جزوه مدارهای الکتریکی ۲

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۲

تجزیه و تحلیل گره و مش

مساله تجزیه و تحلیل شبکه را می‌توان چنین بیان نمود: با معلوم بودن گراف شبکه، مشخصه‌های شاخه‌ها، ورودی (یعنی شکل‌موج منابع نابسته) و شرایط اولیه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها را محاسبه کنید [۱].

در این فصل، تجزیه و تحلیل گره و مش را به طور منظم بررسی خواهیم نمود. امروزه با توجه به اینکه کامپیوترها تجزیه و تحلیل شبکه‌ها را به طور خودکار انجام می‌دهند، اینگونه بررسی منظم دارای اهمیت خاص می‌باشد. همچنین، نتایج این تجزیه و تحلیل‌های منظم، ما را مجاز می‌دارند که روش‌هایی برای توسعه خواص این شبکه‌ها بدست آوریم [۱].

۲-۱ تبدیل منابع

در بحث کلی مساله تجزیه و تحلیل شبکه فرض می‌کنیم که تعداد و محل قرار گرفتن منابع نابسته مادامی که قوانین کیرشف نقض نشوند، اختیاری است (یعنی مادامی که منابع ولتاژ نابسته یک حلقه تشکیل ندهند و یا منابع جریان نابسته یک کات‌ست تشکیل ندهند، زیرا در هر یک از این دو حالت شکل‌موج‌های این منابع باید در یک محدوده خطی که به ترتیب توسط KVL و KCL اعمال می‌شود صدق کنند) [۱].

برای آنکه جدا کردن شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، بهتر است نخست دو تبدیل شبکه را چنان بیابیم که بتوان بدون آنکه در مساله تاثیری داشته باشند، محل منابع را در شبکه تغییر داد. این تبدیلات را می‌توان هم برای منابع نابسته و هم برای منابع وابسته به کار برد. آن‌ها در شکل‌های ۲-۱ و ۲-۲ تشریح شده‌اند [۱].

شاخه ۱ در شکل ۲-۱(الف) منبع ولتاژ e_s است که میان گره‌های ۱ و ۲ وصل شده است. گره

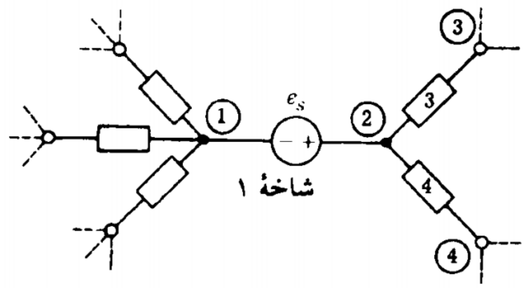


fig1a

(الف) شاخه‌ای با منبع ولتاژ تنها

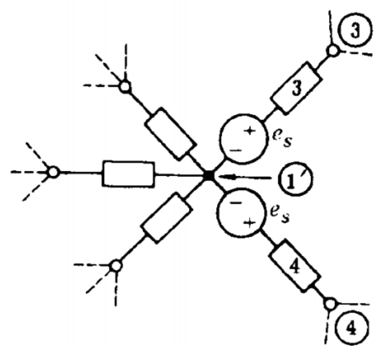


fig1b

(ب) حذف شاخه‌ای با منبع ولتاژ تنها

fig1

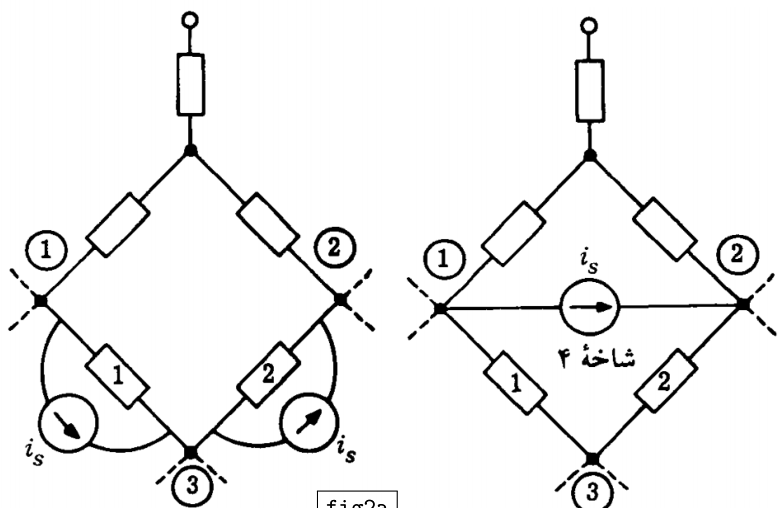
شکل ۲-۱: تبدیل منبع؛ شاخه‌ای که از یک منبع ولتاژ تنها تشکیل می‌شود، حذف شده است.

(۲) توسط شاخه ۳ به گره (۳) و توسط شاخه ۴ به گره (۴) متصل شده است. چنانچه جریان شاخه ۱ مورد توجه ما نباشد، می‌توان مدار شکل ۲-۱(الف) را با مدار معادل آن در شکل ۲-۱(ب) تعویض نمود. در مدار جدید شاخه ۱ حذف شده است و یک گره جدید (۱') به وجود آمده است. این گره جدید (۱')، از برهم منطبق شدن گره‌های (۱) و (۲) در مدار اصلی حاصل شده است. برای معادل شدن این دو مدار، باید دو منبع e_s در شاخه ۳ و شاخه ۴ مدار جدید قرار داده شوند [۱].

نشان دادن اینکه تبدیل فوق جواب مساله را تغییر نمی‌دهد، کاری بسیار آسان است و تنها لازم است که در هر دو شبکه، معادلات KVL برای تمام حلقه‌هایی که شامل شاخه۳ و همچنین تمام حلقه‌هایی که شامل شاخه ۴ می‌باشند، نوشته شوند. به راحتی بررسی می‌شود که معادلات متناظر برای هر دو شبکه یکسان هستند. همچنین وقتی KCL در گره (۱') اعمال می‌شود، نتیجه حاصل، مساوی مجموع معادلات بدست آمده از به کار بردن KCL در گره‌های (۱) و (۲) از شبکه داده شده می‌باشد. بنابراین معادلات KCL هر دو شبکه،

محدودیت‌های معادلی ایجاد می‌کنند [۱].

شاخه ۴ در شکل ۲-۲(الف) منبع جریان i_s است که میان گره‌های ۱ و ۲ وصل شده است. گره‌های ۱ و ۲ نیز به ترتیب توسط شاخه‌های ۱ و ۲ به گره ۳ وصل شده‌اند. در شکل ۲-۲(ب) مدار معادل نشان داده شده است که در آن منبع جریان شاخه ۴ حذف شده و به جای آن دو منبع جریان جدید i_s به طور موازی با شاخه‌های ۱ و ۲ وصل شده‌اند. با نوشتن معادلات KCL برای گره‌های ۱، ۲ و ۳ هر دو شبکه می‌توان ملاحظه کرد که این تبدیل، جواب مساله را تغییر نمی‌دهد. واضح است که معادلات متناظر یکسان هستند [۱].

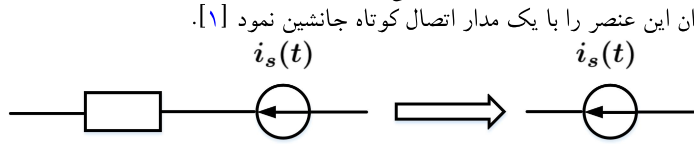


(الف) شاخه‌ای با منبع جریان تنها fig2a

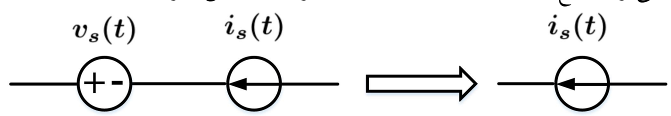
(ب) حذف شاخه‌ای با منبع جریان تنها fig2b

شکل ۲-۲: تبدیل منبع؛ شاخه‌ای که از یک منبع جریان تنها تشکیل می‌شود، حذف شده است. fig2

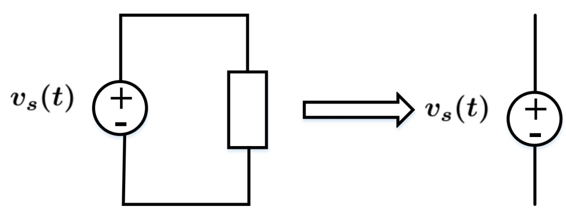
n1 **نکته ۲-۱** چنانچه شاخه‌ای از یک منبع جریان که به طور سری با یک عنصر قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این عنصر را با یک مدار اتصال کوتاه جانشین نمود [۱].



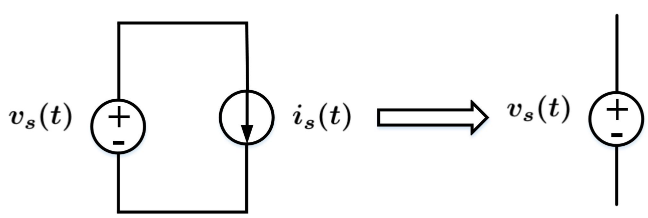
n2 **نکته ۲-۲** چنانچه شاخه‌ای از یک منبع جریان که به طور سری با یک منبع ولتاژ قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان منبع ولتاژ را با یک مدار اتصال کوتاه جانشین نمود [۱].



n3 **نکته ۲-۳** چنانچه شاخه‌ای از یک منبع ولتاژ که به طور موازی با یک عنصر قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این عنصر را با یک مدار باز جانشین نمود [۱].

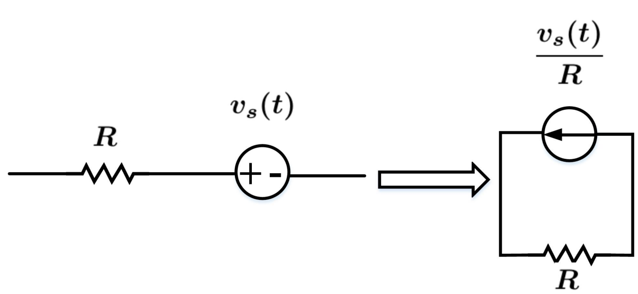


n4 **نکته ۲-۴** چنانچه شاخه‌ای از یک منبع ولتاژ که به طور موازی با یک منبع جریان قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان منبع جریان را با یک مدار باز جانشین نمود [۱].

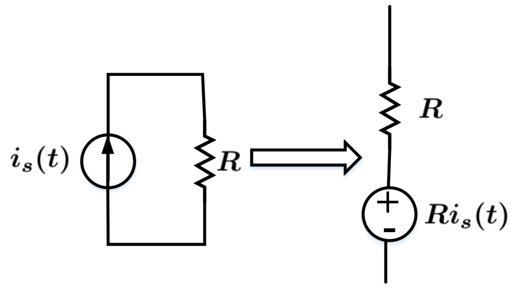


ملاحظه کنید که نکات ۲-۳ و ۲-۴ دوگان نکات ۲-۱ و ۲-۲ هستند.

نکته ۲-۵ چنانچه شاخه‌ای از یک منبع ولتاژ که به طور سری با یک مقاومت قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این اتصال را با یک منبع جریان که به طور موازی با همان مقاومت قرار داد، عوض کرد.



چنانچه شاخه‌ای از یک منبع جریان که به طور موازی با یک مقاومت قرار دارد، تشکیل شود، می‌توان این اتصال را با یک منبع ولتاژ که به طور سری با همان مقاومت قرار دارد، عوض کرد.



در نتیجه، با به کار بردن این تبدیلات می‌توان هر شبکه داده شده‌ای را چنان تغییر داد که در آن هر منبع ولتاژ به طور سری با عنصری که یک منبع نیست و هر منبع جریان به طور موازی با عنصری که یک منبع نیست، وصل شده باشد [۱].

بنابراین، چنین نتیجه می‌شود که بدون از دست دادن تعمیم کلی، می‌توان فرض کرد که برای هر شبکه یک شاخه نوعی مانند شاخه k به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ می‌باشد که در آن v_{sk} یک منبع ولتاژ و j_{sk} یک منبع جریان و جعبه مستطیلی، عنصری را که منبع نیست نشان می‌دهد. ولتاژ شاخه مانند سابق با v_k و جریان شاخه با j_k مشخص می‌شود. بنابراین توصیف شاخه k شامل در نظر گرفتن اثرات ممکن منابع می‌باشد. بخصوص چنانچه منبع ولتاژی در شاخه k وجود نداشته باشد، $v_{sk} = ۰$ قرار می‌دهیم و به طریق مشابه، اگر منبع جریانی وجود نداشته باشد، $j_{sk} = ۰$ قرار می‌دهیم [۱].

فرض کنید که در شکل ۲-۳ عنصر غیرمنبع، یک امپدانس z_k باشد. معادله شاخه چنین خواهد بود:

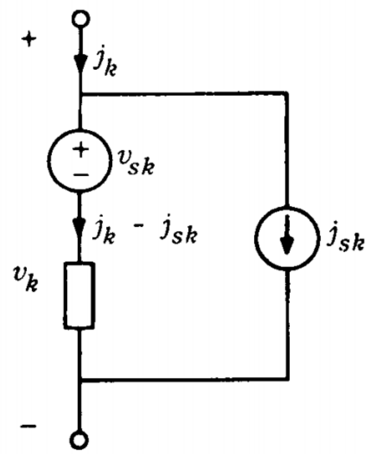
$$v_k = v_{sk} - z_k j_{sk} + z_k j_k \qquad (۲-۱)$$

همچنین، فرض کنید که در شکل ۲-۴ عنصر غیر منبع، یک ادمیتانس y_k باشد. معادله شاخه چنین خواهد بود:

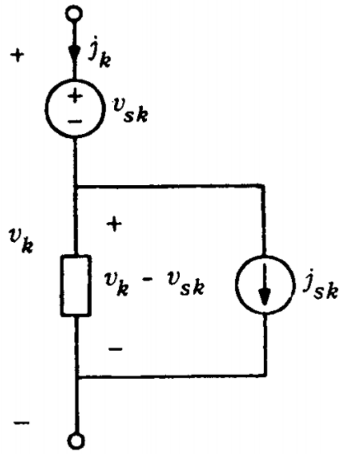
$$j_k = j_{sk} - y_k v_{sk} + y_k v_k \qquad (۲-۲)$$

می‌توان نشان داد که شاخه شکل ۲-۳ را می‌توان باز هم ساده‌تر کرد تا به صورت شکل ۲-۵ درآید. همچنین، می‌توان نشان داد که شاخه شکل ۲-۴ را می‌توان باز هم ساده‌تر کرد تا به صورت شکل ۲-۶ درآید [۱].

