ADVANCED CONTROL

Ali Karimpour
Associate Professor
Ferdowsi University of Mashhad

Reference:
Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", 1999.

Lecture 4

State Space Solutions and Realization

Topics to be covered include:

- Introduction.
- Solution of State Equations.
- Equivalent State Equations.
- Realizations.
- Solution of Linear Time-Varying (LTV) Equations.
- Equivalence Time-Varying Equations.
- Time-Varying Realizations.

2

آنچه پس از مطالعه این مبحث می آموزید

- حل معادلات فضای حالت سیستمهای LTI
- Solution of LTI state equations
- سیستم های همانند یا معادل (جبری)
- Equivalent(algebraic) state equations
- هم ارز یا معادل حالت صفر
- Zero state equivalent
- شرط وجود پیاده سازی در سیستمهای خطی
- Realizable state equations
- چند نمونه پیاده سازی
- Some different realization
- حل معادلات فضای حالت سیستمهای LTV
- Solution of LTV state equation
- ماتریس اساسی و ماتریس گذار حالت و خواص آنها
- Fundamental matrix and stste transition matrix and their properties
- هم ارز یا معادل در سیستمهای LTV
- State Space Representation for LTV Systems
- پیاده سازی سیستمهای LTV
- Realization of LTI Systems

3

Introduction

مقدمه

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

فرم کلی معادلات فضای حالت در سیستمهای غیر خطی

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

معادلات فضای حالت سیستمهای LTV

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

معادلات فضای حالت سیستمهای LTI

اگر شرائط اولیه و ورودی مشخص باشد مقدار x(t) و y(t) چند است؟

If initial condition and input are defined, then x(t), y(t) ?

4

Solution of LTI state equation

حل معادلات فضای حالت LTI

روش اول:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t)|_{t=t_0} = x_{t_0}$$

در فصول قبل دیدیم

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

با ضرب معادله حالت در e^{-At} داریم:

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t) \qquad \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)$$

با انتگرال از طرفین داریم:

$$e^{-A\tau}x(\tau)\big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

و نهایتا

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

معادله انتقال حالت

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Solution of LTI state equation

حل معادلات فضای حالت LTI

روش دوم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t)|_{t=t_0} = x_{t_0}$$

با تبدیل لاپلاس داریم

$$sx(s) - x_0 = Ax(s) + Bu(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + \underline{(sI - A)^{-1}Bu(s)}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \underline{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Convolution integral

معادله انتقال حالت

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

6

Solution of LTI state equation حل معادلات فضای حالت LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t)|_{t=t_0} = x_{t_0}$$

$$x(t) = \boxed{e^{At}} x_0 + \int_0^t \boxed{e^{A(t-\tau)}} Bu(\tau)d\tau$$

روشهای محاسبه e^{At}

۱- سری نمایی: $e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots$

۲- یافتن چند جمله ای درجه n-1 : $e^{At} = h(A)$

۳- استفاده از فرم جردن و .... $e^{At} = Qe^{\hat{A}t}Q^{-1}$

۴- استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس $e^{At} = L^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right)$

7

Solution of LTI state equation حل معادلات فضای حالت LTI

مثال ۴-۱: سیستم مقابل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

مطلوبست x(t)

حل: می دانیم

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

پس ابتدا باید e^{At} را تعیین نمود.

$$e^{At} = L^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right) = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right) \qquad e^{At} = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+1} & \frac{-1}{s^2+2s+1} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{s}{s^2+2s+1} \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t (1-(t-\tau))e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

8

Solution of LTI state equation

حل معادلات فضای حالت LTI

مثال ۴-۲: سیستم مقابل را در نظر بگیرید .

