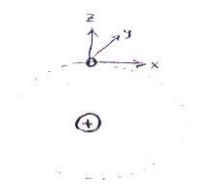
دارد -
من در قفس می زند
در حالت کلی:

در حالت کلی:

چون رفتار k_i و x_i دارای شبیه هم است و چون هر چیزی که رفت در آن مثل موقت (خود را می مثل جابه جایی) رفتار کند بداند است،

بنا بر این R هم بردار است. (یک سه بردار است) (در این است)

* رابطه 2 رابطه بسیار مهم است. $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ برای هر k_i در $\mathbb{R}$ حرکت است و در حقیقت $\mathbb{R}^n$ را توصیف می کند.



این حرکت در نقطه بار الکتریکی حول هسته و بار الکتریکی حول محور حرکت در حال گردش است. عرض کنید حرکت
 حرکت حول هسته در راستای محور x و محور y متوالی دارد. برای روشن شدن به rest frame حرکت، باید به دستگاهی برویم که
 نسبت به دستگاه آزمایشگاه در جهت x و y و با سرعت ω (نسبت به حرکت حرکت در آن نقطه دارد) قرار دارد. بنابراین در دستگاه ساکن
 (نقطه ای) حرکت می بینیم که حرکت محوری حول z می بینیم است.
 در حالت کلی و غیر حرکت حرکت Precession (این دور)

۱۵۰

Thomas Precession
 classical Electrodynamics, Jackson. Section 11-8
 (Page 548)

* این روابط جابجایی را می توان به شکل ساده تری هم نوشت. برای این کار، از روی $\vec{L}$ و $\vec{R}$ معادله بنام $\vec{N}$ تعریف کنیم:

$$\vec{N} = \vec{L} + i\vec{R}$$

$$\vec{N}^* = \vec{L} - i\vec{R}$$
 که البته به علت دلتا صاف معادله $\vec{N}$ یک معادله دیرینگی نیست. $\vec{N}^*$ هم می توان تعریف کرد.
 بنابراین $\vec{L}$ و $\vec{R}$ را می توان بر حسب $\vec{N}$ و $\vec{N}^*$ نوشت: $\vec{L} = \frac{\vec{N} + \vec{N}^*}{2}$ و $\vec{R} = \frac{\vec{N} - \vec{N}^*}{2i}$ و با استفاده از این روابط جابجایی را می توان نوشت:

$$\{N_i, N_j\} = \epsilon_{ijk} N_k \quad \{N_i^*, N_j^*\} = \epsilon_{ijk} N_k^* \quad \{N_i, N_j^*\} = 0$$
 با استفاده از این کمیت ریاضی، روابط جابجایی از حالت کوانتومی L و K در می آید و به این شکل ساده تر نوشته می شود.

باشگاه دانشجویان ایران

* در مکانیک کوانتوم، m به صورت central charge وارد تئوری شد، و در نهایت در رابطه مربوط به این شکل در گرفت: $H - \frac{P^2}{2m} = C$
 $\hookrightarrow \text{constant}$

اگر فرض کنیم که C ثابت است، و کوئنتایزاسیون آن را با یک تک مولد حساب می‌کنیم، نتیجه منفردی شد:

$$\{C, H\} = \left\{H - \frac{P^2}{2m}, H\right\} = 0$$

$$\{C, L\} = \{C, P\} = \{C, B\} = 0$$

(با استفاده از روابط صابجایی مولد کوانتوم می‌توان نوشت:)

این صفر شدن C بر این معنایست که تحت تبدیل گالیله (که شامل چهار تبدیل باشد) C تغییر نمی‌کند. مقدار ثابتی است.

* بررسی با اعراض مشخص می‌شود، بلور ذات بیاری، حجم، بار، اسپین، ...

در مکانیک نسبیتی باید حجم را از یک راه دیگر وارد تئوری کنیم. فرض کنید در اینجا هم یک کمیت C وجود داشته باشد که کوئنتایزاسیون آن باقیمانده مولد کوانتومی منفرد شود. (یعنی کمیت ثابتی است که با تبدیل کوانتوم مقدارش عوض نمی‌شود). به همین موردی عملکردی کار می‌گرفته می‌شود.

در حالت کلی C تابع موردی است که نشان می‌دهد: $C = C(P_\mu, L^{\mu\nu}, x_\mu)$. اما این تابع باید صفتی باشد که شرط

$$\{C, P_\mu\} = \{C, L^{\mu\nu}\} = 0 \quad \text{برقرار باشد. (باید حسب } K \text{ و } L : \{C, K_i\} = \{C, L_i\} = 0 \text{)} \quad C \text{ باید دایرادی لورنتس باشد.}$$

برای این تبدیلات لورنتس دو عملکرد کار می‌رود: یکی از آنها حجم درگیری اسپین را وارد معین می‌کند. باید آنها را مشخص کنیم.

- با کمیت‌های شناخته شده فعلی می‌توان این عبارات را بر حسب C ساخت: $P_\mu P^\mu$ ، $P_\mu P_\nu L^{\mu\nu}$ (که می‌توانست چن $L^{\mu\nu}$ باشد معین است)،

باشگاه دانشجویان ایران

یا $L^{\mu\nu}$ و یا X^{μ} در بیان عبارات مشابهی می باشد. سازه بیان انتخاب $C = P_{\mu} P^{\mu}$ است؛ حرکت مربوط به این سازه را در

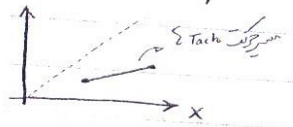
درجه $P_{\mu} P^{\mu}$ باید یک حرکت فیزیکی باشد که سیستم را معرفی کند: حجم زره. تعریف حجم در نسبت خاص $P_{\mu} P^{\mu} = m^2$ است که با تعریف

حجم در مکانیک کوانتوم متفاوت است. به اصطلاح Group Theory، انتخاب یک حجم ثابت، یعنی انتخاب یک فضا که در آن این تبدیلات

* چنانچه به نسبت $u_{\mu} u^{\mu} = 1$ با مقایسه رابطه با $P_{\mu} P^{\mu} = m^2$ به این نتیجه می رسیم که $P_{\mu} = m u_{\mu}$ ابزار حرکت برابر است با حجم $\times$ سرعت

(اگر از ابتدا قرار می دهیم $P_{\mu} P^{\mu} = s^2 m^2$ و آن را به جای $P_{\mu} = i m u_{\mu}$ می نویسیم، که در فیزیک نیست.)
 * همچنین رابطه نشان می دهد که سرعت ذرات از 1 نمی تواند بزرگ تر باشد. اگر $v > 1$ و در نتیجه u_{μ} موجودی فرض خواهد شد چنان $(\gamma, \gamma v)$ می باشد

البته می توان سرعت را برین از 1 هم داشت، اما حجم را هم موجودی فرض $(m = i m_0)$ تعریف کرد (که در این صورت $P_{\mu} P^{\mu} = -m^2$). به زراتی با این



در یکی از (که البته مشاهده می شود) Tachyon گفته می شود: $v_{Tach.} > 1$ و $m_{Tach.} = i m_0$

Tachyon از علت هم پیری نمی آید. فعلاً این موضوعات را از مباحثات این درس حذف می کنیم؛ اما مثلاً در String Theory کاربرد دارند

بین ذراتی که سرعت آنها کمتر از 1 است و Tachyon هیچ برعکس نمی تواند صورت گیرد.

این ذرات از ابتدا سرعت بسیار از 1 دارند، مثل فوتونها که از ابتدا سرعت برابر با 1 دارند.

باشگاه دانشجویان ایران

حال با داشتن رابطه u_μ و P_μ می توان معادلات حرکت را برای یک سیستم نسبی بدست آورد. معادلاتی که با P_μ و P^μ خواهند شد.

لاگرانژی تابع از u^μ است. $\mathcal{L}$ را به این شکل می نویسیم که $\mathcal{L} = u^\mu u_\mu$. از معادلات اور-لاگرانژ داریم: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \times 2u_\mu \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} u_\mu = 0 \Rightarrow a_\mu = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \text{ثابت}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \frac{1}{2} m \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m u_\mu u^\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m u_\mu) = \frac{dP_\mu}{dt} = m a_\mu = 0 \Rightarrow P_\mu = \text{const.} \Rightarrow \text{4 بردار انرژی-انبار حرکت ثابت است.}$$

* در نظر گرفتن برهم کنش بین ذرات:

مثال: سیستم N ذره در فضا (در فضا) هم پیاده می کنند. در مکانیک نیوتن، با وجود برهم کنش بین ذرات: $\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - V$

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - V \right) dt \quad \text{که زمان } t \text{ برابر جمع ذرات بود. تقارن این حالت، حتی بدون در نظر گرفتن برهم کنش}$$

$$\mathcal{L} = \int dt \left(\frac{1}{2} m_1 u_{(1)}^\mu u_{(1)\mu} + \frac{1}{2} m_2 u_{(2)}^\mu u_{(2)\mu} \right) \quad \text{لاگرانژی به این شکل در نظر می آید:}$$

باشگاه دانشجویان ایران

در این حالت معادلات حرکت این (دو ذره) در یک سیستم است (این چنین است):

$$\frac{d}{dt_1} P_{\mu}^{(1)} = 0$$

$$\frac{d}{dt_2} P_{\mu}^{(2)} = 0$$

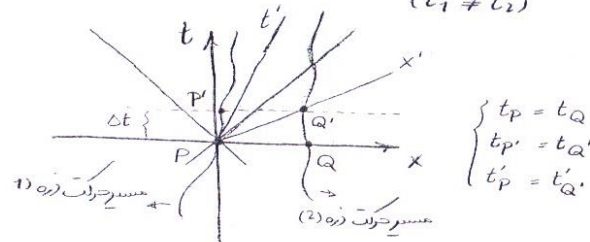
اگر بخواهیم همه شل را در یک سیستم، در عبارت قرار دهیم، مشخص نیست که انتقال گری باید روی چه کمیتی باشد: t_1 یا t_2 ؟
بنابراین انتقال گری امکان پذیر نیست. در این حالت ذرات دیگر آزاد هستند، بنابراین معادلات حرکت آنها این طور تغییر می کند:

$$\frac{d}{dt_1} P_{\mu}^{(1)} = F_{2 \rightarrow 1}^{\mu} \quad , \quad \frac{d}{dt_2} P_{\mu}^{(2)} = F_{1 \rightarrow 2}^{\mu}$$

$$\frac{d}{dt} (P_{\mu}^{(1)} + P_{\mu}^{(2)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 = t \quad , \quad F_{2 \rightarrow 1}^{\mu} = -F_{1 \rightarrow 2}^{\mu}$$

در مکانیک نیوتنی طبق قانون سوم نیوتن

که جهان اصلی برای غنیمت کل سیستم است. در مکانیک نسبیتی حتی اگر $F_{1 \rightarrow 2}^{\mu} = -F_{2 \rightarrow 1}^{\mu}$ هم برقرار نباشد داریم:



$$\begin{cases} t_P = t_Q \\ t_{P'} = t_{Q'} \\ t'_P = t'_Q \end{cases}$$

در نتیجه معلوم می شود که اصل برای غنیمت کل برقرار نیست یا خیر.

نسخه 2: تعریف Van Dam-Wigner (80 قرن 20)

اگر بخواهیم همه چیزها را در یک سیستم قرار دهیم، باید:

$$P_{\mu}^{(1)}|_P + P_{\mu}^{(2)}|_Q \stackrel{?}{=} P_{\mu}^{(1)}|_{P'} + P_{\mu}^{(2)}|_{Q'}$$

یعنی مجموع انرژی حرکت ذره 1 و 2 در یک زمان خاص t (که ذره 1 در نقطه P و ذره 2 در نقطه Q است) با مجموع انرژی حرکت آنها در $t + \Delta t$ (که ذره 1

باشگاه دانشجویان ایران

Gravitation and Spacetime : Ohanian (section 2-6)

در نقطه P و در Q (نقطه Q است) باید برابر باشد. اگر زمان t نه زمان t' و $t=0$ است نه زمان t' و $t'=0$ است ، یک زمان چارچوب مرجع است

این رابطه چون یک رابطه چارچوبی است ، پس در هر چارچوب انیسی باید برقرار باشد . از جمله در دستگاه انیسی که نقطه P و نقطه Q غیر انیسی

باشند . اگر بایستی برقرار باشد ، P_{tot}' در $t'=0$ باید با P_{tot} در $t=0$ باشد و $P_{tot}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} P_{tot}^{\nu}$ و $P_{tot}^{\mu} = m_1 u_{(1)}^{\mu} + m_2 u_{(2)}^{\mu}$

$$P_{tot}'^{\mu} \Big|_{t'=0} = m_1 u_{(1)}^{\mu} \Big|_P + m_2 u_{(2)}^{\mu} \Big|_{Q'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} (m_1 u_{(1)}^{\nu} \Big|_P + m_2 u_{(2)}^{\nu} \Big|_Q) \quad \begin{cases} u_{(1)}^{\mu} \Big|_P = \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(1)}^{\nu} \Big|_P \\ u_{(2)}^{\mu} \Big|_{Q'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(2)}^{\nu} \Big|_{Q'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(1)}^{\nu} \Big|_P + m_2 \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(2)}^{\nu} \Big|_{Q'} = m_1 \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(1)}^{\nu} \Big|_P + m_2 \Lambda^{\mu}_{\nu} u_{(2)}^{\nu} \Big|_Q \Rightarrow m_2 u_{(2)}^{\mu} \Big|_{Q'} = m_2 u_{(2)}^{\mu} \Big|_Q$$

نتیجه نهایی این است که اگر خواهیم نسبت خاص درست باشد ، اصل بقای ممتنع هم برقرار باشد ، باید $P_{\mu}^{(2)} \Big|_Q = P_{\mu}^{(2)} \Big|_{Q'}$ یعنی ممتنع زو

تغییر نکند ، که به معنای تحول برعکس بین Q و Q' است . اما این تحول گفت که ذات با هم برعکس دارند ، پس

اصلاً اصل بقای ممتنع به این شکل برقرار نیست (یعنی این در Q) . همانا موجود دیگری نیز وجود دارد در این بین ، که دارای ممتنع است ، و مجموع

اندازه حرکت این سه موجود در طول زمان ثابت است . ممتنع سوم زود نمی تواند باشد ، چون مشکل هم میانه باقی خواهد ماند . به این

موجود ، میدان (Field) می گویند . میدان در فضا و زمان گسترده است ، و کم درینا بودن اندازه حرکت هر ذرات با ممتنع میدان میانه

می شود . برعکس این بین ذرات هم از طریق همین میدان منتقل می شود که با سرعت استاندارد (1) منتشر می شود .

البته تماراد حل این مسئله به این شکل نیست . مثلاً اگر درینامیک فاین و وینر اصل بقای ممتنع را در نظر نمی گیرد

16.12.89

... دیدیم که اگر خواستیم جسم را در یک زره بارزات دیگر را هم در نوشتن معادلات حرکت در نظر بگیریم، پس از راه حل معنی میدان است. در این صورت

معادله حرکت زره به شکل $\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$ خواهد شد، که باید F^μ را به حسب مذهب جدید (میدان) معرفی کنیم. طبیعتاً است که F^μ را یک 4-بردار در نظر بگیریم، چون

معادله حرکت زره باید ناوردای لورنتس باشد؛ یعنی در همه چارچورها یک شکل داشته باشد.

$$\left. \begin{aligned} * \frac{dP^\mu}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(mu^\mu) = m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu \\ * a^\mu u_\mu &= 0 \Rightarrow F^\mu u_\mu = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{خم نو را باید طوری انتخاب کنیم که در شرط } F^\mu u_\mu = 0 \text{ صدق کند.}$$

در γ ، m ، γ را به عنوان تعریف جسم (در نظر بگیرید، در نتیجه مقدار آن متغیر بود). لذا (در حال حاضر، جسم به عنوان یک جسم در نظر گرفته می شود که معادله نامی دارد و هیچ طول 4-بردار P^μ است: $P^\mu P_\mu = m^2$. لذا تعریف انرژی حرکت (نسبت به حالت سکون: $P_i = mv_i$) تغییر کرده است: $P^\mu = mu^\mu = (m\gamma, m\gamma\vec{v})$ $\leftarrow P^i = m\gamma v^i$

باز هم به رابطه ای که برای a^μ به دست آوردیم $(a^\mu = (\gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a}, \gamma^4 \vec{v} \times \vec{a} + \gamma^2 \vec{a}))$ ، اگر 4-بردار F^μ را به m تقسیم کنیم، باید خواص a^μ داشته باشد: مؤلفه های

فضای آن باید هم در جهت $\vec{a}$ و هم در جهت $\vec{v}$ مؤلفه داشته باشد، همچنین مؤلفه زمانی F^0 باید به رابطه ای تعلق داشته باشد.

* به دست آوردن خم F^μ :

در حالت کلی F^μ را می توان از روی معادلات شناخته شده به عنوان field، مسافت: میدان اسکالر، میدان 4-بردار، میدان 4-تانسور و... و سایر ترکیب این میدان ها. مشابه یکسانگی نیوتنی، نیوتنی تولید ناخالص از x^μ ، u^μ و τ باشد؛ اما آن را نمی توان از a^μ (در نظر بگیریم، به دلیل مسافت گرفتن معادلات.

باشگاه دانشجویان ایران

1 Scalar field : $\phi'(x') = \phi(x)$ $F^M = \phi u^M$, $F^M = \partial^M \phi$
 ← غویل قبل، چون $F^M_{,M} = 0$ صدق نمی‌کند.

2 4-vector field , $A'_\mu(x) = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x)$ $F^M = u^\nu \partial_\nu A^M$ افزای شرطی $F^M = u_\nu (\partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M)$
 ← از عبارت بردشتان $\partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M$ استفاده کردیم تا وقتی در عبارت مقادیر $u_\mu u^\nu$ ضرب می‌شود، حاصلش صفر شود.

3 4-Tensor field : $T'_{\mu\nu}(x) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta}(x)$ $F^M = T^{M\nu} u_\nu$ → زمانی که $T^{M\nu}$ بردشتان باشد، صحیح است.

معمولاً این عبارت با اکتانای هندسه در نظر می‌آوریم F^M را ساخت. طبیعت از این اکتانای بردشتان بردشتان استفاده کرده‌اند :

1/ اگر در فرم $F^M = \partial^M \phi$ ← نظریه کلاسیک نوعی از روی این ساخته می‌شود که یک alternative برای مکانیک کوانتومی است (Bohmian Mechanics).

2/ اگر در فرم $F^M = u_\nu (\partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M)$ ← تئوری اکترومغناطیس ساخته می‌شود. $(\partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M)$ → تانسور میدان اکترومغناطیس

3/ اگر در فرم $F^M = T^{M\nu} u_\nu$ ← نسبت به گرایش از آن استفاده می‌شود.

 $F^M = u_\nu (\partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M)$ A^M را بیانگر اکترومغناطیس می‌نامیم.

اگر بخواهیم $F^{M\nu}$ را به این شکل تعریف کنیم که : $F^{M\nu} = \partial^M A^\nu - \partial^\nu A^M$ ، و آن را "تانسور مشت میدان" بنامیم، کل آن حالت برای

فرم F^M به این صورت در می‌آید : $F^M = \alpha u^\nu F^{M\nu}$ ، که α ضریب ثابتی است که باید تعیین کرد.

باشگاه دانشجویان ایران

$i=1,2,3$
 $\checkmark F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x_i}$

$F^{ij} = -F^{ji}$, $F^{00} = 0$ ← با همسان است
 برای میدان الکتریکی مؤلفه های F^{0i} و مؤلفه های F^{ij} را جدا برداری کنیم.

$A^\mu = (\phi, \vec{A})$: A^μ را به این شکل تعریف کنیم :
 درجه خازم راست :
 $F^{0i} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow F^{i0} = - \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = E^i$
 $\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$: (میدان الکتریکی)

$\checkmark F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A^1}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^1} = \partial_y A_x - \partial_x A_y = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z$

(میدان مغناطیسی) $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k$

درجه مؤلفه های زمان-فضای $F^{\mu\nu}$ ، میدان الکتریکی و مؤلفه های فضا-فضای $F^{\mu\nu}$ میدان مغناطیسی را می سازند.

اگر $F^{\mu\nu}$ را با این تعریفیات در رابطه $F^\mu = \alpha u_\nu F^{\mu\nu}$ استفاده کنیم و ثابت کنیم که F^μ نیروی لورنتس است ، یعنی برداری که در میدان الکترومغناطیسی حس می کند ،
 یعنی تغییرات از مؤلفه های $F^{\mu\nu}$ به عنوان میدان الکتریکی و مغناطیسی درست بوده است.

$F^\mu = \alpha u_\nu F^{\mu\nu} = \alpha u_0 F^{\mu 0} + \alpha u_i F^{\mu i} = \alpha \gamma F^{\mu 0} - \alpha \gamma v_j F^{\mu j}$
 $\Rightarrow F^i = \alpha (\gamma E^i + \gamma v_j \epsilon_{ijk} B_k) = \alpha \gamma [E^i + (\vec{v} \times \vec{B})^i]$
 $\Rightarrow \vec{F} = \alpha \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
 $\alpha = q \perp e$

(در حقیقت با رابطه نیروی لورنتس α برابر می آید)

$F^0 = e u_i F^{0i} = e (-\gamma v_i) (-E^i) = \gamma e \vec{v} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F}_{electric}$
 - مؤلفه دقت
 Power: $\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot (\gamma e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})) = \gamma e \vec{v} \cdot \vec{E}$
 که همان توان دقتی نیروی لورنتس است.

باشگاه دانشجویان ایران

* مرحله نوری به نسبت آوردن معادلات ماکسول است. همان طور که معادلات حرکت زره را از اصل کمترین کنش و معضله لارانتی به دست آوردیم.

معادلات حاکم بر میدان را هم باید با معضله لارانتی مرتبط به این میدان استفاده از اصل کمترین کنش به دست آوردیم.

برای زره این لارانتی را انتخاب کردیم: $L = \frac{1}{2} m u^\mu u_\mu$. (از این به بعد همیشه مرتبط به زره را با x^μ (به جای x^μ) نشان می دهیم، چون زره تنها در

حل جریمن وجود دارد، اما متحد همدیگر که معنی کنیم (میدان) در غیر نقاط فضا آمیخته وجود دارد؛ در نتیجه آنتیپارتن A^μ را در جریمن x^μ : $A^\mu(x^\mu)$.

* در این حالت، کنش مرتبط به زره و میدان شامل سه جمله است: 1) جمله مرتبط به زره $(\frac{1}{2} m u^\mu u_\mu)$ که در $\int_{t_1}^{t_2} dt$ که همان کنش شده بود؛

2) یک جمله مرتبط به میدان، و 3) یک جمله هم مرتبط به برکنش زره با میدان. که حالات دوم و سوم را باید مشخص کنیم.

- سافتین کنش مرتبط به میدان. در معادله آرای میدان مرتبط به x^μ است، پس در کنش میدان، اشکال باید روی تمام نقاط فضا در زمان

گرفته شود: $\int d^4x$. اگر خواهیم از جریمن لارانتی زره برای سافتین لارانتی میدان استفاده کنیم، می بینیم که لارانتی زره از توان دوم سرعت

(یعنی مشتق x^μ نسبت به dt ، اگر میدان مرتبط به A^μ باشد) ساخته شده است. پس اگر لارانتی میدان هم یک چهارمین جری باشد، باید از توان دوم مشتق A^μ (در لارانتی میدان)

نسبت به آنتیپارتن (x^μ) ساخته شود، که $F^{\mu\nu}$ همین کار را برای ما انجام می دهد؛ در نتیجه در حالت کلی:

$$L_{field} = \beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

که ما برای لورنتس هم هست. در نتیجه کنش مرتبط به میدان برابر است با:

$$\int d^4x (\beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

باشگاه دانشجویان ایران

(خواهم دید که گزاشی میلان خیرگی - مثلا $A^\mu A^\mu$ - نمی تواند باشد ۰)

حلقه دوم - مربوط به برگشتن زرد و میلان - را باید دیدی بسیار کم که $F^{\mu\nu}$ باشد و هم u^μ - همچنین باید دیدی باشد که وقتی از یک درخت گرفته شد، هم $F^{\mu\nu} u_\mu$ را ندارد. (چون می خواهم به معادله حرکت زرد در حضور میلان زرد برگردم). حلقه مورد نظر $F^{\mu\nu} u_\mu$ نمی تواند باشد، چون سبب از درخت گرفتن $F^{\mu\nu} u_\mu$ را نمی دارد، پس شاید باید یک u_ν هم اضافه کنیم: $F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu$. اما حال این عبارت همواره صفر است، زیرا $F^{\mu\nu}$ یک تانسور پاد متقارن و $u_\mu u_\nu$ تانسور متقارنی است. بنابراین گزاشی مربوط به برگشتن زرد و میلان باید به شکل $A^\mu u_\mu$ باشد (که نادراست). حال باید ببینیم روی صفحه باید اشتغال کنیم تا گشتن ساخته شود. u_μ تابعی از τ و A^μ تابعی از x^μ است. اما در این حلقه، A^μ در محل زرد می باشد. چون می دانیم که میلان حاصل از زرد است که دارای تانگنسی دایره ای است، در محل زردان خود زرد مورد نظر روی آن اثر می کند. پس: $A^\mu = A^\mu(x=r(\tau))$.

پس برای ساختن گشتن این گزاشی باید روی τ زرد مورد نظر اشتغال کنیم: $\int d\tau (\lambda u_\mu(\tau) A^\mu(x=r(\tau)))$ که فریب ثابت

* گشتن به دست آمده مربوط به برگشتن یک زرد با میلان موجود در مقادیر زمان است. اگر برای چند زرد بخواهم بنویسم به این شکل در می آید:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \int d\tau_i \left(\frac{1}{2} m_i u_\mu^{(i)} u_\mu^{(i)} \right) + \int d^4x \left(\beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \sum_{i=1}^N \int \lambda d\tau_i u_\mu^{(i)}(\tau_i) A^\mu(x=r_i(\tau_i))$$

که جمله دوم، کشش مربوط به میدان است که هیچ ذات در آن مهم ندارد. (در اینجا ممکن است اصلاً این میدان جنبه ای از فضا را داشته باشد).
 باشد. همان طور که بعد از حالات ماکسول داریم، اگر $\vec{m}$ و $\vec{J}$ صفر باشند، $\vec{E}$ و $\vec{B}$ می تواند غیر صفر باشند. در واقع میدان δ مستقل از ذرات، وجود دارند، ذرات فقط آنها را deform می کنند.

Variation:
 $\begin{cases} r^\mu \rightarrow r^\mu + \delta r^\mu \\ A^\mu \rightarrow A^\mu + \delta A^\mu \end{cases}$

* اصل کمترین کشش و به دست آوردن معادلات میدان در حرکت زده:

$\delta \mathcal{L} = \int d\tau \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial r^\mu}}_{m u_\mu} \delta r^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial u^\mu} \delta u^\mu \right) + \int d\tau \left(u_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial r^\nu} \delta r^\nu + A^\mu \delta u_\mu \right)$
 ابتدا از یک ذره شروع می کنیم.
 عبارت دوم (مربوط به کشش)

$+ \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} \delta (\partial^\mu A^\nu) \right)$
 در ذرات باید نسبت به coordinate (رایجاً A^μ) و مشتقات گرفت.

