$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dydx =$$

$\iint_R \ sinx \ dA$ به طوری که ناحیه R محصور است بوسیله خطوط $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $x = \pi$ ؟

مساحت ناحیه محصور بین منحنی های داده شده را حساب کنید؟

Y=x3 , y=x2

فرض کنید R ناحیه محدود به نمودارهای Y=X2 و Y=X+6 باشد. انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید؟

$$\iint_R (\mathrm{x} + 4\mathrm{x}) dA =$$

ص422 پیام نور

❉ بررسی نتیجه دو ص37 جزوه ❉ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای $y = 8 - \frac{x^2}{2}$ و $y = 2 - \frac{\mathrm{x}}{2}$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید؟ ص 426 پیام نور

تغییر ترتیب انتگرال گیری

گاهی محاسبه یکی از دو انتگرال مکرر مشکل یا غیر ممکن است در حالی که انتگرال مکرر دوم را به آسانی می تواندمحاسبه کرد. تعویض یک انتگرال مکرر به دیگری را "تغییر ترتیب انتگرال گیری" می گوئیم. زیرا یکی از dydx وdxdy به دیگری تغییر می یابد.

انتگرال زیر را محاسبه کنید؟

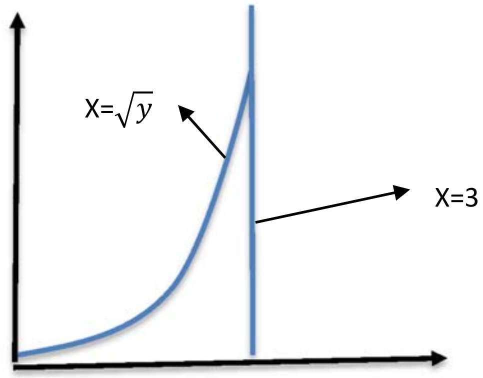
$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin\pi x^3 \, dxdy =$$

محاسبه $\sin\pi x^3$ آسان نیست همانور که از تابع فوق و حدود انتگرال ها مشخص است داریم:

$$0 \leq y \leq 9 \quad , \quad x = 3 \ , \ x = \sqrt{y}$$

شکل را داریم و با توجه به شکل می توانیم ناحیه R و حدود انتگرال گیری را مشخص کنیم (طبق تعاریف هایی که در ص 39 جزوه داشتیم) :

$$0 \leq y \leq 3 \quad , \quad x = 3 \ , \ x = \sqrt{y}$$



$$\int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin\pi x^3 \, dxdy =$$

تغییر متغیر (جانشینی) در انتگرال های دوگانه:

۳ـ جانشینی‌ها در انتگرال‌های دوگانه

برای استفاده از جانشینی $x=g_1(u,v)$ و $y=g_2(u,v)$ در انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ بترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. ابتدا $f(x,y)$ را برحسب u و v می‌نویسیم تا $F(u,v)$ نتیجه شود.

۲. مقدار $j=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ را محاسبه کرده و به‌جای dA مقدار $|j|\,du\,dv$ را جانشین می‌کنیم.

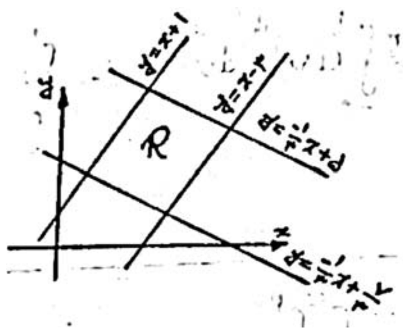
۳ـ مرزهای ناحیه برحسب x و y را برحسب u و v بدست آورده و $\iint_{D'} F(u,v)\,|j|\,du\,dv$ را که در آن D' تبدیل ناحیه D است، محاسبه می‌کنیم.

j را ژاکوبی تبدیل می‌نامند.

توجه کنید که اگر تبدیل به‌صورت $u=g_1(x,y)$ و $v=g_2(x,y)$ داده شده باشد، آنگاه بهتر است برای تعیین ژاکوبی، مقدار $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ را محاسبه کنیم. در این صورت $j=\dfrac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)}$.