مطلوبست x(t) با فرض اعمال پله واحد

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$e^{At}=L^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\right)=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)}\\ 0 & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\right)$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

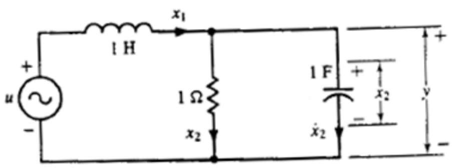
$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}\\ 0 & e^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(\tau)d\tau$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}\\ e^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau\ =\begin{bmatrix}\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\end{bmatrix}$$

Equivalent state equation

معادلات فضای حالت همانند(معادل)

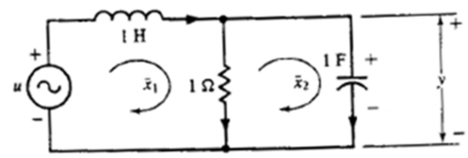
مثال ۴-۳: الف) مطلوبست معادلات فضای حالت با توجه به متغیرهای حالت انتخاب شده.



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

ب) مطلوبست معادلات فضای حالت با توجه به متغیرهای حالت انتخاب شده.



$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}$$

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

$$\underset{\text{w=Px}}{\overset{\text{Similarity transformation}}{\Longrightarrow}}$$

$\hat{A} = PAP^{-1}$ $\quad \hat{b} = Pb$

$\hat{c} = cP^{-1}$ $\quad \hat{d} = d$

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u$$
$$y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

1- It can lead to a simpler system. ۱- امکان ساده سازی سیستم

2- It doesn't change the eigenvalues. ۲- عدم تغییر مقادیر ویژه

3- Similar transfer function. ۳- توابع انتقال یکسان

4- It doesn't change observability. ۴- عدم تغییر رویت پذیری

5- It doesn't change controllability. ۵- عدم تغییر کنترل پذیری

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

عدم تغییر مقادیر ویژه

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

$w = Px$

$\hat{A} = PAP^{-1}$ $\quad \hat{b} = Pb$

$\hat{c} = cP^{-1}$ $\quad \hat{d} = d$

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u$$
$$y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

$$|sI - A| = 0 \qquad\qquad |sI - \hat{A}| = 0$$

$$|sI - \hat{A}| = |sPP^{-1} - PAP^{-1}| = |P(sI - A)P^{-1}| = |\cancel{P}||sI - A||\cancel{P^{-1}}|$$
$$= |sI - A|$$

تبدیل همانندی مقادیر ویژه را تغییر نمی دهد

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

توابع انتقال یکسان

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

$$w = Px$$
$$\hat{A} = PAP^{-1} \qquad \hat{b} = Pb$$
$$\hat{c} = cP^{-1} \qquad \hat{d} = d$$

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u$$
$$y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

$$\hat{g}(s) = \hat{c}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{b} + \hat{d} = cP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1}Pb + d$$
$$= cP^{-1}P(sI - A)^{-1}P^{-1}Pb + d = c(sI - A)^{-1}b + d$$
$$= g(s)$$

تبدیل همانندی تابع انتقال را تغییر نمی دهد

13

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

کاربرد تبدیلات همانندی

- یافتن سیستمهای همانند ساده تر

فرمهای کانونی، فرم جردن، فرم مودال و ....

- مدرج سازی برای پیاده سازی بهتر

14

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

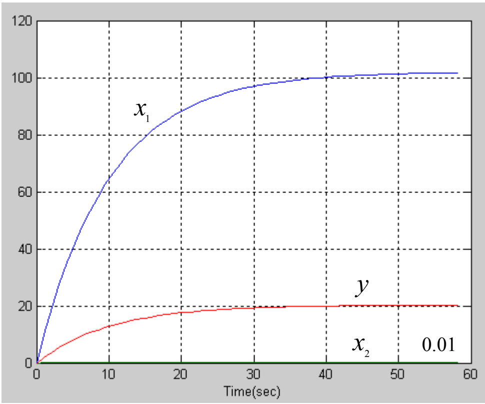
کاربرد تبدیلات همانندی در مدرج سازی

مثال ۴-۵: سیستم مقابل را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0.1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0.2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

```
[y,x,t]=step(A,b,c,d);
plot(t,x,t,y)
grid on
xlabel('Time(sec)')
```