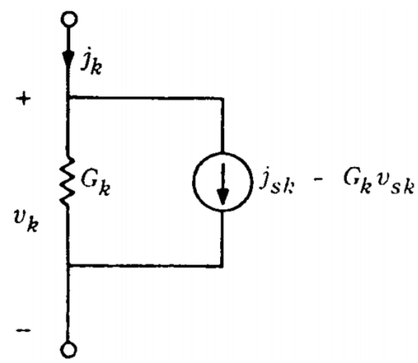
در تجزیه و تحلیل گره راحت‌تر است (ولی الزامی نیست) که تمام منابع نابسته به صورت منابع جریان



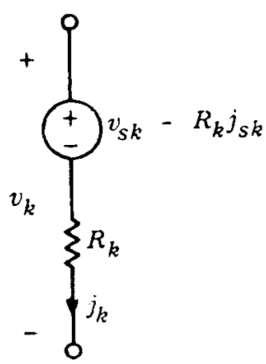
شکل ۲-۳: شاخه k که شامل منابع ولتاژ و جریان می‌باشد. fig3



شکل ۲-۴: شاخه k که شامل منابع ولتاژ و جریان می‌باشد. fig4



شکل ۲-۵: یک شاخه مقاومتی با یک منبع ولتاژ معادل. fig5



شکل ۲-۶: یک شاخه مقاومتی با یک منبع جریان معادل fig6

باشند. به طریق مشابه، در تجزیه و تحلیل حلقه یا مش راحت‌تر است (ولی باز هم الزامی نیست) که تمام منابع نابسته به صورت منابع ولتاژ باشند [۱].

از این به بعد، هنگامی که ما با شبکه‌های مقاومتی سر و کار داریم، فرض خواهیم کرد که شاخه‌ها همیشه به صورت شکل ۲-۵ یا شکل ۲-۶ می‌باشند، یعنی مقاومتی به طور سری با یک منبع ولتاژ یا مقاومتی به طور موازی با یک منبع جریان. در شبکه‌های کلی ممکن است مقاومت با یک سلف و یا یک خازن تعویض شود [۱].

۲-۲ دو مطلب اساسی تجزیه و تحلیل گره

شبکه دلخواه N را که دارای n_t گره و b شاخه است، در نظر بگیرید. در این شبکه، رویهم رفته b ولتاژ شاخه و b جریان شاخه وجود دارد که باید تعیین شوند. می‌توان بدون از دست دادن کلیت موضوع، فرض نمود که گراف پیوسته است، یعنی تنها دارای یک جز جداگانه می‌باشد [۱].

نخست به طور دلخواه، یک گره مبنا انتخاب می‌کنیم. این گره مبنا معمولا گره مأخذ خوانده می‌شود. برای گره ماخذ علامت n_t و برای بقیه گره‌ها، علامت‌های ۱، ۲، ....، n را تعیین می‌کنیم که در آن $n \triangleq n_t - ۱$ [۱].

۲-۲-۱ استنباط‌های KCL

اکنون KCL را در گره‌های ۱، ۲،....، n به کار برده (گره مبنا را حذف می‌کنیم) و شکل معادلات بدست آمده را بررسی می‌کنیم. به طور نمونه، چنانکه در گره k نشان داده شده در شکل ۲-۷ دیده می‌شود، یک معادله جبری خطی همگن از جریان‌های شاخه‌ها بدست می‌آوریم و بنابراین:

$$j_{۴} + j_{۶} - j_{۷} = ۰$$

بدین ترتیب، یک دستگاه n معادله جبری خطی از b مجهول $j_{۱}, j_{۲}, \cdots, j_b$ داریم. اولین مطلب اساسی تجزیه و تحلیل گره به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

n معادله جبری خطی همگن، برحسب $j_{۱}, j_{۲}, \cdots, j_b$ که از به کار بردن KCL در هر یک از گره‌ها به جز گره مبنا بدست می‌آیند، یک دسته معادله نابسته خطی تشکیل می‌دهند.

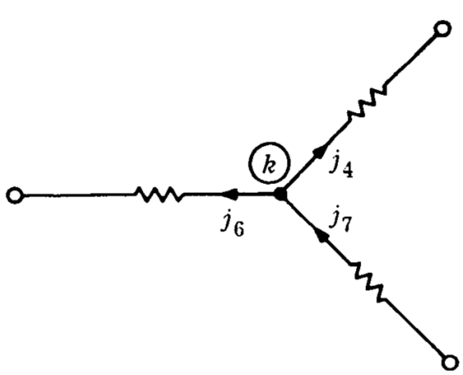


fig17

شکل ۲-۷: یک گره نمونه برای بررسی KCL

دستگاه n معادله جبری خطی که KCL را برای تمام گره‌های N به جز گره مبنا بیان می‌کند، در نظر بگیرید. اکنون به یقین بیان می‌کنیم که این دستگاه دارای شکل ماتریسی زیر است:

$$Aj = \cdot \qquad (\text{KCL}) \tag{۲-۳}$$

eq23-

که در آن j نشان‌دهنده بردار جریان شاخه بوده و دارای بعد b می‌باشد، یعنی:

$$j = \begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

همچنین، در آن $A = (a_{ik})$ یک ماتریس $n \times b$ است که چنین تعریف می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } (i) \text{ خارج شود} \\ -۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } (i) \text{ وارد شود} \\ \cdot & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } (i) \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases} \tag{۲-۴}$$

eq24-

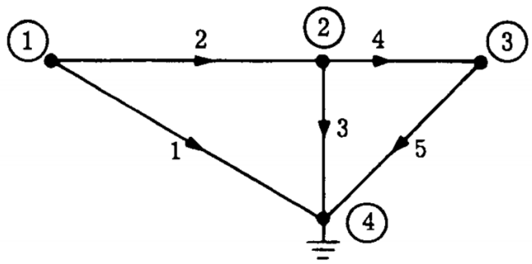
بنابراین، Aj یک بردار n بعدی است. این گفته واضح است، زیرا وقتی ما مولفه iام بردار Aj را برابر صفر می‌نویسیم، صرفا بیان می‌داریم که مجموع تمام جریان شاخه‌هایی که از گره (i) خارج می‌شوند، برابر صفر است.

بلافاصله مشاهده می‌شود که قواعد بیان شده به وسیله معادله (۲-۴) با قواعد مشخص کننده عناصر ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a، که در فصل قبل تعریف شد، کاملا یکسان است. تنها اختلاف آن‌ها در این است که A_a دارای $n_t = n + ۱$ سطر می‌باشد. واضح است که می‌توان ماتریس A را از حذف سطر متناظر با گره مبنا در ماتریس A_a بدست آورد و بنابراین، A ماتریس تلاقی مختصر شده نامیده می‌شود [۱].

ex21- **مثال ۲-۱** گراف شکل ۲-۸ را که شامل چهار گره و پنج شاخه ($n_t = ۴$ و $b = ۵$) می‌باشد، در نظر بگیرید. فرض کنید که گره‌ها و شاخه‌ها مطابق شکل شماره‌گذاری کنیم و با به کار بردن علامت زمین مشخص کنیم که گره (۴) گره مبنا می‌باشد. بردار جریان شاخه چنین است:

$$j = \begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \end{bmatrix}$$

ماتریس A مطابق معادله (۲-۴) بدست می‌آید و بنابراین داریم:



شکل ۲-۸: گراف مثال

fig18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله (۲-۳) بیان می‌دارد که:

$$Aj = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = 0$$

یا:

$$j_1 + j_2 = 0$$
$$-j_2 + j_3 + j_4 = 0$$
$$-j_4 + j_5 = 0$$

واضح است که این معادلات، همان سه معادله گره هستند که از اعمال KCL در گره‌های ۱، ۲ و ۳ بدست می‌آیند. در حالت اخیر می‌توان به راحتی دید که این سه معادله به طور خطی نابسته‌اند زیرا هر یک شامل متغیری است که در هیچ یک از معادلات دیگر وجود ندارد [۱].

۲-۲-۲ استنباط‌های KVL

فرض کنید $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ولتاژ گره‌های ۱، ۲،...، n که نسبت به گره مبنا سنجیده می‌شوند، باشند. ولتاژهای $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ولتاژ گره‌ها نسبت به مبنا خوانده می‌شوند. در تجزیه و تحلیل گره این ولتاژ گره‌ها نسبت به مبنا را به عنوان متغیرها به کار خواهیم برد. KVL تضمین می‌کند که ولتاژ گره‌ها نسبت به مبنا بدون هیچ‌گونه ابهامی تعریف شوند و چنانچه ولتاژ یک گره دلخواهی را نسبت به گره مبنا با تشکیل

جمع جبری ولتاژ شاخه‌هایی که در طول مسیر از گره مبنا تا گره مورد نظر قرار دارند، حساب کنیم، KVL تضمین می‌کند که این مجموع به مسیر انتخاب شده بستگی ندارد [۱].

ولتاژ شاخه‌ها از روی ولتاژ گره‌ها توسط معادله زیر بدست می‌آیند:

$$v = A^T e \qquad (۲-۵)$$

eq25-

که در آن ماتریس $n \times b$، A^T ترانهاده ماتریس تلاقی مختصر شده A است که در معادله (۲-۴) تعریف شد [۱].

مثال ۲-۲ برای مدار شکل ۲-۸ داریم:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

همچنین با داشتن A داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله (۲-۵) بیان می‌دارد که:

$$v = A^T e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

یا:

$$v_1 = e_1$$

$$v_2 = e_1 - e_2$$

$$v_3 = e_2$$

$$v_4 = e_2 - e_3$$

$$v_5 = e_3$$

براحتی دیده می‌شود که این پنج معادله، همان بیان‌های KVL هستند [۱].

معادله (۲-۵) قانون KVL را بیان می‌کند و b ولتاژ شاخه $v_1, v_2, \cdots, v_b$ را برحسب n ولتاژ گره نسبت به مبنا $e_1, e_2, \cdots, e_n$ بیان می‌دارد [۱].

واضح است برای اینکه n متغیر شبکه $e_1, e_2, \cdots, e_n$ را بدست آوریم، لازم است که توصیف شاخه‌های شبکه را بدانیم، یعنی b معادله شاخه که ولتاژ شاخه‌های v را به جریان شاخه‌های j ارتباط می‌دهند، داشته باشیم. ماهیت اجزای شبکه تنها در معادلات شاخه در تجزیه و تحلیل وارد می‌شوند. بنابراین، مساله باقی‌مانده ترکیب معادلات (۲-۳) و (۲-۵) با معادلات شاخه‌ها و بدست آوردن n معادله از n مجهول $e_1, e_2, \cdots, e_n$ می‌باشد. این عمل مستلزم حذف چند متغیر است. برای شبکه‌های غیرخطی و تغییرپذیر با زمان مساله حذف معمولا مشکل است و بحث آن را به بعد موکول می‌کنیم. ولی برای شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان می‌توان معادلات شاخه‌ها را با معادلات (۲-۳) و (۲-۵) ترکیب نموده و عمل حذف را به راحتی انجام داد [۱].

۲-۳ تجزیه و تحلیل گره در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

مساله تجزیه و تحلیل گره در حالت کلی، شامل ترکیب این معادلات شاخه با دو معادله اساسی زیر است:

$$Aj = 0 \qquad \text{(KCL)} \tag{۲-۶}$$

eq21-

و:

$$v = A^T e \qquad \text{(KVL)} \tag{۲-۷}$$

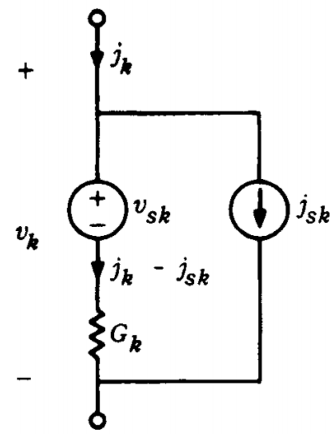
eq22-

در حالت کلی، معادلات بدست آمده به صورت معادلات دیفرانسیل یا انتگرال دیفرانسیل همزمان و خطی n متغیر شبکه $e_1, e_2, \cdots, e_n$ خواهند بود. منظور از این بخش بررسی طرز تشکیل این معادلات و توسعه پاره‌ای از خواص مهم معادلات بدست آمده می‌باشد. برای سادگی، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن تنها مقاومت‌ها و منابع نابسته می‌توانند در شبکه وجود داشته باشند. در این حالت معادلات بدست آمده، معادلات جبری خطی خواهند بود. سپس با به کار بردن فازورها و امپدانس‌ها، تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی شبکه‌ها را در نظر خواهیم گرفت. بالاخره طرز تشکیل معادلات دیفرانسیل و انتگرال دیفرانسیل کلی را در نظر می‌گیریم [۱].

