جزوه معادلات دیفرانسیل

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و مراتب بالاتر

۳-۱) تعاریف اولیه

معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی و همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-۱)} + \cdots + Q(x)y = ۰ \qquad (۳-۱)$$

چنانچه $y_۱(x)$، $y_۲(x)$، ...، $y_n(x)$ جواب‌های مستقل خطی این معادله دیفرانسیل باشند، هر ترکیب خطی از این جواب‌ها، جوابی از معادله دیفرانسیل مورد نظر خواهد بود و به تعبیر دیگر جواب عمومی چنین است:

$$y = k_۱y_۱ + k_۲y_۲ + \cdots + k_ny_n \qquad (۳-۲)$$

در جواب معادله دیفرانسیل فوق $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ ثابت‌های اختیاری هستند [۲].

۳-۱-۱) یک تعریف مهم

توابع $y_۱(x); y_۲(x); \ldots; y_n(x)$ را در نظر بگیرید. می‌گویند این توابع، وابستگی خطی دارند، هرگاه بتوان ثابت‌های $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ را به گونه‌ای یافت که: $k_۱y_۱ + k_۲y_۲ + \cdots + k_ny_n = ۰$ باشد [۲].

می‌توان نشان داد، شرط لازم و کافی برای آن که توابع $y_۱(x), y_۲(x, ;y_n(x)$ وابستگی خطی داشته

باشند، آن است که [۲]:

(۳-۳)

$$y_1(x); y_2(x); \ldots; y_n(x) \text{ رونسکین توابع } : w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^(n-1) & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

نکته: شرط استقلال خطی دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مربوط به معادله خطی مرتبه دوم همگن، در یک فاصله، آن است که: رونسکین‌های آن‌ها در این فاصله مخالف صفر باشد. یعنی [۲]:

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq= 0 \quad (۳-۴)$$

مثال ۳-۱ معادله دیفرانسیل $y'' + (x^2+1)y' + p(x) + y = 0$ دارای دو جواب مستقل $y_1(x)$ و $y_2(x)$ است. راجع به عبارت $y_1y_2' - y_2y_1'$ چه می‌توان گفت [۲]؟

حل: اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل معادله باشند، آنگاه طبق نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$$

مثال ۳-۲ برای آنکه معادله دیفرانسیل $x^n \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + f(x)y^m = 0$ خطی باشد، باید چه شرطی برقرار باشد [۲]؟

حل: برای خطی شدن معادله، کافی است $m = 1$ شود.

۳-۲) روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در کلی‌ترین حالت به صورت $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ بیان می‌شود، که ممکن است تحت شرایطی مانند شرایط زیر بتوان جواب آن را یافت.

۳-۲-۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن

شکل یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت عبارت است از:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (۳-۵)$$

برای معادله فوق جوابی به صورت $y = e^{\lambda x}$ (λ یک ثابت است) را در نظر می‌گیریم و سپس با جایگذاری در معادله فوق، به معادله مشخصه [1] زیر می‌رسیم:

$$\lambda^{۲} + a\lambda + b = ۰ \qquad (۳\text{-}۶)$$

چون معادله مشخصه فوق، از نوع معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس سه حالت ایجاد می‌شود:

۱- حالت اول: ($\Delta > ۰$) معادله مشخصه، دارای دو ریشه حقیقی متمایز $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ است و جواب عمومی عبارت است از [۲]:

$$y = c_{۱}e^{\lambda_{۱}x} + c_{۲}e^{\lambda_{۲}x} \qquad (۳\text{-}۷)$$

۲- حالت دوم: ($\Delta = ۰$) معادله مشخصه دارای دو ریشه تکراری (مضاعف) $\lambda_{۱} = \lambda_{۲} = \lambda$ است و جواب عمومی عبارت است از [۲]:

$$y = (c_{۱} + c_{۲}x)e^{\lambda x} \qquad (۳\text{-}۸)$$

۳- حالت سوم: ($\Delta < ۰$) معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط $\lambda_{۱,۲} = \alpha \pm j\beta$ است و جواب عمومی عبارت است از [۲]:

$$y = e^{\alpha x}(c_{۱}\cos(\beta x) + c_{۲}\sin(\beta x)) \qquad (۳\text{-}۹)$$

نکته ۳-۲-۱ بحث انجام گرفته در رابطه با معادلات خطی با ضرایب ثابت از مرتبه‌های بالاتر نیز قابل تعمیم است. یعنی کافی است، معادله مشخصه را به ترتیب مقتضی تشکیل داده و پس از یافتن ریشه‌های آن پایه‌های جواب را تعیین کنیم [۲].