برای پیاده سازی تماما خارج بازه ± 10

تاثیر تبدیل همانندی بر خروجی y ؟؟؟

تاثیر تبدیل همانندی بر حالات x ؟؟؟

$$\hat{x}_1 = 0.2x_1,\quad \hat{x}_2 = 200x_2$$

$$\hat{x} = Px = \begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix}x$$

Equivalent state equation
معادلات فضای حالت همانند(معادل)

کاربرد تبدیلات همانندی در مدرج سازی

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0.1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0.2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

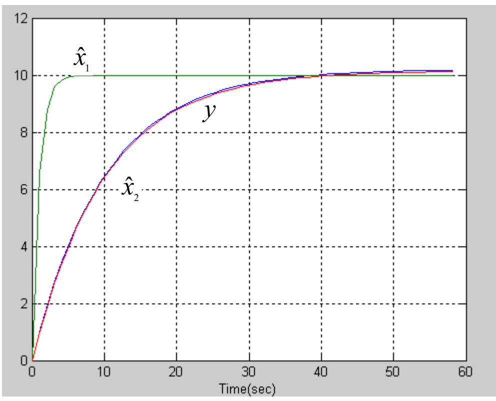
$$\hat{x} = Px$$

$$\hat{A}=PAP^{-1} \qquad \hat{b}=Pb$$

$$\hat{c}=cP^{-1} \qquad \hat{d}=d$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$



تمام متغیرها در بازه ± 10

Zero state equivalent هم ارز حالت صفر

تعریف ۴-۱: دو دسته معادله فضای حالت را معادل (هم ارز) حالت صفر گویند اگر ماتریس تابع انتقال آنها یکسان باشد.

مثال ۴-۴: الف) آیا معادله فضای حالت زیر همانند هستند؟ معادل حالت صفر چطور؟

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \dot{x}=-2x+u$$

$$y=[1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad y=x$$

واضح است که همانند نیستند.

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$g(s)=\frac{1}{s+2} \qquad\qquad g(s)=\frac{1}{s+2}$$

معادلات فضای حالت داده شده معادل حالت صفر هستند.

17

Zero state equivalent هم ارز حالت صفر

قضیه ۴-۱: دو دسته معادلات حالت زیر معادل حالت صفر (دارای تابع انتقال یکسان)هستند اگر و فقط اگر روابط زیر برقرار باشد.

$$\dot{x}=Ax+bu \qquad \dot{w}=\bar{A}w+\bar{b}u$$

$$y=cx+du \qquad y=\bar{c}w+\bar{d}u$$

$$d=\bar{d}$$

$$cA^m b=\bar{c}\bar{A}^m\bar{b} \qquad m=0,1,2,....$$

اثبات: دو دسته معادلات حالت فوق دارای توابع انتقال زیر هستند:

$$d+c(sI-A)^{-1}b=\bar{d}+\bar{c}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{b}$$

با استفاده از بسط سری داریم:

$$d+cbs^{-1}+cAbs^{-2}+cA^2bs^{-3}+...=\bar{d}+\bar{c}\bar{b}s^{-1}+\bar{c}\bar{A}\bar{b}s^{-2}+\bar{c}\bar{A}^2\bar{b}s^{-3}+...$$

18

Realization

پیاده سازی

معادلات فضای حالت

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Eu$$

$\xrightarrow[\text{is unique}]{\text{This transformation}}$

توصیف ورودی-خروجی
(تابع انتقال)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E$$

توصیف ورودی-خروجی
(تابع انتقال)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E$$

$\xrightarrow[\text{This transformation is not unique}]{\text{Realization}}$

معادلات فضای حالت

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Eu$$

نکته مهم: برای چه سیستمهایی امکان محاسبه توصیف فضای حالتی وجود دارد؟

19

Realization

پیاده سازی

قضیه ۴-۲: ماتریس انتقال $G_{q\times p}(s)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر $G(s)$ ماتریس گویای مناسب باشد

اثبات: واضح است که برای اثبات باید هر دو طرف قضیه را اثبات کرد.