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید؟

$$\iint_R (y-x)\,dA=? \qquad R:\begin{cases} y-x=-3\\ y-x=1\\ y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3}\\ y+\frac{x}{3}=5\end{cases}$$



مرحله 1 : f(x,y) را بر حسب u , v می نویسیم

$$u=y-x$$

$$v=y+\frac{x}{3}$$

مرحله 2 : بدست آوردن مقدار ژاکوبی j

$$|j|=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=$$

مرحله 3 : بدست آوردن مرزهای R برحسب u و v

$$u=y-x=3 \quad , \quad u=-3$$

$$u = y - x = 1 \quad , \qquad u = 1$$

$$v = y + \frac{x}{3} = \frac{7}{3} \quad , \qquad v = \frac{7}{3}$$

$$v = y + \frac{x}{3} = 5 \quad , \qquad v = 5$$

حال به ادامه حل انتگرال می پردازیم: یادآوری : $u = y - x$

$$\iint_R (\mathrm{y}-\mathrm{x})dA \xrightarrow{\text{تبدیل به v,u}} \int_{\frac{7}{3}}^{5}\int_{-3}^{1} u\,dudv =$$

انتگرال دوگانه زیر را حل کنید؟

$$\int_0^1\int_0^{1-y} cos\frac{x-y}{x+y}\mathrm{dx\,dy} =$$

مرحله 1 : f(x,y) را بر حسب u , v می نویسیم

$$u = x - y$$

$$v = x + y$$

با حل دستگاه فوق داریم :

$u + v = 2x \quad , \quad x = \frac{1}{2}(u+v)$ با جایگذاری داریم $y = \frac{1}{2}(u-v)$

مرحله 2 : بدست آوردن مقدار ژاکوبی j

$$|j| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} =$$

مرحله 3 : بدست آوردن مرزهای R برحسب u و v

1.x=1-y پس داریم x+y=1 با توجه به بند مرحله اول داریم v=1 بنابراین u=v

2.x=0 با جایگذاری در فرمول بدست امده مرحله اول

$$\begin{cases} u = 0 - y \\ v = 0 + y \end{cases} \rightarrow u = -v$$ قرینه یکدیگرند

3.y=0

$$\begin{cases} u = x - 0 \\ v = x + 0 \end{cases} \rightarrow u = v$$ برابرند

با فرمول بدست آمده $y = \frac{1}{2}(u - v)$ داریم y=0

4. با توجه به بند 1 داریم v=1

حال به ادامه حل انتگرال می پردازیم:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} cos\frac{x-y}{x+y} \mathrm{dx\,dy} = \xrightarrow{\text{تبدیل به v,u}} \frac{1}{2}\int_0^1 \int_v^{-v} cos\frac{u}{v} \mathrm{du\,dv} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{v\,sin\,\frac{u}{v}}\Big|_{\mathrm{v}}^{-\mathrm{v}} \mathrm{dv} =$$

محاسبه <u>مساحت</u> ناحیه محصور به منحنی های زیر را حل کنید؟

$xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3=15$

$u=xy$, $v=xy^3$ -1

- 2

$$|j| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}} =$$

-3

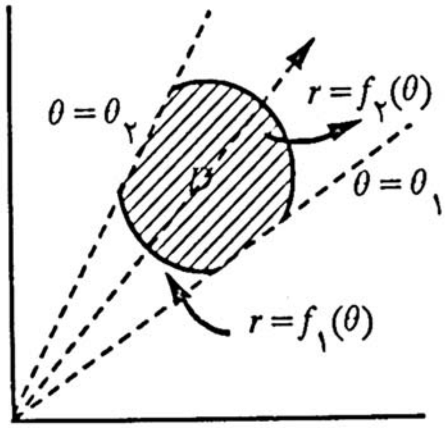
$u=xy = 4$ <u>$u=4$</u> , $u=xy = 8$ <u>$u=8$</u>

$v=xy3 = 5$ <u>$v=5$</u> , $v=xy3=15$ <u>$v=15$</u>

$$\int_5^{15}\int_4^8 \frac{1}{2xy^3}\,du\,dv \qquad xy^3 = v \text{ با توجه به بند یک } \qquad \int_5^{15}\int_4^8 \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

انتگرال های دوگانه در مختصات قطبی:

اگر ناحیه انتگرال گیری دایره باشد و یا عامل $x^2 + y^2$ ، می توان از تبدیل قطبی $y = r\cos\theta$ و $x = r\sin\theta$ استفاده کرد. در این حالت ابتدا تابع زیر انتگرال را برحسب r و θ نوشته و به جای $dydx$ ، مقدار $r\,dr\,d\theta$ را جانشین می کنیم. سپس از رسم ناحیه نیم خطی از مبداء به سمت خارج چنان رسم میکنیم تا مرزهای ناحیه را در $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ قطع کند. این دو مرزهای انتگرال داخلی و حداقل و حداکثر مقدار θ در ناحیه حدود انتگرال خارجی است.