۲-۳-۱ تجزیه و تحلیل شبکه‌های مقاومتی

یک شبکه مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان با b شاخه و n_t گره و یا یک جز جداگانه را در نظر بگیرید. یک شاخه نوعی در شکل ۲-۹ نشان داده شده است. توجه کنید که آن شاخه، شامل منابع نابسته می‌باشد. معادلات شاخه به صورت زیر هستند:

$$v_k = R_k j_k + v_{sk} - R_k j_{sk} \qquad k = 1, 2, \cdots, b \tag{۲-۸}$$



شکل ۲-۹: یک شاخه نوعی

fig19

یا به طور معادل:

$$j_k = G_k v_k + j_{sk} - G_k v_{sk} \qquad k = 1, 2, \cdots, b \tag{۲-۹}$$ eq27-

در طرز نمایش ماتریسی از معادله (۲-۹) بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j_s} - \mathbf{G}\mathbf{v_s} \tag{۲-۱۰}$$ eq28-

که در آن، $\mathbf{G}$ ماتریس رسانایی شاخه خوانده می‌شود و آن، یک ماتریس قطری از مرتبه b است، یعنی:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & G_b \end{bmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

بردارهای $\mathbf{j_s}$ و $\mathbf{v_s}$ بردارهای منبع بوده و دارای بعد b می‌باشند. یعنی:

$$j_s = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} \qquad v_s = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix} \tag{۲-۱۲}$$

تنها لازم است که معادلات (۲-۶)، (۲-۷) و (۲-۱۰) را با هم ترکیب کرده تا متغیرهای شاخه را حذف کنیم و یک معادله برداری برحسب بردار متغیر شبکه e بدست آوریم. معادله (۲-۱۰) را از سمت چپ در ماتریس A ضرب کرده و به جای v مقدار A^Te را قرار می‌دهیم و از معادله (۲-۶) نیز استفاده می‌کنیم تا بدست می‌آوریم:

$$AGA^Te + Aj_s - AGv_s = 0 \tag{۲-۱۳}$$

یا:

$$AGA^Te = AGv_s - Aj_s \tag{۲-۱۴}$$

eq214-

در معادله (۲-۱۴)، AGA^T یک ماتریس مربعی $n \times n$ است، در حالی که AGv_s و $-Aj_s$ بردارهای n بعدی هستند. اکنون طرز نمایش‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$Y_n \triangleq AGA^T \tag{۲-۱۵}$$

$$i_s \triangleq AGv_s - Aj_s \tag{۲-۱۶}$$

eq216-

بنابراین معادله (۲-۱۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{Y_ne = i_s} \tag{۲-۱۷}$$

eq217-

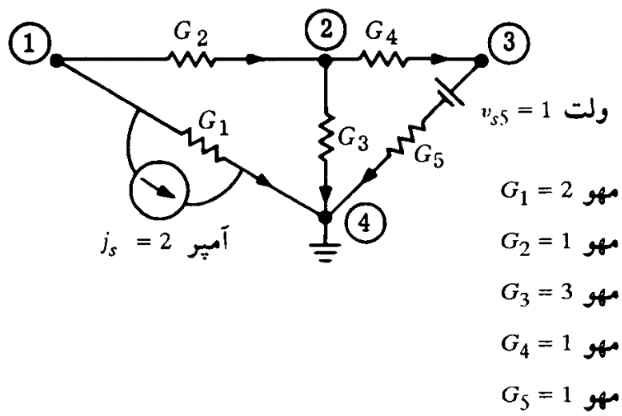
معمولا دسته معادلات (۲-۱۷) معادلات گره، Y_n ماتریس ادمیتانس گره و i_s بردار منبع جریان گره نامیده می‌شوند.

معادلات گره بسیار مهم هستند. ابتدا توجه کنید که چون خود گراف، ماتریس تلاقی مختصر شده A و رسانایی شاخه‌ها، ماتریس ادمیتانس شاخه G را مشخص می‌کنند، از این جهت ماتریس ادمیتانس گره Y_n ماتریس معلومی است و در واقع $Y_n \triangleq AGA^T$.

به طریق مشابه، بردارهای v_s و j_s که منابع موجود در شاخه‌ها را مشخص می‌کنند، معلوم هستند و بنابراین، بردار منبع جریان گره i_s نیز طبق رابطه (۲-۱۶) معلوم می‌گردد. بدیت ترتیب معادله (۲-۱۷) بردار

n مولفه‌ای مجهول e را به ماتریس $n \times n$ معلوم Y_n و بردار n مولفه‌ای معلوم i_s ارتباط می‌دهد. معادله برداری (۲-۱۷) مرکب از یک دستگاه n معادله جبری خطی برحسب n مجهول ولتاژ گره نسبت به مبنای $e_۱, e_۲, \cdots, e_n$ می‌باشد. پیدا کردن b ولتاژ شاخه v و b جریان شاخه j وقتی که e تعیین گردد، کار بسیار ساده‌ای است. درواقع از (۲-۷) بدست می‌آوریم $v = A^T e$ و با دانستن v و با استفاده از معادله شاخه (۲-۱۰)، j را بدست می‌آوریم، یعنی $\mathbf{j} = \mathbf{Gv} + \mathbf{j_s} - \mathbf{Gv_s}$.

ex23- **مثال ۲-۳** مدار شکل ۲-۱۰ را که در آن مقادیر تمام اجزا معلوم است، در نظر بگیرید. گراف این مدار همان گرافی است که در شکل ۲-۸ تشریح شد. اکنون جزئیات کامل طرز نوشتن معادلات و حل آن‌ها را برحسب متغیرهای شاخه بیان می‌کنیم [۱].



شکل ۲-۱۰: شبکه مثال ۲-۳ fig20

۱) یک گره مبنا مانند (۴) انتخاب کنید و بقیه گره‌ها را با علامت‌های (۱)، (۲) و (۳) مشخص کنید. ولتاژ گره‌های (۱)، (۲) و (۳) را نسبت به گره مبنا به ترتیب $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ بنامید.

۲) شاخه‌ها را با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری کنید و برای هر کدام یک جهت قراردادی تعیین نمائید. G_i رسانایی شاخه شماره i را نشان می‌دهد.

۳) سه معادله نابسته خطی که KCL را برای گره‌های (۱)، (۲) و (۳) بیان می‌کنند، بنویسید و بنابراین:

$$Aj = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۸)$$ eq218-

توجه کنید که ماتریس تلاقی مختصر شده A با ماتریس مثال ۲-۱ یکسان است.

۴) با به کار بردن KVL ولتاژ شاخه v_k را برحسب ولتاژهای گره e_i بیان کنید و بنابراین:

$$v = A^T e = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} \tag{۲-۱۹}$$

19-2

۵) معادلات شاخه‌ها را به صورت زیر بنویسید:

$$\mathbf{j} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{j_s} - \mathbf{G}\mathbf{v_s} \tag{۲-۲۰}$$

eq220-

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \tag{۲-۲۱}$$

به عنوان مثال معادله پنجم رابطه (۲-۲۰) چنین بیان می‌دارد: $j_۵ = v_۵ - ۱$

۶) در معادله (۲-۲۰) به جای v عبارت مربوط را از رابطه (۲-۱۹) قرار دهید و نتیجه را از سمت چپ در ماتریس A ضرب کنید. مطابق رابطه (۲-۱۸) نتیجه حاصل از سمت چپ مساوی صفر است. پس از دوباره مرتب کردن جملات، می‌توان جواب را به صورت زیر درآورد:

$$Y_n e = i_s \tag{۲-۲۲}$$

که در آن:

$$Y_n \triangleq AGA^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۵ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \tag{۲-۲۳}$$

و

$$i_s \triangleq AGv_s - Aj_s = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲۴-۲)$$

بنابراین معادله گره چنین است:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۵ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲۵-۲)$$

۷) معادله گره را نسبت به e حل می‌کنیم. حل عددی چنین معادلاتی برای $n > ۵$ با روش حذفی گوس انجام می‌گیرد. به طور کلی می‌توان جواب را برحسب ماتریس معکوس $Y_n^{-۱}$ بیان کرد. بدین ترتیب:

$$e = Y_n^{-۱} i_s = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} ۹ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۱۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} -۱۷ \\ -۱ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \qquad (۲۶-۲)$$

هنگامی که ولتاژهای گره e تعیین شدند، ولتاژهای شاخه v به طریق زیر بدست می‌آیند:

$$v = A^T e = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} -۱۷ \\ -۱۶ \\ -۱ \\ -۱۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \qquad (۲۷-۲)$$

گام بعدی بدست آوردن جریان‌های شاخه j با به کاربردن v و با استفاده از معادلات قبلی می‌باشد. در این صورت داریم:

$$\mathbf{j} = \mathbf{Gv} + \mathbf{j_s} - \mathbf{Gv_s} = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱۶ \\ -۳ \\ -۱۳ \\ -۱۳ \end{bmatrix} \qquad (۲۸-۲)$$

در اینجا تجزیه و تحلیل شبکه نشان داده شده تکمیل می‌شود، یعنی تمام ولتاژ و جریان شاخه‌ها تعیین شده‌اند.

در مثال بالا تمام مراحل و معادلات از ابتدا تا انتها بررسی شده است. اما برای می‌توان از گام‌های ۳، ۴ و ۵ صرف‌نظر کرد. در مثال زیر از این گام‌ها صرف‌نظر شده است.

ex24- **مثال ۲-۴** در مدار شکل ۲-۱۱ معادلات گره را به فرم ماتریسی نمایش دهید و ولتاژ گره‌ها را تعیین نمایید. این مدار دارای ۴ گره و ۷ شاخه است.

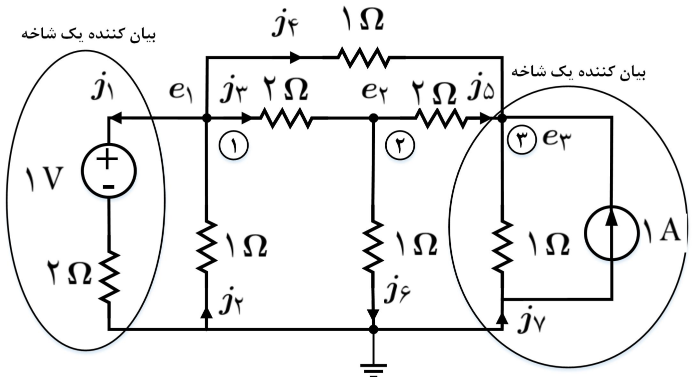


fig21

شکل ۲-۱۱: شبکه مثال ۲-۴

حل: در این مدار داریم:

$$n = n_t - 1 = 4 - 1 = 3, \quad b = 7$$

ماتریس‌های مورد نیاز:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 7} \quad G = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7\times 7}$$

$$v_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{7\times 1} \quad i_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{7\times 1} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{7\times 3}$$

$$Y_n = AGA^T = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad i_s = AGv_s - Aj_s = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Rightarrow Y_n e = i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای حل معادلات گره و بدست آوردن ولتاژ گره‌ها از روش کرامر استفاده می‌کنیم:

$$e_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۰/۵ & -۰/۵ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۰/۵ \\ ۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}} = \frac{۴/۶۲۵}{۱۱/۱۲۵} = ۰/۴۲$$

$$e_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۰ & -۰/۵ \\ -۱ & ۱ & ۲/۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}} = \frac{۲/۸۷۵}{۱۱/۱۲۵} = ۰/۲۶$$

$$e_۳ = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & -۰/۵ & ۰/۵ \\ -۰/۵ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۰/۵ & ۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}} = \frac{۶/۸۷۵}{۱۱/۱۲۵} = ۰/۶۲$$

۲-۳-۲ نوشتن معادلات گره به طور نظری

روش منظم از نظر محاسباتی حجیم و زمان‌بر است. بنابراین در عمل از روش نظری (میان‌بر) استفاده می‌شود. برای این که بتوان از روش نظری برای محاسبه ولتاژ گره‌ها استفاده کرد، باید ابتدا منابع ولتاژ به منابع جریان تبدیل شوند.

فرض کنید عنصر (k, i)ام ماتریس ادمیتانس گره Y_n را y_{ik} بنامیم. در این صورت، وقتی معادله برداری

$$Y_n e = i_s \qquad (۲\text{-}۲۹)$$

را به صورت اسکالر بنویسیم، بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \cdots & y_{۱n} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \cdots & y_{۲n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s۱} \\ i_{s۲} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۳۰)$$

در روش نظری پس از تبدیل منابع ولتاژ به منابع جریان، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) y_{ii}، یعنی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس ادمیتانس Y_n، برابر است با مجموع ادمیتانس‌هایی که به گره (i)ام متصل می‌باشند، که به آن ادمیتانس خودی گره (i) می‌گویند.

۲) y_{ik}، یعنی درایه‌های روی غیرقطر اصلی ماتریس ادمیتانس Y_n، برابر است با منفی مجموع ادمیتانس‌هایی که به طور مستقیم بین گره‌های (i) و (k) متصل هستند، که به آن ادمیتانس متقابل بین گره‌های (i) و (k) می‌گویند.

۳) i_{sk} برابر است با مجموع جبری منابع جریانی که به گره (k)ام وارد می‌شوند؛ به آن منابع جریانی که به گره وارد می‌شوند، علامت مثبت و به منابع جریانی که خارج می‌شوند، علامت منفی نسبت می‌دهیم.

ex25-

مثال ۲-۵ در مدار شکل ۲-۱۲ معادلات گره را با روش نظری به صورت ماتریسی بنویسید و ولتاژ گره‌ها را تعیین کنید.

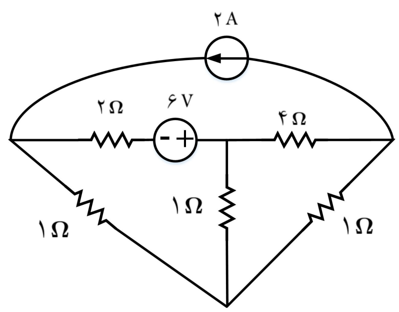


fig22

شکل ۲-۱۲: شبکه مثال ۲-۵

ابتدا اگر منابع ولتاژ در مدار باشد، باید همه آن‌ها را تبدیل به منابع جریان نمود. سپس، یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب نموده و بقیه گره‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. شکل ۲-۱۲ به شکل ۲-۱۳ تغییر پیدا می‌کند. مدار دارای سه گره است، پس ماتریس ادمیتانس Y_n ۳ × ۳ خواهد بود. همچنین دقت شود که مقادیر مقاومت‌ها برحسب اهم است.

$$Y_n e = i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ + ۰/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱ + ۰/۲۵ + ۰/۵ & -۰/۲۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۰/۲۵ + ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ - ۳ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱/۷۵ & -۰/۲۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

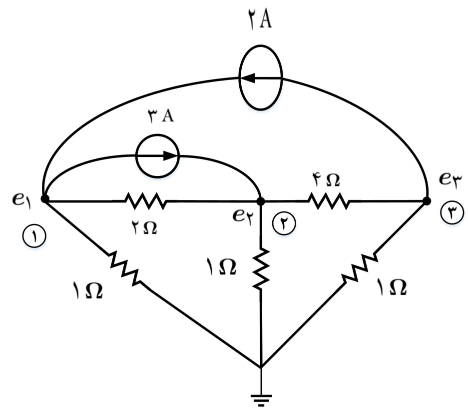


fig23 شکل ۲-۱۳: شبکه تغییریافته مثال ۲-۵

حال باید از روش کرامر برای بدست آوردن ولتاژ گره‌ها استفاده نمود:

$$e_{۱}=\frac{\begin{vmatrix}-۱ & -۰٫۵ & ۰\\ ۳ & ۱٫۷۵ & -۰٫۲۵\\ -۲ & -۰٫۲۵ & ۱٫۲۵\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱٫۵ & -۰٫۵ & ۰\\ -۰٫۵ & ۱٫۷۵ & -۰٫۲۵\\ ۰ & -۰٫۲۵ & ۱٫۲۵\end{vmatrix}}=\frac{-۰٫۵}{۰٫۷۵}=-۰٫۶۷$$

$$e_{۲}=\frac{\begin{vmatrix}۱٫۵ & -۱ & ۰\\ -۰٫۵ & ۳ & -۰٫۲۵\\ ۰ & -۲ & ۱٫۲۵\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱٫۵ & -۰٫۵ & ۰\\ -۰٫۵ & ۱٫۷۵ & -۰٫۲۵\\ ۰ & -۰٫۲۵ & ۱٫۲۵\end{vmatrix}}=\frac{۴٫۲۵}{۰٫۷۵}=۵٫۶۷$$

$$e_{۳}=\frac{\begin{vmatrix}۱٫۵ & -۰٫۵ & -۱\\ -۰٫۵ & ۱٫۷۵ & ۳\\ ۰ & -۰٫۲۵ & -۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱٫۵ & -۰٫۵ & ۰\\ -۰٫۵ & ۱٫۷۵ & -۰٫۲۵\\ ۰ & -۰٫۲۵ & ۱٫۲۵\end{vmatrix}}=\frac{-۳٫۷۵}{۰٫۷۵}=-۵$$

نکته ۲-۶ اگر در سمت راست معادلات (ستون مقادیر ثابت) متغیرهای اضافی ظاهر شدند (به واسطه وجود منابع وابسته)، ابتدا باید این متغیرهای اضافی را برحسب متغیرهای اصلی روش گره (ولتاژ گره‌ها) بدست آورد و اثر آن را به سمت چپ معادلات انتقال داد.

ex26- **مثال ۲-۶** در مدار شکل ۲-۱۴ با روش نظری معادلات گره را به صورت ماتریسی بنویسید و ولتاژ گره‌ها را تعیین کنید.