$G(s)$ ماتریس گویای مناسب $\Longrightarrow$ ماتریس انتقال $G(s)$ قابل پیاده سازی

ماتریس انتقال $G(s)$ قابل پیاده سازی $\Longrightarrow$ $G(s)$ ماتریس گویای مناسب

ابتدا به اثبات قسمت اول می پردازیم:

چون $G(s)$ قابل پیاده سازی است لذا معادلات فضای حالت مقابل وجود دارد

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

پس تابع انتقال برابر است با

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C\frac{adj(sI - A)}{|sI - A|}B + D \quad \text{..............................}$$

20

Realization پیاده سازی

قضیه ۴-۲: ماتریس انتقال $G_{q\times p}(s)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر G(s) ماتریس گویای مناسب باشد

حال طرف دوم قضیه را اثبات می کنیم:

ماتریس انتقال G(s) قابل پیاده سازی $\Rightarrow$ G(s) ماتریس گویای مناسب

G(s) ماتریس گویای مناسب است لذا داریم:

$$G(s)=G(\infty)+G_{sp}(s) \;=G(\infty)+\frac{1}{d(s)}\left[N_1 s^{r-1}+N_2 s^{r-2}+\ldots+N_{r-1}s+N_r\right]$$

در رابطه فوق:

$$d(s)=s^r+\alpha_1 s^{r-1}+\ldots+\alpha_{r-1}s+\alpha_r$$

حال ادعا می کنیم معادلات فضای حالت سیستم عبارتست از

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 I_p & -\alpha_2 I_p & \ldots & -\alpha_{r-1}I_p & -\alpha_r I_p\\ I_p & 0_p & \ldots & & 0_p\\ 0_p & I_p & \ldots & 0_p & 0_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0_p & 0_p & \ldots & I_p & 0_p\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}I_p\\0_p\\0_p\\\vdots\\0_p\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \ldots & N_{r-1} & N_r\end{bmatrix}x+G(\infty)u$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\ldots.=G(s)$$

21

Realization پیاده سازی

قضیه ۴-۲: ماتریس انتقال $G_{q\times p}(s)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر G(s) ماتریس گویای مناسب باشد

حال ادعا می کنیم معادلات فضای حالت سیستم عبارتست از

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 I_p & -\alpha_2 I_p & \ldots & -\alpha_{r-1}I_p & -\alpha_r I_p\\ I_p & 0_p & \ldots & & 0_p\\ 0_p & I_p & \ldots & 0_p & 0_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0_p & 0_p & \ldots & I_p & 0_p\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}I_p\\0_p\\0_p\\\vdots\\0_p\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \ldots & N_{r-1} & N_r\end{bmatrix}x+G(\infty)u$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\ldots.=G(s)$$

$$(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_r\end{bmatrix} \qquad B=(sI-A)\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_r\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}sZ_2&=Z_1\\ sZ_3&=Z_2\\ sZ_4&=Z_3\\ sZ_r&=Z_{r-1}\end{aligned}$$

$$sZ_1=-\alpha_1 Z_1-\alpha_2 Z_2-\ldots-\alpha_r Z_r+I_p \qquad sZ_1=\left(-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{s}-\ldots-\frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right)Z_1+I_p$$

22

Realization
پیاده سازی

قضیه ۴-۲: ماتریس انتقال $G_{q\times p}(s)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر $G(s)$ ماتریس گویای مناسب باشد

حال ادعا می کنیم معادلات فضای حالت سیستم عبارتست از

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 I_p & -\alpha_2 I_p & \cdots & -\alpha_{r-1} I_p & -\alpha_r I_p\\ I_p & 0_p & \cdots & & 0_p\\ 0_p & I_p & \cdots & 0_p & 0_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0_p & 0_p & \cdots & I_p & 0_p\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}I_p\\0_p\\0_p\\\vdots\\0_p\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \cdots & N_{r-1} & N_r\end{bmatrix}x+G(\infty)u$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\dots=G(s)$$

$$sZ_2=Z_1 \quad sZ_3=Z_2 \quad \dots \quad sZ_r=Z_{r-1}$$

$$sZ_1=\left(-\alpha_1-\frac{\alpha_2}{s}-\dots-\frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right)Z_1+I_p$$

$$Z_1=\frac{s^{r-1}}{d(s)}I_p \qquad Z_2=\frac{s^{r-2}}{d(s)}I_p \qquad \cdots \qquad Z_r=\frac{1}{d(s)}I_p$$

$$C(sI-A)^{-1}B+G(\infty)=C\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_r\end{bmatrix}+D=\frac{1}{d(s)}\left[N_1s^{r-1}+N_2s^{r-2}+\dots+N_r\right]+G(\infty)$$