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مساحت ناحیه درون دلنمای $r = 1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را پیدا کنید؟

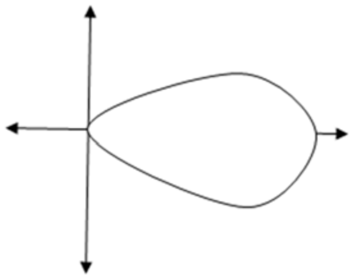
ابتدا محل تلاقی دو منحنی را پیدا می کنیم

$$1 = 1+\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA \xrightarrow{\text{تبدیل به مختصات قطبی}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta =$$

مساحت یکبرگ گل از کل $r = a\cos 2\theta$ را پیدا کنید؟

$r = 0 \quad , \quad \cos 2\theta = 0 \;, \theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$



$$\iint_D f(x,y)\, dA \xrightarrow{\text{تبدیل به مختصات قطبی}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a+\cos 2\theta} r\, dr d\theta =$$

۳ـ کاربردهای انتگرال دوگانه

۶ـ کاربردهای انتگرال‌های دوگانه

۱ـ $\iint_D dA$ مساحت ناحیه D است.

۲ـ $\iint_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))\, dA$ حجم بین دو رویه $z = f_1(x,y)$ و $z = f_2(x,y)$ است. D سایه جسم برصفحه xy است.

۳ـ $\iint_D \rho(x,y)\, dA$ جرم سطح واقع در ناحیه D است. ρ چگالی جرمی است.

۴ـ اگر $(\bar{x}, \bar{y})$ مختصات مرکز جرم ناحیه D باشد آنگاه:

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\rho\, dA}{\iint_D \rho\, dA} \quad , \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x\rho\, dA}{\iint_D \rho\, dA}$$

مطلوبست محاسبه <u>حجم</u> جسم صلبی که از بالا به صفحه $z = 2r\sin\theta$ و از پائین به سهمی گون $z = r^2$ محصور می باشد؟

ابتدا فصل مشترک صفحه با سهمی گون را پیدا می کنیم انها را مساوی هم قرار می دهیم.

$$r^2 = 2r \sin\theta \quad \rightarrow \quad r = 2\sin\theta \quad \rightarrow \quad 2\sin\theta = 0 \quad , \quad \theta = 0 , \pi$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} (2r\, sin\theta - r^2) r \;\, dr d\theta =$$

انتگرال های سه گانه

انتگرال سه گانه

تعریف انتگرال سه‌گانه و ویژگیهای آن شبیه به حالت دوگانه بوده لذا، بدون ذکر آنها به بحث در بارهٔ روش محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه می‌پردازیم.

محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات قائم

برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه صورت سه‌بعدی قضیهٔ فوبینی را به‌کار می‌بریم و با استفاده از انتگرالگیر یگانهٔ (سادهٔ) مکرر، انتگرال سه‌گانه را محاسبه می‌کنیم. روش فوق در چند سطر زیر توضیح داده شده است.

ناحیه‌ای چون D داریم که از پایین به رویهٔ $z = f_1(x , y)$ و از بالا به رویهٔ $z = f_2(x , y)$ محدود است و می‌خواهیم از تابع پیوسته‌ای چون $F(x , y, z)$ در این ناحیه انتگرال بگیریم.

فرض کنید R سایهٔ ناحیهٔ (تصویر قائم) D روی صفحهٔ xy باشد. در این صورت انتگرال F روی D برابر است با

$$\iiint_D F\, dv = \iint_R \Big(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x , y, z)\, dz \Big)\, dy\, dx \qquad (۱)$$

انتگرال سه گانه $f(x,y,z) = xy^3z^2$ را روی ناحیه زیر محاسبه کنید؟

$$D = \{(x,y,z)| -1 \le x \le 3 \;, \quad 1 \le y \le 4 \,, \quad 0 \le z \le 2\}$$

$$\iiint_D xy^3z^2\, dv = \int_1^4\int_{-1}^3\int_0^2 xy^3z^2 \;\, dz\, dx\, dy =$$

سوال فوق را نیز می توانیم از طریق روش های دیگر نیز حل نمود انترگال نسبت به dx dz dy و روش های دیگر.