$\frac{\partial \mathcal{L}_{field}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} = \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} \left[\beta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] = \beta (4 F_{\mu\nu})$

$\delta u^\mu = \delta \dot{r}^\mu = \frac{d}{d\tau} (\delta r^\mu) \quad , \quad \delta (\partial^\mu A^\nu) = \partial^\mu (\delta A^\nu)$

$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = m u_\mu \delta r^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int d\tau (m \dot{u}_\mu) \delta r^\mu$
 $+ \int d\tau \left(u_\nu \frac{\partial A^\nu}{\partial r^\mu} \delta r^\mu + A_\mu \delta r^\mu \right) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int d\tau \left(\dot{A}_\mu \delta r^\mu \right)$
 $+ \int d^4x \left(4\beta F_{\mu\nu} \delta A^\nu \right) d^3x - \int d^4x (4\beta \delta A^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu})$
 → مربوط به ذره
 → مربوط به کشش
 → مربوط به میدان

باشگاه دانشجویان ایران

در خط آخر، انتگرال روی حجم 4 بعدی (ابر حجم) : $\int d^4x (4\beta F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu)$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int d^4x (4\beta F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu) \stackrel{\text{by parts}}{=} \underbrace{\int d^4x \partial^\mu (4\beta F_{\mu\nu} \delta A^\nu)}_{\downarrow} - \int d^4x (4\beta \partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu$$

این انتگرال، به انتگرال روی یک سطح سه بعدی تبدیل می شود. مشابه محاسبات روی قبل، این هم شرط می گزیم که میدان روی این سطح صفر باشد.

$$\Rightarrow \delta \mathcal{A} = \int d\tau (-m \dot{u}_\mu + \gamma u_\nu \frac{\partial A^\nu}{\partial r^\mu} - \gamma \dot{A}_\mu) \delta r^\mu - \int d^4x (4\beta \partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu$$

! هنگام گرفتن درشت، از جمله کشش مربوط به برگشتش زده و میدان (که تابع A^μ هم هست) باید نسبت به A^μ هم درشت بگیریم. (درشت این جمله)

را هم باید به $\delta \mathcal{A}$ اضافه کرد.

$$\mathcal{A} = \dots + \int d\tau \gamma \overset{\text{interaction}}{u_\mu A^\mu} + \dots \Rightarrow \delta \mathcal{A} = \dots + \int d\tau \gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \delta (\partial_\nu A^\mu) \right) + \dots$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{A} = \int d\tau (-m \dot{u}_\mu + \gamma u_\nu \frac{\partial A^\nu}{\partial r^\mu} - \gamma \dot{A}_\mu) \delta r^\mu - \int d^4x (4\beta \partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu + \int d\tau (\gamma u_\mu) \delta A^\mu = 0$$

$$-m \dot{u}_\mu + \gamma \underbrace{(\partial_\mu A^\nu) u_\nu}_{= u^\nu \partial_\mu A_\nu} - \gamma \frac{\partial A_\mu}{\partial r^\nu} \frac{\partial r^\nu}{\partial \tau} = -m a_\mu + \gamma u^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0$$

$$\Rightarrow m a_\mu = \gamma u^\nu F_{\mu\nu}$$

از تقسیم با رابطه ای که قبلاً داشتیم : $\gamma = e$ ،
یعنی فریب کوپلاری که برگشتش اثر و جاذبه را مشخص می کند. بار الکتریکی است.

$$\int d\tau u_\mu \delta A^\mu = \int d\tau \int d^4x u_\mu \delta A^\mu(x^\mu) \delta^{(3)}(x^\mu - r^\mu) \quad \int d\tau u_\mu \delta A^\mu \quad \text{را به این صورت می نویسیم:}$$

$$\delta^{(3)}(x^\mu - r^\mu) = \delta(x^0 - r^0) \delta(x^1 - r^1) \delta(x^2 - r^2) \delta(x^3 - r^3)$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\Rightarrow - \int d^4x \left(4\beta \partial^\mu F_{\mu\nu} - e \int d\tau u_\nu \delta^{(3)}(x-r) \right) \delta A^\nu = 0$$

$$\int d\tau e u_\nu \delta^{(3)}(x-r) \equiv J_\nu$$

$$-\beta A_{,\mu} = J_\nu$$

$$\mathcal{L}_{A, \mu} = A_{,\mu} A^{,\mu}$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(J_\nu - 4\beta \partial^\mu F_{\mu\nu} \right) \delta A^\nu = 0 \Rightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{4\beta} J_\nu$$

در انتخاب β کافی عمل داریم. به همین دلیل در اکثر مختصات، سیستم‌های یکای مختلف (CGS و SI) داریم. در سیستم CGS داریم: $\beta = \frac{1}{16\pi}$

$$\Rightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu$$

در مرحله بعد باید اثبات کنیم که J خطی جریان الکتریکی است، و اگر در معادله بالا به جای μ و ν بارگذاری کنیم، به عبارات میدان فاکسول خواهیم رسید.

- اگر سیستم حیدرهای باشد، معادلات به این شکل در می آید.

$$\frac{dP_{(i)}^\mu}{d\tau_{(i)}} = q_{(i)} u_{(i)}^\mu F^{\mu\nu}(x_{(i)})$$

$$J_\nu = \sum_{i=1}^N \int d\tau_{(i)} q_{(i)} u_{(i)}^\nu \delta^{(3)}(x - r_{(i)})$$

باشگاه دانشجویان ایران

21.12.89

$$J_p = \int d\tau e u_p \delta^{(4)}(x^i - r^i) = e u_p \delta^{(3)}(x^i - r^i)$$

برای $d\tau$ انگرال گرفته شده است

... نشان می‌دهیم J چگالی جریان الکتریکی است:

$$J^0 = e u^0 \delta^{(3)}(x^i - r^i) = e \gamma \delta^{(3)}(x^i - r^i)$$

مؤلفه‌های مختلف J^ν را بررسی می‌کنیم:

J^0 معروف چگالی بار الکتریکی است، چون می‌دانیم برای یک بار نقطه‌ای (در حالت غیرنسبی) چگالی بار برابر است با: $\rho = q \delta(x - x_0)$. (راستی ضرب

در نشان دهنده انتفاض طول در یکی از ابعاد حجمی است که بار را در بر گرفته، یعنی سلا مشق کنید در دستگاه S ، بار q و حجمی که شامل آن است

ساکن باشند: $\rho = \frac{q}{V}$ در این دستگاه: $\rho = \frac{q}{V}$. از دستگاه S' که با سرعت ثابت در جهت x نسبت به S حرکت می‌کند، بکار

ابعاد حجم منقبض شده: $x' = \frac{x}{\gamma}$. درجه در دستگاه S' : $\rho' = \frac{q}{V'}$. پس برای یک زده کوچک، چگالی بار الکتریکی برابر است با: $\rho = e \gamma \delta^{(3)}(x^i - r^i)$.

$$J^i = e \gamma v^i \delta^{(3)}(x^i - r^i) = \rho v^i \Rightarrow J^i =$$

مؤلفه‌های چگالی جریان

در نتیجه مؤلفه‌های J^ν برابر $J^\nu = (\rho, \vec{J})$ است. J^ν یک تکتیلات لورنتس مثل موقعیت رفتار می‌کند.

چگالی بار الکتریکی (ρ) یک اسکالر نسبت به همان طوری که جریان الکتریکی بردار نسبت به؛ بلکه ρ و $\vec{J}$ مؤلفه‌های یک 4-بردار هستند.

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ J'_x \\ J'_y \\ J'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho' = \gamma(\rho + v J_x) \\ J'_x = \gamma(J_x + v \rho) \\ J'_y = J_y \\ J'_z = J_z \end{cases}$$

* فرض کنیم در جهت x Boost داریم:

باشگاه دانشجویان ایران

برائے اصل نقی بابہ الکفری: (برائے روابط موجود)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \Rightarrow \partial_\nu \underbrace{\partial_\mu F^{\mu\nu}}_{0} = 4\pi \underbrace{\partial_\nu J^\nu}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\nu J^\nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial J^0}{\partial t} + \partial_i J^i = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

این یعنی بیان اصل بقای بار الکتریکی است.

اصل تعاقب با استرگنی از یادشماران دوران F^{IV} نشیمن شد. علت یادشماران دوران F^{IV} هم این است که (تقسیم نوری اکثر و حقایق F^M)

نادر سرمد کا استعمال (جہاں $a^\mu u_\mu = 0$)، (ریکٹر درجہ) $F^\mu = e u_\nu F^{\mu\nu}$ ، $F^{\mu\nu}$ جا نادر درجہ نادر.

عبد غفور بوزك a^μ و u_μ (الراعي) $\frac{d}{dt} (u^\mu u_\mu) = 0$ ، $a^\mu u_\mu = \frac{du^\mu}{dt} u_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^\mu u_\mu) = 0$ ، $u^\mu u_\mu = 1$ (الجزء الثاني) .

$$dS^2 = dx^\mu dx_\mu \quad \text{و } u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{d\tau^2} = \frac{dS^2}{d\tau^2}$$

پس از نظر مسامحه نویسی، رشته اصل نقای بد انحرافی را این نیست که در نسبت خاص در حرکت استادان معروف می شود، و برای هر زره

Space-time interval $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$: فاصلہ زمانی

* برداشت کردن معادلات ماکسول برای میدان‌های الکترومغناطیس، از رابطه $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$

در مورد مؤلفه‌های زمان-فضا و فضاهای با شورش میدان $F^{\mu\nu}$ - ضمیمه عبارتی داشتیم:

$$\begin{cases} F^{i0} \equiv E^i \\ F^{ij} \equiv -\epsilon^{ijk} B^k \end{cases}$$

در رابطه $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ مؤلفه‌ها را جدا جدا بررسی می‌کنیم:

* $\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = 4\pi J^0 = 4\pi \rho \Rightarrow \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = 4\pi \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$

* $\nu = 1 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 1} = 4\pi J^1 \Rightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = 4\pi J^1$

$\Rightarrow -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \partial_2 B_z - \partial_3 B_y = 4\pi J^1$

و به همین ترتیب برای $\nu = 2$ و $\nu = 3$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

برای برداشت کردن دو معادله دیگر از یک رابطه دیگر برای $F^{\mu\nu}$ استفاده می‌کنیم:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

اثبات رابطه فوق:

$$\partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma - \partial_\alpha \partial_\gamma A_\beta + \partial_\beta \partial_\gamma A_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha A_\gamma + \partial_\gamma \partial_\alpha A_\beta - \partial_\gamma \partial_\beta A_\alpha = 0$$

* به دلیل خاصیت پادمتقارنی $F^{\mu\nu}$ ، از رابطه بالا فقط 4 معادله مستقل به دست می‌آید؛ (از بین 44 معادله در حالت کلی!)

$$\left. \begin{matrix} \alpha=1 \\ \beta=2 \\ \gamma=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \epsilon F^{\alpha\beta} \partial_\alpha = 0 \quad (\text{با فرض } F^{\mu\nu} \text{ متقارن})$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=1 \\ \gamma=2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \Rightarrow + \frac{\partial B_z}{\partial t} + \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=1 \\ \gamma=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = 0 \Rightarrow - \frac{\partial B_y}{\partial t} + \partial_x E_z - \partial_z E_x = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=2 \\ \gamma=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = 0 \Rightarrow + \frac{\partial B_x}{\partial t} + \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = - \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

* درشت کردن این معادلات الکترومغناطیس نتیجه این عمل بود که تانسور میدان را به شکل $\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ و تانسور

برعکس در دو میدان را به شکل $e u_\nu A^\nu$ از ابتدا تعریف کردیم.

* معادلات ماکسول هم انگرایی هم دارند، مثلاً هم انگرایی $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ به قانون کولن می‌آید: $\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} (\vec{x} - \vec{x}')$

و یا $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ به قانون القای فارادی می‌آید؛ و یا $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{J}$ (معادله آمپر-مکسول) $(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ so})$

به قانون آمپر می‌رسد $\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int \vec{J} \cdot \vec{n} da$

در هم انگرایی معادلات ماکسول، اگر چگالی وجود داشته باشد، یعنی اگر $\rho \neq 0$ ، $\vec{J} \neq 0$ ، میدان الکترومغناطیس هم وجود ندارد.

باشگاه دانشجویان ایران

اگر $\rho = 0$ و $\vec{J} = 0$ ، فرضاً به این معناست که $\vec{B} = \vec{E} = 0$

مثلاً در حالت الکترود استاتیکی و مغناطیس استاتیکی داریم :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{که در تمام نقاط فضای پیرامون است.}$$

معادله در حالت نیروی ثابت

۱- $\nabla \times E = 0$

معادله دوم، اگر curl و div یک بردار درجه صاف صاف منفی شود و "بردار در سیمانی صریح برآز $\frac{1}{r^2}$ به صفر میل کند" اضافه

این دربار در تمام نقاط وقت برابر با صفر است. پس اگر میلان کار اکثری و مختصی داشته باشیم که شراقتی هلمون را برآورده کنند، شما

ہم جا بھر جھستیں گے۔ اسی میں تو ان میدانِ لڑائی اور موقعا طیسرے اسی کے درمیان ہیں، جعفر سے مل گئے، درستی بیرون و جو Source ہم میں لواتی

و چون راسته باشند پس $\vec{E}$ و $\vec{B}$ موازی بار و جریان الکتریکی ای را نمی شوند، بلکه بار و جریان مدارهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را تعیین می کنند.

مبارک بنید تعارف اساس میں قوم (فرانسس لی) و قوم انگریزی معارف کانسول و معارف
معارف کانسول قطر حسینہ دہلویان ممیہ انہ

ب صورت کلی $u = S$ نوشت. این نوع معادلات را نوع جواب رابند (جواب ممکن وقتی $S=0$) و خصوصی: $u_h + u_p = S$

Source
بنابر این می‌توانیم $S=0$ ، جواب غیر صفر u_h وجود دارد که $\Delta u_h = 0$ صدق می‌کند

هم چنین می توان دید که اگر در آن وجه نباشد ، (در عبارت کنش) ، کنش زره و کنش بر کنش زره و میران صفر خواهد شد ، اما کنش به

دفعه دار که عبارت از یک میلان در آن است: $\int d^4x \frac{1}{16x} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ معادله ۳

15. 1. 1390

کس چه تازیم که خزان می فرزند عاقبت در قلم یاد بهار آفریند

❑ مخفی درباره ذره ، میدان و میدان کوانتومی (Quantum field) :

تصور کنید امروز از صبحی مثل ذره و میدان ، در چنین جوی به وجود آمده است . فیزیک معاصر بود که همه چیز از ذره ساخته شده (فی نور) ، و این اساس اکترومغناطیس کلاسیکی قبل از ماکسول به وجود آمد . ماکسول معادلات استاتیکی را به معادلات دینامیکی (معادلات ماکسول) تبدیل کرد ، که چهاری
چهار (مدل Source) هم دارند . رتبه میدان به عنوان یک موجود مستقل از ذرات معرفی شد . (البته ماکسول تصور می کرد که میدانهای اکترومغناطیسی
فوسانات یک خطی ماری - اثر - حسند ، اما با ساختن نسبیت خاص و نسبیت دینامیک اکترومغناطیس ، عینیت مستقل میدان به یکسانیت شناخته شد .
پس از آن اینشتین گرایش را هم به شکل میدان در نظر گرفت و در معادلاتش ، عبارتی به عنوان جمله این میدان وارد کرد . رتبه می خواست به
همه موجودات به شکل میدان نگاه کند . پس از ظهور مکانیک کوانتومی و مطرح شدن بحث دوگانگی موج - ذره ، این ویژگی برای شناخت موجودات
فیزیکی بیشتر نمود ، تا آنکه مسأله با ساختن Quantum Field theory دوره دراز از 1933 به نور ، به این شکل حل شد که :
نه ذره وجود دارد و نه میدان ، بلکه موجی به نام Quantum Field وجود دارد ، که در واقع کوانتیزه شده میدان کلاسیک است .

باشگاه دانشجویان ایران

در این تئوری به هر موجودی که میدان نسبت دارد می‌شود (یک میدان کلاسیک) ، و بعد با فرمولهای ریاضی آن میدان کوانتوم می‌شود $\leftarrow$ Quantum Field
 که در واقع سنگ بنای محروقات طبیعت است. این موجود در حد کلاسیک (با موفقیات کوانتوم از اثرات کوانتومی) می‌تواند به یک میدان کلاسیک تبدیل شود،
 مثل میدان الکترومغناطیس، و در شرایطی که در حد کلاسیک می‌تواند به زره تبدیل شود، مثل الکترون. در واقع میدانهای کوانتومی که اسپین نیمه صحیح دارند، حد
 کلاسیک آنها زره است، و حد کلاسیک میدانهای کوانتومی که اسپین صحیح دارند، میدانهای کلاسیک است.

* * *

در این قسمت به بررسی یک حل خاص معادلات ماکسول - که به آن حل موج الکترومغناطیس گفته می‌شود - می‌پردازیم.
 در معادلات ماکسول، همهٔ جمله‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت. $(\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu)$ پس با توجه به معادلهٔ میدان $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$ ، داریم:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

* $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$ را که در واقع مثل دالامبرتین $\square$ (d'Alembertian) نشان می‌دهیم، در سمت چپ معادله می‌گذاریم و $\partial_\mu \partial^\nu A^\mu$ را به سمت راست می‌بریم:

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

در معادلات حاکم بر دالات در حضور میدان الکترومغناطیس می‌دانیم که آن چیزی که روی حرکت دالات تأثیر می‌گذارد، $F^{\mu\nu}$ است نه A^μ ، بنابراین

باشگاه دانشجویان ایران

این آزادی عمل را داریم که به طریقی A^μ را تغییر دهیم به شکلی که $F^{\mu\nu}$ تغییر نکند، و در نتیجه در فیزیک مسئله انتخاب هم نمی‌تواند. طریقی تغییر می‌دهیم که در بیان A^μ

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi^{\text{scalar}}$$

دارد به طریقی که $F^{\mu\nu}$ (که در واقع curl چهاروی است) تغییر نکند. به این صورت است:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \chi) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

در این حالت می‌بینیم که $F^{\mu\nu}$ ثابت است:

به این تبدیلی، تبدیلیات پیمانه‌ای (Gauge Transformation) گفته می‌شود. این آزادی عمل استفاده کرده و χ را ضمیمه انتخاب می‌کنیم

که $\partial_\mu A^\mu = 0$ (به این تبدیل، پیمانه نورس گفته می‌شود، چون یک تبدیل نورس دارد می‌باشد). برای این که χ باید در ضمن

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \chi = 0 \Rightarrow \square \chi = -\partial_\mu A^\mu$$

معادله‌ای صاف کند:

که همیشه با دادن شرایط مرزی که جواب می‌دهد. پس معادله در بیان می‌ماند که در آن شرط $\partial_\mu A^\mu = 0$ برقرار باشد.

بنابراین معادله اولیه به این معادله تبدیل می‌شود: $\square A^\nu = 0$ ؛ که یک معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت است که به x و t به تابع است.

جواب همیشگی برای این معادله $A^\nu = A_0 e^\nu \exp(-ik_\mu x^\mu)$ است. توجه داریم که در این معادله $\exp$ ، چیزی جز یک اسکالر نورس نیست.

همی تواند و جمع داشته باشد، چون با دقت گرفتن سطح تابع غایی، توانهای مختلف از میان می‌آید با هم جمع شود، پس ما می‌توانیم به اسکالر باشد.

مقیاس $-i$ هم به دلیل ملاحظات فیزیکی از مقیاس k_μ برکنده شده است. چون A^ν یک اسکالر است، مقیاس $\exp$ هم باید

باشگاه دانشجویان ایران

یک امپلوسه باشد، که آن را به شکل $A_0 \epsilon^\nu$ می‌نویسیم تا بتوانیم طول ϵ^ν را واحد دقت کنیم. نکته دیگر اینکه با توجه به اینکه برای بزرگ x^μ دامنه بزرگ $k_\mu x^\mu = 0$

k_μ حتماً یک امپلوسه است که مؤلفه‌های آن را باید مشخص کنیم. جواب بسیاری را در معادله داریم:

$$\square A^\nu = 0 \Rightarrow (-ik^\mu)(-ik_\mu) A_0 \epsilon^\nu \exp(-ik_\mu x^\mu) = 0 \Rightarrow \underline{k_\mu k^\mu = 0}$$

از طرفی با توجه به شرط لورنتس داریم:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow (-ik_\mu) A_0 \epsilon^\mu e^{-ik_\mu x^\mu} = 0 \Rightarrow \underline{k_\mu \epsilon^\mu = 0}$$

البته جواب فیزیکی معادله، قسمت حقیقی این جواب است:

$$A_{\text{Phys}}^\nu = \text{Re} (A_0 \epsilon^\nu e^{-ik_\mu x^\mu}) = \text{Re} (A_0 \epsilon^\nu) \cos k_\mu x^\mu + \text{Im} (A_0 \epsilon^\nu) \sin k_\mu x^\mu$$

یعنی جواب معادله یک ترکیبی از $\cos k_\mu x^\mu$ و $\sin k_\mu x^\mu$ است.

$$\cos k_\mu x^\mu = \cos(k_0 t + k_1 x + k_2 y + k_3 z) \quad \text{مثلاً:}$$

اگر فرض کنیم $\sin$ و $\cos$ را به دو معادله موج می‌دانیم، و همین امر مستلزم می‌کند که مؤلفه‌های k^μ را به ترتیب قرار دهیم:

$$k^\mu = (\omega, k_x, k_y, k_z) = (\omega, \vec{k}) \Rightarrow k_\mu = (\omega, -\vec{k}) \Rightarrow \cos k_\mu x^\mu = \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\text{حال با توجه به معادله } k_\mu k^\mu = 0$$

یعنی انرژی بزرگ استوار موج الکترومغناطیس برابر با $\omega \pm$ است. از طرفی می‌دانیم سرعت انتشار موج برابر است با $\frac{|\vec{k}|}{\omega}$ ، بنابراین از این معادلات نتیجه می‌گیریم که امواج الکترومغناطیس با سرعت واحد (سرعت انتشار امواج) منتشر می‌شوند.

(۱) ثابت بزرگ سرعت امواج الکترومغناطیس (بالا) خود اصل موضوع نسبیت خاص است، بلکه در ابتدا فرض می‌کنیم که سرعت انتشار بزرگ

برای اندازه‌گیری زمان نیاز داریم، و بعد به طریق فوق ثابت می‌شود که امواج الکترومغناطیس با سرعت استاندارد (Information) حرکت می‌کنند.

باشگاه دانشجویان ایران

$$K_{\mu} \epsilon^{\mu} = 0$$

از روی معادله (۲) :
این معادله روی ϵ^{μ} که جهت آنتن A^{μ} را مشخص می کند بسیار مهم است. باید از اصول گفته می شود، خودداری می دارد. فرض کنید بردار آنتن $\vec{K}$ قطار راستی

$$\vec{K} = k_z \hat{z} \quad , \quad \text{درجه به معادلات قبلی} : K^{\mu} = (0, 0, 0, \pm k)$$

بردار ϵ^{μ} در چهار جهت فقط - زمانی می تواند معادله (۲) را برآورده کند. (که هر جهت دیگری ممکن است از این پایه است) :

$$\epsilon_{(0)}^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \quad \times$$

$$\sqrt{\epsilon_{(2)}^{\mu}} = (0, 0, 1, 0)$$

$$\epsilon_{(4)}^{\mu} = (0, 1, 0, 0) \quad \checkmark$$

$$\times \epsilon_{(3)}^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$$

اما می بینیم که یک خط از آنها ساخت که شرط را برآورده کند :
 $\epsilon_{(1)}^{\mu} = (1, 0, 0, \pm 1)$ ، شرط $K_{\mu} \epsilon^{\mu} = 0$ را برآورده می کند ؛ اما $\epsilon_{(3)}^{\mu}$ و $\epsilon_{(2)}^{\mu}$ غیره ،

البته اگر ما ϵ^{μ} را بگیریم و از روی آن A^{μ} و سپس $F^{\mu\nu}$ را بسازیم ، میدان الکترومغناطیسی صفر حاصل می شود.

پس در واقع دو بردار $\epsilon_{(1)}^{\mu}$ و $\epsilon_{(2)}^{\mu}$ میدان الکترومغناطیسی تولید می کنند (در فیزیکی هستند) ، که به آنها پلاریزاسیون افقی و عمودی می گویند.

در تمام حل معادلات ماکسول بدون جهت ، موج الکترومغناطیسی است که با سرعت استوار در خلا منتشر می شود.

* * *

تاکنون سعی کردیم که الکترومغناطیسی را بررسی کنیم ، برای بررسی سایر برعکس های موجود در طبیعت ، ابتدا یک ساختار کلی بر تمام برعکس های

ممکن می سازیم و بعد می بینیم که طبیعت از کدام یک استوار است. (که در واقع همان چهار برعکس اصلی طبیعت می باشد و ما خواهد بود.)

باشگاه دانشجویان ایران

ابتدا مولدهای گزیده پوانکاره را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم. مولدهای تبدیلات سره متناظر با پوانکاره (تبدیلات خاص لورنتس) P_μ و $L_{\mu\nu}$ هستند.

که P_μ مولد انتقال‌های فضایی و زمانی، و $L_{\mu\nu}$ مولد دوران و Boost است. گروهی که این مولدها را هم به دست آوریم.

هم چنین دانستیم که مولدهای P_μ گروه پوانکاره و $L_{\mu\nu}$ که گروه لورنتس پوانکاره را تشکیل می‌دهد. یکی از آن‌ها جرم را وارد می‌کند: $P_\mu P^\mu = m^2$.

درک‌های وسیع را. (که بعداً بررسی خواهیم کرد). تا فرض P_μ و $L_{\mu\nu}$ را در این به دست می‌آوریم:

چون P_μ مولد انتقال است، می‌دانیم که: $\{A, P_\mu\} = \partial_\mu A$. می‌توانیم این شکل بنویسیم: $(\{, P_\mu\})A = \partial_\mu A$.

پس $\{P_\mu, \cdot\}$ یک عملگر است: $\{P_\mu, \cdot\} = \partial_\mu$.

$$L_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu \Rightarrow \{L_{\mu\nu}, \cdot\} = \{x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \cdot\} = x_\mu \{P_\nu, \cdot\} + \{x_\nu, \cdot\} P_\nu - x_\nu \{P_\mu, \cdot\} - \{x_\mu, \cdot\} P_\mu$$

$$= x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$$

اگر $L_{\mu\nu}$ مولد تبدیلات لورنتس است، پس وقتی $\exp(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu})$ روی x^α اثر می‌کند، باید تبدیل یافته x^α را بدست دهد. ($\epsilon^{\mu\nu}$ پارامتر تبدیل است).

$$e^{\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu}} x^\alpha = (1 + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu}) x^\alpha$$

اگر $\epsilon^{\mu\nu}$ را کوچک فرض کنیم:

$$= x^\alpha + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) x^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} (x_\mu \delta_\nu^\alpha - x_\nu \delta_\mu^\alpha)$$

$$= x^\alpha + \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\alpha} x_\mu - \epsilon^{\alpha\nu} x_\nu) = x^\alpha + \epsilon^{\mu\alpha} x_\mu$$

باشگاه دانشجویان ایران

از طرف دیگر، برای پارامتری infinitesimal، ماتریس تبدیل لورنتس را می‌توان به شکل $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \mathcal{Z}^\mu_\nu$ نوشت، که $\mathcal{Z}^\mu_\nu$ کوچک است.

$$\Rightarrow X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu X^\mu = (\delta^\alpha_\mu + \mathcal{Z}^\alpha_\mu) X^\mu = X^\alpha + \mathcal{Z}^\alpha_\mu X^\mu$$

که همان تغییری است که در سمت چپ به دست آمد. پس فرم P_μ و L_μ صحیح است. (به این فرم P_μ و L_μ غشیش ریوانسلی می‌گویند.)

مولاری P و L در جبر خاصی صورت می‌گیرد (همان گروهی که برای پواسون P_μ و L_μ)، می‌توان مشاهده را به این شکل تعمیم داد که: در نسخه

موجوداتی که دقیقاً در همین جبر خاص صورت می‌گیرد می‌تواند مولاری تئوریات لورنتس باشند؛ و آنها همان انرژی را دارند که P و L دارند. از جمله این

موجودات، ماتریس $\mathcal{L}$ هستند که نام خوبی می‌توانیم بگذاریم. (همانطور که از این روش استفاده کرد.) به این موجودات مختلف می‌تواند باشد

صورت کردن در آن جبر خاص، مولاری گروه پوانکاره باشند، غشیش های مختلف گروه پوانکاره می‌توانیم که ماتریس $\mathcal{L}$ هم یکی از آن غشیش هستند.

مولاری P و L در فضا-زمان عمل می‌کنند، اما غشیش های دیگر لزوماً در این فضا-زمان عمل نمی‌کنند، بلکه در یک فضای دیگر به نام Internal Space

عمل می‌کنند. بنابراین ما مولاری P و L که در فضا-زمان مولاری تبدیل می‌شوند، آن غشیش های دیگر هم در فضای داخلی تبدیل می‌شوند.