نکته ۳-۲-۲ برخی مواقع، هدف یافتن معادله دیفرانسیل مربوط به یک دسته منحنی است که خود آن دسته منحنی، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. در اینگونه مسایل، کافی است با توجه به معادله دسته منحنی‌ها، ریشه‌های معادله مشخصه را تعیین کرده و معادله مشخصه را تشکیل داده تا معادله دیفرانسیل مورد نظر بدست آید [۲]. note1

مثال ۳-۳ جواب عمومی معادله

$$y'' - ۳y' + ۲y = ۰$$

را بدست آورید و یک جواب خصوصی با شرایط $y(۰) = ۳$ و $y'(۰) = ۵$ تعیین کنید [۵].

[1] Characteristic equation

حل: معادله مشخصه عبارت است از: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

ریشه‌های آن $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ هستند. پس، جواب عمومی چنین است:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

داریم:

$$y'(x) = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x}$$

با استفاده از شرایط اولیه داده شده، معادلات زیر حاصل می‌گردند:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) = 5 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 2$$

بنابراین، جواب خصوصی عبارت است از: $y = e^{x} + 2e^{2x}$

مثال ۳-۴ جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید [۵]. $y'' - 6y' + 9y = 0$

حل: معادله مشخصه عبارت است از: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$

پس، $\lambda = 3$ ریشه مضاعف بوده و جواب عمومی چنین است:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

مثال ۳-۵ جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید [۵]. $y'' + 2y' + 5y = 0$

حل: داریم: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

ریشه‌ها عبارتند از: $\lambda = -1 \pm 2i$ پس جواب عمومی چنین است: $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

مثال ۳-۶ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید [۲]. $y^{(4)} - 9y'' = 0$

حل: با استفاده از نکته ۳-۲-۲ داریم:

$$\lambda^4 - 9\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 9) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 0, -3, 3$$

$$y(x) = Ae^{0x} + Bxe^{0x} + Ce^{-3x} + De^{3x} \Rightarrow y(x) = A + Bx + Ce^{-3x} + De^{3x}$$

مثال ۳-۷ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید [۲]. $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$

حل: با استفاده از نکته ۳-۲-۲ داریم:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -1, -1, -1$$

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2 e^{-x} + Dx^3 e^{-x}$$

۳-۲-۲) پیدا کردن یک پایه جواب معادلات مرتبه دوم خطی با داشتن پایه جواب دیگر

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید؛

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = ۰$$

چنانچه یک پایه جواب این معادله دیفرانسیل $y_۱$ باشد، پایه جواب دیگر را می‌توان به صورت $y_۲ = u(x)y_۱$ در نظر گرفت. که در آن $u(x)$ به فرم زیر است [۲]؛

$$u(x) = \int \frac{۱}{y_۱^۲} e^{-\int P(x)dx} dx \tag{۳-۱۰}$$

مثال ۳-۸ می‌دانیم یک جواب معادله دیفرانسیل $(۱-x^۲)y'' - ۲xy' + ۲y = ۰$ به صورت $y_۱(x) = x$ می‌باشد. جواب مستقل دوم این معادله را پیدا کنید [۲].

حل: ابتدا باید $u(x)$ را پیدا کنیم؛

$$u(x) = \int \frac{۱}{y_۱^۲} e^{-\int P(x)dx} dx \Rightarrow u(x) = \int \frac{۱}{x^۲} e^{-\int \frac{-۲x}{۱-x^۲} dx} dx \Rightarrow$$
$$u(x) = \int \frac{۱}{x^۲} e^{-\ln|۱-x^۲|} dx \Rightarrow u(x) = \int \frac{۱}{x^۲}\frac{۱}{۱-x^۲} dx \Rightarrow \int \left(\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{۱-x^۲}\right) dx$$
$$\Rightarrow u(x) = -\frac{۱}{x} - \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱-x}{۱+x}|$$

پس خواهیم داشت؛

$$y_۲(x) = u(x)y_۱ = \left(-\frac{۱}{x} - \frac{۱}{۲}\ln|\frac{۱-x}{۱+x}|\right)x$$

۳-۲-۳) معادلات دیفراسیل خطی غیرهمگن و بحث جواب خصوصی

معادله دیفرانسیل مرتبه nام و غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید [۲]؛

$$y^n + P(x)y^{n-۱} + \cdots + Q(x)y = R(x) \tag{۳-۱۱}$$

چنانچه $y_1(x); y_2(x); \ldots; y_n(x)$ پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر با معادله مذکور باشند (که در حقیقت با فرض $R(x) = 0$ پیدا شده‌اند) و $y_p(x)$ جوابی برای معادله غیر همگن مورد نظر باشد که اصطلاحا به جواب خصوصی این معادله غیرهمگن موسوم است، می‌توان نشان داد، جواب کلی معادله غیرهمگن مورد نظر به صورت زیر است [۲]:

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n}_{\text{جواب عمومی معادله همگن متناظر}} + y_p(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{۱۲-۳}$$

معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^n + P(x) y^{n-1} + \cdots + Q(x) y = R(x) + S(x) \tag{۱۳-۳}$$

چنانچه $y_{p1}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $R(x)$ در طرف ثانی وجود دارد و $y_{p2}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $S(x)$ در طرف ثانی وجود دارد، باشد. جواب خصوصی کلی معادله مورد نظر چنین است [۲]:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \tag{۱۴-۳}$$

دو روش برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل مرتبه nام خطی با ضرایب ثابت از نوع غیرهمگن، موجود است:

۳-۲-۳-۱) روش ضرایب نامعین

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y^n + a(x) y^{n-1} + \cdots + b(x) y = R(x) \tag{۱۵-۳}$$

برای پیشنهاد ساختار کلی جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل، نخست، معادله مشخصه معادله همگن متناظر را تشکیل داده و در صورت امکان، ریشه‌های معادله مشخصه را پیدا می‌کنیم. حال با توجه به وضعیت تعریف $R(x)$، می‌توان با یکی از دو بحث زیر ساختار کلی جواب خصوصی را مشخص نمود [۲].

در هر حالت در این جواب خصوصی پیشنهادی، نخست باید از ضرایب نامعینی استفاده کنیم که با قرار دادن این جواب در معادله غیر همگن اصلی، می‌توان تکلیف آن ثابت‌های نامعین را معلوم کرد [۲].

۱- اگر $R(x) = e^{px}(\text{m}$ با درجه x چندجمله‌ای از) بود که در آن p یک عدد حقیقی معلوم است، آنگاه می‌توان گفت:

$$y_p(x) = x^t e^{px}\{A x^m + B x^{m-1} + \cdots + D\} \tag{۱۶-۳}$$

$A, B, C, \ldots, D$ ضرایب نامعینی هستند که باید مشخص شوند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر عدد p می‌باشد [۲].

۲- اگر $R(x) = e^{px}\{M(x)\sin qx + N(x)\cos qx\}$ باشد که در آن p و q اعداد ثابت حقیقی بوده و $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند که در آن درجه چندجمله‌ای قوی‌تر، m فرض می‌شود. در این صورت داریم [۲]:

$$y_p(x) = x^t e^{px}\{L(x)\sin qx + H(x)\cos qx\} \tag{۱۷-۳}$$

$H(x)$ و $L(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه m می‌باشند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر $p + iq$ می‌باشد [۲].

مثال ۳-۹ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می‌کنید [۲]؟

$$۳y'' + ۲y' - ۵y = (x^۲ + ۳)e^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$۳\lambda^۲ + ۲\lambda - ۵ = ۰ \Rightarrow \lambda_۱ = ۱; \lambda_۲ = -\frac{۵}{۳}$$

$$y_p(x) = x^۰ e^{-x}\{Ax^۲ + Bx + C\} = e^{-x}\{Ax^۲ + Bx + C\}$$

مثال ۳-۱۰ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می‌کنید [۲]؟

$$y^{(۳)} + ۳y'' + ۳y' + y = xe^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^۳ + ۳\lambda^۲ + ۳\lambda + ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda + ۱)^۳ = ۰ \Rightarrow \lambda = -۱, -۱, -۱$$

$$y_p(x) = x^۳ e^{-x}\{Ax + B\}$$

مثال ۳-۱۱ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می‌کنید [۲]؟

$$y'' + ۲y' + ۵y = e^{-x}\{۲\sin ۲x + ۲\cos ۲x\}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^۲ + ۲\lambda + ۵ = ۰ \Rightarrow \lambda_۱ = -۱ + ۲i; \lambda_۲ = -۱ - ۲i$$

$$y_p(x) = x^۱ e^{-x}\{A\sin ۲x + B\cos ۲x\}$$

مثال ۳-۱۲ جواب کلی (عمومی و خصوصی) معادله زیر را بیابید [۵]. $y''' - ۳y' + ۲ = ۲x^۲ + ۱$

حل: معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$\lambda^۳ - ۳\lambda + ۲ = ۰$$