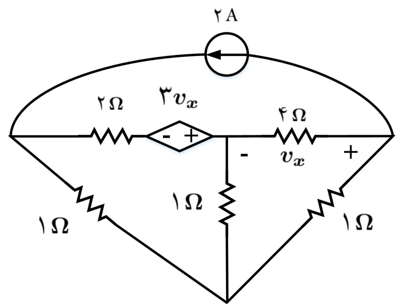


fig24

شکل ۲-۱۴: شبکه مثال ۲-۶

مدار شکل ۲-۱۴ مشابه مدار مثال ۲-۵ می‌باشد، با این تفاوت که یک منبع وابسته $۳v_x$ که به ولتاژ مقاومت ۴Ω وابسته است در مدار قرار گرفته است. پس از تبدیل منابع ولتاژ به منابع جریان و شماره‌گذاری گره‌ها، معادلات گره را می‌نویسیم.

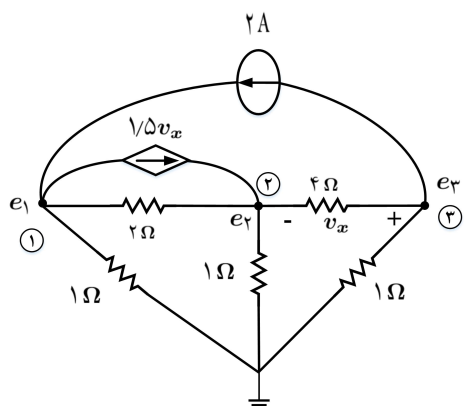


fig25

شکل ۲-۱۵: شبکه تغییریافته مثال ۲-۶

$$Y_n e = i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱/۷۵ & -۰/۲۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ - ۱/۵v_x \\ ۱/۵v_x \\ -۲ \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در سمت راست معادلات متغیر اضافی v_x ظاهر شده است که باید بر حسب متغیرهای اصلی روش گره (ولتاژ گره‌ها) بدست آید و در معادلات جایگذاری شود. در نتیجه:

$$v_x = e_۳ - e_۲ \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۱/۵ & -۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱/۷۵ & -۰/۲۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ - ۱/۵(e_۳ - e_۲) \\ ۱/۵(e_۳ - e_۲) \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ - ۱/۵e_۳ + ۱/۵e_۲ \\ ۱/۵e_۳ - ۱/۵e_۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

سپس باید جملاتی که دارای ضرایبی از ولتاژ گره‌ها در سمت راست معادلات هستند، به سمت چپ منتقل شوند:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۰/۵-۱/۵ & ۰+۱/۵ \\ -۰/۵ & ۱/۷۵+۱/۵ & -۰/۲۵-۱/۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱/۵ & -۲ & ۱/۵ \\ -۰/۵ & ۳/۲۵ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

حال باید از روش کرامر برای بدست آوردن ولتاژ گره‌ها استفاده نمود:

$$e_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & -۲ & ۱/۵ \\ ۰ & ۳/۲۵ & -۱/۷۵ \\ -۲ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱/۵ & -۲ & ۱/۵ \\ -۰/۵ & ۳/۲۵ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{vmatrix}} = \frac{۱۰}{۴/۳۷۵} = ۲/۲۹$$

$$e_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۱/۵ & ۲ & ۱/۵ \\ -۰/۵ & ۰ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۲ & ۱/۲۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱/۵ & -۲ & ۱/۵ \\ -۰/۵ & ۳/۲۵ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{vmatrix}} = \frac{-۲/۵}{۴/۳۷۵} = -۰۵۷$$

$$e_۳ = \frac{\begin{vmatrix} ۱/۵ & -۲ & ۲ \\ -۰/۵ & ۳/۲۵ & ۰ \\ ۰ & -۰/۲۵ & -۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱/۵ & -۲ & ۱/۵ \\ -۰/۵ & ۳/۲۵ & -۱/۷۵ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱/۲۵ \end{vmatrix}} = \frac{-۷/۵}{۴/۳۷۵} = -۱/۷۱$$

نکته ۲-۷ برای شبکه‌هایی که از مقاومت‌ها و منابع نابسته تشکیل می‌شوند، ماتریس ادمیتانس گره $Y_n = (y_{ik})$ یک ماتریس متقارن است، یعنی برای $i, k = ۱, ۲, \cdots, n$ داریم: $y_{ik} = y_{ki}$. درواقع چون $Y_n \triangleq AGA^T$ در این صورت:

$$Y_n^T = (AGA^T)^T = AG^TA^T = AGA^T = Y_n$$

در مرحله آخر از رابطه $G = G^T$ استفاده کردیم، زیرا ماتریس رسانایی شاخه G یک شبکه مقاومتی بدون عناصر تزویج شده، یک ماتریس متقارن است [۱].

۲-۳-۳ تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

اکنون یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شامل مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها و منابع نابسته را در نظر بگیرید. معمولا این چنین شبکه‌ها را شبکه‌های RLC گویند. فرض کنید که ما تنها به تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی علاقه‌مند هستیم و به علاوه تمام منابع نابسته از نوع سینوسی با فرکانس زاویه‌ای یکسان ω بوده و جریان و ولتاژ شاخه‌ها به حالت دائمی رسیده باشند. در نتیجه، برای نوشتن معادلات شاخه و قوانین کیرشف از فازورهای ولتاژ، جریان، امپدانس و ادمیتانس استفاده خواهیم کرد [۱].

تعاریف اولیه:

ورودی: در هر مدار الکتریکی به منابع مستقل اصطلاحا ورودی می‌گویند.

پاسخ (خروجی): در هر مدار الکتریکی به متغیر خاصی از مدار (معمولا ولتاژ یک شاخه یا جریان یک شاخه)، که بدست آوردن آن مورد نظر است، اصطلاحا خروجی یا پاسخ مدار گفته می‌شود.

پاسخ ورودی صفر: وقتی در مداری ورودی وجود نداشته باشد، به پاسخ آن اصطلاحا پاسخ ورودی صفر می‌گویند.

حالت اولیه: در هر مدار الکتریکی به ولتاژ اولیه خازن‌ها و جریان اولیه سلف‌ها، اصطلاحا حالت اولیه مدار گفته می‌شود.

پاسخ حالت صفر: چنانچه مداری فقط وورودی داشته باشد و کلیه ولتاژ اولیه خازن‌ها و جریان اولیه سلف‌ها صفر باشند، به پاسخ آن مدار اصطلاحا پاسخ حالت صفر می‌گویند.

پاسخ کامل: چنانچه در مداری هم ورودی وجود داشته باشد و هم حالت اولیه مخالف صفر باشد، به پاسخ آن مدار پاسخ کامل می‌گویند. در واقع داریم:

$$\text{پاسخ کامل} = \text{پاسخ حالت صفر} + \text{پاسخ ورودی صفر}$$

پاسخ گذرا: بخشی از پاسخ کامل مدار که مقدار آن با گذشت زمان طولانی به مقداری مشخصی میل می‌کند، پاسخ گذرای مدار نامیده می‌شود. شکل پاسخ گذرا معمولا به صورت Ae^{-st} می‌باشد و عوامل ایجاد آن، وجود حالت اولیه در مدار و یا اعمال ناگهانی ورودی به مدار است.

پاسخ حالت ماندگار: بخشی از پاسخ کامل مدار که مقدار آن با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند، پاسخ حالت ماندگار یا پاسخ حالت دائمی مدار نامیده می‌شود. در واقع داریم:

$$\text{پاسخ کامل} = \text{پاسخ گذرا} + \text{پاسخ حالت دائمی}$$

حالت دائمی سینوسی: زمانی که اصطلاحا حالت دائمی سینوسی ذکر می‌شود، یعنی با مدارهایی سر و کار داریم که ورودی آن‌ها سینوسی است و به دنبال یافتن پاسخ حالت دائمی این مدارها هستیم. شکل پاسخ حالت دائمی این مدارها شبیه به ورودی (سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ورودی) است. در این حالت با استفاده از مفهوم امپدانس و نمایش فازوری می‌توان روش نظری گره را مانند قبل استفاده نمود. نمایش فازوری سبب می‌شود که در تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارها با اعداد مختلط سر و کار داشته باشیم.

مرور اعداد مختلط: عدد مختلط z را می‌توان به چند طریق بیان کرد. شکل کارتزین یا مستطیلی برای z به صورت زیر است:

$$z = x + jy$$

که در آن $j = \sqrt{-۱}$ بوده و x و y اعداد حقیقی هستند که آن‌ها را به ترتیب جز حقیقی و جز موهومی z می‌نامند. اغلب از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \mathrm{Re}\{z\} = r\cos\theta, \quad y = \mathrm{Im}\{z\} = r\sin\theta$$

عدد مختلط z را همچنین می‌توان به صورت زیر به شکل قطبی بیان کرد: $z = re^{j\theta}$ که در آن $r > ۰$ اندازه z و θ زاویه یا فاز z می‌باشند. این کمیت‌ها اغلب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}, \quad \theta = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right) = \angle z = \measuredangle z$$

رابطه بین این دو نمایش اعداد مختلط را می‌توان با استفاده از رابطه اویلر،

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

و یا با ترسیم z در صفحه مختلط چنان که در شکل ۲-۱۶ نشان داده شده است و در آن محورهای مختصات $\mathrm{Re}\{z\}$ در امتداد محور افقی و $\mathrm{Im}\{z\}$ در امتداد محور عمودی هستند، تعیین کرد. در این نمایش ترسیمی، x و y مختصات کارتزین z بوده و r و θ مختصات قطبی آن می‌باشند.

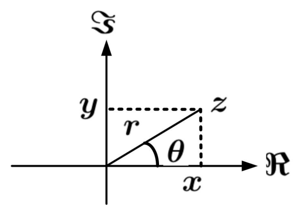


fig26

شکل ۲-۱۶: ترسیم عدد مختلط در صفحه مختلط

عملیات با اعداد مختلط:
نکته:

$$\frac{۱}{j} = -j, \; j = \sqrt{-۱}, \; j^۲ = jj = -۱, \; j^۳ = -j, \; j^۴ = ۱$$

نکته: مزدوج عدد مختلط $z = x + jy = r\angle\theta$ عبارت است از: $\bar{z} = x - jy = r\angle -\theta$.
فرض کنید دو عدد مختلط به صورت زیر داریم:

$$z_۱ = x_۱ + jy_۱ = r_۱\angle\theta_۱, \quad z_۲ = x_۲ + jy_۲ = r_۲\angle\theta_۲$$

برای جمع و تفریق دو عدد مختلط معمولا از صورت دکارتی آن‌ها استفاده می‌کنیم:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

برای ضرب و تقسیم دو عدد مختلط معمولا از صورت قطبی آن‌ها بهره خواهیم برد:

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{اگر } z_2 \neq 0)$$

برای ضرب و تقسیم دو عدد مختلط می‌توان از صورت دکارتی آن‌ها نیز بهره برد:

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \times \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

۲-۳-۳-۱ مدل‌سازی عناصر مدار الکتریکی در حوزه فازور

در حوزه فازور از حروف بزرگ برای نمایش عناصر مدار الکتریکی استفاده می‌شود.

منابع مستقل سینوسی:

در حالت کلی منبع سینوسی با رابطه $A\cos(\omega t + \theta)$ مشخص می‌شود که آن را در حوزه فازور با عدد مختلط $A\angle\theta$ نمایش می‌دهیم.

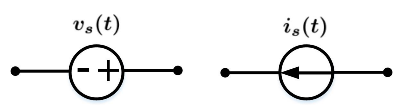


fig27

شکل ۲-۱۷: منابع مستقل در حوزه فازور

منابع وابسته:

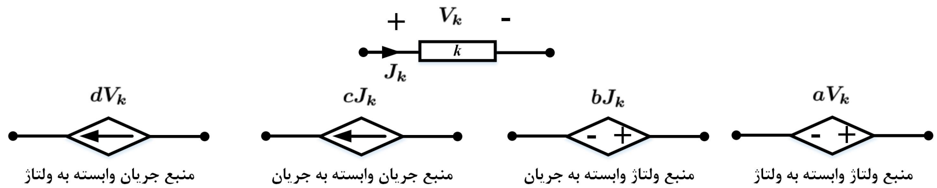
این منابع در حوزه فازور بدون تغییر باقی می‌مانند. فقط از حروف بزرگ برای نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم. در شکل ۲-۱۸ چهار نوع منبع نابسته که به ولتاژ یا جریان شاخه kام مدار وابسته هستند، نشان داده شده است.