اما با توجه به اینکه گروه های پواسون برای ماتریس $\mathcal{L}$ تعریف نشده، عملگر های مربوط به P_μ و L_μ را به شکل ماتریس در نظر می‌گیریم، و از روی گروه های پواسون

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = - \{ \hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu \}$$

حسین جری را برای عملگر (غشیش ماتریس آنها) تعریف می‌کنیم:

باشگاه دانشجویان ایران

20.1.90

همچنین می توانیم $L_{\mu\nu}$ و P_μ را به صورت مولد های $M_{\mu\nu}$ و M_μ که به این شکل تعریف می شود :

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$$

Spin angular momentum, S_{μ} کہلاتے ہیں۔ S غماش مائٹری s انتخاب کریں، یعنی باید مائٹری S کی راہداری کریں کہ در روابط

چاہے جانی کہ لے صدق ہی کہند، صدق کہند۔

$$\begin{cases} M_{oi} = K_i \\ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} = J_i \end{cases}$$

از روی M_{10} و با جابجایی متوالی رضا - رضا و زمین - رضا، علی گری J و K را به این شکل می بینیم :

$$M = L + S \quad \therefore \quad M = L_{\text{all}} + S$$

✓ k_i مولد Boost و J_i مولد دوران (مجموعه قضای سه‌بوی) و R_i (مجموعه قضای استی) است

$$\begin{cases} \hat{N} = \frac{1}{2}(\hat{J} + i\hat{K}) \\ \hat{N}^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{J} - i\hat{K}) \end{cases}$$

(السلامة) بعد ذلك من L حرف تفرع من سحر و سحرى S حرف (السلام)

از روی $\vec{k}$ و $\vec{j}$ در این دو طرف راضی می سازیم (که نهی قریبی دارند):

مثلاً اگر روشنی کی پراسراریت میں N_1 کی N_2 کے برابر دھجی اور ہم ، انکڑوں پر ہی بدست کے دوران روابطہ حاجی ہیں میں اس قدر ہی N و N^+

$[N_i, N_j] = -\epsilon_{ijk} N_k$, $[N_i, N_j^\dagger] = 0$, $[N_i^\dagger, N_j^\dagger] = -\epsilon_{ijk} N_k^\dagger$: علامت متفق مورد نیاز را اعمال کنیم و خواص را بسازیم

بنابراین N_i و N_i^+ دقیقاً یک جریکسان صریح می‌گردد و از هم مستقل هستند ($[N_i, N_i^+] = 0$). پس کافی است یکی از آنها را بررسی کنیم.

در این مرحله باید متغیرهای (N_i) که در این حیز صاف باشند، و بعد از آن $\vec{r}_i$ و k_i و از روی آنها $S_{\mu\nu}$ را بدست آوریم.

باشگاه دانشجویان ایران

در بیان نشان داد که فرقی از ماتریس های پائولی در این خصوص می کنند. می دانیم: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ $\Leftrightarrow [\frac{i}{2}\sigma_i, \frac{i}{2}\sigma_j] = -\epsilon_{ijk}\frac{i}{2}\sigma_k$ $\Leftrightarrow [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$
 یعنی $\frac{i}{2}\sigma_k$ آن ماتریس است که در این طریقه مرتب می کنند.

* پیدا کردن شکل کلی ماتریس های N : برای این کار یک روش سیستماتیک وجود دارد به شرح زیر:

از آنجا که N^2 را از روی N_1 که به این شکل می سازیم:

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2$$

$$\begin{aligned} [N_1, N^2] &= [N_1, N_1^2 + N_2^2 + N_3^2] = [N_1, N_1^2] + [N_1, N_2^2] + [N_1, N_3^2] \\ &= N_2[N_1, N_2] + [N_1, N_2]N_2 + N_3[N_1, N_3] + [N_1, N_3]N_3 = -N_2N_3 - N_3N_2 + N_3N_2 + N_2N_3 = 0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب درباره N_2 و N_3 .

بنابراین جابجایی N^2 با هر سه ماتریس N_1 و N_2 و N_3 صفر است. روی N که شرط می گذاریم به طوری که صفر نباشد. (مطمئن های)

ماتریس هرتزی را به دست می آوریم. پس می توان آنها را قطری کرد. می دانیم اگر جابجایی دو ماتریس با هم صفر باشد، آن دو ماتریس را می توان همزمان قطری کرد.

بنابراین N^2 را با هر کدام از N_1 که می توان قطری کرد. از بین N_1 که معقول N_3 را انتخاب می کنیم؛ و از روی N_1 و N_2

در آنجا که N_+ و N_- را به این شکل می سازیم:

$$N_+ = N_1 + iN_2 \quad , \quad N_- = N_1 - iN_2$$

جایی که N_1 و N_2 با $N_{\pm}$ کار می کنیم. پس در کل با چهار ماتریس N^2 ، N_3 و $N_{\pm}$ سروکار داریم، که مانند همه روابط جابجایی گفته بین آنها را به دست می آوریم:

باشگاه دانشجویان ایران

((the "normal" Matrices are diagonalizable.))

$$* [N^2, N_3] = 0 \quad * [N^2, N_{\pm}] = 0$$

$$* [N_+, N_3] = [N_1 + iN_2, N_3] + i[N_2, N_3] = N_2 - iN_1 = -i(N_1 + iN_2) = -iN_+$$

$$\Rightarrow [N_{\pm}, N_3] = \mp iN_{\pm}$$

$$* [N_+, N_-] = [N_1 + iN_2, N_1 - iN_2] = iN_3 + iN_3 = 2iN_3$$

چون N^2 و N_3 همزمان می توانند قطری شوند، ویژه گشت های مشترک هم دارند و مسئله ویژه معادلات این دو به این صورت است:

$$\begin{cases} N^2 |n, m\rangle = n(n+1) |n, m\rangle \\ N_3 |n, m\rangle = m |n, m\rangle \end{cases}$$

(دقیق انتخاب شکل eigenvalue و این هم بدو ممکن خواهند شد.)

eigenvalue و مقادیر روی قطر ماتریس های N^2 و N_3 را تعیین می کنند.
برای پیدا کردن عناصر ماتریس $N_{\pm}$ و در نتیجه N_1 و N_2 به این شکل عمل می کنیم.

$$N^2 (N_+ |n, m\rangle) = N_+ N^2 |n, m\rangle = n(n+1) (N_+ |n, m\rangle) \rightarrow$$

$N_+ |n, m\rangle$ ویژه برابر N^2 است.

$$N_3 (N_+ |n, m\rangle) = (N_+ N_3 + iN_+) |n, m\rangle = (m+i) (N_+ |n, m\rangle) \rightarrow$$

N_3 است.

$$\Rightarrow N_{\pm} |n, m\rangle = C_{\pm} |n, m \pm i\rangle$$

$$m' = im$$

$$\rightarrow N_3 |n, m'\rangle = im |n, m'\rangle$$

چون m به شکل نامرئی از تابعی جابجایی شود، در آن یک i ناکند می گوییم.

در نتیجه m' نمی گوییم با n وابسته می شود.

* عناصری finite dimensional را بررسی می کنیم، در نتیجه مقدار m (در واقع N_3) محدود است: $m_{\min}, m_{\max}$ داریم:
 $N_+ |n, m_{\max}\rangle = 0 \quad , \quad N_- |n, m_{\min}\rangle = 0$

باشگاه دانشجویان ایران

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = N_+ N_- + N_- N_+ + N_3^2 \Rightarrow N_+ N_- + N_- N_+ = N^2 - N_3^2$$

$$N_{\pm} = N_{\mp}^{\dagger} \Rightarrow \langle n, m | (N_+ N_- + N_- N_+) | n, m \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle n, m | N^2 - N_3^2 | n, m \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow n(n+1) - m^2 \geq 0$$

در طرفین برای رسیدن از m_{min} تا m_{max} باید m یکی یکی اضافه کنیم

$$-n \leq m' \leq n$$

اثبات می شود که n فقط می تواند عدد صحیح یا نیمه صحیح باشد: $n = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$

مثلاً عدد صحیح باید باشد: $[N_1, N_2] = -N_3 = 0 \Rightarrow$ ماتریس 1×1 است

$n=0 \rightarrow m'=0 \rightarrow$ ماتریس 1×1

مثلاً دو عددی: $n = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2} \rightarrow$ ماتریس 2×2

مثلاً: $\langle n, m' | N_3 | n, m \rangle = m \delta_{mm'} \Rightarrow N_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3 \rightarrow N_i = \frac{1}{2} \sigma_i$

$n=1 \rightarrow m = -1, 0, 1 \rightarrow$ ماتریس 3×3

$\vdots$

و به همین ترتیب ...

(این ماتریس 4×4 در واقع نمایش ماتریسی گروه $SU(2)$ هستند.)

N و $N^{\dagger}$ می تواند هر کدام از این ماتریس 4×4 باشند که به دست آوردیم. می تواند از یک نمایش n عددی انتخاب شود و $N^{\dagger}$ از یک نمایش n' عددی به طوری که $n \neq n'$. اما باید از روی N و $N^{\dagger}$ بتواند یک J و K را بسازیم:

$$\begin{cases} \vec{J} = \vec{N} + \vec{N}^{\dagger} \\ \vec{K} = -i(\vec{N} - \vec{N}^{\dagger}) \end{cases}$$

باشگاه دانشجویان ایران

نیم N و N^t باید هم مرتبه باشند تا بتوان از روی آنجا J و K را ساخت. بنابراین جمع مستقیم N و N^t را در نظر می‌گیریم؛ که در بیان هر میدان می‌کنند.

$$N_{n \times n} \oplus \mathbb{1}_{n^t \times n^t} \oplus \mathbb{1}_{n \times n} \oplus N_{n^t \times n}^t$$

N و N^t با در کنار هم جمع یا نیمه جمع $n \rightarrow n^t$ ممکن می‌شوند؛ مثلاً:

$$- \begin{pmatrix} n & n^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{N} = 0, \vec{N}^t = 0 \Rightarrow \vec{J} = \vec{K} = 0 \rightarrow e^{\vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\xi} \cdot \vec{K}} = 1 \text{ (scalar)}$$

غناش اسکالر $\leftarrow$ یعنی روی هر X^α اثر نکند، آن را تغییر نمی‌دهد.

$- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{N} = \frac{i}{2} \vec{\sigma}, \vec{N}^t = 0 \Rightarrow \vec{J} = \frac{i}{2} \vec{\sigma}, \vec{K} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{\xi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$

غناش اسپینور

$- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{N} = 0, \vec{N}^t = \frac{i}{2} \vec{\sigma} \Rightarrow \vec{J} = \frac{i}{2} \vec{\sigma}, \vec{K} = -\frac{\vec{\sigma}}{2} \Rightarrow e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} - \vec{\xi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$

غناش اسپینور

$- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{N} = \frac{i}{2} \vec{\sigma}, \vec{N}^t = \frac{i}{2} \vec{\sigma} \rightarrow$ جمع مستقیم $N^t, N : 4 \times 4$

چاره‌دار

$$J_3 = \frac{i}{2} (\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2} \oplus \mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \sigma_3) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ (مورد دو نوع غناش اسپینوری: اگر $\vec{J}$ در هر دو یکسان است، آنگاه $\vec{K}$ با علامت متضاد تفاوت دارد. می‌توانیم علامت را برای

را تغییر نمی‌دهد اما علامت سرعت را متغیر می‌کند. $\leftarrow$ با Parity (و غناش مختلف اسپینوری بالا به هم تبدیل می‌شوند: غناش اسپینوری راست دست

و غناش اسپینوری چپ دست داریم) مثلاً اگر $\vec{K}$ معکوس باشد (دستش برعکس می‌شود) و هم از نوع چپ دستش، اما نوعی اسپینور

فرد از نوع چپ دست و جهت دارد $\leftarrow$ (در هر یک از این دو جهت تفاوت پارتی می‌شوند.)

* References: ✓ LORD : Tensors, Relativity and Cosmology (monograph)

✓ Weinberg : Gravitation and Cosmology $\rightarrow$ chapter 2

22.1. 90

* مؤثری تبدیل کرده بودیم: P_μ و $M_{\mu\nu}$ هستند که $M_{\mu\nu}$ از رویش (orbital angular momentum) $L_{\mu\nu}$ و S_μ (Spin angular momentum) تشکیل شده است.
 * دلتا یا کیهانی مشخص کنیم که تحت تبدیلات لورنس ناورد باشند: حجم (که با انگشت خارج از دایره) $C_1 = P_\mu P^\mu = m^2$ دارند (دارند) و راستین، که با انگشت
 کانیفر C_2 که به هم میزنند، دارند میزنند. C_2 هم باید مثل C_1 با هم میزنند و باید به شکل طول یک ای برادر باشند (که توانند)
 تبدیلات لورنس ناورد باشند. بنابراین با $M_{\mu\nu}$ میزنند: و باید جانشین P_μ را هم باید قش کنیم.

$$C_2 = W^\mu W_\mu, \quad W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Pauli-Lubanski 4-vector.}$$

در اینجا ثابت نمیکنیم که W^μ به طور کلی باید صفر باشد، اما می توان فهمید که چرا W^μ را به این شکل میزنیم:

C_2 باید با C_1 مستقل باشد، یعنی $W^\mu P_\mu = 0$ (چون اگر بخوانیم P_μ و $M_{\mu\nu}$ را می بینیم که هم از $M_{\mu\nu}$ استفا داده شده باشد)

بر P_μ عدد باشد، باید ضرب خارجی (Cross Product) P و M را در نظر بگیریم، یعنی صفر ای برادر W^μ : $W^\mu P_\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu P_\mu M_{\alpha\beta} = 0$

$$[P_\gamma, \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta}] = \epsilon_\mu^{\nu\alpha\beta'} P_\nu M_{\alpha'\beta'}$$

$$= \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\mu^{\nu'\alpha'\beta'} [P_\gamma, P_\nu M_{\alpha\beta} P_{\nu'} M_{\alpha'\beta'}] = \epsilon_\mu^{\nu\alpha\beta} [P_\gamma, M_{\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha'\beta'}]$$

= E

باشگاه دانشجویان ایران

$$= \epsilon P_\nu M_{\alpha\beta} [P_\gamma, P_\nu, M_{\alpha'\beta'}] + \epsilon P_\nu [P_\gamma, M_{\alpha\beta}] P_\nu, M_{\alpha'\beta'}$$

$$= \epsilon P_\nu M_{\alpha\beta} P_\nu, [P_\gamma, M_{\alpha'\beta'}] + \epsilon P_\nu [P_\gamma, M_{\alpha\beta}] P_\nu, M_{\alpha'\beta'}$$

$$[P_\gamma, M_{\alpha\beta}] = \eta_{\alpha\gamma} P_\beta - \eta_{\beta\gamma} P_\alpha$$

$$= \epsilon P_\nu M_{\alpha\beta} P_\nu, \eta_{\alpha'\gamma} P_{\beta'} - \epsilon P_\nu M_{\alpha\beta} P_\nu, \eta_{\beta'\gamma} P_{\alpha'} + \epsilon P_\nu \eta_{\alpha\gamma} P_\beta P_\nu, M_{\alpha'\beta'} - \epsilon P_\nu \eta_{\beta\gamma} P_\alpha P_\nu, M_{\alpha'\beta'}$$

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'}$$

باقی بر این $\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'}$ ، در حلقه از این جمله عبارت $P \eta P$ وجود دارد

نسبت به مؤلفه‌های P متقارن است ، اما همین این ϵ با متقارن اند. بنابراین

$$[P_\gamma, W^\mu W_\mu] = 0$$

حالت منفرد می‌شوند

! C_2 حتماً با $M_{\alpha\beta}$ جابجایی شود ، چون C_2 نادرای مؤلفه است (این طور ساخته شده) ، و M هم مؤلفه تبدیل مؤلفه

است. چون C_2 نسبت به مؤلفه تغییر نمی‌کند ، بنابراین با $M_{\alpha\beta}$ جابجایی می‌کند : $\{M_{\alpha\beta}, W^\mu W_\mu\} = 0$

باشگاه دانشجویان ایران

چون C_2 با نمایی نوزده پیکارده جابجایی شود، پس یکی از اعراض زده را نشان می دهد که با تبدیل دستگاه مختصات عوض نمی شود. برای این شرط به این

مشقده ، به دستگاه مختصات سکون زده می رویم . (در این چارچوب :

$$P^M = m(1, \vec{0})$$

$$W^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\alpha M_{\beta\gamma} = 0 \quad , \quad W^1 = \frac{1}{2} (\epsilon^{1023} P_0 M_{23} + \epsilon^{1032} P_0 M_{32}) = +m J_1$$

$\vec{J}_1$ $-\vec{J}_1$

به همین ترتیب : $W^2 = +m J_2$ ، $W^3 = +m J_3$ (در این چارچوب سکون زده :

$$W^M = (0, +m \vec{J})$$

* یک نکته : در این حالت $M_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$ (در نتیجه :

$$L_{\alpha\beta} = X_\alpha P_\beta - X_\beta P_\alpha \quad \text{و} \quad W^M = \frac{1}{2} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} P_\nu (L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta})$$

$$\Rightarrow W^M = \frac{1}{2} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} P_\nu (X_\alpha P_\beta - X_\beta P_\alpha) + \frac{1}{2} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} P_\nu S_{\alpha\beta}$$

جمله اول صفر می شود چون $\epsilon^{M\nu\alpha\beta}$ نسبت به بعضی اندیس های ν, α, β یا ν, α یا ν, β ، و به عبارتی نسبت به این بعضی متغیرات است . (در چارچوب سکون زده این اتفاق می افتد)

در نتیجه این جمله ای از $M_{\alpha\beta}$ که در تشکیل W^M مؤثر است ، $S_{\alpha\beta}$ می باشد . پس در چارچوب سکون زده :

$$W^M = (0, +m \vec{S})$$

$$\Rightarrow C_2 = -m^2 \vec{S} \cdot \vec{S} = -m^2 S^2 = -m^2 S(S+1) \quad S=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

(در حد m^2 در محاسبه C_2 به این دلیل است که W^M نوازیه نشده ، اگر از اول بتفصیل می رویم ، $W^M = \frac{1}{2m} \epsilon^{M\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta}$ ، اکنون داریم : $C_2 = -S(S+1)$)

* طبق مطالب جلسه قبل ، رابطه $\vec{J}$ را می توانیم از دو رابطه ریاضی $\vec{N}$ و $\vec{N}^\dagger$ به شکل $\vec{J} = \vec{N} + \vec{N}^\dagger$ بسازیم . و داریم که $\vec{N}$ و $\vec{N}^\dagger$ های $\vec{N}^\dagger, \vec{N}$

باشگاه دانشجویان ایران

با دو عدد n و n^+ مشخص می‌شوند. بنابراین حالتی بین فضای $\vec{J}$ و (K) و $\vec{N}$ و $\vec{N}^+$ وجود دارد. (در واقع استفاده از عاقل کبر $\vec{N}$ و $\vec{N}^+$ به این معناست که این دو واقع در فضای $(\vec{J})$ و این دو اسپین فضای $(\vec{N}^+ \otimes \vec{N})$ قرار گرفته‌اند. (این بخش اطلاعات اضافی که در متن مسئله ذکر شده است).

* * *

برزی عکس C_2 برای دانی به هم صفر:

اگر حجم زده ای متفاوت باشد، یعنی با یکسان واحد حرکت کنند، در نتیجه نیروی توان به چارچوب سکون زده رفت، و حجم P^1 به شکل سابق (برای زده حجم دار) نسبت

برای راحتی رسم نمودار $P^0 = |\vec{P}|^2$ و $P^\mu P_\mu$ و $m=0$ و $P^\mu P_\mu = 0$ را در نظر بگیرید.

فرضی انتخاب کنیم که $(P^2 = (P^3)^2)$ در فضای جهت دارند پس P^1 را این عبارت شکل $P^1 = (P, 0, 0, P)$ می‌تواند باشد.

$$W^0 = \frac{1}{2} (\epsilon^{0312} P_3 M_{12} + \epsilon^{0321} P_3 M_{21}) = P J_3$$

$$W^1 = \frac{1}{2} (\epsilon^{1023} P_0 M_{23} + \epsilon^{1032} P_0 M_{32}) + \frac{1}{2} (\epsilon^{1302} P_3 M_{02} + \epsilon^{1320} P_3 M_{20}) = -P_{J_1} + P_{K_2}$$

$$W^2 = \frac{1}{2} (e^{2013} P_0 M_{13} + e^{2039} P_0 M_{31}) + \frac{1}{2} (e^{2310} P_3 M_{10} + e^{2301} P_3 M_{01}) = -PJ_2 + PK_1$$

$$W^3 = \frac{1}{2} (e^{3012} P_0 M_{12} + e^{3021} P_0 M_{21}) = PJ_3$$

باشگاه دانشجویان ایران

طول W^μ یا می تواند صفر باشد و یا غیر صفر؛ که این دو حالت از لحاظ قابل تشخیص هستند. در این حالت $W_\mu W^\mu = 0$ استفاده نمی کنیم.

* برای حالت بی جرم، $P_\mu P^\mu = 0$ ، هم چنین به دلیل خاص W^μ ، $P_\mu W^\mu = 0$ ، در ضمن طول W^μ لازم صفرانی بگوئیم: $W_\mu W^\mu = 0$.

می توان نشان داد که در این برار P_μ و W_μ در عین مورد طول، می توانیم بگوئیم: یعنی می توان نوشت: $W_\mu = \sum P_\mu$. فرض کنید در یک ضرب تناسب

$$\begin{aligned} & \text{نقطه خاص: } P^\mu = (P, 0, 0, P) \text{ و } W^\mu = (W^0, W^1, W^2, W^3) \\ & P^\mu W_\mu = 0 \Rightarrow P W^0 - P W^3 = 0 \Rightarrow W^0 = W^3 \\ & W_\mu W^\mu = 0 \Rightarrow (W^0)^2 = (W^1)^2 + (W^2)^2 + (W^3)^2 = (W^1)^2 + (W^2)^2 + (W^0)^2 \Rightarrow W^1 = W^2 = 0 \\ & \Rightarrow W^\mu = W(1, 0, 0, 1) \text{ \& } P^\mu = P(1, 0, 0, 1) \Rightarrow W_\mu = \sum P_\mu \rightarrow \Sigma: \text{ helicity} \end{aligned}$$

بنابراین در حالتی که برای W^μ به دست آوریم، باید W^1 و W^2 را برابر با صفر قرار دهیم تا W^μ مغزبی از $P^\mu = (P, 0, 0, P)$ شود.

$$\left[\Sigma = \frac{\vec{P} \cdot \vec{J}}{P} \right]_{L \rightarrow m} \text{ پس } J_1 = J_2 = k_1 = k_2 = 0 \text{ و در این داریم:}$$