که می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه نمود:

$$(\lambda - ۱)^۲(\lambda + ۲) = ۰$$

پس، جواب عمومی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$y_h = c_۱e^x + c_۲xe^x + c_۳e^{-۲x}$$

جواب خصوصی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y_p = A_۰ + A_۱x + A_۲x^۲$$

همچنین داریم:

$$y'_p = A_۱ + ۲A_۲x, \quad y''_p = ۲A_۲, \quad y'''_p = ۰$$

با جایگزین کردن y_h و مشتقات آن در معادله اصلی داریم:

$$-۳(A_۱ + ۲A_۲x) + ۲(A_۰ + A_۱x + A_۲x^۲) \equiv ۲x^۲ + ۱$$

از این اتحاد معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$-۳A_۱ + ۲A_۰ = ۱, \quad ۲A_۱ - ۶A_۲ = ۰, \quad ۲A_۲ = ۲$$

از اینجا $A_۲ = ۱$، $A_۱ = ۳$ و $A_۰ = ۵$. پس جواب خصوصی به صورت زیر خواهد بود:

$$y_p = ۵ + ۳x + x^۲$$

همچنین، جواب کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = y_p + y_h = c_۱e^x + c_۲xe^x + c_۳e^{-۲x} + ۵ + ۳x + x^۲$$

۳-۲-۳-۱-۱) روش تغییر پارامترها روش تغییر پارامترها، مانند روش ضرایب نامعین، برای یافتن یک جواب خصوصی معادله ناهمگن

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = f(x) \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

بکار می‌رود. در روش ضرایب نامعین، $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ باید ثابت باشند و همچنین تابع $f(x)$ به یکی از شکل‌هایی که توصیف گردید، باشد. در روش تغییر پارامترها، این دو محدودیت وجود ندارد، ولی در عوض باید مجموعه‌ای از جواب‌های مستقل خطی معادله همگن نظیر را در اختیار داشته باشیم. این روش را برای معادلات مرتبه دوم تشریح می‌کنیم [۵].

معادله مرتبه دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (۳\text{-}۱۹)$$

را در نظر گرفته و فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر، یعنی جواب‌های معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y == 0 \qquad (۳\text{-}۲۰)$$

باشند. پس، جواب عمومی عبارت است از:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (۳\text{-}۲۱)$$

در روش تغییر پارامترها، به جای دو پارامتر c_1 و c_2، به ترتیب توابع $v_1(x)$ و $v_2(x)$ قرار داده و این توابع را طوری تعیین می‌کنیم که:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \qquad (۳\text{-}۲۲)$$

جواب خصوصی معادله باشد. این جواب تنها وقتی درست است که

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

دو معادله بالا را برا بدست آوردن v_1' و v_2' حل می‌کنیم. سپس، با انتگرال‌گیری v_1 و v_2 بدست خواهد آمد [۵].

مثال ۳-۱۳ جواب کلی معادله زیر را بیابید [۵]. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}, \quad x > 0$

حل: معادله همگن نظیر چنین است: $y''-2y'+y=0$ معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda=1$ است. بنابراین جواب عمومی معادله همگن عبارت است از:

$$y_h=c_1e^x+c_2xe^x$$

توجه کنید که $y_1=e^x$ و $y_2=xe^x$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن می‌باشند. جواب خصوصی به شکل زیر خواهد بود:

$$y_p=v_1e^x+v_2xe^x$$

که داریم:

$$\begin{aligned} v_1'e^x+v_2'xe^x&=0\\ v_1'e^x+v_2'(xe^x+e^x)&=\frac{e^x}{x}\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} v_1'+v_2'x&=0\\ v_1'+v_2'(x+1)&=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

از حل این دستگاه نتیجه می‌شود: $v_1'=-1,\quad v_2'=\frac{1}{x}$

با انتگرال‌گیری داریم: $v_1=-x,\quad v_2=\ln x$ پس جواب خصوصی چنین است:

$$y_p=-xe^x+xe^x\ln x$$

همچنین، جواب کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x-xe^x+xe^x\ln x=c_1e^x+c_3xe^x+xe^x\ln x$$

مراجع

[۱] "آموزش تصویری معادلات دیفرانسیل،" http://www.faradars.org.

[۲] دکتر محمد صادق معتمدی. معادلات دیفرانسیل. چاپ پنجم، پارسه، ۱۳۸۷.

[۳] دکتر مسعود نیکوکار. معادلات دیفرانسیل. چاپ بیستم، انتشارات آزاده، ۱۳۸۴.

[4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 10th ed. , 2012.

[۵] دکتر اصغر کرایه‌چیان. معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها. چاپ بیست و هفتم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۴.