

## تمرین‌های ترکیبیات

### جلسه سوم و چهارم - احتمال و امید ریاضی

توجه:

- مطابق قوانین درس، با تقلب در تمرین‌ها به شدت برخورد خواهد شد. با توجه به سخت‌گیری کم در تصحیح تمرینات، نوشتن راه حل نادرست حاصل از تلاش، بسیار معقول‌تر از تقلب است.
  - تمرین‌ها باید در برگه‌ی A4 نوشته شوند.
  - تمرین تحویلی سری ۳: سوال شماره ۴ (مهلت تحویل: ۹ مرداد)
۱. ۱۳۹۵ مرحله کار زیر انجام می‌شود:

یک توپ به ما نشان داده می‌شود که به طور تصادفی قرمز یا آبی است. ما می‌توانیم این توپ را برای خود برداشته و یا آن را دور بیندازیم.

در انتها فرض کنید  $r$  و  $b$  توپ قرمز و آبی برای خود برداشته باشیم. اگر  $3r - 2b = 1$  باشد، برنده و در غیر این صورت بازنده می‌شویم. اگر به بهترین نحو ممکن بازی کنیم، به چه احتمالی برنده می‌شویم؟

۲. در ابتدا در نقطه‌ی  $(0, 0)$  هستیم. در هر مرحله یا به احتمال  $0/1$  یک واحد در هر یک از چهار جهت اصلی حرکت می‌کنیم؛ یا به احتمال  $0/05$  یک واحد در هر یک از چهار جهت فرعی حرکت می‌کنیم و یا به احتمال  $0/4$  حرکت نمی‌کنیم. به چه احتمالی پس از دقیقاً ۲۰۱۶ مرحله، در نقطه‌ای با مختصات زوج هستیم؟

۳. در ابتدا عدد ۲۰۱۶ را داریم. در هر مرحله اگر عدد  $n$  را داشته باشیم، عدد ما به احتمال برابر به یکی از اعداد  $0, 1, \dots, n-1$  تبدیل می‌شود. وقتی به عدد ۰ برسیم، کار تمام می‌شود. به چه احتمالی در حین مراحل تمام اعداد  $1, 10, 100, 1000$  ساخته می‌شوند؟

۴. متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  را مستقل گوئیم، اگر به ازای هر  $n$  عدد حقیقی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داشته باشیم:

$$P[X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n] = P[X_1 = a_1] \times P[X_2 = a_2] \times \dots \times P[X_n = a_n]$$

سه متغیر تصادفی مثال بزنید که دویبه‌دو مستقل باشند؛ اما ترکیب هر سه با هم مستقل نباشند.

۵. در یک جایگشت به یک عدد آقابالاسر گوئیم، اگر از تمام اعداد سمت چپ خود (در صورت وجود)، بیش‌تر باشد. امید ریاضی تعداد آقابالاسرهای یک جایگشت  $n$  عنصری را بیابید.

## تمرین‌های ترکیبیات

۶. زمانی که مغول‌ها به ایران حمله کردند، ایران  $n$  اثر تاریخی با شماره‌های  $1, 2, \dots, n$  داشت. قیمت اثر شماره  $d$  به این شکل مشخص می‌شد که اگر  $d$  مقسوم‌علیه  $n$  باشد، ارزش آن برابر

$$\frac{\varphi(d)}{p^{\varphi(d)}}$$

و در غیر این صورت ارزش آن ۰ است ( $\varphi$  تابع فی‌اویلر و  $0 < p < 1$  عددی ثابت است).

پس از تسلط مغول‌ها بر ایران، آن‌ها  $n$  بمب با شماره‌های  $1, 2, \dots, n$  ساختند تا آثار تاریخی را نابود کنند. هر بمب به احتمال  $1 - p$  عمل می‌کند و منفجر می‌شود. اگر بمب شماره  $i$  منفجر شود، تمام آثار تاریخی با شماره‌ی  $d$  که  $d \geq i$  و  $(d, i) = 1$  باشد تخریب می‌شوند. برای مثال اگر  $n = 16$  باشد و بمب شماره‌ی ۱۰ منفجر شود، آثار تاریخی شماره ۱۱ و ۱۳ تخریب می‌شوند.

پس از بیرون راندن مغول‌ها، ایرانیان مجموع میزان ارزش آثار تاریخی باقی‌مانده را حساب کردند و آن را ارزش ملی نامیدند. امید ریاضی ارزش ملی باقی‌مانده پس از جنگ چیست؟! (آزمون ترکیبیات دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد کامپیوتر ایران - ۱۳۹۴)

۷. به یک جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, 2n - 1$  دلواپس گوئیم؛ هرگاه تمام اعداد سمت چپ  $n$  از آن کوچک‌تر یا تمام اعداد سمت چپ  $n$  از آن بزرگ‌تر باشند. برای مثال  $\langle 1, 3, 4, 6, 5, 7, 2 \rangle$  و  $\langle 5, 4, 1, 2, 7, 6, 3 \rangle$  و  $\langle 4, 3, 7, 6, 1, 2, 5 \rangle$  دلواپس هستند؛ اما جایگشت  $\langle 1, 6, 4, 3, 7, 5, 2 \rangle$  دلواپس نیست! به چه احتمالی یک جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, 2n - 1$  دلواپس است؟ (آزمون ترکیبیات دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد کامپیوتر - ۱۳۹۴)