چون $J_1 = J_2 = 0 \leftarrow J_+ = J_- = 0$. در نتیجه از طریق مقایسه می توان برای J_2 (در واقع Eigenvalue) J_2 و J_1 و J_3 و J_4 و J_5 و J_6 و J_7 و J_8 و J_9 و J_{10} و J_{11} و J_{12} و J_{13} و J_{14} و J_{15} و J_{16} و J_{17} و J_{18} و J_{19} و J_{20} و J_{21} و J_{22} و J_{23} و J_{24} و J_{25} و J_{26} و J_{27} و J_{28} و J_{29} و J_{30} و J_{31} و J_{32} و J_{33} و J_{34} و J_{35} و J_{36} و J_{37} و J_{38} و J_{39} و J_{40} و J_{41} و J_{42} و J_{43} و J_{44} و J_{45} و J_{46} و J_{47} و J_{48} و J_{49} و J_{50} و J_{51} و J_{52} و J_{53} و J_{54} و J_{55} و J_{56} و J_{57} و J_{58} و J_{59} و J_{60} و J_{61} و J_{62} و J_{63} و J_{64} و J_{65} و J_{66} و J_{67} و J_{68} و J_{69} و J_{70} و J_{71} و J_{72} و J_{73} و J_{74} و J_{75} و J_{76} و J_{77} و J_{78} و J_{79} و J_{80} و J_{81} و J_{82} و J_{83} و J_{84} و J_{85} و J_{86} و J_{87} و J_{88} و J_{89} و J_{90} و J_{91} و J_{92} و J_{93} و J_{94} و J_{95} و J_{96} و J_{97} و J_{98} و J_{99} و J_{100} و J_{101} و J_{102} و J_{103} و J_{104} و J_{105} و J_{106} و J_{107} و J_{108} و J_{109} و J_{110} و J_{111} و J_{112} و J_{113} و J_{114} و J_{115} و J_{116} و J_{117} و J_{118} و J_{119} و J_{120} و J_{121} و J_{122} و J_{123} و J_{124} و J_{125} و J_{126} و J_{127} و J_{128} و J_{129} و J_{130} و J_{131} و J_{132} و J_{133} و J_{134} و J_{135} و J_{136} و J_{137} و J_{138} و J_{139} و J_{140} و J_{141} و J_{142} و J_{143} و J_{144} و J_{145} و J_{146} و J_{147} و J_{148} و J_{149} و J_{150} و J_{151} و J_{152} و J_{153} و J_{154} و J_{155} و J_{156} و J_{157} و J_{158} و J_{159} و J_{160} و J_{161} و J_{162} و J_{163} و J_{164} و J_{165} و J_{166} و J_{167} و J_{168} و J_{169} و J_{170} و J_{171} و J_{172} و J_{173} و J_{174} و J_{175} و J_{176} و J_{177} و J_{178} و J_{179} و J_{180} و J_{181} و J_{182} و J_{183} و J_{184} و J_{185} و J_{186} و J_{187} و J_{188} و J_{189} و J_{190} و J_{191} و J_{192} و J_{193} و J_{194} و J_{195} و J_{196} و J_{197} و J_{198} و J_{199} و J_{200} و J_{201} و J_{202} و J_{203} و J_{204} و J_{205} و J_{206} و J_{207} و J_{208} و J_{209} و J_{210} و J_{211} و J_{212} و J_{213} و J_{214} و J_{215} و J_{216} و J_{217} و J_{218} و J_{219} و J_{220} و J_{221} و J_{222} و J_{223} و J_{224} و J_{225} و J_{226} و J_{227} و J_{228} و J_{229} و J_{230} و J_{231} و J_{232} و J_{233} و J_{234} و J_{235} و J_{236} و J_{237} و J_{238} و J_{239} و J_{240} و J_{241} و J_{242} و J_{243} و J_{244} و J_{245} و J_{246} و J_{247} و J_{248} و J_{249} و J_{250} و J_{251} و J_{252} و J_{253} و J_{254} و J_{255} و J_{256} و J_{257} و J_{258} و J_{259} و J_{260} و J_{261} و J_{262} و J_{263} و J_{264} و J_{265} و J_{266} و J_{267} و J_{268} و J_{269} و J_{270} و J_{271} و J_{272} و J_{273} و J_{274} و J_{275} و J_{276} و J_{277} و J_{278} و J_{279} و J_{280} و J_{281} و J_{282} و J_{283} و J_{284} و J_{285} و J_{286} و J_{287} و J_{288} و J_{289} و J_{290} و J_{291} و J_{292} و J_{293} و J_{294} و J_{295} و J_{296} و J_{297} و J_{298} و J_{299} و J_{300} و J_{301} و J_{302} و J_{303} و J_{304} و J_{305} و J_{306} و J_{307} و J_{308} و J_{309} و J_{310} و J_{311} و J_{312} و J_{313} و J_{314} و J_{315} و J_{316} و J_{317} و J_{318} و J_{319} و J_{320} و J_{321} و J_{322} و J_{323} و J_{324} و J_{325} و J_{326} و J_{327} و J_{328} و J_{329} و J_{330} و J_{331} و J_{332} و J_{333} و J_{334} و J_{335} و J_{336} و J_{337} و J_{338} و J_{339} و J_{340} و J_{341} و J_{342} و J_{343} و J_{344} و J_{345} و J_{346} و J_{347} و J_{348} و J_{349} و J_{350} و J_{351} و J_{352} و J_{353} و J_{354} و J_{355} و J_{356} و J_{357} و J_{358} و J_{359} و J_{360} و J_{361} و J_{362} و J_{363} و J_{364} و J_{365} و J_{366} و J_{367} و J_{368} و J_{369} و J_{370} و J_{371} و J_{372} و J_{373} و J_{374} و J_{375} و J_{376} و J_{377} و J_{378} و J_{379} و J_{380} و J_{381} و J_{382} و J_{383} و J_{384} و J_{385} و J_{386} و J_{387} و J_{388} و J_{389} و J_{390} و J_{391} و J_{392} و J_{393} و J_{394} و J_{395} و J_{396} و J_{397} و J_{398} و J_{399} و J_{400} و J_{401} و J_{402} و J_{403} و J_{404} و J_{405} و J_{406} و J_{407} و J_{408} و J_{409} و J_{410} و J_{411} و J_{412} و J_{413} و J_{414} و J_{415} و J_{416} و J_{417} و J_{418} و J_{419} و J_{420} و J_{421} و J_{422} و J_{423} و J_{424} و J_{425} و J_{426} و J_{427} و J_{428} و J_{429} و J_{430} و J_{431} و J_{432} و J_{433} و J_{434} و J_{435} و J_{436} و J_{437} و J_{438} و J_{439} و J_{440} و J_{441} و J_{442} و J_{443} و J_{444} و J_{445} و J_{446} و J_{447} و J_{448} و J_{449} و J_{450} و J_{451} و J_{452} و J_{453} و J_{454} و J_{455} و J_{456} و J_{457} و J_{458} و J_{459} و J_{460} و J_{461} و J_{462} و J_{463} و J_{464} و J_{465} و J_{466} و J_{467} و J_{468} و J_{469} و J_{470} و J_{471} و J_{472} و J_{473} و J_{474} و J_{475} و J_{476} و J_{477} و J_{478} و J_{479} و J_{480} و J_{481} و J_{482} و J_{483} و J_{484} و J_{485} و J_{486} و J_{487} و J_{488} و J_{489} و J_{490} و J_{491} و J_{492} و J_{493} و J_{494} و J_{495} و J_{496} و J_{497} و J_{498} و J_{499} و J_{500} و J_{501} و J_{502} و J_{503} و J_{504} و J_{505} و J_{506} و J_{507} و J_{508} و J_{509} و J_{510} و J_{511} و J_{512} و J_{513} و J_{514} و J_{515} و J_{516} و J_{517} و J_{518} و J_{519} و J_{520} و J_{521} و J_{522} و J_{523} و J_{524} و J_{525} و J_{526} و J_{527} و J_{528} و J_{529} و J_{530} و J_{531} و J_{532} و J_{533} و J_{534} و J_{535} و J_{536} و J_{537} و J_{538} و J_{539} و J_{540} و J_{541} و J_{542} و J_{543} و J_{544} و J_{545} و J_{546} و J_{547} و J_{548} و J_{549} و J_{550} و J_{551} و J_{552} و J_{553} و J_{554} و J_{555} و J_{556} و J_{557} و J_{558} و J_{559} و J_{560} و J_{561} و J_{562} و J_{563} و J_{564} و J_{565} و J_{566} و J_{567} و J_{568} و J_{569} و J_{570} و J_{571} و J_{572} و J_{573} و J_{574} و J_{575} و J_{576} و J_{577} و J_{578} و J_{579} و J_{580} و J_{581} و J_{582} و J_{583} و J_{584} و J_{585} و J_{586} و J_{587} و J_{588} و J_{589} و J_{590} و J_{591} و J_{592} و J_{593} و J_{594} و J_{595} و J_{596} و J_{597} و J_{598} و J_{599} و J_{600} و J_{601} و J_{602} و J_{603} و J_{604} و J_{605} و J_{606} و J_{607} و J_{608} و J_{609} و J_{610} و J_{611} و J_{612} و J_{613} و J_{614} و J_{615} و J_{616} و J_{617} و J_{618} و J_{619} و J_{620} و J_{621} و J_{622} و J_{623} و J_{624} و J_{625} و J_{626} و J_{627} و J_{628} و J_{629} و J_{630} و J_{631} و J_{632} و J_{633} و J_{634} و J_{635} و J_{636} و J_{637} و J_{638} و J_{639} و J_{640} و J_{641} و J_{642} و J_{643} و J_{644} و J_{645} و J_{646} و J_{647} و J_{648} و J_{649} و J_{650} و J_{651} و J_{652} و J_{653} و J_{654} و J_{655} و J_{656} و J_{657} و J_{658} و J_{659} و J_{660} و J_{661} و J_{662} و J_{663} و J_{664} و J_{665} و J_{666} و J_{667} و J_{668} و J_{669} و J_{670} و J_{671} و J_{672} و J_{673} و J_{674} و J_{675} و J_{676} و J_{677} و J_{678} و J_{679} و J_{680} و J_{681} و J_{682} و J_{683} و J_{684} و J_{685} و J_{686} و J_{687} و J_{688} و J_{689} و J_{690} و J_{691} و J_{692} و J_{693} و J_{694} و J_{695} و J_{696} و J_{697} و J_{698} و J_{699} و J_{700} و J_{701} و J_{702} و J_{703} و J_{704} و J_{705} و J_{706} و J_{707} و J_{708} و J_{709} و J_{710} و J_{711} و J_{712} و J_{713} و J_{714} و J_{715} و J_{716} و J_{717} و J_{718} و J_{719} و J_{720} و J_{721} و J_{722} و J_{723} و J_{724} و J_{725} و J_{726} و J_{727} و J_{728} و J_{729} و J_{730} و J_{731} و J_{732} و J_{733} و J_{734} و J_{735} و J_{736} و J_{737} و J_{738} و J_{739} و J_{740} و J_{741} و J_{742} و J_{743} و J_{744} و J_{745} و J_{746} و J_{747} و J_{748} و J_{749} و J_{750} و J_{751} و J_{752} و J_{753} و J_{754} و J_{755} و J_{756} و J_{757} و J_{758} و J_{759} و J_{760} و J_{761} و J_{762} و J_{763} و J_{764} و J_{765} و J_{766} و J_{767} و J_{768} و J_{769} و J_{770} و J_{771} و J_{772} و J_{773} و J_{774} و J_{775} و J_{776} و J_{777} و J_{778} و J_{779} و J_{780} و J_{781} و J_{782} و J_{783} و J_{784} و J_{785} و J_{786} و J_{787} و J_{788} و J_{789} و J_{790} و J_{791} و J_{792} و J_{793} و J_{794} و J_{795} و J_{796} و J_{797} و J_{798} و J_{799} و J_{800} و J_{801} و J_{802} و J_{803} و J_{804} و J_{805} و J_{806} و J_{807} و J_{808} و J_{809} و J_{810} و J_{811} و J_{812} و J_{813} و J_{814} و J_{815} و J_{816} و J_{817} و J_{818} و J_{819} و J_{820} و J_{821} و J_{822} و J_{823} و J_{824} و J_{825} و J_{826} و J_{827} و J_{828} و J_{829} و J_{830} و J_{831} و J_{832} و J_{833} و J_{834} و J_{835} و J_{836} و J_{837} و J_{838} و J_{839} و J_{840} و J_{841} و J_{842} و J_{843} و J_{844} و J_{845} و J_{846} و J_{847} و J_{848} و J_{849} و J_{850} و J_{851} و J_{852} و J_{853} و J_{854} و J_{855} و J_{856} و J_{857} و J_{858} و J_{859} و J_{860} و J_{861} و J_{862} و J_{863} و J_{864} و J_{865} و J_{866} و J_{867} و J_{868} و J_{869} و J_{870} و J_{871} و J_{872} و J_{873} و J_{874} و J_{875} و J_{876} و J_{877} و J_{878} و J_{879} و J_{880} و J_{881} و J_{882} و J_{883} و J_{884} و J_{885} و J_{886} و J_{887} و J_{888} و J_{889} و J_{890} و J_{891} و J_{892} و J_{893} و J_{894} و J_{895} و J_{896} و J_{897} و J_{898} و J_{899} و J_{900} و J_{901} و J_{902} و J_{903} و J_{904} و J_{905} و J_{906} و J_{907} و J_{908} و J_{909} و J_{910} و J_{911} و J_{912} و J_{913} و J_{914} و J_{915} و J_{916} و J_{917} و J_{918} و J_{919} و J_{920} و J_{921} و J_{922} و J_{923} و J_{924} و J_{925} و J_{926} و J_{927} و J_{928} و J_{929} و J_{930} و J_{931} و J_{932} و J_{933} و J_{934} و J_{935} و J_{936} و J_{937} و J_{938} و J_{939} و J_{940} و J_{941} و J_{942} و J_{943} و J_{944} و J_{945} و J_{946} و J_{947} و J_{948} و J_{949} و J_{950} و J_{951} و J_{952} و J_{953} و J_{954} و J_{955} و J_{956} و J_{957} و J_{958} و J_{959} و J_{960} و J_{961} و J_{962} و J_{963} و J_{964} و J_{965} و J_{966} و J_{967} و J_{968} و J_{969} و J_{970} و J_{971} و J_{972} و J_{973} و J_{974} و J_{975} و J_{976} و J_{977} و J_{978} و J_{979} و J_{980} و J_{981} و J_{982} و J_{983} و J_{984} و J_{985} و J_{986} و J_{987} و J_{988} و J_{989} و J_{990} و J_{991} و J_{992} و J_{993} و J_{994} و J_{995} و J_{996} و J_{997} و J_{998} و J_{999} و J_{1000}

$$j=0 \rightarrow m=0 \text{ و } j=\frac{1}{2} \rightarrow m=\pm\frac{1}{2} \text{ و } j=1 \rightarrow m=\pm 1 \text{ و } j=\frac{3}{2} \rightarrow m=\pm\frac{3}{2}$$

برای مثال اسپین فونیک، 1 است، که دو حالت (± 1) می تواند به خود ببرد، و متناظر با دو حالت Polarization برای موج الکترومغناطیسی:

$$\epsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \text{ \& } \epsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

باشگاه دانشجویان ایران

* اگر از ابتدا فرض می‌کنیم که $P^\mu = (P, 0, 0, P)$ ، رابطه به سبب $W^1 = W^2 = 0$ نمی‌توانیم، و بنابراین معادله به سمت C_2 می‌رود.

علامه $\vec{J}$ ، اینطور $\vec{K}$ هم ظاهر می‌شود. (در سبب $C_2 \neq S(S+1)$ ، و این سبب ذات یک فیلد یونیته می‌باشد). (که در سبب C_2 می‌باشد).

← در حالت کلی، علامه $\vec{K}$ ظاهر می‌شود، مناسب با ذاتی که می‌تواند موجود باشد، در چهار رابطه جاری می‌کنند:

1) $C_1 = P_\mu P^\mu = m^2 > 0$ ، $C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 S(S+1) \rightarrow$ ذات با حجم m و اسپین S

2) $C_1 = m^2 < 0$ ، $C_2 = -m^2 S(S+1) \rightarrow$ Tachyons ← ذات با حجم موقوعی و اسپین S

3) $C_1 = P_\mu P^\mu = m^2 = 0$ ، $C_2 = W_\mu W^\mu = 0 \rightarrow$ ذاتی که با helicity مشخص می‌شوند و حجم ندارند.

4) $C_1 = P_\mu P^\mu = 0$ ، $C_2 = W_\mu W^\mu \neq 0 \rightarrow$ ذاتی با اسپین یونیته.

به نظری می‌شود که طبیعت فقط از رابطه شماره 1 و 3 استفاده کرده است.

→ در مرحله بعد، به بررسی می‌کنیم که این ذات وابسته اند به برداریم.

باشگاه دانشجویان ایران

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad : x \rightarrow x'$$

$$u(x) \longrightarrow u'(x')$$

$$u'(x') = u(x)$$

$$\delta u \equiv u'(x') - u(x) = 0$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \delta x^{\mu} \equiv \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\Rightarrow u'(x + \delta x) - u(x) = u'(x) + \frac{\partial u'}{\partial x^{\alpha}} \delta x^{\alpha} + \dots - u(x)$$

$$\Rightarrow \delta u = \delta^0 u + \frac{\partial u'}{\partial x^{\alpha}} \delta x^{\alpha} + \dots$$

$$\delta u = \delta^0 u + \partial_{\alpha} u \delta x^{\alpha} + O(2)$$

معنی تغییرات u در دو بخش تغییرات همبستگی و تغییرات u تشکیل شده است.

$$\delta u = 0 \Rightarrow \delta^0 u = - \partial_{\alpha} u \delta x^{\alpha}$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \Rightarrow \delta x^{\mu} = a^{\mu} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \delta^0 u = - a^{\alpha} \underbrace{\partial_{\alpha} u}_{\text{مورد انتقال}} = - a^{\alpha} P_{\alpha} u \Rightarrow u' = (1 - a^{\alpha} P_{\alpha}) u$$

$$u' = \exp(-a^{\alpha} P_{\alpha}) u$$

$$\delta x^{\alpha} = \epsilon^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$$

$$\Rightarrow \delta^0 u = - \epsilon^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\alpha} u$$

$$\delta^0 u = - \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha}_{\beta} (x^{\beta} \partial_{\alpha} - x_{\alpha} \partial^{\beta}) u$$

$$= - \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (x_{\beta} \partial_{\alpha} - x_{\alpha} \partial_{\beta}) u = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} u$$

در نتیجه P_{α} و $L_{\alpha\beta}$ مولد تغییرات برای قسمت باقی (Functional) مولد u هستند.

در نظر گرفتن تبدیلات لورنتس:

تبدیل مولد K مولد u که تابع x است:

در این تبدیل، هم آرگومان میدان (x) می‌تواند تغییر کند هم خود میدان (u) . اگر u اسکالر باشد:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu} \quad \Rightarrow \quad \delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \Rightarrow \quad u'(x) - u(x) = \delta^0 u$$

اگر u مرتبه اول δ تغییرات u را نگه داریم:

در نتیجه برای یک اسکالر u صفر است $\delta^0 u$ صفر نیست:

* اگر تبدیلات را به شکل انتقال و تقارن زمانی در نظر بگیریم:

اگر تبدیلات داخلی کوچک در نظر بگیریم:

چون ϵ پارامتر است، باید قسمت باقی $x^{\beta} \partial_{\alpha}$ را در نظر بگیریم:

باشگاه دانشجویان ایران

حال فرض کنید که به جای یک میدان اسکالر، یک میدان $u(x)$ داریم. میدان $u(x)$ را به شکل $\partial_\mu u$ می‌نویسیم:

$$\delta(\partial_\mu u) = \partial'_\mu u'(x') - \partial_\mu u(x) = \partial'_\mu u(x) - \partial_\mu u(x) = \partial_\nu u(x) \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - \partial_\mu u(x)$$

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} (x'^\nu - \delta x^\nu) = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x^\mu} \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\mu + \delta(\partial_\mu)$$

$$\Rightarrow \delta(\partial_\mu u) = \partial_\mu u(x) - \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x^\mu} \partial_\nu u(x) - \partial_\mu u(x) = -(\partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu u(x)$$

$$\delta x^\nu = a^\nu = \text{const.} \Rightarrow \partial_\mu a^\nu = 0 \Rightarrow \delta(\partial_\mu u) = 0$$

اگر انتقال را در نظر بگیریم:

$$\delta^\alpha(\partial_\mu u) = \partial_\mu u'(x) - \partial_\mu u(x) = \partial_\mu \delta u \stackrel{\text{انتقال}}{=} \partial_\mu (-a^\alpha \partial_\alpha u) = -a^\alpha \partial_\alpha (\partial_\mu u) = -a^\alpha P_\alpha(\partial_\mu u)$$

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu$$

اگر تبدیلات دوران و Boost را در نظر بگیریم:

$$\Rightarrow \delta(\partial_\mu u) = -\partial_\mu (\epsilon^\nu_\sigma x^\sigma) \partial_\nu u(x) = -\delta_\mu^\sigma \epsilon^\nu_\sigma \partial_\nu u(x) = -\epsilon^\nu_\mu \partial_\nu u(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu u(x)$$

$$\left(\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu = \eta^\rho_\mu \epsilon_{\rho\nu} \eta^\nu_\alpha \partial^\alpha = \epsilon_{\rho\sigma} \eta^\rho_\mu \eta^\sigma_\nu \partial^\nu \right)$$

$$\delta(\partial_\mu u) = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (\eta^\rho_\mu \eta^\sigma_\nu - \eta^\sigma_\mu \eta^\rho_\nu) \partial^\nu u(x)$$

باز هم به قسمت یادداشت‌ها برگردیم؛ اگر $\epsilon_{\mu\nu}$ را به صورت $(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu})$ در نظر بگیریم، آن را به شکل $(\eta^\rho_\mu \eta^\sigma_\nu - \eta^\sigma_\mu \eta^\rho_\nu)$ می‌توان نوشت، که این عبارت را به شکل $\delta u(x)$ می‌نویسیم.

عبارتی که به شکل $\delta u(x)$ می‌نویسیم، از فرم پارتیکل $(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu})$ است. این عبارت را به فرم $\epsilon_{\mu\nu}$ می‌نویسیم. این عبارت را به فرم $\epsilon_{\mu\nu}$ می‌نویسیم. این عبارت را به فرم $\epsilon_{\mu\nu}$ می‌نویسیم.

باشگاه دانشجویان ایران

یک 4 برار عمل می کنند و $\delta(\partial_\mu u)$ را می سازند. اسم این عملگر را $(S^{\rho\sigma})_{\mu\nu}$ می زنیم:

$$(S^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \eta^\rho_\mu \eta^\sigma_\nu - \eta^\sigma_\mu \eta^\rho_\nu$$

$$(S^{01})_{\mu\nu} = \eta^0_\mu \eta^1_\nu - \eta^1_\mu \eta^0_\nu$$

$$(S^{01})_{01} = 1 \quad \& \quad (S^{01})_{10} = -1$$

$$\Rightarrow S^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

شکل ماتریس S^{01} بر این شکل خواهد بود:
که فقط مؤلفه های 01 و 10 مخالف صفر هستند:

رنگش ماتریس $S^{\rho\sigma}$ وجود دارند، که سه تایی آنها $\vec{K}$ و سه تایی دیگر $\vec{J}$ را می سازند. از ترکیب $\vec{K}$ و $\vec{J}$ هم ماتریس های $\vec{N}$ و $\vec{N}^\dagger$ می سازند که ماتریس با ابعاد متناهی

در واقع ماتریس های $\vec{K}$ و $\vec{J}$ که در اینجا از روی $S^{\rho\sigma}$ ساخته می شوند، همان ماتریس های نائین 4 براری هستند که در فضای اسپین از روی $\vec{N}^\dagger$ و $\vec{N}$ ساخته می شوند.

در حساب کوانتوم: $\delta^0 u = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} u$

$$\delta^0 (\partial_\mu u) = \partial_\mu \delta^0 u = -\partial_\mu [(\partial_\alpha u) \epsilon^{\alpha\beta} x^\beta]$$

$$= -\epsilon^{\alpha\beta} x_\beta \partial_\alpha (\partial_\mu u) + \epsilon_{\mu\alpha} \partial^\alpha u = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} (\partial_\mu u) + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma})_{\mu\nu} (\partial^\nu u)$$

* ماتریس $S^{\rho\sigma}$ ، δ را می سازد و $L^{\rho\sigma} + S^{\rho\sigma}$ ، δ^0 را تولید می کنند، یعنی فقط تغییراتی که از هم باقی می ماند.

$$(M^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = L^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} + S^{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}$$

		اسفنج	4-برار
انتقال	δ	0	0
	δ^0	$-\alpha^\mu P_\mu$	$-\alpha^\mu P_\mu$
تغییرات	δ	0	$\frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}$
	δ^0	$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$	$\frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma} + L^{\rho\sigma})$

باشگاه دانشجویان ایران

27.1.90

به هر میدان $u_a(x)$ (که اندیس a در معادله دیکرانی می تواند تغییر کند) یک میدان نسبیتی گفته می شود، اگر تحت تبدیلات لورنتس به این شکل تغییر کند:

$$u_a \rightarrow u'_a = (M^{\rho\sigma})_a^b u_b \quad \text{با} \quad (S^{\rho\sigma})_a^b \quad \text{تبدیل مایر.}$$

- اگر a فقط یک معادله می تواند تغییر کند $u(x)$ یک میدان اسکالر است. رتبه $\delta u_a = 0$ ، یعنی بیشترین بارین تبدیل S ، اعداد صفر هستند.

- اگر a چهار معادله می تواند تغییر کند $u_a(x)$ یک میدان چاردار است. (که بارین در تبدیل را به دست آورده ایم).

در واقع به هر اندازه که اندیس a می تواند معادله تغییر کند، به غیر غاشی هم به همان اندازه است. (غاشی اسکالری، غاشی چاردار و ... می باشد).

حال مایر برای این میدان که کشتی نوشت و از روی آن معادلات میدان را به دست آورد. مایر این کار را برای میدان A^μ انجام دادیم.

$$\mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}(u_a, \partial_\mu u_a, x_\mu) \quad \text{و به عبارات آنتروپنایس ریسمان:} \quad \delta^\circ$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \int_\Omega d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u)} \delta (\partial_\mu u) \right) \quad \delta^\circ \quad \delta (\partial_\mu u) = \partial_\mu (\delta u)$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \int_\Omega d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u)} \delta u \right] - \delta u \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u)} \right) \right)$$

$$= \int_\Omega d^4x \delta u \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u)} \right) + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u)} \delta u d^3x$$

← سطح مرزی

$$\begin{cases} \pi^{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} & \text{مختص تغییر یافته} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} & \text{نوی تغییر یافته} \end{cases}$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \quad \text{or} \quad \partial_\mu \pi^{\mu a} = F^a$$
 اگر از شرط مری کوشی استفاده کنیم و δu را روی مری صفر بگیریم همه عبارات میلان به این صورت در می آید:

قضیه نوتر (Noether's theorem)

این قضیه سه بخش دارد:

 i) تناظر با هم تعاقبی که در یک سیستم وجود داشته باشد، گاهی وجود دارد که در آن سیستم پایسته است.

 ii) ارتباط گشت پایسته با مولد مربوطه

 iii) محدودیتی بر حالت انرژی این گشت پایسته

مثال: اگر سیستمی تحت انتقال زمان تعاقب داشته باشد $\rightarrow$ انرژی پایسته است. اگر تعاقب تحت انتقال فضایی باشد $\rightarrow$ مومنتم خطی پایسته است. و اگر تحت دوران متعاقب باشد $\rightarrow$ مومنتم زاویه‌ای پایسته می ماند.

اثبات: در جهت قبل برای روشن کردن اگر کنش، میلان را روی مری ثابت نگه داریم و در جهت تغییر دهیم به آن اعمال کنیم.

در اینجا تغییری که به u اعمال می کنیم ناشی از یک عمل تعاقبی است، یعنی: انتقال مبدأ زمان، انتقال مبدأ مکان، دوران و Boost.

تبدیل را infinitesimal در نظر می گیریم:

$$x'^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad \delta x^{\mu} \equiv \xi^{\mu} \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

اگر ξ^{μ} ثابت باشد به تبدیل انتقال. اگر $\xi^{\mu} = \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ به تبدیل دوران و Boost.

تحت این تبدیل، میلان $u_a(x)$ هم تغییر خواهد کرد:

$$u_a(x) \rightarrow u'_a(x') = \delta u_a + u_a(x)$$
 و به همین ترتیب مشتق میلان u :

$$\partial_\mu u_a(x) \rightarrow \partial'_\mu u'_a(x') = \partial_\mu u_a + \delta(\partial_\mu u_a)$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\mathcal{L}' = \int d^4x' \mathcal{L}' = \int d^4x \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

اگر این تبدیل توانسته باشیم، باید یک آنرا نقش را در آنجا بماند:

$$d^4x' = |J| d^4x \quad J^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$\hookrightarrow$ Jacobian matrix

تبدیل ها، در زمان ها و فضا
(یعنی $J = \pm 1$) است $|J| = 1$

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad \text{یعنی}$$

در یک تبدیل d^4x تغییر نکند، پس باید

نویس به صورت $\delta \mathcal{L}$ ، ابتدا $\delta(\partial_\mu u_a)$ را به دست می آوریم:

$$\delta(\partial_\mu u_a) = \partial'_\mu u'_a(x') - \partial_\mu u_a(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu u'_a(x') - \partial_\mu u_a(x)$$

$$x'^\nu = x^\nu + \xi^\nu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} (x^\nu - \xi^\nu) = \delta^\nu_\mu - \partial'_\mu \xi^\nu \stackrel{1st \text{ order}}{=} \delta^\nu_\mu - \partial_\mu \xi^\nu$$

$$\left\{ \partial'_\mu \xi^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \xi^\nu (\delta^\nu_\mu - \partial'_\mu \xi^\nu) = \partial_\mu \xi^\nu - \partial_\mu \xi^\nu \partial'_\mu \xi^\nu \right\}$$

$\hookrightarrow$ 2nd order of

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta(\partial_\mu u_a) &= \partial'_\mu u'_a(x') - \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu u'_a(x') - \partial_\mu u_a(x) = \partial_\mu (u'_a(x') - u_a(x)) - \dots \\ &= \partial_\mu (\delta u_a) - \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu u'_a(x') \\ &\stackrel{1st \text{ order}}{=} \partial_\mu (\delta u_a) - (\partial_\mu \xi^\nu) \partial_\nu u_a(x) \end{aligned}$$

$$\text{از پیش فرض} \rightarrow \delta(u_a) = -(\partial_a \xi^b) u_b$$

$$\Rightarrow \delta(\partial_\mu u_a) = \partial_\mu (\delta u_a) - \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu u_a(x)$$

با داشتن δx ، δu ، $\delta(\partial u)$ ، $\delta \mathcal{L}$ را محاسبه می کنیم:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \Big|_{x, \delta u} \delta u_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \Big|_{x, u} \delta(\partial_\mu u_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Big|_{u, \delta u} \delta x^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \Big|_{x, \delta u} \frac{\partial u_a}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \Big|_{x, u} \frac{\partial (\partial_\mu u_a)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Big|_{u, \delta u}$$

(تا از طرفی):

باشگاه دانشجویان ایران

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \delta u_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \delta (\partial_\mu u_a) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} \frac{\partial u_a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu u_a)} \frac{\partial (\partial_\nu u_a)}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu$$

حال با جابجایی $\delta (\partial_\mu u_a)$ و استفاده از معادله حرکت میزنیم

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \right]$$

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \delta u_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \partial_\mu (\delta u_a) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \partial_\mu (\xi^\nu \partial_\nu u_a) + \underbrace{\xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}}_{\partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L})} - \xi^\nu \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \right) \partial_\nu u_a - \xi^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \partial_\mu (\partial_\nu u_a)$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\xi^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} (\delta u_a - \xi^\nu \partial_\nu u_a) \right] - \mathcal{L} \partial_\mu \xi^\mu$$

ثابت کنیم $\partial_\mu \xi^\mu = 0$. اگر تبدیل اسکالر مد نظر باشد، ξ^μ ثابت است، پس $\partial_\mu \xi^\mu = 0$. اگر تبدیل لورنتس مد نظر باشد، $\xi^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu$.

$$\Rightarrow \partial_\mu \xi^\mu = \partial_\mu (\epsilon^\mu_\nu x^\nu) = \epsilon^\mu_\nu \partial_\mu x^\nu = \epsilon^\mu_\nu \delta^\nu_\mu = \epsilon^\mu_\mu = 0$$

$$J^\mu = \xi^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} (\delta u_a - \xi^\nu \partial_\nu u_a) \Rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

معنی فیزیکی این عبارت، یک اصل بقا است. یعنی کمیتی مانند Q ، صوری که $Q = \int d^3x J^0$ ، پایسته است.

حالت های مختلف را به ازای تبدیل های مختلف بررسی میکنیم:

$$J^\mu = \xi^\nu (\eta^\mu_\nu \mathcal{L} - \partial_\nu u_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)})$$

(1) انتقال: $\xi^\mu = \text{const.} \Rightarrow \delta u_a = 0$

باشگاه دانشجویان ایران

$$T^{\mu}_{\nu} = (\partial_{\nu} u_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u_a)} - \eta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad J^{\mu} = - \xi^{\nu} T^{\mu}_{\nu}$$

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \Rightarrow \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \text{پایداری انرژی و تکانه}$$

$$H = P\dot{q} - \mathcal{L}$$

$$P^{\nu} = \int d^3x T^{0\nu}$$

عبارت $T^{\mu\nu}$ شبیه به تانسور است که برای داینامیک رلهیتیو
در تئیه $T^{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه میگویند.

برای میدان آشنای الکترومغناطیس، $T^{\mu\nu}$ به صورت زیر می آید. برای این میدان: $\mathcal{L} = \frac{+1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ و $u_a = A^{\mu}$

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\nu} A^{\kappa} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A^{\kappa})} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^{\nu} A^{\kappa} \left(\frac{\pm 1}{4\pi} F^{\mu}_{\kappa} \right) + \eta^{\mu\nu} \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu}_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \quad = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

→ Jackson, chapter 12, Page 606.

29.1.90

$$\xi^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu$$

$$\delta u_a = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b$$

$$\Rightarrow J^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b - \frac{\epsilon^\nu_\gamma x^\gamma \partial_\nu u_a}{\epsilon_{\rho\sigma} \eta^{\rho\nu} \eta^{\sigma\gamma}} \right)$$

$$J^\mu = \underbrace{\epsilon^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L}}_{= \epsilon_{\rho\sigma} \eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \epsilon_{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b - \eta^{\rho\nu} \eta^{\sigma\gamma} x^\gamma \partial_\nu u_a \right)$$

$$= \epsilon_{\rho\sigma} \left[\underbrace{(\eta^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu x^\nu \mathcal{L})}_{\frac{x^\sigma}{x^\sigma}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} \eta^{\rho\nu} \eta^{\sigma\gamma} x^\gamma \partial_\nu u_a \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b$$

این عبارت (واقع $x^\sigma T^{\mu\rho}$ است، که جزء $\epsilon_{\rho\sigma}$ با ضرایب است، در انتهای عبارت (نسبت به ρ و σ)

$$J^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (x^\sigma T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\sigma}) + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b$$

$$x^\sigma T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\sigma} \equiv L^{\mu\sigma\rho} : \text{Orbital Angular Momentum.}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_a)} (S^{\rho\sigma})^b_a u_b \equiv S^{\mu\sigma\rho} : \text{Spin Angular Momentum.}$$

$$\Rightarrow J^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma} (L^{\sigma\rho\mu} + S^{\sigma\rho\mu}) \Rightarrow \partial_\mu (L^{\sigma\rho\mu} + S^{\sigma\rho\mu}) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} L^{\sigma\rho} &\equiv \int d^3x L^{\sigma\rho\mu} \\ S^{\sigma\rho} &\equiv \int d^3x S^{\sigma\rho\mu} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} (L^{\sigma\rho} + S^{\sigma\rho}) = 0 \Rightarrow M^{\sigma\rho}$$

کتاب باقیه مشخص شد

$$L^{\sigma\rho\mu} = x^\sigma T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\sigma} \Rightarrow$$

$$S^{\sigma\rho\mu} =$$

$\propto$ Poynting vector

چگالی موم زادی

در صورت تعریف $L^{\sigma\rho\mu}$

باشگاه دانشجویان ایران

اگر قرار دهیم: $u_\alpha \rightarrow A_\mu$ و δu_α میزبان اکتو-مقیاسی را در محادلات جایگزینی کنیم، اسپین میزبان E.M به دست می آید.

