

زنگ حل مساله: (هفته‌ی هشتم)



😊 ثابت کنید هر چند ضلعی محدب به مساحت ۱ را می‌توان در یک مستطیل به مساحت ۲ جا داد.

راهنمایی: دو نقطه‌ای در چندضلعی را در نظر بگیرید که بیشترین فاصله را از هم دارند. این دو نقطه باید روی مستطیل مورد نظر قرار گیرند.

😊 خیکوله در مبدا مختصات قرار گرفته است. او در n مرحله حرکات زیر را انجام می‌دهد:

در مرحله‌ی i ام ($1 \leq i \leq n$) او باید دقیقا i واحد در یکی از چهار جهت (بالا، راست، پایین و چپ) حرکت کند. در صورتیکه خیکوله بتواند در انتها به خانه‌ی (x, y) برسد، این خانه را علامت می‌زنیم. چه خانه‌هایی علامت زده می‌شوند؟

راهنمایی: ثابت کنید به تمام خانه‌هایی که فاصله‌یشان تا مبدا حداکثر برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ و زوجیت مجموع مختصات آن با زوجیت $\frac{n(n+1)}{2}$ است می‌توان رسید.

😊 فرض کنید $P(n)$ تعداد افزازهای عدد طبیعی n باشد، ثابت کنید:

$$P(n) \leq \frac{P(n-1) + P(n+1)}{2}$$

راهنمایی: با استفاده از تناظر مسئله را حل کنید.

☹️. G یک گراف کامل جهت‌دار قویا همبند است (از هر راسی به هر راس دیگری می‌توان رسید). ثابت کنید در این گراف دور به هر طولی بین 3 تا n وجود دارد.

راهنمایی: ثابت کنید اگر دور به طول i داشته باشیم دور به طول $i+1$ نیز وجود دارد.

☹️. $2n$ نقطه سفید و $2n$ نقطه سیاه در صفحه طوری قرار دارند که هیچ ۳ نقطه‌ای روی یک خط نیستند. ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که از هر رنگ n نقطه در 2 سمت خط قرار گیرد.

راهنمایی یک: یک خط تصادفی در نظر بگیرید. خط را یک دور کامل بچرخانید و ثابت کنید در این چرخش لحظه‌ای وجود دارد که شرایط مسئله برقرار است.

راهنمایی دو: در هر مرحله خط را حول یک نقطه می‌چرخانیم تا به یک نقطه‌ی دیگر برخورد کند. حال خط را حول نقطه‌ی جدید می‌چرخانیم. چون همواره در جهت عقربه‌های حرکت می‌دهیم یک دور کامل خواهیم زد.

وقت را غنیمت دان آن قدر که بتوانی حاصل از حیات ای جان این دم است تا دانی
کام بخشی گردون عمر در عوض دارد جهد کن که از دولت داد عیش بستانی