مقاومت:

مقاومت R در حوزه فازور با امپدانس R یا ادمیتانس G نمایش داده می‌شود.

$$V_R = RI_R \Rightarrow Z_R = R \text{ امپدانس}, \quad Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G \text{ ادمیتانس}$$

خازن:



شکل ۲-۱۸: منابع نابسته در حوزه فازور

fig28

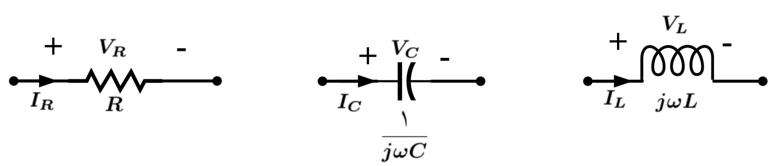
خازن C را در حوزه فازور با امپدانس $\frac{۱}{j\omega C}$ یا ادمیتانس $j\omega C$ نمایش می‌دهیم.

$$V_C = \frac{۱}{j\omega C} I_C \Rightarrow Z_C = \frac{۱}{j\omega C} \text{ امپدانس}, \quad Y_C = \frac{۱}{Z_C} = j\omega C \text{ ادمیتانس}$$

سلف:

سلف L را در حوزه فازور با امپدانس $j\omega L$ یا ادمیتانس $\frac{۱}{j\omega L}$ نمایش می‌دهیم.

$$V_L = j\omega L I_L \Rightarrow Z_L = j\omega L \text{ امپدانس}, \quad Y_L = \frac{۱}{Z_L} = \frac{۱}{j\omega L} \text{ ادمیتانس}$$



شکل ۲-۱۹: مقاومت، سلف و خازن در حوزه فازور

fig29

سلف تزویج:

سلف‌های تزویج با ماتریس ضرایب القا مشخص می‌شوند. با توجه به رابطه ولتاژ و جریان ماتریس ضرایب القا به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} v_{L۱}(t) = L_{۱۱}\dfrac{di_{L۱}(t)}{dt} + M\dfrac{di_{L۲}(t)}{dt} \\ v_{L۲}(t) = M\dfrac{di_{L۱}(t)}{dt} + L_{۲۲}\dfrac{di_{L۲}(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} L_{۱۱} & M \\ M & L_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$L_{۱۱}$ و $L_{۲۲}$ ضرایب خود القایی و مثبت هستند. ولی M ضریب القای متقابل، ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر سیم‌پیچ‌ها طوری پیچیده شوند که شارهای آن‌ها با هم جمع شوند، M مثبت و در غیر این صورت

منفی خواهد بود. با قرارداد نقطه‌ای، طرز پیچیده شدن سلف‌ها به وسیله نقاطی که در نزدیکی سرهای سلف‌ها گذاشته می‌شود، مشخص می‌شود، مشخص می‌گردد. برای تعیین علامت M ابتدا برای هر دو سلف جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب می‌کنیم. چنانچه هردو جریان i_{L1} و i_{L2} از سر نقطه دار به سیم‌پیچ‌ها وارد شوند یا هر دو از سر نقطه‌دار خارج شوند، M مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود. ماتریس ضرایب

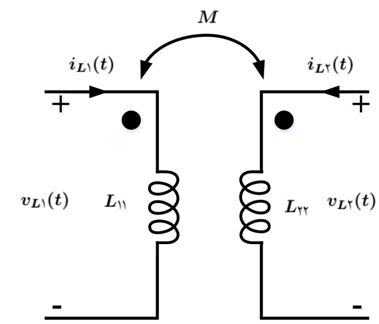


fig30

شکل ۲-۲۰: مقاومت، سلف و خازن در حوزه فازور

خودالقای معکوس را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} i_{L۱}(t) = \Gamma_{۱۱}\int_{-\infty}^{t} v_{L۱}(t)dt + \Gamma_{۱۲}\int_{-\infty}^{t} v_{L۲}(t)dt \\ i_{L۲}(t) = \Gamma_{۲۱}\int_{-\infty}^{t} v_{L۱}(t)dt + \Gamma_{۲۲}\int_{-\infty}^{t} v_{L۲}(t)dt \end{cases}$$

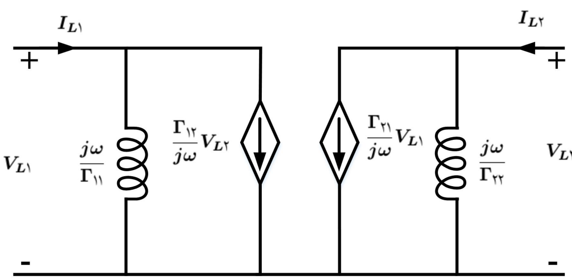
$$\Gamma = L^{-۱} = \begin{bmatrix} \Gamma_{۱۱} & \Gamma_{۱۲} \\ \Gamma_{۲۱} & \Gamma_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{۲۲}}{L_{۱۱}L_{۲۲}-M^{۲}} & \frac{-M}{L_{۱۱}L_{۲۲}-M^{۲}} \\ \frac{-M}{L_{۱۱}L_{۲۲}-M^{۲}} & \frac{L_{۱۱}}{L_{۱۱}L_{۲۲}-M^{۲}} \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $\frac{d}{dt}$ در حوزه فازور به $j\omega$ و $\int_{-\infty}^{t}$ به $\frac{۱}{j\omega}$ تبدیل می‌شوند، دو مجموعه بالا را می‌توان به حوزه فازور انتقال داد.

مدل سلف تزویج مناسب برای روش گره:

در این مدل اثر سلف تزویج در قالب منابع وابسته نشان داده می‌شود، با استفاده از این مدل‌ها می‌توان روش گره را مانند قبل استفاده نمود.

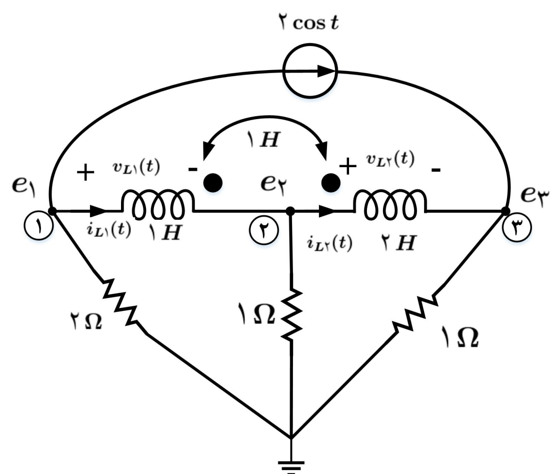
$$\begin{cases} i_{L۱}(t) = \Gamma_{۱۱}\int_{-\infty}^{t} v_{L۱}(t)dt + \Gamma_{۱۲}\int_{-\infty}^{t} v_{L۲}(t)dt \\ i_{L۲}(t) = \Gamma_{۲۱}\int_{-\infty}^{t} v_{L۱}(t)dt + \Gamma_{۲۲}\int_{-\infty}^{t} v_{L۲}(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{L۱} = \frac{\Gamma_{۱۱}}{j\omega}V_{L۱} + \frac{\Gamma_{۱۲}}{j\omega}V_{L۲} \\ I_{L۲} = \frac{\Gamma_{۲۱}}{j\omega}V_{L۱} + \frac{\Gamma_{۲۲}}{j\omega}V_{L۲} \end{cases}$$



شکل ۲-۲۱: مدل سلف تزویج در حوزه فازور برای روش گره

fig31

ex27- **مثال ۲-۷** با فرض اینکه مدار شکل ۲-۲۲ در حالت دائمی سینوسی است، ولتاژ تمام گره‌های مدار را در حوزه زمان تعیین کنید.



شکل ۲-۲۲: شکل مثال ۲-۷

fig32

با توجه به جهت‌های انتخاب شده، به دلیل اینکه یکی از جریان‌ها از سر نقطه‌دار وارد سلف می‌شود و دیگری از سر نقطه‌دار خارج می‌شود، علامت M منفی است. بنابراین: $M = -۱$.

برای استفاده از روش گره نیاز به ضرایب القای معکوس سلف‌های تزویج داریم:

$$\Gamma = L^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۲-۱}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{۱۱} & \Gamma_{۱۲} \\ \Gamma_{۲۱} & \Gamma_{۲۲} \end{bmatrix}$$

با دانستن مقدار فرکانس برابر با $\omega = ۱$ مدل مدار در حوزه فازور به صورت شکل ۲-۲۳ خواهد بود.

داریم:

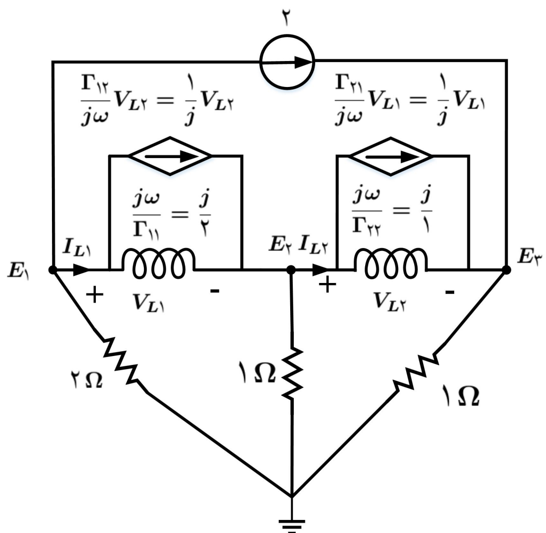


fig33

شکل ۲-۲۳: شکل مثال ۲-۷

$$Y_nE = I_s \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{j۱} & -\frac{۲}{j۱} & ۰ \\ -\frac{۲}{j۱} & ۱+\frac{۲}{j۱}+\frac{۱}{j۱} & -\frac{۱}{j۱} \\ ۰ & -\frac{۱}{j۱} & ۱+\frac{۱}{j۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲-\frac{۱}{j۱}V_{L۲} \\ \frac{۱}{j۱}V_{L۲}-\frac{۱}{j۱}V_{L۱} \\ ۲+\frac{۱}{j۱}V_{L۱} \end{bmatrix}$$

$$V_{L۱} = E_۱ - E_۲, \quad V_{L۲} = E_۲ - E_۳$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۵-j۲ & j۲ & ۰ \\ j۲ & ۱-j۳ & j \\ ۰ & j & ۱-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲+j(E_۲-E_۳) \\ -j(E_۲-E_۳)+j(E_۱-E_۲) \\ ۲-j(E_۱-E_۲) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۵-j۲ & j۲ & ۰ \\ j۲ & ۱-j۳ & j \\ ۰ & j & ۱-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲+jE_۲-jE_۳ \\ -j۲E_۲+jE_۳+jE_۱ \\ ۲-jE_۱-jE_۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۵-j۲ & j۲-j & ۰+j \\ j۲-j & ۱-j۳+j۲ & j-j \\ ۰+j & j-j & ۱-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۵-j۲ & j & j \\ j & ۱-j & ۰ \\ j & ۰ & ۱-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \\ E_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

برای حل معادلات گره و بدست آوردن ولتاژ گره‌ها از روش کرامر استفاده می‌کنیم:

$$E_1=\frac{\begin{vmatrix}-2 & j & j\\ 0 & 1-j & 0\\ 2 & 0 & 1-j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.5-j2 & j & j\\ j & 1-j & 0\\ j & 0 & 1-j\end{vmatrix}}=\frac{-2+j2}{-2-j3}=\frac{2.83\angle 135}{3.61\angle -123.69}=0.78\angle 258.69$$
$$\Rightarrow e_1(t)=0.78\cos(t+258.69)$$

$$E_2=\frac{\begin{vmatrix}0.5-j2 & -2 & j\\ j & 0 & 0\\ j & 2 & 1-j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.5-j2 & j & j\\ j & 1-j & 0\\ j & 0 & 1-j\end{vmatrix}}=\frac{j2}{-2-j3}=\frac{2\angle 90}{3.61\angle -123.69}=0.55\angle 213.69$$
$$\Rightarrow e_2(t)=0.55\cos(t+213.69)$$

$$E_3=\frac{\begin{vmatrix}0.5-j2 & j & -2\\ j & 1-j & 0\\ j & 0 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.5-j2 & j & j\\ j & 1-j & 0\\ j & 0 & 1-j\end{vmatrix}}=\frac{1-j3}{-2-j3}=\frac{3.16\angle -71.57}{3.61\angle -123.69}=0.88\angle 52.15$$
$$\Rightarrow e_3(t)=0.88\cos(t+52.15)$$

۲-۴ دوگانی

۲-۴-۱ گراف‌های مسطح، مش‌ها، مش‌های بیرونی

به موجب تعریفی که برای یک گراف انتخاب نمودیم، یعنی دسته‌ای از گره‌ها و دسته‌ای از شاخه‌ها که هر کداک در یک انتها به گره‌ای ختم می‌شود، واضح است که هر گراف داده شده را می‌توان به چند طریق مختلف رسم نمود. به عنوان مثال، سه گراف نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ نمایش‌های یک گراف هستند. در واقع آن‌ها ماتریس تلاقی یکسان دارند. به طریق مشابه، یک حلقه مفهومی دارد که به طرز ترسیمی گراف بستگی ندارد. به عنوان مثال، شاخه‌های f، b، c و e در سه گراف نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ یک حلقه تشکیل می‌دهند [۱].

چنانچه واژه مش را به طور حسی به کار بریم، حلقه $bcef$ در شکل ۲-۲۴(ب) را یک مش نامیده ولی در شکل‌های ۲-۲۴(الف) یا ۲-۲۴(ج) چنین نخواهد بود. بدین ترتیب لازم است گراف‌هایی که به طرز

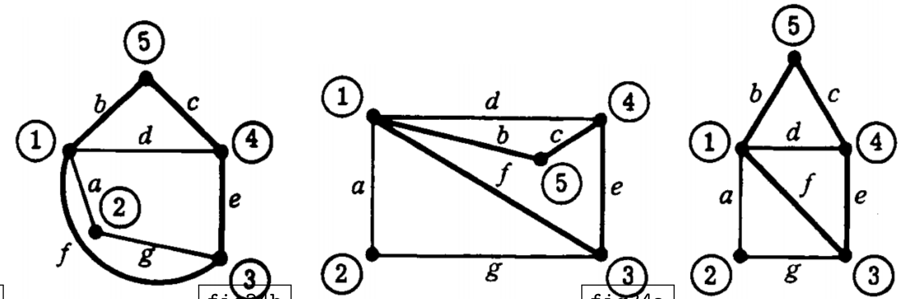


fig34c fig34b fig34a

(الف) گراف اول (ب) گراف دوم (ج) گراف سوم

fig34

شکل ۲-۲۴: شکل‌های الف، ب و ج گراف یکسانی را به صورت سه گراف که از لحاظ توپولوژیکی متفاوت‌اند، نشان می‌دهد.