البته هیچ تک اسپین ندارد.

که بیان helicity مثبت و منفی است.

باشگاه دانشجویان ایران

تا آنکه قسمت اول در هم تقسیم نمیشود. (در این مرحله باید اثبات کنیم که پایداری که از تعاریف فضا-زمان میآید

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x (L^{\mu 0\nu} + S^{\mu 0\nu}) \quad \text{و} \quad P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$$

شدند، مولد همان تبدیلات تقارنی مربوطه هستند. یعنی باید نشان دهیم که در هر مولد یک گروه پوانکاره صدق می‌کند. با استفاده از تعریف این کمیت‌ها، اثبات این مطلب برآیند یکی از روش‌های است.

تاکنون فقط تعاریف فضا-زمانی را بررسی کردیم و کمیت‌های پایه‌ای متناظر بر تعاریف به دست آمد. (یعنی چنین تبدیلاتی: $X^\mu \rightarrow X^\mu + \xi^\mu$)

به این تعاریف، تعاریف dynamic گفته می‌شود. اما تعاریف دیگری هم در سیستم می‌تواند وجود داشته باشند، مثلاً اینکه به جای تغییر X^μ ،

u_α (میدان‌ها) را تغییر دهیم و بررسی کنیم که در آن حالت کمیت‌های پایه‌ای متناظر چه خواهد بود. به چنین تعاریف‌هایی، تعاریف داخلی گفته می‌شود.

مثلاً در مورد میدان‌های E.M، تبدیلات پوانکاری می‌تواند به شکل $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ باشد. یعنی $\delta A^\mu = \partial^\mu \chi$.

بنابراین اگر بخواهیم: $\xi^\mu = 0$ و $\delta u_\alpha = \delta A_\alpha$ و $\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ، عبارت مربوط به J^μ به این شکل در می‌آید:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\kappa)} \delta A_\kappa = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\kappa} \partial_\kappa \chi = \frac{1}{4\pi} \partial_\kappa (\chi F^{\mu\kappa}) - \frac{1}{4\pi} \chi \partial_\kappa F^{\mu\kappa}$$

از تقسیمی که

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \underbrace{\partial_\mu \partial_\kappa (\chi F^{\mu\kappa})}_{\text{مشتقات}} - \underbrace{\partial_\mu (\chi \cdot 4\pi j^\mu)}_{\text{مشتقات}} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\chi j^\mu) = 0$$

باشگاه دانشجویان ایران

چون χ یک تابع دگرگانه است؛ نتیجه می‌گیریم $\nabla^2 \chi = 0$ ، که همان رابطه پاپس باراکتری است. یعنی ناوردایی پیمانه‌ای میدان‌های الکترومغناطیسی، رابطه ناوردایی را نتیجه می‌دهد. (این نتیجه از معادلات ماکسول هم بدست می‌آید، که بدین معنی است که آن معادلات ناوردایی پیمانه‌ای هستند.)

از قضیه نوبیر و از دربرداشتی که به دست آوردیم در جایی مختلف می‌توان استفاده کرد. مثلاً در مکانیک کوانتومی. معادله موج شرودینگر را در نظر بگیرید:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

اگر ψ را به شکل یک میدان اسکالر فرض کنیم که در چنین معادله‌ی میدانی صدق می‌کند، باید بتوان برای این میدان یک لاگرانژی نوشت و هم چنین برای گونه معادله میدان (و در واقع لاگرانژی) یک هم تئران را حل می‌ماند، و از آنجا طبق قضیه نوبیر می‌توانست متناظر با این تئران را به دست آورد.

ψ یک میدان اسکالر حقیقی می‌تواند باشد، در نتیجه مثلاً معادله میدان ψ از درون گیری از لاگرانژی نسبت به ψ و معادله

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial L}{\partial (\vec{\nabla} \psi^*)} = 0$$

به دست می‌آید. برای به دست آوردن لاگرانژی، فرض کنیم که این صورت عمومی در هر صورت α و β و γ با حالتی در معادله و متناظر با معادله شرودینگر به دست می‌آوریم:

$$L = \alpha \psi \psi^* + \beta (\dot{\psi}^* \dot{\psi} - \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi) + \gamma \psi \psi^*$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \alpha \nabla \psi + \beta \dot{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = -\beta \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = \gamma \nabla \psi \quad (\text{مستقر از dot، } \frac{\partial}{\partial t} \text{ است})$$

$$\Rightarrow \alpha \nabla \psi + \beta \dot{\psi} + \beta \dot{\psi} - \gamma \nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\beta = -i\hbar \\ \gamma = \frac{\hbar^2}{2m} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L} = \psi \psi^* + \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}^* \psi - \psi^* \dot{\psi}) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^*$$

در تغییر اگر جنس تبدیلی نزنیم: $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ که α یک عدد حقیقی است، لاگاریتمی (در تغییر علامت میدان) ندارد می ماند.
 ↓
 برای بررسی به دست آورد، حقیقی است.

پس باید متناظر با این تعادل را حفظ، یک کمیت پایسته وجود داشته باشد. اگر α کوچک باشد: $\psi' = (1 + i\alpha) \psi$

$$\Rightarrow \delta \psi = i\alpha \psi \Rightarrow \psi'^* = e^{-i\alpha} \psi^* = (1 - i\alpha) \psi^* \Rightarrow \delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$$

$$\text{بنابراین با فرض } \delta J = 0 \text{ خواهیم داشت:} \quad J' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi = i\alpha \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \Rightarrow \psi \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \psi = 0$$

$$\int J^0 d^3x = \int i\alpha \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\psi})} d^3x = i\alpha \int \frac{-i\hbar}{2} \psi \psi^* d^3x = \frac{\alpha \hbar}{2} \int |\psi|^2 d^3x \rightarrow \text{کمیت مقادیر}$$

کمیت پایسته متناظر با این تعادل، "احتمال" است: اصل پایستگی احتمال. (چون α ثابت است، می توان گفت $P = \int |\psi|^2 d^3x$ پایسته است.)

حال فرض کنید به جای این تعادل global که $\alpha = \text{cte}$ (یعنی ψ در تمام نقاط همزمان به یک ضریب تبدیل می خورد)، یک تعادل local را بنظر

گیریم، یعنی $\alpha = \alpha(x, t)$. این تعادل local به این معناست که تابع موج در هر نقطه همزمان به یک ضریب تبدیل می برد. در این صورت

کمیت پایسته، احتمال قرار می گیرد، $\int \alpha(x, t) |\psi|^2 d^3x$ پایسته است.

باشگاه دانشجویان ایران

در حالت قبل، پایداری احتمال را می توانیم به این شکل تعریف کنیم که: $\int e^{i\alpha} |\psi|^2 d^3x$ پایسته است. عبارت $e^{i\alpha} |\psi|^2$ به معنای توزیع بار الکتریکی در فضا است. با در نظر گرفتن تعاریف local، مسئله این طور تعریف می شود که بار الکتریکی را در نقاط مختلف فضا تعریف کنیم. اما این موضوع پایداری بار را از بین می برد، در نتیجه برای بازگرداندن آن، باید برعکس کردن اثر و معادله را اضافه کنیم. در نتیجه تعاریف local، برعکس کردن اثر و معادله فیزیکی را وارد می کند. تغییرات گسسته برای این تبدیل local را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\alpha(x,t)} \psi & (\alpha \text{ مجانبه چپ است}) \\ \psi^* &\rightarrow e^{-i\alpha(x,t)} \psi^* \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} \rightarrow e^{i\alpha} \dot{\psi} + i\dot{\alpha} e^{i\alpha} \psi \\ \dot{\psi}^* \rightarrow e^{-i\alpha} \dot{\psi}^* - i\dot{\alpha} e^{-i\alpha} \psi^* \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \psi \rightarrow e^{i\alpha} \vec{\nabla} \psi + i e^{i\alpha} \psi \vec{\nabla} \alpha \\ \vec{\nabla} \psi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \vec{\nabla} \psi^* - i e^{-i\alpha} \psi^* \vec{\nabla} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}' &= \int |\psi|^2 V + \frac{i\hbar}{2} \left[(e^{-i\alpha} \dot{\psi}^* - i\dot{\alpha} e^{-i\alpha} \psi^*) (e^{i\alpha} \psi) - (e^{-i\alpha} \psi^*) (e^{i\alpha} \dot{\psi} + i\dot{\alpha} e^{i\alpha} \psi) \right] \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2m} (e^{i\alpha} \vec{\nabla} \psi + i e^{i\alpha} \psi \vec{\nabla} \alpha) \cdot (e^{-i\alpha} \vec{\nabla} \psi^* - i e^{-i\alpha} \psi^* \vec{\nabla} \alpha) \\ \Rightarrow \mathcal{L}' &= \int |\psi|^2 V + \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}^* \psi - \psi^* \dot{\psi} - 2i\dot{\alpha} |\psi|^2) + \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* + |\psi|^2 \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} \alpha + i\psi \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} \psi^* \\ &\quad - i\psi^* \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\nabla} \psi) \end{aligned}$$

واقع است که گسسته نامتناهی نیست: $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$. اما می توان با دار کردن یک میدان جدید و اعمال بعضی تبدیلات، کاری کرد که

گسسته نامتناهی باشد. مدت به طول کشید تا نحوه این تغییرات مشخص شد، اما در نهایت اگر علاوه بر تبدیلی که روی ψ انجام می دهیم $(\psi \rightarrow e^{i\alpha(x,t)} \psi)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar e\varphi \\ \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - i\hbar e \vec{A} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha \end{cases} \quad \text{میدان های الکترومغناطیسی را وارد کنیم} \quad (\varphi \text{ و } \vec{A}) \quad \text{و همزمان چنین تبدیلی هم می زنیم:}$$

باشگاه دانشجویان ایران

گauge theory. اگر مقادیر ψ در نظر گرفتن $local$ و از دست رفتن اصل بقای بار الکتریکی و بارگرایی آن است.

این موضوع را می توان فهم داد. مثلاً در دسته $U(1)$ بین نورون و پروتون در برکنش های قوی هسته ای غایب وجود ندارد. (صرف نظر از جبران). این در
 در موردی تحت یک زواید: فرکتون. به چنین تئوری تئوری Isospin گفته می شود. (گروه تئوری: $SU(2)$). چنین تئوری global است.

اما اگر این تئوری را $local$ کنیم - یعنی در بعضی نقاط تبدیل $P \rightarrow N$ را اعمال کنیم، نه در همه نقاط - اصل بقای Isospin از بین می رود. برای برگرداندن
 این اصل بقا باید یک میدان اضافه ای را وارد کنیم: برکنش های ضعیف هسته ای. به چنین تئوری اگر تئوری یک رنگ $SU(3)$ را $local$ کنیم.

میدان قوی هسته ای وارد می شود.

هم چنین اگر تئوری های گروه پراگنده را موضوع کنیم (مثلاً در مورد Boost: در یک نقطه به چارچوب با سرعت v در نقطه ای دیگر به چارچوب با سرعت v' برویم،
 حتی به چارچوب استاندارد برویم) نسبت خاص بردار خواهد ماند. برای بازگرداندن تئوریهای میدان و میدان یک میدان اضافه نیاز است: میدان گرانشی.

بنابراین هر چهار نیروی بنیادی طبیعت از Gauge theory به دست می آیند...

باشگاه دانشجویان ایران

10.2.90

Reference: Gravitation and Spacetime, Weinberg

ورود به نسبیت عام

* اصل هم‌ارزی: اگر آزمایش‌ها در یک کالبد شروع شود، اگر جسم را با جسم M و مشخصات متفاوت را در شرایط خاص نزدیک زمین نگاه کنیم، با هم به زمین می‌رسند.

* نیروی گرانش نیوتنی: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$. در نزدیکی زمین: $r \approx R_E$ ، در نتیجه: $\vec{F} = m\vec{g}$. جری که در این معادله ظاهر شده

با هم گرانشی و جرمی که در معادله قانون دوم نیوتن ظاهر می‌شود جرم انیشتی می‌نامیم. این دو لزوماً با هم برابر نیستند. m_G گرانش را تولید می‌کند و

m_I انیشتی را. جرم انیشتی در مکانیک نیوتنی به صورت یک central charge و در نسبیت خاص به شکل معادله موجی دیگر کار می‌گیرد و در نتیجه.

جرم گرانشی هم می‌تواند دو نوع باشد: active و passive. مثلاً نیروی گرانشی که جسم 1 به 2 وارد می‌کند طبق قانون گرانش نیوتن برابر است با

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

چون این طور تعریف کردیم که جرم گرانشی 1 گرانش را تولید کرده و جرم گرانشی 2 گرانش را پذیرفته است. بنابراین جسم 1

$$m_{1G} \text{ دارد و جسم 2، } m_{2GP} \text{، نیروی که جسم 1 وارد می‌کند هم این طور خواهد بود: } \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = +G \frac{m_{2GP} m_{1G}}{r^2} \hat{r} \text{، در حالت کلی}$$

در این موارد جرم‌های گرانشی active و passive یک جسم با هم برابر باشند. اما فرض کنیم که با هم برابر نباشند.

* چون در نزدیکی سطح زمین داریم: $\vec{F} = m\vec{g}$ ، از طرفی $\vec{F} = m_I \vec{a}$ ، بنابراین $m_I \vec{a} = m_G \vec{g}$. طبق آزمون کالبدی، در آن

در سطح آزاد نزدیک سطح زمین شتاب یکسانی دارند، بنابراین باید $m_I = m_G$ ، و با حداقل نسبت $\frac{m_G}{m_I}$ برای همه در آن

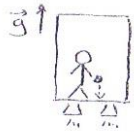
باشگاه دانشجویان ایران

عالم یک ثابت جهانی باشد : $\frac{m_g}{m_I} = \text{Universal constant}$ (مشتق) اصل هم‌ارزی . (در بیان واحدی را برای دقت حرف که $\frac{m_g}{m_I} = 1$)

اصل هم‌ارزی و آزمایش آسانسور اینشتین :



* در حالی که آسانسور در حال سکون است، یعنی راه آسانسور با زمین ندارد، حرارت گرفته و اتاقک هم روی سطح زمین است. اگر این فرد یک گلوله را از دستش رها کند، خواهد دید که گلوله با شتاب g سقوط می‌کند.



* حال فردی را تصور کنید که درون اتاقکی قرار گرفته که به دور از هر میدان گرانشی، توسط موتور یکی شتاب g رو به بالا دارد. (شتاب g نسبت به یک دستگاه انیشتی، که برای سادگی آن را زمین فرض می‌کنیم). اگر فردی یک گلوله را رها کند، باز خواهد دید که گلوله با g سقوط می‌کند. (از دید ناظر انیشتی گلوله ساکن است - تقریباً - و آسانسور حرکت نمی‌کند. اگر در واقعیت یک میدان گرانشی وجود داشته باشد، گلوله سقوط می‌کند.)

آیا این فرد می‌تواند میان این دو وضعیت تمایز قائل شود؟ خیر - چون اصل هم‌ارزی برقرار است و فرد با انجام این آزمایش نمی‌تواند تمیز دهد.

← اثرات موضعی (local) شتاب گرانشی معادل است.

* اگر همان آسانسور در جاذبه زمین سقوط آزاد کند (با شتاب g) و فرد آنش رها کند، گلوله را رها کند، خواهد دید که گلوله ساکن می‌ماند.

یعنی به صورت موضعی گرانش حذف شد و فرد اثری از گرانش زمین مشاهده نمی‌کند.

بنابراین اصل هم‌ارزی ضعیف : با رفتن به چارچوب‌های در حال سقوط آزاد (freely falling frames) می‌توان به صورت موضعی اثرات گرانش را از حرکت رها کردن حذف کرد.

باشگاه دانشجویان ایران

اصل هم‌ارزی قوی $\rightarrow$ با رفتن به چارچوب‌های در حال سقوط آزاد، اثرات گرانش را روی همهٔ موجودات فیزیکی و آزمایش‌ها می‌توان حذف کرد. (باز به صورت local)

این اصل را می‌بینیم.

۱* چرخ کنید خود درون آسانسور دو گلوله را رها کنید. وقتی آسانسور روی زمین است، دو گلوله به سمت مرکز زمین می‌افتند و در نتیجه

فاصله آنها قبل و بعد از رها شدن یکسان می‌ماند: 

صرف نظر کردن است، اما همراه این تغییر وجود دارد. بی در میان آسانسور شتابدار به شتاب g ، هر چند هم که زمان سقوط را زیاد کنیم فاصله بین

دو گلوله کم‌تر می‌شود. بنابراین خود درون آسانسور می‌تواند پس این دو وضعیت تعریف شود، مگر آنکه زمان سقوط بسیار کم باشد.

همین وضعیت در مورد آسانسور در حال سقوط آزاد هم پیش می‌آید. در اینجا هم نقاط مختلف آسانسور با یک دیگر g (بوی مرکز زمین) مربوط به خود شتاب

دارند. - در واقع همین متفاوت بودن برابری باعث پیدایش نیروی کششی (tidal forces) می‌شود. (زمین حول ماه می‌چرخد) -

↳ Gravitation and Spacetime: Ohanian

اما باز هم اگر ابعاد فضایی و زمانی را کوچک در نظر بگیریم، می‌توان به طور موضعی گرانش را حذف کرد. (موضعی یعنی ناحیه‌ای که اثرات

tidal force حذف شوند. البته از نظر ریاضی هیچ وقت نمی‌توان این اثرات را به طور کامل برای کل چارچوب در حال سقوط آزاد - PPP -

حذف کرد، فقط برای یک نقطه - مرکز جرم - که دقیقاً با شتاب g سقوط آزاد می‌کند - می‌توان این کار را کرد.

باشگاه دانشجویان ایران

اکنون در دوران افتادن در یک دور باطل چارچوب انرژی را تعریف کرد، کاری که در مکانیک نیوتنی - دیم چنین نسبت خاص - ممکن نبود:

چارچوب انرژی چارچوبی است که در آن به شکل موضعی به زره نیوتنی گرانشی وارد نشود. یعنی چنین چارچوبی در حال سقوط آزاد. مقیاس نیوتنی که به ذات وارد می شود در قانون دوم نیوتن جای F قرار می گیرند. این چارچوب انرژی global نسبت.

در رابطه بین این چارچوب های موضعی تجربه به عبارات نسبت عام می شود.

اصل هم در زمانی عام + برای بررسی روابط فیزیکی در چارچوب های دیگر، لازم نیست آنها نوداً با هم مرتبط ثابت نسبت به چارچوب انرژی اول حرکت کنند.

مگر چارچوب های دیگر می توانند حرکت راجع به نسبت به چارچوب اول داشته باشند. بنابراین x'^{μ} هر تابعی از x^{μ} می تواند باشد: $x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$

وقتی f معادله singular باشد. یعنی تبدیل یک به یک باشد، $(\det J \neq 0)$ [معادله فیزیکی به generally covariant باشد].

* حال که تعریف دستگاه های انرژی را مشخص کردیم، می توانیم شروع را این دستگاه که به طور موضعی نسبت خاص برقرار است. در دستگاه انرژی موضعی، مختصات با تبدیلات لورنتس (و نه پوانکاره)

رابطه ξ^a در مختصات چارچوب global را با x^{μ} نشان می دهیم. چون چارچوب انرژی مورد بحث، موضعی است، ξ^a نمی تواند خیلی نزدیک باشد (اندازه ها برای ξ و اندازهای فیزیکی برای x)

(چون در مقیاس های بزرگ مکانی و زمانی، انرژی درون چارچوب ازین می رود). از تعریف چارچوب انرژی: $m \frac{d^2 \xi^a}{dt^2} = F^a$. اگر مثلاً برای

ساختن دقت کنیم نیوتنی به زره وارد نمی شود، $\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} = 0$. یعنی شتاب زره صفر است. (که بارک می شود) دستگاه انرژی سازگار است (۰).

باشگاه دانشجویان ایران

$$\xi = \xi(x), x = x(\xi)$$

$$d\tau^2 = ds^2 = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b = \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\Rightarrow d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

tetrad

← برای حرکت زوایا در صفحه global :

$$\eta_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}$$

↑
متریک در صفحه global

tetrad به معنای سبب برقرار کردن در صفحه و حرکت مختصات x هستند. در واقع tetrad و حرکت برای بعضی صفحات برای بعضی حرکت.

$$\hat{\xi}^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \hat{e}^\mu$$

و حرکت هم از tetrad و سبب شده است. و حرکت برایش برای حرکت tetrad.

معادله حرکت از روی صفحه برای :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^a}{d\tau} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \times \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} = 0$$

معادله ژئودزی :

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$\equiv \Gamma_{\mu\nu}^\kappa$: Connection

(و غدار که سبب نوع دوم)

* $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta})$ Connection و حرکت بر این شکل بر حسب حرکت نوشت :

است :

$$(g^{\gamma\delta} = \eta^{cd} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^\delta}{\partial \xi^d}) \rightsquigarrow \text{right side} = \frac{1}{2} \eta^{cd} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^\delta}{\partial \xi^d} \eta_{ab} (\partial_\alpha (\partial_\beta \xi^a \partial_\delta \xi^b) + \partial_\beta (\partial_\alpha \xi^a \partial_\delta \xi^b) - \partial_\delta (\partial_\alpha \xi^a \partial_\beta \xi^b))$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{cd} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^\delta}{\partial \xi^d} \eta_{ab} (2 \partial_\delta \xi^b \partial_\alpha \partial_\beta \xi^a + \partial_\beta \xi^a \partial_\alpha \partial_\delta \xi^b - \partial_\beta \xi^b \partial_\alpha \partial_\delta \xi^a) = \eta^{cb} \eta_{ab} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^c} \partial_\alpha \partial_\beta \xi^a = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

مقادیر $\partial_\alpha \partial_\beta \xi^a$ نسبت به $\partial_\alpha \partial_\beta \xi^a$

و حرکت در زمان global مختص است، اما در هر location حرکت یک جا و حرکت از برای حرکت حرکت کرد. حرکت بر این سبب حرکت در زمان.

12.2.90

... در دستگاه مختصات global، مختصات را با x^μ نشان می‌دهیم. بر برابری را می‌توان در این چارچوب چهار بعدی بر حسب برابری یکدست فضای زمان نوشت؛ در همین برابری یکدست در حالت کلی در نقاط مختلف ثابت هستند. لحاظ کنیم همان چیزی که در باره دستگاه‌های مختصات متحرک (مثل دستگاه کوری) می‌دانیم.

$$x = x_\mu \hat{e}^\mu(x^\nu)$$

x در نقطه را به موقعیت x و $x + \Delta x$ در نظر بگیرد. مؤلفه‌های برابری x^μ و برابری که در محل $x^\mu = \hat{e}^\mu(x^\nu)$ است. به همین ترتیب مؤلفه‌های

برابر $x + \Delta x$ ، $x^\mu + \Delta x^\mu$ و برابری که در این محل $\hat{e}^\mu(x + \Delta x)$ است:

$$x + \Delta x = (x^\mu + \Delta x^\mu) \hat{e}_\mu(x^\nu + \Delta x^\nu) = x^\mu \hat{e}_\mu(x^\nu) + \Delta x^\mu \hat{e}_\mu(x^\nu) + x^\mu \Delta x^\nu \partial_\nu \hat{e}_\mu(x) + \dots$$

در حالت مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه یکم، حاصله بین x و $x + \Delta x$ را کوپله گرفتیم.

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x^\mu \hat{e}_\mu(x) + x^\mu \Delta x^\nu \partial_\nu \hat{e}_\mu(x)$$

با ضرب کردن طرفین رابطه در $\hat{e}^\kappa$ ، مؤلفه Δx^κ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \Delta x^\kappa = \Delta x^\mu \underbrace{\hat{e}_\mu \hat{e}^\kappa}_{\delta_\mu^\kappa} + x^\mu \Delta x^\nu \hat{e}^\kappa \partial_\nu \hat{e}_\mu = \Delta x^\kappa + x^\mu \Delta x^\nu \hat{e}^\kappa \partial_\nu \hat{e}_\mu$$

در غیر این صورت $\partial_\nu \hat{e}_\mu$ صفر نباشد، تغییرات برابری موقعیت یا تغییرات مختصات برابر نیست.

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} d\xi^a$$

$\hat{e}^\mu$ را می‌توان بر حسب پایه‌های دستگاه مختصات local بسط داد: $\hat{e}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \hat{\xi}^a$. ضرایب بسط با توجه به این رابطه به دست می‌آید. $\hat{\xi}^a$ درون tetrad

بنابراین محاسبه درم رابطه با این شکل در می‌آید:

$$x^\mu \Delta x^\nu \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^a} \partial_\nu \left(\frac{\partial \xi^b}{\partial x^\mu} \hat{\xi}_b \right) = x^\mu \Delta x^\nu \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^a} \partial_\nu \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \right) = x^\mu \Delta x^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\kappa$$

به همین ترتیب برای هر برابر A می‌توان نوشت:

$$\Delta A^\kappa = \delta A^\kappa + A^\mu \Delta x^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\kappa$$

از سبب این که این عبارت ظاهر می‌شود

باشگاه دانشجویان ایران

در باب مفهوم موتری برون دو بردار :

در دستگاه های مختصات کت (مثل دستگاه قطبی) ، دو بردار از یک نقطه موتری وقتی موتری اند که شیب های برابر داشته باشند ، یعنی نسبت مؤلفه های آنها ثابت است . اما در دستگاه های مختصات کت نسبت مؤلفه های ثابت نمی ماند . در دستگاه کت ، $\Gamma = 0$ ، و در مورد دو بردار موتری : $\Delta A = 0$ در نتیجه $\Delta A = 0$.

در دستگاه مختصات کت ، دو بردار وقتی موتری هستند که $\Delta A^k = 0$ ، مؤلفه های آنها به اندازه $\Gamma_{\mu\nu}^k A^\mu \delta x^\nu$ تغییر می کنند . بنابراین اگر برداری را موتری منتقل کنیم که $\Delta A^k = 0$ ، یعنی مؤلفه های به شکل فوق تغییر کنند ، به این انتقال Parallel transport گفته می شود .

مثال : با انتقال موتری یک بردار در دستگاه قطبی ، مؤلفه های بردار موتری رابطه یان تغییر می کنند .

در سیستم های local که نسبت خاص بردار است ، طول یک بردار به این شکل بدست می آید : $\eta^{ab} A_a A_b$. طول این بردار در مختصات

global به این صورت خواهد شد : $g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ ، که رابطه بین A_a و A_μ به این شکل است : $A_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} A_\mu$. (این رابطه را قبل در مورد

بردار موقعیت داشتیم ، چون بردار موتری است که مثل موقعیت رفتار می کند ، رابطه $\eta^{ab} A_a A_b = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ برقرار است .)

بنابراین طول هر بردار در هر چارچوبی با متریک همان چارچوب مشخص می شود ، و متریک هم موتری است که می توان با آن این فضا را بسازیم .