فرض کنید R مثلث محدود به نمودارهای y=0 و y=x و x=1 و D بین دو رویه $Z=-y^2$ و $z=x^2$ به ازای (x,y) در R ، واقع باشد. انترگال سه گانه زیر را محاسبه کنید؟

$$\iiint_D (x+1)\, dv = \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x+1)\ dz\, dy\, dx =$$

مطلوبست محاسبه $\iiint_D (xz+3z)\, dv$ ، D *ناحیه محصور به استوانه* $x^2+z^2=9$ *و صفحات* x+y=3 ، z=0 ، y=0 *و بالای صفحه* xy *می باشد.*

$$\iiint_D (xz+3z)\, dv = \int_{-3}^{3} \int_0^{3-x} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (xz+3z)\ dz\, dy\, dx =$$

پس از محاسبهٔ $\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz$ عبارت سمت راست تساوی (۱) به‌صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ R در خواهد آمد که روش محاسبهٔ آن قبلاً توضیح داده شده است. تشخیص ناحیهٔ R و تعیین حدود آن اساسی‌ترین مرحلهٔ محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه می‌باشد.

حجم یک ناحیهٔ در فضا

حجم ناحیه‌ای محصور و بسته در فضا مانند D برابر است با

$$V_D = \iiint_D dv = \iiint_D dx\, dy\, dz$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه

فرض کنید ناحیه‌ای چون G از فضای uvw با معادلات مشتق‌پذیری به‌صورت زیر به ناحیهٔ R واقع در فضای xyz تبدیل شوند

$$x = g(u, v, w) \quad , \quad y = h(u, v, w) \; , \quad z = k(u, v, w)$$

در این صورت هر تابعی چون $F(x, y, z)$ راکه بر R تعریف شده باشد می‌توان به‌صورت تابع

$$F(g(u, v, w)\, , h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

که بر G تعریف شده است در نظر گرفت. رابطهٔ زیر انتگرال $F(x, y, z)$ روی R را به انتگرال $H(u, v, w)$ روی G مربوط می‌سازد.

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(u, v, w)\; |J(u, v, w)|\; du\, dv\, dw$$

$J(u, v, w)$ که قدر مطلقش در این رابطه آمده است، برابر است با

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

تذکر مهم. از مهمترین تغییر متغیرها برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه تغییر متغیرهای استوانه‌ای و کروی و یا به عبارتی تبدیل انتگرالهای دکارتی به انتگرالهای استوانه‌ای و کروی می‌باشند.

تبدیل انتگرال دکارتی به انتگرال استوانه‌ای

تبدیل یک انتگرال دکارتی مانند $\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ به یک انتگرال استوانه‌ای

دو مرحله دارد.

مرحلهٔ ۱. در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$dx\,dy\,dz = dz\,r\,dr\,d\theta \quad , \quad x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$$

مرحلهٔ ۲. حدود z، r و θ را چنان تعیین می‌کنیم که تصویر G (ناحیهٔ مشخص شده توسط این حدود در دستگاه مختصات استوانه‌ای) تحت تبدیل

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,, \quad z = z$$

برابر ناحیهٔ D در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در این صورت داریم

$$\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G F(r\cos\theta\,,r\sin\theta\,,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

تبدیل انتگرال دکارتی به انتگرال کروی

تبدیل یک‌انتگرال دکارتی‌مانند $\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz$ به یک انتگرال کروی دومرحله‌دارد.

مرحلهٔ ۱. در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z = \rho\cos\phi$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

مرحلهٔ ۲. حدود ρ، ϕ و θ را چنان تعیین می‌کنیم که تصویر G (ناحیهٔ مشخص شده در دستگاه مختصات کروی) تحت تبدیل

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta\,, \quad z = \rho\cos\phi$$

برابر ناحیهٔ D در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در این صورت داریم

$$\iiint_D F(x\,,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

که

$$H(\rho,\phi,\theta) = F(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$