خاصی رسم شده‌اند، در نظر گرفته شوند. هنگامی که بخواهیم یک گراف g را که توسط ما به طرز خاصی رسم شده است در نظر بگیریم، آن را گراف توپولوژیکی g خواهیم نامید. مثلا سه گراف نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ را می‌توان به عنوان گراف یکسان و یا سه گراف توپولوژیکی متفاوت در نظر گرفت [۱].

گراف g را مسطح گویند، چنانچه بتوان آن را روی یک صفحه چنان رسم نمود که هیچ دو شاخه آن همدیگر را در نقطه‌ای که یک گره نباشد، قطع نکنند. گراف شکل ۲-۲۵(الف) یک گراف مسطح بوده و گراف شکل ۲-۲۵(ب) مسطح نمی‌باشد [۱].

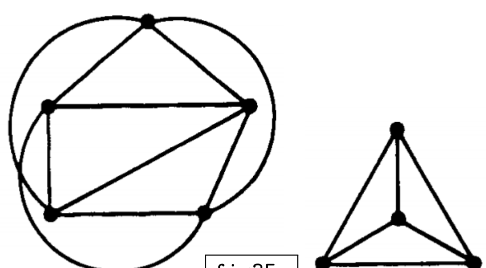


fig35b fig35a

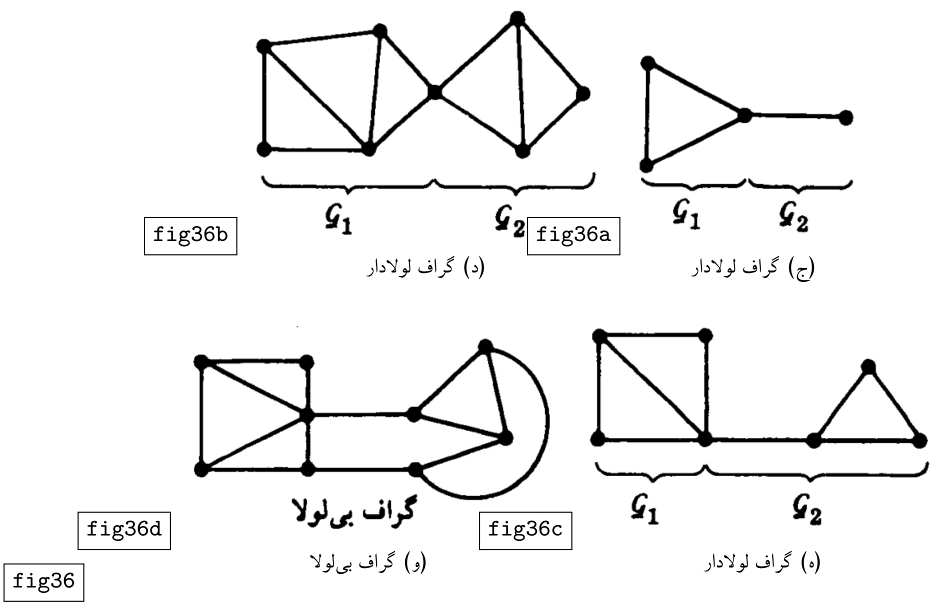
(الف) گراف مسطح (ب) گراف نامسطح

fig35

گراف توپولوژیکی مسطح g را در نظر بگیرید، هر حلقه این گراف را که شاخه‌ای در درون آن نباشد، مش می‌نامیم. به عنوان مثال، در گراف توپولوژیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۴(الف) حلقه $fbce$ یک مش نیست و در گراف توپولوژیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۴(ب) حلقه $fbce$ یک مش می‌باشد. در

حلقه $fbce$ شکل ۲-۲۴(ج) هیچ شاخه‌ای در قسمت بیرونی وجود ندارد و این حلقه، مش بیرونی گراف توپولوژیکی نامیده می‌شود [۱].

اکنون نوعی از شبکه‌ها نشان می‌دهیم که گراف‌های آن‌ها خواص معینی را که منجر به ساده کردن تجزیه و تحلیل می‌گردند، دارا می‌باشند. سه گراف نشان داده شده در شکل ۲-۲۵(ج) تا ۲-۲۵(ه) را در نظر بگیرید. هر یک از این گراف‌ها دارای این خاصیت هستند که می‌توان آن‌ها را به دو زیر گراف ناسوده[۱] $g_۱$ و $g_۲$ که تنها در یک گره به همدیگر متصل می‌باشند، تفکیک نمود. گراف‌هایی که دارای این خاصیت باشند، لولادار نامیده می‌شوند. گرافی که لولادار نباشد، گراف بی‌لولا (یا گراف غیرقابل تفکیک) خوانده می‌شود. بدین ترتیب، یک گراف بی‌لولا دارای این خاصیت است که هروقت به دو زیر گراف ناسوده متصل به هم $g_۱$ و $g_۲$ تفکیک شود، این زیر گراف‌ها حداقل دارای دو گره مشترک می‌باشند [۱].



(د) گراف لولادار (ج) گراف لولادار

(و) گراف بی‌لولا (ه) گراف لولادار

۲-۴-۱-۱ شمارش مش‌ها

در یک گراف مسطح بی‌لولای متصل به هم، تعداد مش‌ها مساوی

$$l = b - n_t + ۱ \qquad (۲-۳۱)$$

[۱] منظور از یک گراف ناسوده گرافی است که از یک گره تنها تشکیل نشده باشد.

است که در آن b تعداد شاخه‌ها و n_t تعداد گره‌ها است.

۲-۴-۱-۲ ماتریس M_a

یک خاصیت اساسی گراف مسطح بی‌لولا متصل به هم آن است که، اگر مش بیرونی را نیز شامل کنیم، هر شاخه گراف درست متعلق به دو مش می‌باشد. یک چنین گرافی با جهت‌های شاخه مشخص شده را در نظر بگیرید. جهت‌های قراردادی زیر را طبق قرارداد برای مش‌ها تعیین خواهیم کرد: جهت عقربه‌های ساعت برای هر مش درونی و جهت خلاف عقربه‌های ساعت برای مش بیرونی. این عمل در گراف شکل ۲-۲۵ نشان داده شده است. بدین ترتیب، گراف مسطح جهت‌دار g را که بی‌لولا و متصل به هم می‌باشد، می‌توان با یک ماتریس M_a به طور تحلیلی توصیف نمود. فرض کنید گراف g دارای b شاخه و $l+۱$ مش باشد (مش بیرونی نیز شامل می‌شود)، در این صورت ماتریس M_a به صورت یک ماتریس مستطیلی با $l+۱$ سطر و b ستون تعریف می‌گردد که عنصر (k,i)ام آن m_{ik} به صورت زیر می‌باشد:

$$m_{ik}=\begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آن‌ها برهم منطبق باشند} \\ -۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آن‌ها برهم منطبق نباشند} \\ ۰ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ نباشد} \end{cases} \qquad (۲-۳۲)$$

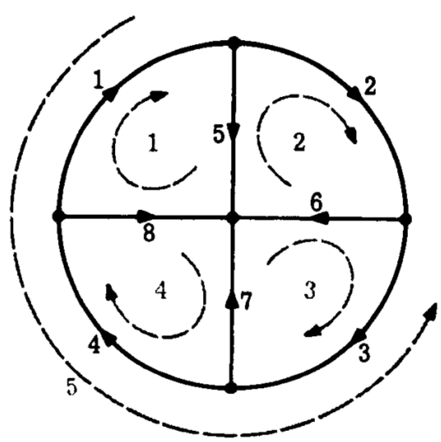


fig37

شکل ۲-۲۵: یک گراف مسطح جهت‌دار با هشت شاخه و پنج مش (با درنظر گرفتن مش بیرونی)

برای گراف نشان داده شده در شکل ۲-۲۵، $b=۸$ و $l+۱=۵$ است و ماتریس M_a چنین است:

$$
\text{مش‌ها}\left\{
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}}^{\text{شاخه‌ها}} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\right.
$$

ملاحظه می‌کنیم که ماتریس M_a یک خاصیت مشترک با ماتریس تلاقی A_a دارد؛ یعنی، تمام عناصر هر ستون آن صفر است به جز یک ۱+ و یک ۱−.

۲-۴-۲ گراف‌های دو گان

با گراف توپولوژیکی g که مسطح، بی‌لولا و متصل به هم فرض می‌شود، شروع می‌کنیم. فرض کنید g دارای $n_t = n + 1$ گره، b شاخه و در نتیجه $l = b - n$ مش باشد (مش بیرونی را به حساب نیاوردیم). گراف توپولوژیکی $\hat{g}$ را گراف دوگان یک گراف توپولوژیکی g نامند اگر [۱]:

۱- میان مش‌های g (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های $\hat{g}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش‌های $\hat{g}$ (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره‌های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به قسمی که هرگاه دو مش یک گراف، دارای شاخه مشترکی باشند، گره‌های متناظر این دو مش در گراف دیگر، شاخه متناظری خواهند داشت که آن‌ها را به هم وصل می‌کند.

از این تعریف چنین بر می‌آید که $\hat{g}$ دارای b شاخه، $l+1$ گره، n مش و یک مش بیرونی است. می‌توان براحتی ملاحظه کرد که اگر $\hat{g}$ گراف دوگان g باشد، در این صورت g نیز گراف دوگان $\hat{g}$ خواهد بود. به عبارت دیگر، دوگانی، رابطه‌ای متقارن میان گراف‌های توپولوژیکی مسطح، بی‌لولا و متصل به هم می‌باشد [۱].

۲-۴-۲-۱ الگوریتم

با داشتن گراف توپولوژیکی مسطح، بی‌لولا و متصل به هم، گراف دوگان $\hat{g}$ را به صورت زیر می‌سازیم [۱]:

۱- برای هر یک از مش‌های g با حساب اوردن مش بیرونی، یک گره از $\hat{g}$ متناظر می‌سازیم. بدین ترتیب گره $\hat{۱}$ را با مش ۱ متناظر ساخته و گره $\hat{۱}$ را در درون مش ۱ رسم می‌کنیم. در مورد هر یک از گره‌های $\hat{۲}$، $\hat{۳}$،...، همچنین گره $\widehat{l+۱}$ که متناظر با مش بیرونی است، عمل مشابهی انجام می‌دهیم.

۲- برای هر شاخه، مانند k از g، که میان مش‌های i و j مشترک است، یک شاخه k از $\hat{g}$ را که به گره‌های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ متصل است متناظر می‌سازیم.

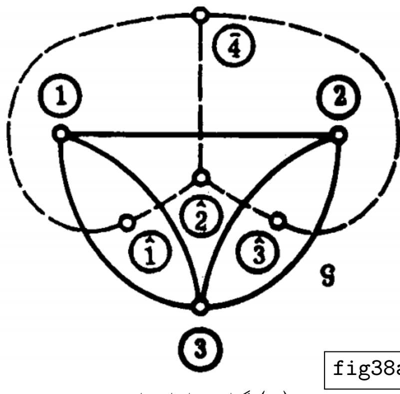
بدین ترتیب ساختمان گراف بدست آمده $\hat{g}$ یک دوگان گراف g می‌باشد [۱].

ex28- **مثال ۲-۸** گراف مسطح معلومی در شکل ۲-۲۶(الف) نشان داده شده است. در این گراف، بدون در نظر گرفتن مش بیرونی، سه مش وجود دارد. گره‌های $\hat{۱}$، $\hat{۲}$ و $\hat{۳}$ را مطابق شکل ۲-۲۶(ب) در درون هر یک از مش‌ها قرار می‌دهیم. گره $\hat{۴}$ را در بیرون گراف g قرار می‌دهیم زیرا گره $\hat{۴}$ با مش بیرونی متناظر خواهد بود. برای نکمیل گراف دوگان $\hat{g}$، هرگاه دو مش g دارای یک شاخه مشترک باشند دو گره متناظر آن دو مش را با شاخه‌ای به هم وصل می‌کنیم. خطوط خط‌چین شده شکل ۲-۲۶(ب) نشان دهنده شاخه‌های گراف دوگان $\hat{g}$ می‌باشند. گراف دوگان $\hat{g}$ در شکل ۲-۲۶(ج) دوباره رسم شده است [۱].

در حالتی که گراف داده شده g جهت‌دار باشد، یعنی در موردی که هر شاخه g یک جهت قراردادی داشته باشد، جهت‌دار کردن گراف دوگان $\hat{g}$ را می‌توان با اضافه نمودن یک قرارداد ساده به طرز ساخت گراف دوگان گفته شده در بالا بدست آورد. چون شاخه‌های هر دو گراف جهت‌دار هستند می‌توان تصور کرد که جهت‌های قراردادی شاخه‌ها با بردارهایی نشان داده شوند که در روی آن شاخه‌ها قرار گرفته و جهت‌های آن بردارها در جهت‌های قراردادی شاخه‌ها باشند. جهت قراردادی یک شاخه از گراف دوگان $\hat{g}$ با در نظر گرفتن جهت قراردادی شاخه متناظر در گراف داده شده g و یا دوران آن بردار به میزان ۹۰^o در جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید. با این الگوریتم می‌توان با یک روش منظم برای هر گراف توپولوژیکی مسطح جهت‌دار g یک گراف دوگان جهت‌دار $\hat{g}$ بدست آورد [۱].