* در مورد یک اسکالر می دانیم : $\Delta \phi = \delta \phi$. اگر در این رابطه قرار دهیم $\phi = A_\mu A^\mu$ ، آنگاه :

$$\begin{aligned} \Delta(A_\mu A^\mu) &= \delta(A_\mu A^\mu) = A^\mu \delta A_\mu + A_\mu \delta A^\mu = A_\mu \Delta A^\mu + A^\mu \Delta A_\mu \\ &= A_\mu (\delta A^\mu + A^\nu \delta x^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu) + A^\mu \Delta A_\mu \end{aligned}$$

S.A.T

باشگاه دانشجویان ایران

$$\Rightarrow A^\mu \Delta A_\mu = A^\mu \delta A_\mu - A^\mu_{\lambda} A^\lambda_{\nu} \delta x^\nu \Gamma^{\mu}_{\lambda \nu} \Rightarrow \boxed{\Delta A_\mu = \delta A_\mu - A_\kappa \delta x^\nu \Gamma^{\kappa}_{\mu \nu}} \Rightarrow \text{تغییرات برار Covariant}$$

تغییرات ΔA بر اثر تغییرات x بر روی آنه، بنابراین عبارت $\frac{\Delta A}{\delta x}$ معنوم مشتق برار A نسبت به x را دارد:

$$\nabla_\nu A^\kappa \equiv \frac{\Delta A^\kappa}{\delta x^\nu} = \partial_\nu A^\kappa + \Gamma^{\kappa}_{\mu \nu} A^\mu \quad \text{و} \quad \nabla_\nu A_\kappa = \frac{\Delta A_\kappa}{\delta x^\nu} = \partial_\nu A_\kappa - \Gamma^{\kappa}_{\mu \nu} A_\kappa$$

به مشتق ∇A covariant گفته می شود، و بدین معنوم است که تغییرات برار به دلیل تغییرات نقطه، علاوه بر جمله تغییرات مؤلفه برار، یک جمله دیگر هم دارد که ناشی از تغییرات براری یک است.

$$\begin{cases} \nabla_\mu T^{\nu \kappa} = \partial_\mu T^{\nu \kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\alpha \mu} T^{\nu \alpha} + \Gamma^{\nu}_{\alpha \mu} T^{\alpha \kappa} \\ \nabla_\mu T_{\nu \kappa} = \partial_\mu T_{\nu \kappa} - \Gamma^{\alpha}_{\mu \kappa} T_{\nu \alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu \nu} T_{\alpha \kappa} \end{cases} \quad * \text{ در مورد یک اسکالر: } \nabla_\mu \phi = \frac{\Delta \phi}{\delta x^\mu} = \partial_\mu \phi \quad \text{و در مورد تانسور مرتبه دوم:}$$

در حالت کلی در بیان مسئله را این طور تعمیم داد که برای تانسورهای مرتبه بالاتر، به ازای هر اندیس یک جمله شامل Γ اضافه می شود - برای اندیس

Contravarian با علامت مثبت و برای اندیس Covariant با علامت منفی -

*** فرض کنید خواهیم یک برار با دور را روی یک مسیر بسته انتقال موازی بکنیم. شرط انتقال موازی به این شکل است: $\delta A^\alpha = -A^\alpha_{\lambda} \delta x^\lambda \Gamma^{\alpha}_{\mu \nu}$

مسیر بسته را به شکل یک مسیر با مسافت ناخیز حل میدان رفتار کنیم. هم چنین در حالت کلی A و Γ تابع موقعیت هستند، اما اگر موقعیت

نقاط مسیر بسته حول میدان کوچک باشد، در بیان Γ و A را حول میدان بسط می دهیم. اگر تغییرات کلی برار A در اثر این انتقال موازی را

باشگاه دانشجویان ایران



$$\delta_{tot} A^\alpha = - \oint_C \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) A^\beta(x) dx^\gamma = - \oint_C (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) + \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) dx^\mu) A^\beta(x) dx^\gamma$$

$$= - \oint_C \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(x) dx^\gamma - \oint_C \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(x) x^\mu dx^\gamma \quad (\text{توسعه اول در } x^\mu)$$

$$= - \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(0) \oint_C x^\mu dx^\gamma - \oint_C \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) [d(A^\beta(x) x^\gamma) - x^\gamma dA^\beta(x)]$$

$$x^\gamma dA^\beta = A^\sigma dx^\gamma \Gamma_{\sigma\gamma}^\beta$$

$$\Rightarrow \delta_{tot} A^\alpha = - \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(0) \oint_C x^\mu dx^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) \oint_C A^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\beta x^\gamma dx^\mu$$

$$= - \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(0) \oint_C x^\mu dx^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) \oint_C A^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\beta x^\gamma dx^\mu$$

$$\Rightarrow \delta_{tot} A^\alpha = (- \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(0) A^\beta(0) - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha(0) \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma(0) A^\beta(0)) \oint_C x^\mu dx^\gamma$$

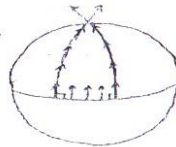
$$= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma) A^\beta(0) S^{\gamma\mu}$$

$$\equiv R_{\beta\gamma}^\alpha{}_\mu : \text{Curvature Tensor}$$

نمایش این بردار مختلف انتظار آگاهی، وقتی بردار A^α را روی یک مسیر بسته انتقال موازی می‌کنیم، $\delta_{tot} A^\alpha$ صفر نمی‌شود، مگر اینکه مسیر

اینها را به هم برگرداند. تحت این است که فضا-زمان خمیده است. با انتقال موازی یک بردار در یک منحنی بسته، بردار تغییری نمی‌کند.

در هر نقطه روی سطح کره، می‌توان یک دستگاه



اما اگر مثل آن را روی یک کره انتقال موازی کنیم، تغییر می‌کند:

درجه R ، یعنی انحنای فضا-زمان. (انحنای

موضعی تحت در نظر گرفت و بردار را در آن منحنی موازی منتقل کرد.

سطح کره یک انحنای ذاتی این سطح است. (تقریباً دستگاه محلی در منحنی نیست. اگر $R=0$ یعنی یک دستگاه global وجود دارد.)

باشگاه دانشجویان ایران

19.2.90

در مختصات جهانی: $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$ ، در مختصات محلی: $\frac{d^2 \xi^a}{d\tau^2} = 0$

$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$ ، $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$ (نسبت متعکس وارث $g_{\mu\nu}$)

در مختصات موضعی، نسبت خاص برقرار است، و تبدیلات فضا، تبدیلات لورنتس است. در این مختصات، یک جابجایی در این شکل تبدیل می‌شود:

$d\xi'^a = \frac{\partial \xi'^a}{\partial \xi^b} d\xi^b$ ، $v'^a = \frac{d\xi'^a}{d\tau} = \frac{\partial \xi'^a}{\partial \xi^b} v^b$ (contravariant) ، $v'_a = \frac{d\xi^b}{d\tau} \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^b} v_b$ (covariant)

در همین ترتیب جابجایی در مختصات محلی با تبدیلات لورنتس از این عبارت می‌شود: $local$ مختصات محلی.

به همین ترتیب در مختصات global: $v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu$ ، $v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu$

یک حالت خاص این تبدیل این است که مختصات (ξ^a) بر مختصات (x^μ) محلی (local) مطابقت می‌یابند. (این صورت است)

$v'^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} v^\mu$ ، $d\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} dx^\mu$ (عبارت رابطی که بین $d\xi$ و dx دربردارد: در همین شکل به رابطه $g_{\mu\nu}$ می‌رسیم)

$g'_{\mu\nu} = \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x'^\nu} = \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$ ، $g_{\mu\nu}$ یک تانسور مرتبه دوم است

بنابراین $g_{\mu\nu}$ یک جابجایی مرتبه دوم global است. به همین صورت می‌توان جابجایی مرتبه دوم $g^{\mu\nu}$ را ثابت کرد.

باشگاه دانشجویان ایران

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ تانسور مرتبه سه ضمیمه است؛ برای اثبات این مطلب، از تعریف Γ در این شکل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \underbrace{\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}}}_{=\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} \\ &\quad + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \end{aligned}$$

که بر مبنای قرارداد این جمله اضافه، Γ تانسور ضمیمه است.
این خاصیت تانسور بودن Γ از این هم حکم است که Γ در چارچوب موضعی همزمان با درجه‌های global همزمان است. اگر Γ یک تانسور بود، در صورت همزمان در یک چارچوب، آنجا در بقیه چارچوب هم صفر می‌شد.

* * *

$$\nabla_{\mu} A^{\alpha} = \partial_{\mu} A^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A^{\nu}$$

مشتق covariant :

(مشتق موضعی را هم می‌توان با این علامت نشان داد: $\nabla_{\mu} v^{\alpha} = D_{\mu} v^{\alpha} \equiv v^{\alpha}_{;\mu}$)

در نهایت خاص، $\partial_{\mu} A^{\alpha}$ یک چارچوب مرتبه 2 است، لذا برای این ضمیمه $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A^{\nu}$ هم ضمیمه است. لذا $\nabla_{\mu} A^{\alpha}$ چارچوب مرتبه 1 است.

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mu} A^{\alpha})' &= \partial'_{\mu} A'^{\alpha} + \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} A'^{\nu} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta} \right) + \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right) x^{\lambda} \\ &= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} A^{\beta} + A^{\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} A^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} A^{\lambda} \\ &= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \left[\partial_{\tau} A^{\beta} + \Gamma_{\tau\lambda}^{\beta} A^{\lambda} \right] + A^{\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x^{\beta}} + A^{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \right) - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} \right] = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \nabla_{\tau} A^{\beta} \end{aligned}$$

باشگاه دانشجویان ایران

تعریف مشتق سری ∇ در جهت چاردار u : مشابه تعریف مشتق سری یک اسکالر در جهت $\vec{n}$ ($\vec{n} \cdot \nabla \varphi \equiv D_n \varphi$) عبارت

$$u^\lambda \nabla_\lambda v^\mu \equiv D_u v^\mu$$

هم تعریف مشتق سری چاردار ∇ در جهت چاردار u است. با توجه به این تعریف، می توان دید که معادله ژئودزیک حرکت

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} u^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0$$

یک زره به این شکل در می آید:

$$\Rightarrow \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^\mu + u^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta \right) = u^\alpha \left(\partial_\alpha u^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta \right) = \boxed{u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = 0}$$

یعنی زره طوری حرکت می کند که مشتق سری برداشته در جهت خود، صفر باشد.

دریم که در یک آنالیز در حال سقوط آزاد نزدیک سطح زمین، بین دو غوطه زده شده سری کششی وجود دارد، که در آنالیز با شتاب g در فضای بدون میدان گرانشی وجود دارد. در واقع به وسیله همین نیروی کششی می توان در دریا علم وجود گرانش در یک چارچوب مختصات را فهمید.
در پی خود تغییرات حاصله بین دو زره در چارچوب سقوط آزاد:

$$\text{در یک دستگاه global، زره اول در مسیر ژئودزیک با این معادله حرکت می کند: } \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

مختصه زره دوم را با $x^\mu + \delta x^\mu$

$$\frac{d^2 (x^\mu + \delta x^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (x + \delta x) \frac{d(x^\alpha + \delta x^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \delta x^\beta)}{d\tau} = 0$$

مستأن می بینیم، که اگر هم در مسیر ژئودزیک خودی حرکت می کند:
این دو معادله را از هم کم می کنیم: (تا مرتبه اول که در می آید)

$$\delta \ddot{x}^\mu + \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha \dot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) \delta \ddot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) \dot{x}^\alpha \delta \ddot{x}^\beta = 0$$

$$\Rightarrow \delta \ddot{x}^\mu + \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha \dot{x}^\beta + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) \delta \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

در چارچوب موضعی: $\Gamma = 0$ ، اما مشتق Γ صفر نیست (چون $R \neq 0$)
یعنی حاصله دوزره در این چارچوب ثابت نیست، بلکه به دلیل وجود گرانش (یا انحنای فضا-زمان) به هم نزدیک می شوند. (گرانش از پس حادیه است.)

باشگاه دانشجویان ایران

معادله قبل را می توان به این شکل نوشت:

$$\frac{D}{D\tau} \equiv u^\mu \nabla_\mu \quad \text{به طوری که} \quad \frac{D^2 \delta x^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\nu\lambda\rho} \delta x^\lambda \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

(یعنی دو طرف مشتاق نسبی دارند.)

اثبات معادله پیرون این دو رابطه:

$$\frac{D}{D\tau} \delta x^\mu = u^\nu \nabla_\nu \delta x^\mu = u^\nu (\partial_\nu \delta x^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \delta x^\alpha) = \delta \dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu \delta x^\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{D\tau^2} \delta x^\mu &= u^\gamma \nabla_\gamma (\delta \dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu \delta x^\alpha) = u^\gamma (\partial_\gamma \delta \dot{x}^\mu + u^\nu \delta x^\alpha \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \delta x^\alpha \partial_\gamma u^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu \partial_\gamma \delta x^\alpha \\ &\quad + \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \delta \dot{x}^\beta + \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} u^\nu \delta x^\alpha) \\ &= \delta \ddot{x}^\mu + u^\gamma u^\nu \delta x^\alpha \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \delta x^\alpha \underbrace{u^\gamma \partial_\gamma u^\nu}_{\frac{d}{d\tau} u^\nu} + \underbrace{\Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu u^\gamma \partial_\gamma \delta x^\alpha}_{\text{این دو جمله مساوی اند}} + \Gamma^\mu_{\gamma\beta} u^\gamma \delta \dot{x}^\beta + \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} u^\nu u^\gamma \delta x^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \delta \ddot{x}^\mu + 2 \Gamma^\mu_{\gamma\beta} u^\gamma \delta \dot{x}^\beta + (\Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \partial_\gamma \Gamma^\mu_{\nu\alpha}) u^\nu u^\gamma \delta x^\alpha + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \delta x^\alpha \dot{u}^\nu \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\nu\gamma} - \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\gamma} \end{aligned}$$

R ، γ_α مؤلفه متعلق دارد (این 256 مؤلفه)

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} \delta x^\lambda \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$$

مشتقات

باشگاه دانشجویان ایران

پس اگر تانسور انحنای غیر صفر باشد، دوره به هم نزدیک می شوند. طبق اصل هم ارزی، تفاوت بین شتاب داشتن چارچوب دیا و حرکت گرانش، این است که اگر در حضور گرانش به حد کافی صبر کنیم، دوره به هم نزدیک می شوند. بنابراین در حرکت گرانش با محلی بودن فضا و زمان معادل است.

* روابط ریاضی بیان می کنند که در صورت محدود بودن فضا و زمان، در سیر نزدیک به هم نزدیک می شوند. از طرفی به علت وجود گرانش هم دوره باید به هم نزدیک شوند، بنابراین این دو حیاتی را به هم منطبق در نظر گرفت.

* صفر بودن یا نشدن تانسور انحنای به ما این اطلاعات را می دهد که آیا دستگاه مختصات نامناسبی انتخاب کرده ایم که فضا-زمان محدود به نظر می آید یا واقعاً گرانش وجود دارد؟ (شاید این دو حالت... اگر در صفحه تخت دکائی دستگاه مختصات تعریفی را در نظر بگیریم، به نظر می رسد که صفحه انحنای دارد، در صورتی که واقعاً این طور نیست، اما روی سطح کره هر دستگاهی انتخاب کنیم، سطح کره محدود است. انحنای سطح کره یک انحنای ذاتی آن سطح است نه این که به دلیل بد انتخاب کردن دستگاه عارض شده باشد.)

* * *

معادلات ریاضی که تا الان ظاهر شده اند، هر کدام برای خود تعریفی دارند. حرکت (9.4.4) تعریف نیوتن گرانش دارد، معادله (9.4.5) چون از مشتقات و حاصل می شود نقش نیروی گرانش را دارند. هم چنین با توجه به معادله حرکت زده: $m \ddot{x}^\mu = -m \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ هم می توان چنین

تعریف کرد. تانسور انحنای اطلاعات بیشتری هم دارد، چون از روی صفر شدن یا نشدن آن می توان به وجه یا عدم وجود گرانش (در نقطه محدود بودن ذاتی فضا-زمان) پی برد. مثلاً در فضای تخت، اگر دستگاه مختصات دکائی انتخاب کنیم، Γ صفر می شود، ولی اگر در فضای تخت دستگاه استوانه ای انتخاب کنیم، Γ غیر صفر خواهند شد. اما R می تواند صفر بماند یا نه. اگر دستگاه مختصات نامناسبی انتخاب کرده ایم، به این

باشگاه دانشجویان ایران

معناست که دستگاه مختصات جعبه دارد که در آن Δ صفر می شود و متریک تبدیل به η می شود. اما در هندسه گراش، هیچ دستگاه globalی وجود ندارد.

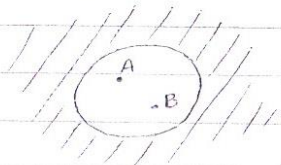
که در آن Δ در همه نقاط صفر می شود. بنابراین تا حدودی این مطلب سوال مشق ۳ را هم پاسخ می دهد، مشخص می کند که گراش وجود دارد یا نه.

در مورد جعبه، مشابه مکانیک نیوتنی، ما در از طریق معادلات تفریع ماده را به گراش - یعنی تا حدودی اینجا - مربوط کردیم، که نتیجه معادلات اینست: جعبه وجود دارد.

در واقع اینست: در سال ۱۹۰۷ تقریباً به نتیجه رسیدیم بود، اما چیزی که باعث از دست رفتن شوی این تا سال ۱۹۱۵ شد، مسأله ای بود که به بحث خود

Hole Argument معروف است :

فرض کنید یک نامنه خالی از ماده در بین یک تفریع ماده وجود دارد. دو نقطه در این نامنه خالی از ماده (نقطه ای در A گراش وجود دارد: $R \neq 0$ ،



و در نقطه B : $R = 0$ ، یعنی گراشی حس نمی شود. پس نقاط A و B از هم جدا می شوند. (اصل هم از این واصل هم در این عالم)

هم به نظر است، پس در همه دستگاه های بی پایان تریک نوشت. (دستگاه مختصات را هم می توانیم هم که در نقاط بیرون خود،

$x' = x$ (مختصات عوض نمی شود) ، بنابراین تفریع ماده بیرون خود تغییری نمی کند، لذا تبدیل مختصه را هم می توانیم هم که در داخل خود این خاصیت برقرار

باشد: $x'_A = x_B$ و $x'_B = x_A$ ، یعنی مختصات دو نقطه را جابجا می کنیم. چون تفریع ماده اطراف بی تغییر است، اکنون در نقطه

A گراش حذف شده است (یعنی جای B). به ظاهر با یک پارادوکس روبه رویم: گراش ناشی از تفریع ماده است، تفریع ماده هم

siam

باشگاه دانشجویان ایران

تقریری نگارده ، اما در سطح تحقیقات را فوری تغییر دادیم که حال به جای نقطه B ، در نقطه A گزارش منفرشته است . پس انتظار این مسأله که تشریح ماده
مولد گزارش است ، با اصل هم در حالی عام در نقطه است . در 1908 (پیشین به این نتیجه رسید که اصل هم در حالی عام (شبهه است ، اما معادلات
مستقیم در رابطه که این اصل برقرار است . در نهایت تقیم گرفت که برقرار بودن اصل هم در حالی عام را به این قیوت بندید که : فضا-زمان وجه بندارد .
چون در واقع تغییر (شبهه تحقیقات) چیزی جز تبدیل فضا-زمان نیست ، با این تبدیل ، $event$ معنای فیزیکی خود را از دست نمی دهد ، بلکه
نقطه ای که آنها عوض می شود . این تبدیل مفاد یک کار ریاضی است .

اگرچه تا پیش از R (گزارش) تا سنی از x^4 است ، اینا آنچه که جهت فیزیکی دارد ، دو مؤلفه مستقل تا پیش از R است که بر حسب از برای
ریاضی - فضا زمان - بیان شده است . می توان x^4 را به پنج تا از مؤلفه های R حذف کرد ، و 6 مؤلفه دیگر را هم بر حسب این 4 تا نوشت . در این
صورت R به x وابسته خواهد بود . x^4 استیاج است برای راه ترمیم کردن مسأله . مدلای های گزارش روی فضا-زمان زندگی می کنند ،
مدلای های گزارش روی مدلای های گزارش زندگی می کنند . (در واقع این مسأله به نوعی بیان اصل جاخ است : همه خواص فضا-زمان ناشی از
(Revoli)
تشریح ماده و نحوه تقریرات آن است .) بنا بر این رویاروی فیزیکی بر حسب فضا زمان بیان نمی شوند ، بلکه بر حسب coincidence بین

خود رویاروی میان می شوند .

باشگاه دانشجویان ایران

24.2.90

* مترادف از این که general covariant باشد را می توان با دارد کردن میدان های گنگی جدید به نظر برای general covariant تبدیل کرد (مثلا در مکانیک نیوتنی ، ما داریم کردن یک دهم از آن که جدید به نظر نیوتنی می آید چارچوب های مختصات می شوند) البته با این کار نشان می شود که فقط زمان وجود ندارد ، چون این میدان های با جهت آسانی ، دشتی وارد شده اند . [برای مثال در کتاب Shake ، مکانیک کلاسیک به صورت نظریه هموردای عام نوشته شده است] در نسبیت عام خود جز اصل هموردای عام وجود دارد ، بنابراین میدان های گنگی که فقط زمان وجود دارند این اصل به علاوه اصل هموردای عام و به جهت دربارگی گراشتن تغییر می شود .

 هشتم مکانیک نیوتنی که گراشتن را از روی میدان گراشتن به دست می آوریم ، (نسبیت عام هم باید بتوان از روی یک میدان گراشتن که درباره نحوه تغییر مکان زمان توضیح می دهد ، نیوتنی گراشتن را به دست آورد .

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\nu\alpha\beta} \delta x^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu$$

فاصله دشتی در دوز در چارچوب سقوط آزاد در این معادله صدق می کند .
 این رابطه را باید با قانون گراشتن نیوتنی مقایسه کنیم ، چون در نهایت میدان گراشتن نسبیت عام باید در یک حدی به میدان گراشتن نیوتنی تبدیل شود .

در مکانیک نیوتنی گراشتن از یک پتانسیل φ به دست می آید که با توزیع ماده چنین رابطه ای دارد : $\nabla^2 \varphi = -4\pi G \rho$ ؛ میدان گراشتن $\vec{G} = -\vec{\nabla} \varphi$

و نیروی وارد بر ذرات به حجم m ، $\vec{F} = m \vec{G}$ خواهد بود .

4- ρ (چگالی ماده) تابعی از زمان نیست : $\rho \neq \rho(t)$ ، چون در مکانیک کلاسیک فرض بر این است که (حجم) بارسان اند یا با سرعت کمی حرکت می کنند

4- در مکانیک نیوتنی سرعت ذرات بسیار کم است : $v \ll 1$ ، $u^\mu = (1, \vec{0})$

4- شدت میدان گراشتنی زیاد نیست .

با توجه به این فرض ها ، معادله ژرژ دیک در حدی فوق به این صورت در می آید :

چون ρ را مستقل از زمان در نظر گرفتیم ، در نتیجه φ هم وابسته به زمان نخواهد بود . معادله پتانسیل گراشتن نیوتنی ، پتانسیل گراشتن نسبیت عام وجود دارد

که همان متریک است . بنابراین در حد کلاسیک ، $g_{\mu\nu}$ مستقل از زمان است .

S.A.M

باشگاه دانشجویان ایران

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \xrightarrow{\text{نسبت زمانی}} \frac{d^2 t^2}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^0 = 0$$

α, β فقط می تواند صفر باشند

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i = 0$$

نسبت مکانی

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\nu} [2\partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{const.}$$

در ساده فضیات راجع به زمان فوری Scale بود که این ثابت برابر با 1 باشد $dt = d\tau$ پس در محاسبه هم می توان نوشت:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i = 0$$

(در واقع این انتظار هم می رفت که در حد فیزیکی زمان و t یکی شود.)
با توجه به شکل این محاسبه Γ_{00}^i در واقع نقش نیروی گرانش فیزیکی را ایفا می کند

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\nu} [2\partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}] = -\frac{1}{2} g^{i\nu} \partial_\nu g_{00}$$

برای بدست آوردن Γ_{00}^i نیاز به تریک داریم.
در مکانیک فیزیکی، فضاهای تخت است. اما گرانش ضعیف هم در اینجا وجود دارد، بنابراین می توان تریک را به این شکل نوشت:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 1 = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = 1 - h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2 = 1 \checkmark$$

$$\Rightarrow \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} (\eta^{i\nu} - h^{i\nu}) \partial_\nu (\eta_{00}^1 + h_{00}) = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^i = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00} = -\partial_i \phi \Rightarrow \phi = +\frac{1}{2} h_{00}$$

با داشتن h_{00} می توان تریک را در حد فیزیکی به این شکل نوشت:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+2\phi & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

تعیین می کند $h_{\mu\nu}$ چون در محاسبه حرکت ظاهر نمی شوند، تأثیر فیزیکی ندارند، بنابراین می توانیم همه آنها را صفر در نظر بگیریم. (در ضمن چون تقریب هم برای تمام است، می توان نشان داد که در در دستگاه فضایی که در آن همه مؤلفه های $h_{\mu\nu}$ غایب h_{00} صفر باشند. به این (دستگاه فضیات خاص، دستگاه مادی گفته می شود.)
بنابراین در حد فیزیکی محاسبه نزدیک به محاسبه حرکت کلاسیک فرو تبدیل می شود.

باشگاه دانشجویان ایران

معادله حاکم بر پدیده دوزخ در حد نیوتنی:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{x} + \delta \vec{x}) &= -\vec{\nabla} \phi(\vec{x} + \delta \vec{x}) \\ \frac{d^2 \delta \vec{x}}{dt^2} &= -\vec{\nabla} \phi(x) \cdot \delta \vec{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta \ddot{x}^i = -\partial_j (\partial_i \phi) \delta x^j$$

$$\delta \ddot{x}^i = -\partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^i \delta x^\alpha \dot{x}^\beta - \partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^i \dot{x}^\alpha \delta x^\beta$$

$$\delta \ddot{x}^i = -\partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^i \delta x^\alpha \dot{x}^\beta$$

$$\delta \ddot{x}^i = -\partial_j \Gamma_{\alpha\beta}^i \delta x^\alpha$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = 0$$

$$\dot{x}^\alpha = (1, \vec{0})$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta} &= R$$

از معادله معادله نیوتنی و نسبیتی، و با توجه به اینکه $\nabla^2 \phi$ با چگالی ماده متناسب است، تغییر می‌کنیم که نسبیتی تمام مابین معادله‌ای

داشته باشیم که مشتق دوم پتانسیل گرانشی - یعنی R_{00} - را به توزیع ماده مربوط کند. این معادله در حالت کلی ترکیب خطی از $R_{\alpha\beta}$ و R خواهد بود.

$$A R_{\alpha\beta} + B g_{\alpha\beta} R$$

با توجه به این ترکیب خطی، در طرف راست باید یک تانسور رتبه دو قرار دهیم که یکی از مؤلفه‌هایش چگالی ماده باشد. در واقع چون از معادله گرانش نیوتنی می‌خواهیم معادله گرانش نسبیتی را بسازیم، معادله به دست آمده باید خواهر دوقلو (یا برادر) فرانتزی است که نسبیتین هم‌گردد.

باشگاه دانشجویان ایران

از قانون گرانش نیوتن، $\nabla^2 \phi$ مشخص است، اما در معادله حاکم بر پویای کندی از رابطه کلاسیک، جمله $\nabla \phi$ و حد دارد. $(\nabla^2 \phi = \text{Tr}(\nabla \nabla \phi))$ بنابر این به نظریه ای رسید که این نیرو را از قانون گرانش نیوتن رابطه $\nabla \phi$ را بزرگ منبع نیرو گرانش مشخص کرد. (مثلاً $\nabla \phi = \vec{S}$) چون در حالت نیوتن کندی این جمله ظاهر می شود. اما چون نیرو گرانش را با پستار فرض کرده ایم و در نتیجه $\vec{G} = -\nabla \phi$ ، بنابراین چیزی تر $\nabla^2 \phi$ نمی باشد از قانون گرانش نیوتن مشخص شود. هر عبارتی غیر از این، با تقسیم نیروی ناسازگار است.

بیا کردن source میدان گرانش و شکل معادله اینشتین:

$$m u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$$

از این هم معادله را در نظر گرفته استفاده می کنیم. در صورتی که به پاره پویای غیر گرانشی وارد شود، عبارت مربوط به آنها در طرف راست معادله قرار می گیرد. مثلاً نیروی الکترودینامیکی:

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu$$

اگر بجای یک ذره، میدانی از ذرات به حجم m و بار q داشته باشیم؛ نیروی وارد بر این ذرات در واحد حجم در این معادله صدق می کند:

$$\rho u^\nu \nabla_\nu u^\mu = j_\nu F^{\mu\nu}$$

از طرفی نیروی الکترودینامیکی که بر این ذرات (در واحد حجم) وارد می شود بر حسب تانسور انرژی-مستقیم میدان E.M. بیان می شود:

$$\rho u^\nu \nabla_\nu u^\mu = -\nabla_\nu T^{\mu\nu} \quad \text{(معادله مشتق (5) به شکل دیگر)}$$

$$\Rightarrow \nabla_\nu (\rho u^\nu u^\mu) - u^\mu \nabla_\nu (\rho u^\nu) = -\nabla_\nu T^{\mu\nu}$$

ρu^μ در واقع چگالی جریان جرمی ماده است، و چون پایستگی جرم برقرار است: $\nabla_\nu j_{\text{mass}}^\nu = 0$

$$\Rightarrow \nabla_\nu (\rho u^\nu u^\mu + T^{\mu\nu}) = 0$$

$\rho u^\mu u^\mu$ تانسور نیرو-مستقیم ذرات با حجم m است. این رابطه نشان می دهد که منبع انرژی-مستقیم میدان + ذرات مثبت است.

$$T^{\mu\nu}_{\text{matter}} = \rho u^\mu u^\nu$$

که مؤلفه T^{00} در حد نیوتن، چگالی جرمی ذرات را به دست می دهد پس $T^{\mu\nu}$ می تواند در طرف راست معادله اینشتین

باشگاه دانشجویان ایران

$$AR_{\alpha\beta} + Bg_{\alpha\beta}R = \gamma(T_{\alpha\beta}^{field} + T_{\alpha\beta}^{matter})$$

حرارتی:

* حرارتی که انرژی-معموم داشته باشد، گرانش تولید می کند، (از جمله میدان الکترومغناطیسی). (و هم چنین میدان های ضعیف و قوی هسته ای)

برای بدست آوردن میدان موحد در معادله، باید مؤلفه صفر را در نظر بگیریم و با باز کردن R_{00} و R ، در حدزنی به $\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$ برسیم
نتیجه به این صورت خواهد بود:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Einstein's Equations.}$$

برای حل یک مسئله گرانشی با دانستن $T_{\alpha\beta}$ و حل این معادله، تمرین بدست می آید.

* نیروی گرانش، نیروی نیست، بلکه خودیست فضای زمان است! بنابراین خود میدان گرانشی $T_{\alpha\beta}$ را دارد!

نیروی گرانش از دو نقطه نظر با سایر نیروی متفاوت است. هم از این جنبه که اساساً نیروی خودیست فضای زمان است و هم از این نظر که

برخلاف بقیه نیروی بنیادی طبیعت، گواهی نمی دهد - علم نشان می دهد! - به این دلیل که این نیروی، همردای عام است یعنی در همه

در سطح های مختلف برقرار است. اصل همردای عام با ذات مکانیک کوانتومی در تضاد است، چون مکانیک کوانتومی از اصول موضعه کوانتوم، اگر اندازه گیری ای روی یک

سیستم فیزیکی انجام شود، سیستم آن را در یکی از درجه های حاکم کسین قرار می گیرد، اندازه گیری روی سیستم قرار گرفتن آن در یک درجه است، هم زمان رخ می دهد، اما در اصل

هم وردای عام، هم زانی غنوم خود را از دست می دهد. به همین دلیل باقیه اصول موضعه کوانتوم هم در تعارض است ...

Reference: Tensors, Relativity and Cosmology → LORD

26.2.90

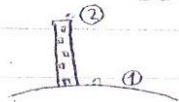
(از اینجا بود، چند نمونه از پیش‌نیازهای (5) نسبت به شما را معرفی می‌کنیم)

Gravitational Red Shift

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi = \frac{GM}{r}$$

$$ds^2 = (1-2\phi) dt^2 - |d\vec{x}|^2$$

بنابراین در حضور یک میدان گرانشی ضعیف (یعنی آن مرتبه اول از این صورت نوشت)، آنگاه در زمان برابر این شکل تقریبی می‌کند



مثلاً دو آتم هیدروژن را در نظر بگیرید، یکی را در ارتفاع سطح زمین و دیگری را بالای یک ساختمان خیلی بلند قرار می‌دهیم.

$$ds_{(1)}^2 = (1-2\phi_1) dt^2 = d\tau_{(1)}^2$$

برای هر کدام از این آتم‌ها، $|d\vec{x}|^2$ صفر است، بنابراین:

$$ds_{(2)}^2 = (1-2\phi_2) dt^2 = d\tau_{(2)}^2$$

هر آتم برای اندازه‌گیری زمان رقیه خودش، از فرکانس موج تابشی از خودش هنگام گذر از سطح انرژی بالاتر به سطح انرژی پایین‌تر استفاده می‌کند.

$$\Rightarrow d\tau_{(1)}^2 = \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 \quad \text{و} \quad d\tau_{(2)}^2 = \left(\frac{1}{\nu_2}\right)^2$$

ν_1 یا ν_2 برابر نیست، چون $\phi_1 \neq \phi_2$ ، در نتیجه $d\tau_{(1)} \neq d\tau_{(2)}$. بنابراین فرکانس موج تابشی از آتم هیدروژن در حضور گرانش تغییر می‌کند.

برای برداشت کردن این اختلاف فرکانس، به این صورت عمل می‌کنیم. (نوعی می‌کنیم که چون گرانش ضعیف است: $\phi \ll 1$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 &= \frac{1-2\phi_1}{1-2\phi_2} = (1-2\phi_1)(1+2\phi_2) \approx 1+2(\phi_2-\phi_1) & \Delta\phi &= \phi_2-\phi_1 = \Delta\phi = \nu_2-\nu_1 \\ \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} &= [1+2\Delta\phi]^{1/2} \approx 1+\Delta\phi & \Rightarrow \frac{\nu_1+\Delta\nu}{\nu_1} &= 1+\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = 1+\Delta\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} = \Delta\phi}$$

بنابراین یکی از مستقیم‌ترین اثرات گرانش این است که فرکانس موج تابشی در حضور گرانش کمتر می‌شود، حتی بازه‌های زمانی بیشتر می‌شوند. زمان کندتر می‌گردد.

باشگاه دانشجویان ایران

این اثر گرانشی را چنان به این صورت آزمون کرد :
اگر موج الکترومغناطیسی که آتم شماره ۲ تابش می کند را در سطح زمین توسط یک سیستم ریزر جیب کنیم و اختلاف انرژی سطح مختلف این سیستم را هم بدانیم ،
(که باید با فرکانس تابشی آتم شماره ۲ متناسب باشد) ، تحت این موضوع تأیید می شود .
در این آزمون باید به دو نکته توجه کرد :

* ۱/ فرکانس موج تابشی آتم ۲ هنگام رسیدن به سطح زمین ، همان فرکانس تابشی در قبل آتم است ، اگر چه به دلیل اثرات گرانشی با فرکانس
آتم شماره ۱ تفاوت دارد .
علت این امر آن است که از اول تابش گرانش را مستقل از زمان (و فقط تابع مکان) در نظر داریم ، در نتیجه معادله حاکم بر موج الکترومغناطیسی
($\nabla^2 F^{(1)} = 0$) نسبت به زمان حفظ است . بنابراین فرکانس موج الکترومغناطیسی در این مسیر تغییری نمی کند .

* ۱/ ضیف جیبی یک سیستم به این شکل است که در فرکانس های خاصی Peak می زند ، اگر موجی با فرکانس غیر از آن فرکانس (λ) به آن تابانیم ، جیب نمی خورد .
علاوه بر این Peak یک پهنای دارد و Sharp نیست . یکبار علت های این پهنای این است که آتم جیب گسترده بسازد و به واسطه
حرکتش در حقیقت به دلیل اثر دوپلر فرکانس موج تابشی اش تغییر می کند ، بنابراین Peak فرکانس یک پهنای پیدا می کند . Doppler Broadening

بنابراین سیستم جیب گسترده را باید طوری حرکت دهیم که Peak فرکانسش با فرکانس موج رسیدن از آتم ۲ روی هم نیفتد . حال اگر این سیستم جیب
گسترده را همان آتم شماره ۱ قرار دهیم ، با این توصیف باید شرایط را هم بکنیم که اثر red shift گرانشی و red shift (دوایی) با هم تداخل نداشته .

اثر گذر شدن ساعت های در حضور میدان گرانشی وارد زندگی روزمره هم شده است . برای مثال در سیستم "GPS" ، این اثر هم در
نرم افزار دستگاه ما و هم در ماهواره های که با دستگاه در ارتباطند ، منظور شده است ، تا هنگام استفاده از این سیستم ، زمان اعلام
شده صحیح باشد . (GPS هم موقعیت را گزارش می کند و هم زمان را) .

باشگاه دانشجویان ایران

Schwarzschild Solution (S.S.)

2- حل معادلات میدان (حل خلا)

فرض می‌کنیم که فضای خالی است، یعنی هیچ ماده‌ای در آن وجود ندارد. بنابراین برای بررسی آن، باید حتماً برای بررسی آن، فرض می‌کنیم که هیچ ماده‌ای در آن وجود ندارد. این فرض را می‌توانیم به صورت ریاضی به این شکل بیان کنیم: $T_{\mu\nu} = 0$. در این حالت، معادلات میدان به صورت زیر در می‌آید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

برای حل خلا: $R_{\mu\nu} = 0$ را در نظر می‌گیریم. چون $R_{\mu\nu}$ یک تانسور متقارن است، پس ضرایب δ^2 و $d\varphi^2$ باید به هم برابر باشند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم:

$$R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$$

در اینجا باید به این نکته توجه کنیم که ds^2 و dr^2 باید به هم برابر باشند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم:

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

در اینجا A و B تابعی از r هستند. چون ds^2 باید به هم برابر باشد، پس می‌توانیم فرض کنیم:

$$A(r) = B(r)$$

چون ds^2 باید به هم برابر باشد، پس می‌توانیم فرض کنیم:

$$A(r) = B(r)$$

در اینجا A و B تابعی از r هستند. چون ds^2 باید به هم برابر باشد، پس می‌توانیم فرض کنیم:

$$A(r) = B(r)$$

در اینجا A و B تابعی از r هستند. چون ds^2 باید به هم برابر باشد، پس می‌توانیم فرض کنیم:

$$A(r) = B(r)$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

از روی این متریک
فراپ جسم را به دست می آوریم:

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} \nu' \Rightarrow \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \nu' e^{\nu-\lambda}, \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \lambda', \Gamma_{22}^1 = -e^{-\lambda} r, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \Rightarrow \Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \sin \theta \Rightarrow \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \Gamma_{43}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

بقیه ذرات هم صفرند
پس از روی این متریک تانسور ریچی را به دست می آوریم و تکلیف مسئله را با این صفر قرار می دهیم. ν و λ در این معادلات صحت می کنند:

$$\checkmark \lambda' + \nu' = 0 \Rightarrow \lambda + \nu = \text{const.} \Rightarrow \lambda = -\nu$$

$$\checkmark \nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} = 0 \Rightarrow (re^{\nu})'' = 0 \Rightarrow (re^{\nu})' = \text{const.}$$

$$\checkmark 1 - (e^{-\lambda} r)' + e^{-\lambda} r \left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) = 0 \Rightarrow (re^{\nu})' = 1 \Rightarrow \int d(re^{\nu}) = \int dr' \Rightarrow e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r}$$

$r_s \rightarrow \text{Schwarzschild radius}$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

بنابراین متریک مشخص می شود.
همان طور که مشخص است، در حد $r \rightarrow \infty$ ، متریک به متریک عادی تبدیل می شود.
برای این مسئله، r_s را از رابطه مری به دست می آوریم. در تقاطع این دو گرانش همواره در سیدر خنثی شود (اصولاً نمی شود)، g_{00} را با

$$\phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow \boxed{r_s = 2GM}$$

$1 + 2\phi$ برابر باشد

حال متوجه کنید اصلاً از ابتدا جرم را در مبدأ محضات قرار دهیم. یعنی این کار این است که متریک مری را اعمال کنیم و به r_s به عنوان یک ثابت

استرال می در جواب مسئله نگاه کنیم. در این صورت باز هم معادله اینشتین همین جواب را خواهد داشت: حل خلاصه یا تقارن مری.

باشگاه دانشجویان ایران

این مسئله مشابه حل خلافت معادلات ماکسول است که نجره جواب معیّن نیست. در اینجا هم (فرکانس موج تخت) فرکانس یک مقدار پارامتری بود که از حل معادله بدست می آید.

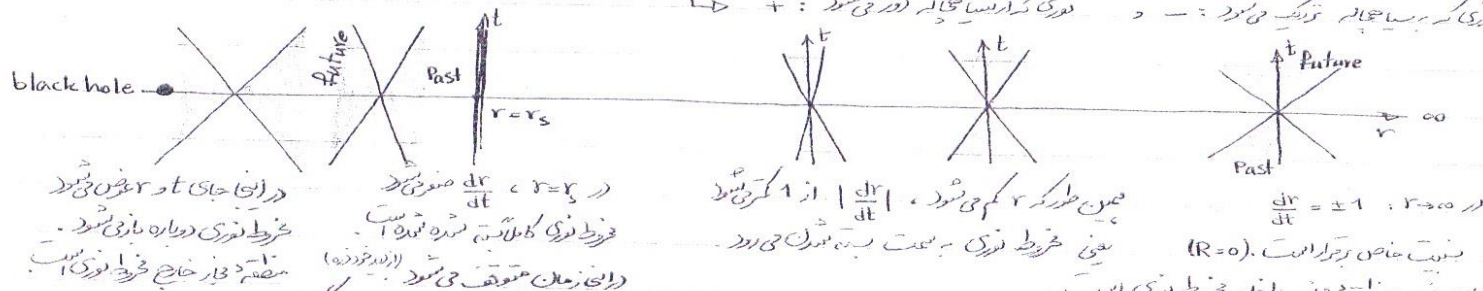
به چنین موجی که بدون Source وجود دارد، سیاهچاله (black hole) می گویند.

* محل $r=r_s$ ، نقطه ای است، چون در آن فاصله dt^2 منفی و فاصله dr^2 مثبت می شود، و برای $r < r_s$ ، فاصله dt^2 منفی و فاصله dr^2 مثبت می شود!
بر این محل (r_s) افق حادثه (Event Horizon) می گویند.
[مثلاً برای خورشید، r_s در حدود 3 کیلومتر است. یعنی خورشید با شعاع 700 هزار کیلومتر، شعاع سیاهچاله اش را پوشانده است.]

بنابراین همین طور که r کوچک می شود، از یک جایی به بعد، جایی زمان و مکان عوض می شود. در $r < r_s$ ، t از جنس طول و r از جنس زمان است. خطوط نوری را در فواصل مختلف از یک سیاهچاله، بزرگی می گویند: $(\theta$ و φ ثابت می گویند، و حرکت یک اشعه نور که در راستای شعاعی حرکت می کند را در نظر می گیریم).

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm (1 - \frac{r_s}{r})$$

برای نور: $ds^2 = 0$
نوری که به سیاهچاله نزدیک می شود: -
نوری که از سیاهچاله دور می شود: +



برای یک ذره (نه Tachyon) منطقه بیرون داخل خطوط نوری است که به بیرون می شود. این ناحیه نوع سکون می شود و در آن زمان می گذرد. (از دینامیک نور)
بنابراین برای ذرات که از جنس ماده هستند و به سمت سیاهچاله می آیند، زمان به سمت بیانات نام است تا داخل سیاهچاله سقوط کند.

باشگاه دانشجویان ایران

3- بررسی حرکت ذره آزمون در حضور میدان گرانشی حل خلاصه :

31.2.90

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

برای حل جزوه، متریک به این صورت به دست آمد:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

معادله حرکت ذره در حضور میدان گرانشی، معادله ژئودزیک ذره است:

$$x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$$

متریک محاسبه را از روی متریک به دست می آوریم در معادله می اندازیم. (متریک محاسبه در غیر این صورت از این متریک به دست می آوریم.)

$$v = \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)$$

نتیجه به این صورت خواهد شد:

$$\textcircled{1} \quad \ddot{t} + v' \dot{r} \dot{t} = 0$$

$$v' = \frac{r_s/r^2}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

$$\textcircled{2} \quad \ddot{r} - \frac{1}{2} v' \dot{r}^2 + \frac{1}{2} v' e^{2v} \dot{t}^2 - r e^v \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0$$

(dot : مشتق نسبت به τ)

یک معادله برای θ هم به دست می آید که باطل کن، به $\theta = \text{const}$ می ریزیم. برای ساده شدن نحوه معادلات قرار می دهیم $\theta = \frac{\pi}{2}$ یعنی حرکت ذره در صفحه $(x-y)$ می ریزیم. (که از کجایت مسئله کم نمی کند). این جنبه حرکت، مشابه مکانیک نیوتنی است.

$$\textcircled{1} \Rightarrow \ddot{t} + \frac{dv}{dr} \dot{r} \dot{t} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} = - \frac{dv}{dr} \Rightarrow \int \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} d\tau = - \int dv \Rightarrow \dot{t} e^v = \text{const.} \equiv k$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = - \frac{2\dot{r}}{r} \Rightarrow \ln \dot{\varphi} = -2 \ln r + c \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \equiv h$$

مشابه مکانیک نیوتنی، این معادله در واقع با یک گشتاور زاویه ای را بیان می کند. h هم گشتاور زاویه ای در واحد کم است.

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

از مشابه حالت نیوتنی، غن تران r را به حسب t به دست آورد، بلکه در عوض معادله مسیر r را به حسب φ - را به دست می آوریم. هم چنین مستقیماً از معادله $\textcircled{2}$ استفاده نمی کنیم، از اشتغال آوردن این معادله (به سبب معادلات $\textcircled{1}$ و $\textcircled{3}$) استفاده می کنیم که همان رابطه ds^2 است.

s.a.m

باشگاه دانشجویان ایران

$$1 = e^{\nu} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - e^{-\nu} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right) \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{معادله برای } d\tau = ds \quad \text{تقسیم کنیم}$$

$$\Rightarrow e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1 \quad \text{مشق کردن از این معادله نسبت به } \tau \text{ و استفاده از 38 و 1، 2 را تغییر می دهد}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 - e^{2\nu} \dot{t}^2 + e^{\nu} r^2 \dot{\phi}^2 = -e^{\nu} \quad \frac{e^{\nu} \dot{t} = k}{e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r}} \rightarrow \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{r_s}{r} = k^2 - 1 + r_s r \dot{\phi}^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 = \left(\frac{r_s}{r} - 1 + k^2 \right) \frac{r^4}{h^2} + r_s r \quad \left(\dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \right) \quad \text{معادله برای } \dot{\phi} \text{ تقسیم کنیم}$$

$$\left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{u^2} = (r_s u + k^2 - 1) \frac{1}{h^2 u^4} + \frac{r_s}{u} \quad \leftarrow dr = -\frac{du}{u^2} \quad \leftarrow u \equiv \frac{1}{r} \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{1}{h^2} (r_s u + k^2 - 1) + r_s u^3$$

$$2u'u'' + 2uu' = \frac{1}{h^2} (r_s u') + 3r_s u^2 u' \Rightarrow \boxed{u'' + u = \frac{r_s}{2h^2} + \frac{3}{2} r_s u^2} \quad \text{از طرفین معادله نسبت به } \phi \text{ مشتق می کنیم}$$

این معادله با مشابه نیروی کشش قطره در جمله آخر تفاوت دارد. در مکانیک کلاسیک معادله به صورت $u'' + u = \frac{\alpha}{u^2} F(u)$ است.

که برای نیروی گرانشی: $F \propto \frac{1}{r^2} = u^2 \Rightarrow F \propto \frac{1}{u^2} = u^2$ طرف راست معادله قطعه ایی جمله ثابت را دارد، این جمله ثابت (صفاً صحن $\frac{r_s}{2h^2}$) است:

مکانیک کلاسیک: $\alpha = \frac{-1}{mh^2}$ و $F = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \frac{\alpha}{u^2} F(u) = \frac{GmM}{mh^2} = \frac{2GM}{2h^2} = \frac{r_s}{2h^2}$

بنابراین جمله آخر که با $\frac{1}{2}$ متناسب است، انحراف ناشی از یک نیروی متناسب با $\frac{1}{r^4}$ است که به شکل توجع نیروی گرانشی نیتری دارد معادله شده.

جوابهای معادله نیتری به شکل $\frac{1}{r} = A \cos(\phi - \phi_0) + B$ هستند، که بسته به انتخاب ثابت (مربوطه اولیه) می تواند مقاطع مخروطی باشند. (مثلاً بیضی)

برای حل معادله به روش آمده (نسبت عام)، از روش iteration استفاده می کنیم.

باشگاه دانشجویان ایران

(استفاد از : Classical Dynamics → Marion)

$$u = u_0 + A \cos \varphi$$

$$L_0 = \frac{r_s}{2h^2}$$

به این صورت : در جواب جمله تصحیح ، معادله به معادله تیرگی تبدیل می شود ← جواب مرتبه صفر :
(مبدأ را طوری انتخاب می کنیم که $\varphi_0 = 0$)

برای بدست آوردن جواب مرتبه اول ($u^{(1)}$) ، جواب مرتبه صفر را در طرف راست معادله ($u'' + u = \frac{r_s}{2h^2} + \frac{3r_s}{2} u^2$) جایگزین می کنیم :

$$\Rightarrow u^{(1)} + u_{(1)} = \frac{r_s}{2h^2} + \frac{3r_s}{2} (u_0^2 + A^2 \cos^2 \varphi + 2Au_0 \cos \varphi) = \frac{r_s}{2h^2} + \frac{3r_s}{2} (u_0^2 + 2Au_0 \cos \varphi + \frac{A^2}{2}(1 + \cos 2\varphi))$$

جواب مرتبه اول را به این شکل می نویسیم : $u_{(1)} = u_{(0)} + u_p$ ، که u_p را این معادله بدست می آید :

$$u_p + u_p = \frac{3r_s}{2} (u_0^2 + 2Au_0 \cos \varphi + \frac{A^2}{2}(1 + \cos 2\varphi))$$

$$u_p = \frac{3r_s}{2} [u_0^2 + \frac{1}{2} A^2 + u_0 A \varphi \sin \varphi - \frac{A^2}{6} \cos 2\varphi]$$

u_p به این شکل مرتبه اول می آید :
(می توانیم اطمینان کنیم و بررسی در دست است !)

$$u \approx u_{(0)} + u_p$$

اگر iteration را همین جا متوقف کنیم و را جواب مرتبه اول می داریم ، خواهیم داشت :

$$= [u_0 + A \cos \varphi + \frac{3r_s}{2} u_0 A \varphi \sin \varphi] + \frac{3r_s}{2} [u_0^2 + \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos 2\varphi]$$

علت جدا کردن جواب به این صورت این است ، اگر به بزرگ رقم نگاه کنیم ، از یک جمله ثابت + یک جمله (احتمالی کوچک و بزرگ) تشکیل شده است .

بنابراین در مقایسه زمان کمی بزرگ ، هیچ کدام از این دو جمله به طور میانگین زمانی بر فاصله مدار حرکت ندارند . لذا در بزرگت اول ، جمله شامل φ ، به ازای φ

$$u \approx u_0 + A \cos \varphi + \frac{3r_s}{2} u_0 A \varphi \sin \varphi$$

کمی بزرگ ، نقش به سزایی دارد . بنابراین فقط قسمت اول جواب را در نظر می گیریم :

$$= u_0 [1 + \frac{A}{u_0} \cos \varphi + \frac{3r_s}{2} A \varphi \sin \varphi] = u_0 [1 + \frac{A}{u_0} (\cos \varphi + \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \sin \varphi)]$$

باشگاه دانشجویان ایران

این عبارت را می توانیم بنویسیم:

$$\cos(\varphi - \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi) = \cos \varphi \cos(\frac{3r_s}{2} u_0 \varphi) + \sin \varphi \sin(\frac{3r_s}{2} u_0 \varphi)$$

$$\frac{3r_s}{2} u_0 = \frac{3r_s^2}{4h^2} = \frac{3G^2 M^2}{h^2} \Rightarrow \text{این مقدار برای سیارات خفیه کوچک است} \Rightarrow \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \approx \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \\ \cos \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \approx 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\varphi - \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi\right) \approx \cos\varphi + \frac{3r_s}{2} u_0 \varphi \sin\varphi \quad 1 - \frac{3r_s}{2} u_0 = 1 - \frac{3G^2 M^2}{h^2} \equiv \delta$$

بنابر همبستگی در حضور میدان گرانشی یک Source نوری: $u = u_0 + A \cos \delta \varphi$ $\rightarrow$

(در صورت چرخش، حقیقتن (یا اوج) یعنی مکان قطعی نمی گردد، بلکه معادلی حل می افتد. برای اینکه فهم (در صورت چرخش) حل می افتد، باید از دوران $\cos$

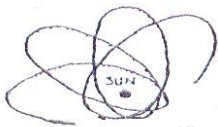
برابر با 2π در نظر بگیریم. (یا صفر چون $\sin(0)$)، یعنی فرض کردیم زاویه چرخش را از نقطه حقیقتن آغاز می کنند. ($\varphi = 0$) ، $u = u_0 + A$ ، r - ضمیمه ۱ -

($2\pi = \delta\varphi$ ، r (رابطه میان معادله حرکت))

$$\delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3r_s u_0}{2}} = 2\pi \left(1 + \frac{3r_s u_0}{2}\right) = 2\pi + \underbrace{3\pi r_s u_0}$$

$$\Delta = \frac{6\pi G_1 M^2}{h^2} = \frac{6\pi G_1 M}{a(1-e^2)}$$

Semimajor axis eccentricity



بنا بر این با وجود تعویق نسبی عارف، در هر دو نسخه حدیث منقول از همان مقدار علم و فساد است.

* مسائله فیزیکی
 در این که یک کتله در حرکت بسیار است به دور خورشید را بپرسی می گویند ، دریا قند که مدار حرکت آنها یک بعضی تعمیم یافته است .
 زمانی که یک کتله در حرکت بسیار است به دور خورشید را بپرسی می گویند ، دریا قند که مدار حرکت آنها یک بعضی تعمیم یافته است .
 اما آن زمان با تقویت دین (چون اندازه گیری و دقیق نمودن) می توانستند بگویند که مدار به شکل بعضی است . اندازه گیری های دقیق و پرسی هم این تعمیم را
 نشان می داد . مثلاً در هر قرن ، حوض عطار 4000 ثانیه دیر می افتد . قبل از نسبت عام ، با در نظر گرفتن تاثیر سیارات دیگر منظومه شمسی
 به این 4000 ثانیه دیر در هر قرن توجه شده بود ، الا 43 ثانیه دیر ! که این مقدار دقیقاً همین مقداری است که نسبت عام پیش بینی می کند ،
 و ناشی از تاثیرات همدی است .