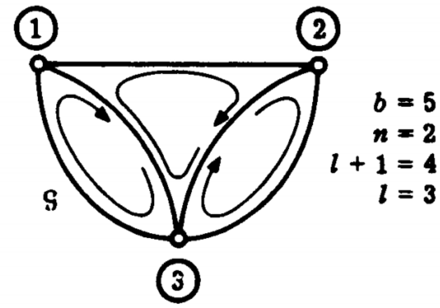
مثال ۲-۹ گراف جهت‌دار شکل ۲-۲۷(الف) را در نظر بگیرید. فرض کنید گره ۴ گره مبنا باشد. می‌خواهیم گراف دوگان $\hat{g}$ را که مش بیرونی آن متناظر با گره ۴ از گراف g باشد، بدست آوریم. با پیروی از قواعد ساختن یک گراف دوگان گره‌های $\hat{۱}$، $\hat{۲}$ و $\hat{۳}$ را به ترتیب درون مش‌های ۱، ۲ و ۳ در گراف g قرار می‌دهیم و گره $\hat{۴}$ را مطابق شکل ۲-۲۷(ب) بیرون مش می‌گذاریم. برای تکمیل گراف دوگان گره‌های $\hat{g}$ را با شاخه‌هایی به هم وصل می‌کنیم تا شاخه‌هایی متناظر با شاخه‌های گراف g ایجاد شوند. این شاخه‌ها با خطوط خط چین شده مطابق شکل ۲-۲۷(ب) رسم شده‌اند. جهت‌های قراردادی شاخه‌های $\hat{g}$

fig38b



(ب) گراف مراحل ساختن

fig38a



(الف) گراف داده شده

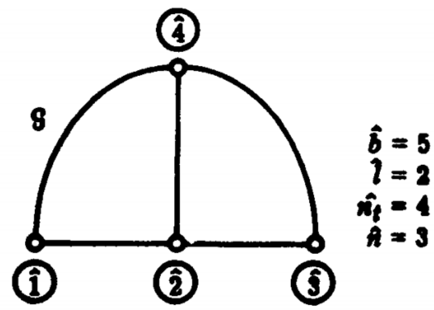


fig38c

(ج) گراف دوگان

شکل ۲-۲۶: تشریح طرز ساختن یک گراف دوگان

fig38

با روش گفته شده در بالا بدست آمده‌اند. گراف دوگان مطابق شکل ۲-۲۷(ج) مجددا رسم شده است. برای تضمین این مطلب که شاخه‌های متصل شده به گره مبنا در گراف g متناظر با مش بیرونی باشند، باید دقت لازم صورت گیرد. لحظه‌ای تفکر، قاعده زیر را که یک تناظر یک به یک مناسبی را تعیین می‌کند، بدست می‌دهد. به علت اینکه گره مبنا یعنی گره ۴ در این مثال باید بیرون از تمام خطوط خط چین شده قرار گیرد، هنگامی که گره $\hat{۴}$ از گراف $\hat{g}$ را تعیین می‌کنیم، راحت‌تر است آن را تا آنجا که ممکن است طبق شکل ۲-۲۷(ب) دورتر از گره ۴ انتخاب کنیم [۱].

نکته ۲-۸ یک گراف توپولوژیکی داده شده در حالت کلی دوگان‌های متعددی دارد. با این وجود چنانچه گره مبنای g را مشخص کرده و بیان کنیم که این گره باید با مش بیرونی $\hat{g}$ متناظر باشد، در این صورت روش توصیف شده در بالا گراف دوگان یکتایی را تعریف می‌کند. شاخه‌هایی که به گره مبنا در گراف g متصل‌اند، متناظر با شاخه‌هایی هستند که مش بیرونی گراف $\hat{g}$ را تشکیل می‌دهند [۱].

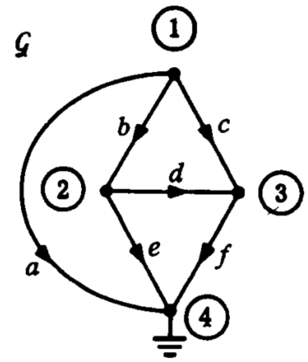


fig39a

(الف) گراف داده شده

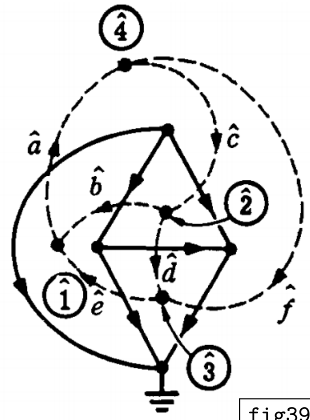


fig39b

(ب) گراف مراحل ساختن

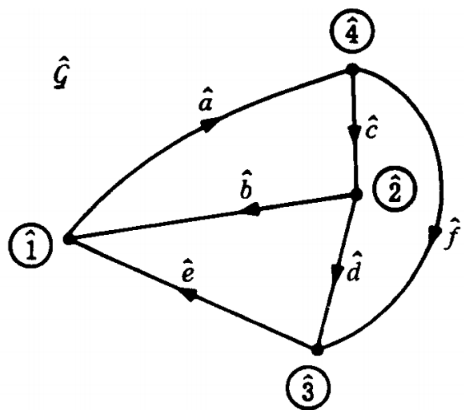


fig39c

(ج) گراف دوگان

fig39

شکل ۲-۲۷: تشریح طرز ساختن یک گراف دوگان جهت‌دار

نکته ۲-۹ تناظر میان گراف g و دوگان آن $\hat{g}$ شامل شاخه در مقابل شاخه، گره در مقابل مش و گره مبنا در مقابل مش بیرونی است. به علاوه ماتریس تلاقی A_a یک گراف داده شده g برابر با ماتریس M_a از گراف دوگان $\hat{g}$ می‌باشد [۱].

۲-۵ دو مطلب اساسی تجزیه و تحلیل مش

شبکه دلخواه N را که گراف آن متصل به هم، مسطح و بی‌لولا است، در نظر گرفته و فرض کنید این شبکه دارای n_t گره و b شاخه باشد. در نتیجه بدون به حساب آوردن مش بیرونی، $l = b - n_t + ۱$ مش

دارد. این مش‌ها را با شماره‌های $l, \cdots, ۲, ۱$ علامت گذارده و جهت‌های قراردادی عقربه‌های ساعت را به کار می‌بریم. این مش‌ها دوگان گره‌ها و مش بیرونی دوگان گره مبنا می‌باشد. مجددا باید تاکید نمود که این دو مطلب، به ماهیت عناصر شبکه بستگی ندارند. بنابراین، شبکه می‌تواند خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر بازمان یا تغییرناپذیر بازمان باشد [۱].

۲-۵-۱ استنباط‌های KVL

فرض کنید KVL را در مش‌های $l, \cdots, ۲, ۱$ اعمال کنیم (مش بیرونی را در نظر نمی‌گیریم). اولین مطلب اساسی از تجزیه و تحلیل مش را می‌توان چنین بیان نمود:

l معادله جبری خطی همگن برحسب $v_b, \cdots, v_۲, v_۱$ که از اعمال KVL به هر یک از مش‌ها حاصل می‌شوند (به جز مش بیرونی) یک دسته از l معادله خطی نابسته را تشکیل می‌دهند [۱].

می‌توان KVL را به طور تحلیلی با استفاده از ماتریس مش بیان نمود:

$$Mv = ۰ \qquad \text{(KVL)} \tag{۲-۳۳}$$

که در آن $M = (m_{ij})$ یک ماتریس $l \times b$ است که بوسیله معادله زیر تعریف شده است [۱].

هنگامی که مولفه iام ماتریس Mv را صفر می‌نویسیم، صرفا بیان می‌داریم که مجموع ولتاژهای شاخه‌های قرار گرفته در مش iام برابر صفر است؛ زیرا این مولفه iام به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{k=۱}^{b} m_{ik} v_k = ۰$$

برای $i = ۱, ۲, \cdots, l$ و $k = ۱, ۲, \cdots, b$ باید داشته باشیم:

$$m_{ik} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آن‌ها برهم منطبق باشند} \\ -۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت‌های قراردادی آن‌ها برهم منطبق نباشند} \\ ۰ & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ نباشد} \end{cases} \tag{۲-۳۴}$$

مطلب اساسی گفته شده در بالا لازم می‌دارد که ماتریس مش M دارای رتبه l باشد.

توجه کنید که ماتریس مش M با حذف سطری از ماتریس M_a که متناظر با مش بیرونی است، بدست می‌آید [۱].

مثال ۲-۱۰ گراف جهت‌دار شکل ۲-۲۸ را که در واقع دوگان گراف شکل ۲-۸ است، در نظر بگیرید. در این گراف، سه گره و پنج شاخه وجود دارد و در نتیجه $l = ۵ - ۳ + ۱$ می‌باشد. سه مش موجود در این

گراف مطابق شکل علامت‌گذاری شده‌اند. بردار ولتاژ شاخه چنین است:

$$v = \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \end{bmatrix}$$

ماتریس مش بدست آمده به صورت زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله مش به صورت زیر می‌باشد:

$$Mv = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و یا:

$$v_۱ + v_۲ = ۰$$

$$-v_۲ + v_۳ + v_۴ = ۰$$

$$-v_۴ + v_۵ = ۰$$

واضح است که معادلات فوق، سه معادله مش بدست آمده از اعمال KVL در مش‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. واضح است که این سه معادله به طور خطی نابسته‌اند، زیرا هر معادله دارای متغیری است که در دو معادله دیگر وجود ندارد [۱].

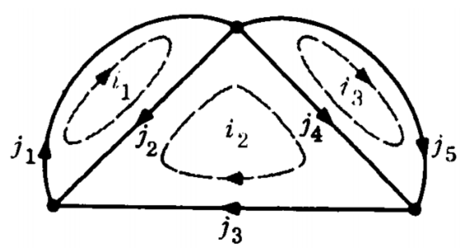


fig40

شکل ۲-۲۸: گراف جهت‌داری که دوگان گراف شکل ۲-۸

۲-۵-۲ استنباط‌های KCL

فرض کنید جریان‌های مش‌ها را $i_۱, i_۲, \cdots, i_l$ نامیده، برای راحتی، به هر یک از این مش‌ها جهت قراردادی عقربه‌های ساعت را اختصاص می‌دهیم. ابتدا توجه کنید تا آنجا که KCL مطرح است، جریان مش‌های $i_۱, i_۲, \cdots, i_l$ به طور خطی نابسته‌اند. زیرا جریان هر مش از تمام شاخه‌های یک حلقه می‌گذرد و اگر جریان مش i_k کات‌ست انتخاب شده دلخواهی را در جهت مثبتی قطع کند، جریان فوق، همان کات‌ست را در جهت منفی نیز قطع خواهد کرد و بدین ترتیب، از معادله KCL نوشته شده برای آن کات‌ست، حذف می‌گردد. به عبارت دیگر، چنانچه ما KCL را برای هر کات‌ست بنویسیم و جریان شاخه‌ها را برحسب جریان مش‌ها بیان کنیم، تمام جملات حذف می‌شوند. بدین ترتیب، KCL چیزی در مورد جریان مش‌ها بیان نمی‌کند و این موجب می‌گردد که جریان‌های فوق، تا آنجا که KCL مطرح باشد، به طور خطی نابسته باشند.

گام بعدی نشان دادن این مطلب است که می‌توان جریان شاخه‌ها را برحسب جریان مش‌ها به کمک معادله زیر حساب کرد:

$$j = M^T i \qquad \text{(KCL)} \tag{۲-۳۵}$$

eq235-

که در آن M^T ترانهاده ماتریس مش M می‌باشد. معادله ۲-۳۵ بدین معنی است که جریان هر شاخه را می‌توان به صورت ترکیب خطی جریان مش‌ها بیان کرد و ماتریسی که این ترکیب خطی را مشخص می‌کند، ترانهاده ماتریس مش است [۱].

مثال ۲-۱۱ شبکه‌ای را که گراف آن در شکل ۲-۲۸ نشان داده شده است در نظر بگیرید. واضح است که جریان شاخه‌ها و جریان مش‌ها را می‌توان به صورت زیر به هم ارتباط داد:

$$j_۱ = i_۱$$

$$j_۲ = i_۱ - i_۲$$

$$j_۳ = i_۲$$

$$j_۴ = i_۲ - i_۳$$

$$j_۵ = i_۳$$

یا:

$$j = M^T i = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix}$$

۲-۶ تجزیه و تحلیل گره در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

مساله تجزیه و تحلیل مش در حالت کلی، شامل ترکیب این معادلات شاخه با دو معادله اساسی زیر است:

$$Mv = 0 \qquad \text{(KVL)} \tag{۲-۳۶}$$

eq236-

و:

$$j = M^T i \qquad \text{(KCL)} \tag{۲-۳۷}$$

eq237-

۲-۶-۱ تجزیه و تحلیل شبکه‌های مقاومتی

یک شبکه مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان با b شاخه و $m_t = m + 1$ مش را در نظر بگیرید. یک شاخه نوعی در شکل ۲-۲۹ نشان داده شده است. توجه کنید که آن شاخه، شامل منابع نابسته می‌باشد. معادلات شاخه به صورت زیر هستند:

$$v_k = v_{sk} + R_k(j_k - j_{sk}) = R_k j_k + v_{sk} - R_k j_{sk} \qquad k = 1, 2, \cdots, b \tag{۲-۳۸}$$

eq238-

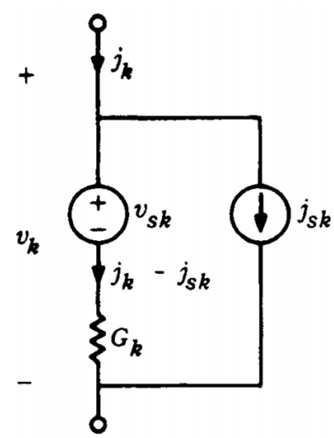


fig41

شکل ۲-۲۹: یک شاخه نوعی

در طرز نمایش ماتریسی از معادله (۲-۳۸) بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{j} - \mathbf{R}\mathbf{j}_s + \mathbf{v}_s \tag{۲-۳۹}$$

eq239-

که در آن، $\mathbf{R}$ ماتریس مقاومتی شاخه خوانده می‌شود و آن، یک ماتریس قطری از مرتبه b است، یعنی:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_b \end{bmatrix} \tag{۲-۴۰}$$

بردارهای $\mathbf{j_s}$ و $\mathbf{v_s}$ بردارهای منبع بوده و دارای بعد b می‌باشند. یعنی:

$$j_s = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} \qquad v_s = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix} \tag{۲-۴۱}$$

معادله (۲-۳۹) را از سمت چپ در ماتریس M ضرب کرده و به جای j مقدار $M^T i$ را قرار می‌دهیم و از معادله (۲-۳۶) نیز استفاده می‌کنیم تا بدست می‌آوریم:

$$Mv = MRM^T i - MRj_s + Mv_s = 0 \tag{۲-۴۲}$$

یا:

$$MRM^T i = MRj_s - Mv_s \tag{۲-۴۳}$$

eq243-

در معادله (۲-۴۳)، MRM^T یک ماتریس مربعی $m \times m$ است، در حالی که MRj_s و $-Mv_s$ بردارهای m بعدی هستند. اکنون طرز نمایش‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$Z_m \triangleq MRM^T \tag{۲-۴۴}$$

$$e_s \triangleq MRj_s - Mv_s \tag{۲-۴۵}$$

eq245-

بنابراین معادله (۲-۴۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{Z_m i = e_s} \tag{۲-۴۶}$$

eq246-

معمولا دسته معادلات (۲-۴۶) معادلات گره، Z_m ماتریس امپدانس مش و e_s بردار منبع ولتاژ مش نامیده می‌شوند.

۲-۶-۲ نوشتن معادلات مش به طور نظری

روش منظم از نظر محاسباتی حجیم و زمان‌بر است. بنابراین در عمل از روش نظری (میان‌بر) استفاده می‌شود. برای این که بتوان از روش نظری برای محاسبه جریان مش‌ها استفاده کرد، باید ابتدا منابع جریان به منابع ولتاژ تبدیل شوند.

فرض کنید عنصر (k,i)ام ماتریس امپدانس مش Z_m را z_{ik} بنامیم. در این صورت، وقتی معادله برداری

$$Z_m i = v_s \tag{۲-۴۷}$$

را به صورت اسکالر بنویسیم، بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \\ \vdots \\ e_{sm} \end{bmatrix} \tag{۲-۴۸}$$

در روش نظری پس از تبدیل منابع جریان به منابع ولتاژ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) z_{ii}، یعنی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس امپدانس Z_m، برابر است با مجموع امپدانس‌های داخل مش iام.

۲) z_{ik}، یعنی درایه‌های روی غیرقطر اصلی ماتریس امپدانس Z_m، برابر است با منفی مجموع امپدانس‌هایی که به طور مستقیم بین مش‌های i و k قرار دارند.

۳) e_{sk} برابر است با مجموع جبری منابع ولتاژی که در مش kام قرار دارند؛ در نوشتن این مجموع، اگر در حرکت در جهت مش، به سر منفی منبع ولتاژ رسیدیم، به آن علامت مثبت و اگر به سر مثبت منبع ولتاژ رسیدیم، به آن علامت منفی نسبت می‌دهیم.

ex212- **مثال ۲-۱۲** در مدار شکل ۲-۳۰ معادلات مش را به صورت ماتریسی نوشته و جریان مش‌ها را بدست آورید.

ابتدا در صورت وجود منابع جریان آن‌ها را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم. با تبدیل منبع جریان به منبع ولتاژ شکل ۲-۳۱ بدست می‌آید. داریم:

$$Z_m i = e_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۵ & -۳ \\ -۲ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱-۲ \\ ۲+۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = ۱/۵۶ \\ i_2 = ۲/۳۲ \\ i_3 = ۱/۶۸ \end{cases}$$

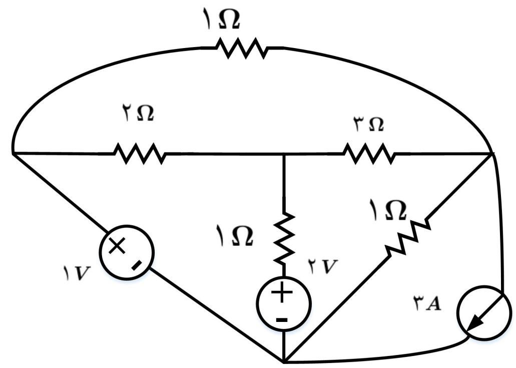


fig42

شکل ۲-۳۰: مدار شکل ۲-۱۲

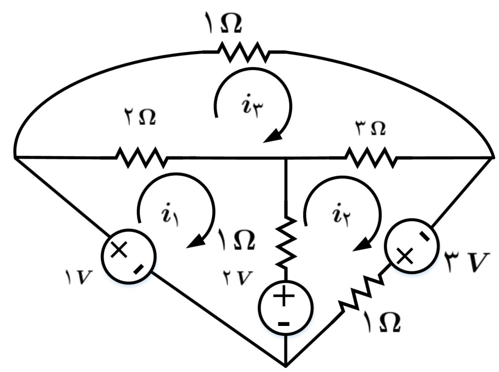


fig43

شکل ۲-۳۱: مدار شکل ۲-۱۲

> **نکته ۲-۱۰** اگر در سمت راست معادلات (ستون مقادیر ثابت) متغیرهای اضافی ظاهر شدند (به واسطه وجود منابع وابسته)، ایتدا باید این متغبرهای اضافی را برحسب متغیرهای اصلی روش مش (جریان مش‌ها) بدست آورد و اثر آن را به سمت چپ معادلات انتقال داد.

ex213- **مثال ۲-۱۳** در مدار شکل ۲-۳۲ معادلات مش را به صورت ماتریسی نوشته و جریان مش‌ها را تعیین کنید.

ابتدا در صورت وجود منابع جریان آن‌ها را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم. با تبدیل منبع جریان به منبع ولتاژ شکل ۲-۳۱ بدست می‌آید. داریم:

$$Z_m i = e_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۶ & -۴ \\ -۲ & -۴ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳v_x \\ ۰ \\ ۲-۳v_x \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در سمت راست معادلات (ستون مقادیر ثابت) متغیر اضافی v_x ظاهر شده است،

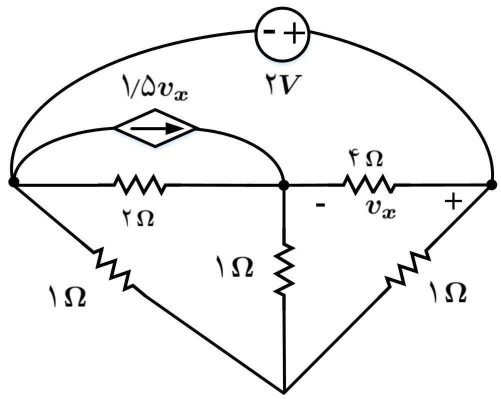


fig44

شکل ۲-۳۲: مدار شکل ۲-۱۳

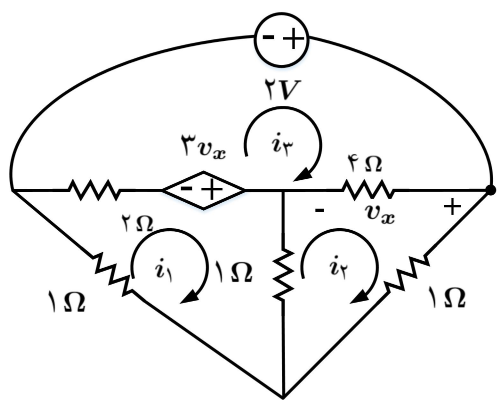


fig45

شکل ۲-۳۳: مدار شکل ۲-۱۳

که باید بر حسب متغیرهای اصلی روش مش (جریان مش‌ها) بدست آید و در معادلات جایگذاری شود. در نتیجه،

$$v_x = ۴(i_۳ - i_۲)$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۶ & -۴ \\ -۲ & -۴ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \times ۴(i_۳ - i_۲) \\ ۰ \\ ۲ - ۳ \times ۴(i_۳ - i_۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲i_۳ - ۱۲i_۲ \\ ۰ \\ ۲ - ۱۲i_۳ - ۱۲i_۲ \end{bmatrix}$$

سپس باید جملاتی که دارای ضرایبی از جریان مش‌ها در سمت راست معادلات هستند، به سمت چپ معادلات

منتقل شوند:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1+12 & -2-12 \\ -1 & 6 & -4 \\ -2 & -4-12 & 6+12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

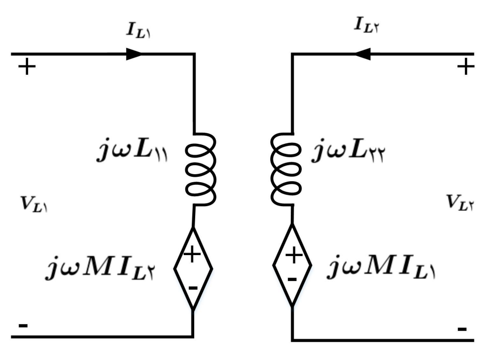
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 11 & -14 \\ -1 & 6 & -4 \\ -2 & -16 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = 1/14 \\ i_2 = 0/86 \\ i_3 = 1 \end{cases}$$

۲-۶-۳ تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

مدل سلف تزویج مناسب برای روش گره:

در این مدل اثر سلف تزویج در قالب منابع وابسته نشان داده می‌شود، با استفاده از این مدل‌ها می‌توان روش مش را مانند قبل استفاده نمود.

$$\begin{cases} v_{L1}(t) = L_{11}\dfrac{di_{L1}(t)}{dt} + M\dfrac{di_{L2}}{dt} \\ v_{L2}(t) = M\dfrac{di_{L1}(t)}{dt} + L_{22}\dfrac{di_{L2}}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{L1} = j\omega L_{11} I_{L1} + j\omega M I_{L2} \\ V_{L2} = j\omega M I_{L1} + j\omega L_{22} I_{L2} \end{cases}$$



شکل ۲-۳۴: مدل سلف تزویج مناسب برای روش مش

fig46

ex214- **مثال ۲-۱۴** با فرض اینکه در مدار شکل ۲-۳۵ در حالت دائمی سینوسی است. جریان تمام مش‌های مدار را در حوزه زمان تعیین کنید.

با توجه به جهت‌های انتخاب شده، به دلیل اینکه هر دو جریان از سر نقطه‌دار وارد سلف‌ها می‌شوند، علامت M مثبت است. بنابراین، $M = 1$. با دانستن مقدار فرکانس برابر با $\omega = 1$ مدل مدار در حوزه فازور به صورت شکل ۲-۳۶ خواهد بود. داریم:

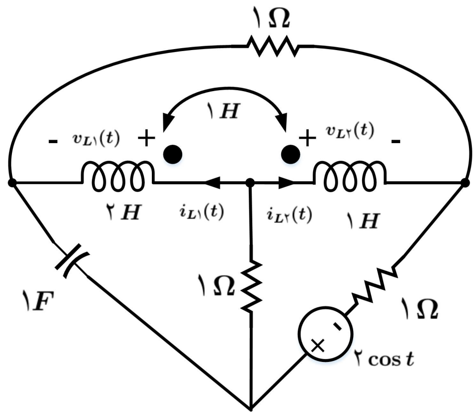


fig47

شکل ۲-۳۵: مدار مثال ۲-۱۴

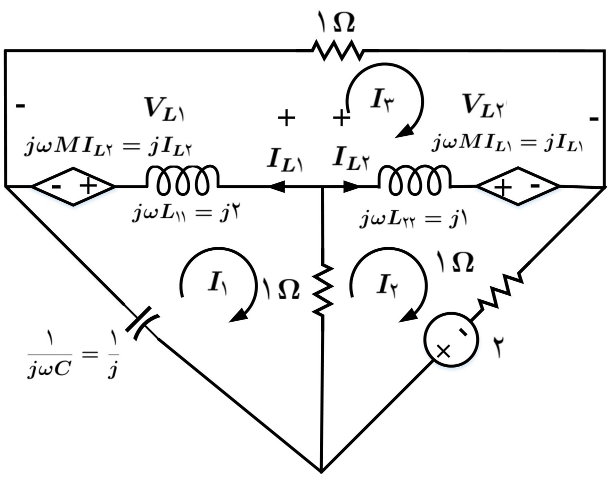


fig48

شکل ۲-۳۶: مدار مثال ۲-۱۴

$$Z_m I = E_s \quad (m = ۳)$$

$$\begin{bmatrix} ۱+j۲+\frac{۱}{j۱} & -۱ & -j۲ \\ -۱ & ۱+۱+j۱ & -j۱ \\ -j۲ & -j۱ & ۱+j۱+j۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jI_{L۲} \\ ۲-jI_{L۱} \\ jI_{L۱}-jI_{L۲} \end{bmatrix}$$

$$I_{L۱} = I_۳ - I_۱, \quad I_{L۲} = I_۲ - I_۳$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+j & -۱ & -j۲ \\ -۱ & ۲+j & -j \\ -j۲ & -j & ۱+j۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(I_۲-I_۳) \\ ۲-j(I_۳-I_۱) \\ j(I_۳-I_۱)-j(I_۲-I_۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jI_۲-jI_۳ \\ ۲-jI_۳+jI_۱ \\ j۲I_۳-jI_۱-jI_۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱+j & -۱-j & -j۲+j \\ -۱-j & ۲+j & -j+j \\ -j۲+j & -j+j & ۱+j۳-j۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱+j & -۱-j & -j \\ -۱-j & ۲+j & ۰ \\ -j & ۰ & ۱+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$I_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & -۱-j & -j \\ ۲ & ۲+j & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱+j & -۱-j & -j \\ -۱-j & ۲+j & ۰ \\ -j & ۰ & ۱+j \end{vmatrix}} = \frac{j۴}{۲+j۳} = \frac{۴\angle ۹۰}{۳/۶۱\angle ۵۶/۳۱} = ۱/۱۱\angle ۳۳/۶۹$$

$$\Rightarrow i_۱(t) = ۱/۱۱\cos(t + ۳۳/۶۹^o)$$

$$I_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۱+j & ۰ & -j \\ -۱-j & ۲ & ۰ \\ -j & ۰ & ۱+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱+j & -۱-j & -j \\ -۱-j & ۲+j & ۰ \\ -j & ۰ & ۱+j \end{vmatrix}} = \frac{۲+j۴}{۲+j۳} = \frac{۴/۴۳\angle ۶۳/۴۳}{۳/۶۱\angle ۵۶/۳۱} = ۱/۲۴\angle ۷/۱۲$$

$$\Rightarrow i_۲(t) = ۱/۲۴\cos(t + ۷/۱۲^o)$$

$$I_۳ = \frac{\begin{vmatrix} ۱+j & -۱-j & ۰ \\ -۱-j & ۲+j & ۲ \\ -j & ۰ & ۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱+j & -۱-j & -j \\ -۱-j & ۲+j & ۰ \\ -j & ۰ & ۱+j \end{vmatrix}} = \frac{-۲+j۲}{۲+j۳} = \frac{۲/۸۳\angle ۱۳۵}{۳/۶۱\angle ۵۶/۳۱} = ۰/۷۸\angle ۷۸/۶۹$$

$$\Rightarrow i_۳(t) = ۰/۷۸\cos(t + ۷۸/۶۹^o)$$