4- انحراف نور توسط یک میدان گرانشی: (یک بار دیگر گردش بر نور $\rightarrow$ radar echo)

ملکی برای رفتار یک پرتو نور در حضور میدان گرانشی، ابتدا این سوال مطرح می شود که معادله حاکم بر حرکت پرتو چیست. معادله ژئودزیک که رفتار ذرات جرم دار را توصیف می کند، با این شکل فعلی $(0 = \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dX^\alpha}{d\tau} \frac{dX^\beta}{d\tau})$ نمی تواند رفتار موجود بدون جرمی مثل نور را توصیف کند، چون برای نور، $d\tau$ صفر است و نمی توان حرکت آن را با پارامتر τ بر حسب τ بیان کرد. بنابراین برای label دادن حرکت آن از یک پارامتر دیگر مثل λ استفاده می کنیم که $d\lambda$ صفر نباشد. به معنی فیزیکی λ کاری نداریم، صرفاً یک پارامتر مفید است. اگر به معادله ژئودزیک برای ذرات نگاه کنیم و فرض کنیم که می تواند بدون نوشتن τ هم بیان شود: $\frac{d^2 X^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \frac{dX^\beta}{d\lambda} = 0$. برای ذرات جرم دار، τ (زمان ویژه) پارامتر خوبی بود برای توصیف حرکت، چون هم چارچوب نسبت به آن اتفاق نظر دارند، و معنای فیزیکی آن (زمانی که خود زده انداز می گیرد) ملموس است. اما برای پرتو نور و سایر موجودات بدون جرم، τ مناسب نیست، لذا معادله ژئودزیک همچنان برقرار است، و اگر فاعلی باشیم از این فرم در بیاوریم، می توانیم بر حسب λ بنویسیم: $\frac{d^2 X^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dX^\alpha}{d\lambda} \frac{dX^\beta}{d\lambda} = 0$. متوجه می شویم همان حرکت قبلی است. (چون حرکت به زده از خود زده یکی درازا). بنابراین معادلات دینامیک که برای زده به دست آمده بودیم برای نور هم صادق است، با این تفاوت که dot به معنای مشتق گیری نسبت به λ است. [نکته: جالب اینجاست که برای ذرات جرم دار هم در نهایت

باشگاه دانشجویان ایران

τ به تبع فضات (سیاهه global) صحت می‌شود، و در مورد مدار کرون معادله حرکت ربات، حتی با هم وارد نمی‌شود، بلکه فقط می‌توان معادله مسیر

r و φ را می‌سبیم کرد. بنابراین جواب مدار کرون ما تحت τ و با هر پارامتری که در این معادلات می‌شود باشیم؟! [

$$ds^2 = d\tau^2 = e^\nu dt^2 - e^{-\nu} dr^2 - r^2 d\varphi^2 = 0 \quad \text{بنابراین روابط} \quad e^\nu \dot{t} = k \quad r^2 \dot{\varphi} = h \quad \text{مم‌چنان می‌تواند، و همین طور این رابطه}$$

در این طرفین این رابطه را به $d\lambda^2$ تقسیم کرد و رابطه مشابهی با رابطه در سطح به دست آورد، با این تفاوت که طرف راست معادله به جای 1،

$$\frac{d\tau^2}{d\lambda^2} = e^\nu \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0 \quad \text{نشیسته است}$$

$$u'' + u = \frac{3}{2} r_s u^2 \quad \text{با یکدگر می‌سبایت صحت، به این معادله می‌رسیم}$$

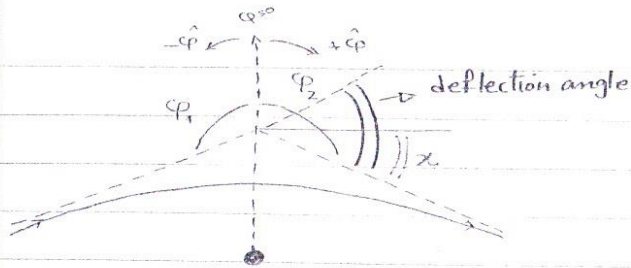
اگر طرف راست صفر بود، به جواب $u = A \cos(\varphi + \varphi_0)$ می‌رسیم که بیانگر خط راست بود. اگر این جواب را به صورت

$$u = A \cos \varphi + \epsilon \quad \text{در نظر بگیریم در معادله جایگزینی کنیم، با صرف نظر کردن از} \quad r_s \epsilon^2 \quad \text{و} \quad \epsilon^2 \quad \text{(مجلات کوچک از مرتبه دوم پارامتری کوچک)، خواهیم داشت}$$

$$\frac{d^2 \epsilon}{d\varphi^2} = -\epsilon + \frac{3r_s}{4} A^2 (1 + \cos 2\varphi) \quad \epsilon = a + b \cos 2\varphi \quad \epsilon = \frac{3r_s}{4} A^2 \left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{3}\right) \Rightarrow u = A \cos \varphi - \frac{r_s}{2} A^2 \cos^2 \varphi + r_s A^2$$

ثابت A را هم به صورت تقریبی می‌توان به دست آورد: با صرف نظر از جهات متناهی r_s و با در نظر گرفتن اینکه بر تانژن در $\varphi = 0$ به ترتیب کرون

$$u_0 = \frac{1}{r_0} = A \cos 0 \Rightarrow A = \frac{1}{r_0} \quad \text{فاصله} \quad (r_0) \quad \text{از خنجر دگزی گراشتن می‌شود، داریم}$$



برای بدست آوردن زاویه انحراف نور، باید زاویه بین جاذب های مسیر

حرکت را قیاس کنیم در $r \rightarrow \infty$: $u \rightarrow 0$

$$u=0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{r_0}{r_s} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2r_s^2}{r_0^2}} \right) \Rightarrow \text{که ضرایب - را حذف می کنیم}$$

$$r_s \ll r_0 \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{r_s}{r_0} = \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$$

$$\varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad \varphi_2 = +\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = -\sin x \quad x \ll 1 \Rightarrow \cos \varphi = -x \Rightarrow x = \frac{r_s}{r_0}$$

$$\Rightarrow \text{the angle of deflection : } \theta = \frac{2r_s}{r_0} = \frac{4GM}{r_0 c^2}$$

$$r_{0 \min} = r_{\text{source}} \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{2r_s}{r_{\text{source}}}$$

* یکی از نتایج انحراف نور توسط میدان گرانشی، اثر Gravitational Lensing است، که امروزه به طور فزاینده ای در آسمان

مشاهده می شود. اگر گالکسی ای پشت گالکسی دیگری قرار گرفته باشد، از روی زمین گالکسی پشتی به صورت یک حلقه در می آید؛ (در صورتی



که اگر نور به دلیل میدان گرانشی خم نمی شد، اصولاً نباید آن را می دیدیم.

* انحراف نور توسط میدان گرانشی، تأثیر توهم در موضوع است. 11. رفتار گرانش این موج الکترومغناطیس هم gravitate می کند،

(بسیار با میدان گرانشی در هم گشتن دارد) و 12. هیچ خم گرانشی توسط محاسبات نسبیت عام. انحراف نور را در انحراف نور در نظر نمی گیرند.

2.3.90

5 - سقوط آزاد ذره به درون یک جسم گراشی (Falling Bodies)

در این قسمت به صورت دقیق تر رفتار یک جسم افتان در حضور یک جسم گراشی (یا سیاحتی) را بررسی می کنیم. حرکت (سطح) و حرکت شوارزشی و

معادله حاکم بر حرکت ذره معادله زیر است، بنابراین مسئله حرکت سیارات است. تفاوت که هم θ و هم φ ثابت است: $\theta = \frac{\pi}{2}$
 $\varphi = 0$

① $e^{\nu} \dot{t} = k$

② $\ddot{r} + \frac{1}{2} \nu' (e^{2\nu} \dot{t}^2 - \dot{r}^2) = 0$

③ $e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{-\nu} \dot{r}^2 = 1$ (از رابطه ds^2 به دست می آید)

$\Rightarrow \dot{r}^2 = k^2 - e^{\nu}$ *

که معادله ③ انتگرال اول معادله ② است.

(معادله نهایی، می توان اطلاعات مفیدی استخراج کرد. مثلاً تقریب coordinate ذره (در اینجا: r) به تقریب زمان. $\ominus \Rightarrow$ سرعت $\oplus \Rightarrow$ پریاب
 $\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \pm \frac{e^{\nu}}{k} \sqrt{k^2 - e^{\nu}}$
اینجا عبارت، معرف سرعت ذره نیست، و تقریب می توان از تقریب ذره را بیان می کند.

برای نوشتن عبارت سرعت، باید تقریب مکان نسبت به تقریب زمان را در نظر بگیریم. بازه فضایی و زمانی، با توجه به حرکت، از رابطه ds^2 بدست

می آید: $ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{-\nu} dr^2 = r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \begin{cases} dt = 0 \Rightarrow ds^2 = -e^{-\nu} dr^2 = -dl^2 \\ dr = 0 \Rightarrow ds^2 = e^{\nu} dt^2 = dT^2 \end{cases}$

(چون حرکت η نیست، rate گذر زمان dt^2 نیست، بلکه $e^{\nu} dt^2$ است. همین طور در مورد بازه های فضایی، $e^{-\nu} dr^2$ حرف بازه های مکان در این مسئله است.) dl و dT کمیت قابل اندازه گیری اند، نه dr و dt .

باشگاه دانشجویان ایران

بنابراین با داشتن ld و dT ، سرعت این طور تعریف می‌شود:

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = e^{-2\nu} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{e^\nu}{k^2} = 1 - \frac{1 - \frac{r_3}{r}}{k^2}$$

با توجه به این رابطه، در $r=r_3$ ، $v=1$. بنابراین وقتی زو به افق حلقه می‌رسد، سرعتش برابر با سرعت نور خواهد بود! (در $r \rightarrow \infty$ ، $v \rightarrow 0$)

سرعت برابر است با $v^2 = 1 - \frac{1}{k^2}$ ، که در واقع شرایط اولیه (مقدار k)، سرعت اولیه را تعیین می‌کند. اگر از اول قرار دهیم $k=1$ ، یعنی زو در نهایت

رک می‌ماند و حلقه را در r_3 سرعتش 1 می‌شود. در حالت کلی اگر در $t=0$ ، زو در محل r_0 با سرعت اولیه v_0 قرار داشته باشد:

$$v_0^2 = \frac{k^2 + \frac{r_3}{r_0} - 1}{k^2} \Rightarrow k^2 = \frac{1 - \frac{r_3}{r_0}}{1 - v_0^2} \Rightarrow \boxed{v^2 = 1 - \frac{1 - \frac{r_3}{r}}{1 - \frac{r_3}{r_0}} (1 - v_0^2)}$$

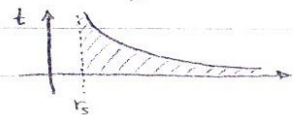
اگر $v_0=1$ (یک حلقه را می‌کنیم)، شماره $v=1$ خواهد بود (همیشه زو حلقه را باقی می‌ماند). اگر یک زو هم دارا با $v_0 < 1$ رک کنیم،

سرعتش بیشتر و بیشتر می‌شود تا بزرگ‌تر از 1 میل کند، اما هیچ‌گاه از r_3 عبور نمی‌کند! علتش این است که در این حال که

در $r=r_3$ ، $v=1$ ، در آنجا زمان هم متوقف می‌شود ($dT=0$)، بنابراین هیچ‌گاه از r_3 رد نمی‌شود. از دید ریاضی هم می‌توان این موضوع

را بررسی کرد: زمان لازم برای رسیدن به r_3 از دید ناظر global (یعنی t) از رابطه $\frac{dr}{dt}$ به دست می‌آید: برای سقوط زو داریم،

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_3}{r} \right) \left(1 - \frac{1 - \frac{r_3}{r}}{k^2} \right)^{1/2} \Rightarrow t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_3}{r} \right) \left(1 - \frac{1 - \frac{r_3}{r}}{k^2} \right)^{1/2}} \Rightarrow \text{زمان لازم برای رسیدن از } r_0 \text{ به } r_3 \text{ (از دید ناظر خارجی)}$$



همان طور که می‌بینید در $r=r_3$ ، انتگرال دگرا می‌شود. (سطح زیرینش بی‌نهایت می‌شود).

باشگاه دانشجویان ایران

در یک زمان لازم برای رسیدن زره از دریا ناطر global که در دور است بسیار است. یعنی زره هیچگاه به r_s نمی‌رسد که (ملاحظه خواهد کرد که اگر r_s باشد)

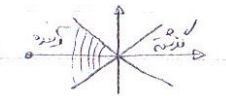
پس هیچ وقت زره داخل سیاهچاله سقوط نمی‌کند.

اگر همین زمان لازم برای رسیدن به r_s را از دریا خود زره (یعنی τ) حساب کنیم، نتیجه به این صورت خواهد رسید:

$$\dot{r}^2 = k^2 - e^v \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = -k \left(1 - \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{k^2} \right)^{1/2} \Rightarrow \tau = \int_r^{r_0} \frac{dr}{k \left(1 - \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{k^2} \right)^{1/2}} \rightarrow \text{از دریا خود زره}$$

این انتگرال برای $r = r_s$ یک مقدار محدود خواهد بود، یعنی از دریا خود زره، زمان محدودی طول می‌کشد تا به افق رویداد برسد!

برای توضیح این موضوع به ظاهر متناقض، باید به رفتار خطوط نوری در r های مختلف توجه کنیم. بدین که در نواحی $r < r_s$ ، جای شکل و زمان

عوض می‌شود. در آن نواحی، r آینده یک زره (مثلاً فوکن) به سمت داخل سیاهچاله است: 

قرار دارد، هیچ وقت نمی‌تواند بیرون بیاید. بنابراین اگر زره‌ای بتواند از r_s عبور کند (که نمی‌تواند بیرون بیاید)، (در سیاهچاله r می‌کشد که همان کاری که فوکن می‌کند)

باشد - مثلاً Kerr black hole که همان گسسته‌ای دارد - این اتفاق نمی‌افتد. نکته اینجاست که از دریا ناطر بیرون، زمان به نهایت لازم

است تا زره به r_s برسد، و از دریا این ناطر در $r = r_s$ ، زمان متوقف نمی‌شود ($dt \neq 0$). اما از دریا ناطر همراه زره، زمان محدودی برای

رسیدن به r_s لازم است، اما به محض اینکه به r_s برسد، زمان برای خودش متوقف می‌شود ($d\tau = dT = 0$). بنابراین رسیدن معنی خودش را

باشگاه دانشجویان ایران

از دست می دهد. در نتیجه هیچ کدام از دو دستگاه تخصصات ، زود به این معنی که در زمین خودرو به ۵۰ درصد از آن عبور کند و هم چنان طول ببرد ،

از نوع حادثه عبور نخواهد کرد. پس متوجهی که به نظر می رسد وجود دارد ، وجود ندارد. (بالتبع به معنای بودن و نبودن).

عین استدلال را می توان درباره یک ستاره در حال رانش (به دلیل اتمام سوخت هسته ای) به کار برد. از دید ناظری که در دورت استاره ، مدت

زمان ناظر برای لام است تا این ستاره کامل به سیاه چاله تبدیل شود ، یعنی هیچ نوری از اتم های آن به ناظر نرسد (کامل سیاه شود). تا زمانی که

اتم های ستاره که تابش می کنند ، بیرون شعاع شوارزشیلد باشند ، می توان ستاره را دید. ستاره در حال رانش به سمت سیاه چاله شدن میل می کند ،

اما هیچ گاه سیاه چاله نمی شود. (به معنای ریاضی). البته هم چنان ممکن است که سیاه چاله تبدیل شود ، چون همین طور که شعاع ستاره به شعاع

شوارزشیلد میل می کند ، فکاس نور تابشی از ستاره کمتر می شود ، در نتیجه انرژی فوتونی که دریافت می شود (f) به صفر میل می کند (اما هیچ وقت صفر نمی شود).

و از یک حدی به بعد ، ستاره قابل رویت نیست. بنابراین ستاره در حال رانش را نمی توان به سیاه چاله تبدیل کرد ، اما قطعاً می توان

موجوداتی داشت که از ابتدا شعاع کمتر از ۵ داشته باشند. پس احتمال انتظار داریم در آن نیازی مثل اکثر آن که شعاع صفر دارند ، سیاه چاله باشند!

اما مکانیک کوانتومی چنین اجازه ای نمی دهد. مثلاً از درکوانتم مکانیک ، یک ذره می تواند به ذره تبدیل شود ، بعد دوباره به خودش برگردد.

در آن توالی شده ، مجاری هسته و قوانین حاکم بر آنها مشابه در آن حقیقت نیست ، مثلاً می تواند سرعت بیشتر از

باشگاه دانشجویان ایران

سرعت نور داشته باشند. اگر این اتفاق در نزدیکی Δ افتد، زده ای که برعکس بیشتر از 1 است می تواند از Δ عبور کند و به بیرون سیاهچاله برسد.

در سیاهچاله می تواند تابش کند: Hawking Radiation. گرانش مکانیک این اجازه را می دهد. همین اتفاق برای ذرات بسیاری می افتد: فیلد

یاله ای از ذرات مجازی حول نقطه (تابش معکوس) را پخش می دهد. برای ذرات یک شعاع نوری که در حال عبور از سیاهچاله باشد P

(چون شعاع نوری از شعاع نور تشکیل می شود). (تا بازم علی الاصول منحرف می تواند شود و در شعاعش از Δ عبور کند و در بیرون)

از اول یک سیاهچاله باشد.

* همه این حرف ها درباره سیاهچاله صورت پذیرفته است. در مورد سیاهچاله های واقعی که در حال چرخش به دور خود هستند، تقارن استوانه ای وجود

دارد و این ماجرا پیچیده تر است.

* اگر زده ای به اندازه کافی سرعت اولیه داشته باشد (در جهت Δ) در سیاهچاله سقوط نمی کند. مثلاً مقاومت خورشید که در باریک کوهستان از تیری قرار دارد

از خطر سقوط در سیاهچاله مرکز کوهستان در امان است!

* (درست است)، چون مقادیر Δ و Δ یکسان نیست. (البته سرعت از آن بزرگتر است و در Δ)

کتابخانه

7.3.90

تاکنون درباره حل خلا معادلات اینشتین که به حل معادلات اینشتین معروف است بحث کردیم. یک حل دیگر معادلات اینشتین به این صورت است که کل جهان را به شکل یک نقطه در نظر بگیریم (اگر فرض کنیم که کل جهان را به شکل یک نقطه در نظر بگیریم).
فرض کنیم که جسم داری به مدار می‌گردد در آن جسم دارد. با وجود این برآیند توزیع انرژی نیست، برای حل معادلات فرض کنیم در معادلاتی بزرگ، توزیع انرژی نیست به گونه‌ای است که جهان یک نقطه و جسم دیگر به نظر می‌رسد. این فرض با تعریف به خوبی می‌چسبد.
فرض داریم که این است که همه اجرام (کهکشانها، خوشه‌های کهکشانی و...) در حال سقوط آزاد هستند، و بنابراین روی دایره حرکت می‌کنند.
برای توصیف این جهان از دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم به نام comoving frame (چارچوب همراه حرکت). به هر نقطه یک چارچوب در حال سقوط آزاد نسبت می‌دهیم، از کنار هم گذاشتن این چارچوب‌ها، دستگاه مختصاتی می‌سازیم که در آن همه اجرام ساکن هستند. (وقتی در چارچوب local خوششان به آنها نگاه می‌کنیم). در واقع این چارچوب این خاصیت را دارد که در هر نقطه همراه آن سقوط آزاد می‌کنند.
به دلیل وجود این خاصیت، زمان چارچوب comoving، همان زمان ویژه است. (هم این زمان، زمان کیهانی (cosmic time) است).

S.A.M

باشگاه دانشجویان ایران

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2]$$

با این فرضیات، ds^2 را این چارچوب به این فرم می‌گیریم:

فرضیهٔ زمان، 1 است، چون زمان مسطح است. چون فضا را همگن و همسانگرد (همگنی و همگنی) فرض می‌کنیم، f فقط می‌تواند تابعی از اندازه r باشد.

(در جهت r) و در حالت کلی یک فرضیه a^2 تابع t هم می‌تواند در قسمت فضایی ضرب شود.

روشن (حق) به این است که در فضا همگن و همسانگرد است، تا حدودی به خطای r بگشاید، فقط می‌تواند تابع t باشد.

بنابراین، $R_{\mu\nu}$ را به یک فرم از $g_{\mu\nu}$ تأمین کند (چون هیچ بار یا تأثیر دیگری در فضا نداریم). پس: $R_{\mu\nu} = a(t) g_{\mu\nu}$

به همین ترتیب تأثیر انحنای زمان هم به صورت حاصل ضرب تابعی از زمان، در ترکیب می‌شود. $g_{\mu\nu}$ (که این فرم را $R_{\mu\nu}$ را می‌تواند از فرم $R_{\mu\nu}$ به دست آورد).

با داشتن فرم $g_{\mu\nu}$ و حل معادلهٔ فیلد + ترکیب فرم $R_{\mu\nu}$ می‌تواند

با انجام این کار فرضیهٔ مجدد در فرم به دست می‌آید: $f(r) = \frac{1}{1-kr^2}$ که k یک ثابت است، و با scale کردن معادله، می‌تواند

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega \right]$$

یکی از مقادیر 0، 1 و -1 را به خود اختصاص می‌دهد.

به این ترتیب، متریک FLRW (یا FRW) گفته می‌شود: Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Standard Model of modern Cosmology)

رای به دست آوردن فرم $a(t)$ و اینکه k کدام مقدار را می‌گیرد، باید معادلات میلان را حل کنیم.

باشگاه دانشجویان ایران

رشته مادر از تئوری FLRW ، تانسور انرژی-ماده و منبع گرانش ، در آن طرف معادله فراموش $8\pi G T_{\mu\nu}$

تانسور انرژی-ماده در حالت سکون (ماده و u^μ چگالی ماده و u^μ چگالی انرژی) $T_{matter}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$

چون در چارچوب سکون (ماده سکون آزاد) خطای فراموش $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ و $T^{\mu\nu}$ فقط مؤلفه $T^{00} = \rho$

در تمام مؤلفه‌های دیگر صفر است. اما در حالت مادی با هم برخورد می‌کنند. اندازه حرکت به هم برخورد می‌کنند و مؤلفه‌های دیگر صفر است.

بنابراین $T^{\mu\nu}$ برخورد می‌کنند به این فرم است: $T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

$T^{00} = T^{11} = T^{22} = T^{33}$ ، که مؤلفه‌های انرژی و فشار هستند. صفراند چون در حالت سکون هستند. اما T_{ii} غیر صفر است چون

مؤلفه‌های فشار هستند. T_{11} و T_{22} و T_{33} با هم برابرند چون همسانگردی داریم.

بنابراین $T^{\mu\nu}$ که این فرم است، به این فرم خواهد آمد: $T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

با همگناری و معادله میدان انیشتین در نظر گرفتن اینکه معادله است به μ و ν متعلق است $(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu})$

به 10 معادله خواهیم رسید که می‌توان از روی آنها $a(t)$ و κ را بدست آورد. (چون دو مجهول وجود دارد، چهارمین معادله مستقل وجود دارد).

بنابراین به این معادلات خواهیم رسید:

باشگاه دانشجویان ایران

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P)$$

$$k\rho = -\frac{k}{a} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

→ Friedmann's Equation

معادلات $\frac{\dot{a}}{a}$ در هر دو معادله ظاهر شده است. (هم این ترکیب را ثابت هابل می‌نامیم) (گروه تابعی از t است): $\frac{\dot{a}}{a} = H(t)$
(همین است که می‌نامیم پارامتر هابل)

* فرض کنید مختصات در مختصات (r, θ, φ, t) و یک گنگشان دیگر در مختصات $(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi, t)$ قرار دارد.

فاصله فضایی-زمانی (ds^2) برای این دو گنگشان برابر است با $ds^2 = a(t)^2 d\ell^2$ که $d\ell^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2$

فاصله فضایی برای این دو در یک زمان دیگر (t') برابر است با: $ds^2 = a(t')^2 d\ell^2$

ds^2 فاصله فیزیکی بین این دو گنگشان است، و $d\ell^2$ فاصله فضایی، بنابراین: $d_{\text{phys.}} = a(t) d_{\text{coor.}}$

بنابراین در زمان t فاصله فضایی این دو گنگشان تغییر نمی‌کند، لذا فاصله فیزیکی آنها با یک scale t می‌شود.

گنگشان که باید فاصله فضایی ثابتی داشته باشند، چون ما از دید ناظر comoving آنها را بررسی می‌کنیم. برای درک بهتر، مثال دربی

یک بادکنک را در نظر بگیرید: فاصله آنها ثابت است. حال اگر بادکنک را بزرگ کنیم یا کوچک کنیم، فاصله فیزیکی نقاط از هم تغییر می‌کند

در حالی که فاصله فضایی ثابت است. در نتیجه $\dot{a}(t)$ خود تغییر scale همان را مشخص می‌کند. هرچه $\dot{a}(t)$ بزرگتر باشد

یعنی فاصله گالکسی‌ها از یکدیگر هیچ تغییری کند. اگر $\dot{a} = 0$ ، یعنی $a = \text{const}$ فاصله فیزیکی گالکسی‌ها از هم تغییر نمی‌کند.

* ثابت $\Delta\lambda$ از اینجا می‌آید که $\Delta\lambda$ با بزرگی red shift گالکسی‌ها در یافت که در حال دور شدن از ما هستند و قانون $\Delta\lambda$ را بیان کرد.

$$d_{\text{phys.}} = a(t) d_{\text{coord.}} \Rightarrow v_{\text{phys.}} = \dot{a}(t) d_{\text{coord.}} = \frac{\dot{a}}{a} d_{\text{phys.}} \Rightarrow \boxed{v_{\text{phys.}} = H(t) d_{\text{phys.}}}$$

البته داده‌های حاصل بسیار پراکنده بودند و او از میان داده‌های رسیده از حدود هزار گالکسی، ده-پانزده تا را انتخاب کرد و دربره

سرعت دور شدن گالکسی‌ها از ما، با فاصله‌شان از ما نسبت ثابت می‌شود است. (چون داده‌های متعلق به زمان $\Delta\lambda$ یک

بودند، H در یک t خاص به دست آمده بود. $70 \text{ km/Mpc} \cdot \text{sec}$ به دست می‌آید که H ثابت است). H با ثابت به دست آمده بود.

یعنی $\dot{a} > 0$ گالکسی‌ها در حال دور شدن از یکدیگرند. پس کشف انبساط جهان.

* هر آنچه که ما اکنون از گالکسی‌ها می‌دانیم، به واسطه آن‌ها نیست، نه زمان حال آن‌ها. اگر این موضوع را وارد حساب کنیم

$$v_{\text{phys.}} = H(t) d_{\text{phys.}} + (1-q) \frac{d^2}{dt^2} + \dots$$

بارعبر ثابت

را به $\Delta\lambda$ تبدیل به این صورت می‌شود:

باشگاه دانشجویان ایران

$$[1] \quad \dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P)$$

$$[2] \quad K\rho = \frac{-K}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$$

بازگردیم به معادلات به دست آمده :
و معادلات انبساط :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = 0$$

این رابطه باید معروف اصل بقای انرژی باشد.

معادلات را در دو حالت حرکت بررسی می‌کنیم :

1/ حالت غبار (dust) : یعنی ذرات عالم با یکدیگر چسبیده و حرکت نمی‌کنند و فشار صفر است.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho a^3 = \text{const.}$$

بنابراین معادله 1 را به راحتی می‌توان حل کرد :

اگر ρa^3 را در حجم فضایی فرض کنیم، حجم کل (یا انرژی کل) جهان را به دست می‌دهد. چون حجم فضایی ثابت است،

بنابراین معادله به دست آمده باید نیز اصل بقای انرژی در این جهان غبار است.

2/ حالت تابش (radiation) : در مورد تابش می‌دانیم که برای موج الکترومغناطیسی، رابطه بین فشار تابشی و چگالی انرژی تابشی

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho a^4 = \text{const.}$$

به شکل $p = \frac{\rho}{3}$ است. در این حالت هم معادله 1 قابل حل است :

* باز به معادله (2) ، اگر $\dot{a} = 0$ ، چگالی و a یک رابطه خطی باید داشته باشند، چون در این حالت a ثابت است، ρ هم

ثابت خواهد بود. این شرایط با معادله $\dot{a} = 0$ ، نتیجه می دهد $\dot{\rho} = 0$ یعنی چگالی ثابت است.

اما اگر a از مقدار ثابت انحراف شود ، این اتفاق را می توان نوشت و معادله stable (تقریبی) می کند.

قبل از کشف دلیل ، اینشتین برای اینکه stable بودن معادله را رفع کند ، جمله اضافی را وارد معادلاتش کرد ، کاری که بعداً خودش

از آن به عنوان بزرگترین اشتباه زندگی اش یاد می کرد. جمله اضافه $\frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu}$ بود ، و به Λ هم ثابت کیهانشناسی می گفت:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

با این تقریب ، معادله 1 تقریبی می کند ، اما در معادله 2 یک Λ ظاهر می شود ، که معادله را stable می کند. (با علامت $\frac{a}{a}$ بالایی می شود).

در نتیجه ، جهان static خاتم ثابت ، همان نوعی که اینشتین فکر می کرد صحیح است. (با بالایی کوچک است.)

اگر اینشتین به معادلاتش اعتماد کرده بود ، می توانست قبل از کشف دلیل ، انبساط جهان را پیش بینی کند.

$$* \text{ برای حل معادله فریبین ، برای ساده کردن فرض کنید } \kappa = 0 \quad \& \quad \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \kappa \rho$$

این معادله را در صورتی که ρ غرض جهان ، جهان را حل می کند:

$$* \text{ در قسمت های اول عمر جهان ، تابش غالب بوده (radiation dominant era) } \quad \& \quad \rho \propto \frac{1}{a^4} \quad \&$$

باشگاه دانشجویان ایران

$$\ddot{a}^2 = \frac{\text{const.}}{a^2} \Rightarrow a\ddot{a} = \text{const.} \Rightarrow \frac{d}{dt}(a^2) = \text{const.} \Rightarrow a \propto \sqrt{t}$$

$$\alpha \propto t^{2/3} \Leftarrow \ddot{a} \propto \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftarrow \rho \propto \frac{1}{a^3} \Leftarrow (\text{Matter dominated era})$$

* (در عصر حاضر، ماده غالب است) با چگالی انرژی (نشیمن) اعزف کرد و در دوران $\propto t^{2/3}$ (تا $\propto t^{1/2}$) از معادلات حریف میزنند برای جهان یک دوران $\propto t^{2/3}$ غالب (در نظر میگیرند).

در دوران حالت a به شکل $e^{\sqrt{\Lambda/3}t}$ با زمان زیاد می شود.

در صورتی که از حالت $a \propto \sqrt{t}$ و $a \propto t^{2/3}$ ، در $t=0$ ، scale جهان صفر می شود. یعنی در مبدأ زمان هیچ ذرات (مادی) - اگر نبوده.

در حالتی که در زمان صفر از یکدیگر جدا می شوند ، و چگالی هم میریزد به صفر است. $(\rho \propto \frac{1}{a^3} \text{ یا } \rho \propto \frac{1}{a^4})$ Big Bang