23

Realization
پیاده سازی

مثال ۴-۶: معادلات فضای حالتی سیستم مقابل را بدست آورید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-12}{2s+1} & \frac{3}{s+2}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^3+4.5s^2+6s+2}\begin{bmatrix}-6(s+2)^2 & 3(s+2)(s+0.5)\\ 0.5(s+2) & (s+1)(s+0.5)\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^3+4.5s^2+6s+2}\left\{\begin{bmatrix}-6&3\\0&1\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}-24&7.5\\0.5&1.5\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-24&3\\1&0.5\end{bmatrix}\right\}$$

24

Realization

پیاده سازی

مثال ۴-۶: معادلات فضای حالتی سیستم مقابل را بدست آورید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{4s-10}{2s+1} & \dfrac{3}{s+2}\\ \dfrac{1}{(2s+1)(s+2)} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^3+4.5s^2+6s+2}\left\{\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}-24 & 7.5\\ 0.5 & 1.5\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-24 & 3\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}\right\}$$

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}-4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hdashline 0 & 0\\ 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc:cc:cc}-6 & 3 & -24 & 7.5 & -24 & 3\\ 0 & 1 & 0.5 & 1.5 & 1 & 0.5\end{array}\right]x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}u$$

Realization

پیاده سازی

$$y(s)=G(s)u(s)=G(s)\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_p\end{bmatrix}$$

$$y(s)=G(s)u(s)=G_{c1}(s)u_1+G_{c2}(s)u_2+\cdots+G_{cp}(s)u_p$$

$$y(s)=G(s)u(s)=y_{c1}(s)+y_{c2}(s)+\cdots y_{cp}(s)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y=y_{c1}+y_{c2}=[C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[d_1 \quad d_2]\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Realization

پیاده سازی

مثال ۴-۷: معادلات فضای حالتی سیستم مقابل را بدست آورید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

ستون اول:

$$G_{:,1}(s)=\begin{bmatrix}\frac{4s-10}{2s+1}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$G_{:,1}(s)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+2.5s+1}\begin{bmatrix}-6(s+2)\\0.5\end{bmatrix}$$

$$G_{:,1}(s)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+2.5s+1}\left\{\begin{bmatrix}-6\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-12\\0.5\end{bmatrix}\right\}$$

$$\dot{x}_1=\begin{bmatrix}-2.5 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y_{c1}=\begin{bmatrix}-6 & -12\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u_1$$

ستون دوم:

$$G_{:,2}(s)=\begin{bmatrix}\frac{3}{s+2}\\ \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

$$G_{:,2}(s)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+4s+4}\begin{bmatrix}3(s+2)\\ s+1\end{bmatrix}$$

$$G_{:,2}(s)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+4s+4}\left\{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\dot{x}_2=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_2$$

$$y_{c2}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_2$$

27

Realization

پیاده سازی

مثال ۴-۷: معادلات فضای حالتی سیستم مقابل را بدست آورید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2}\\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

ستون اول:

$$\dot{x}_1=\begin{bmatrix}-2.5 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_1$$

$$y_{c1}=\begin{bmatrix}-6 & -12\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u_1$$

ستون دوم:

$$\dot{x}_2=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_2$$

$$y_{c2}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u_2$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2.5 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}-6 & -12 & 3 & 6\\ 0 & 0.5 & 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

28

Solution of LTV state equation

حل معادلات فضای حالت LTV

در این بخش هدف حل معادلات مقابل است.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

ابتدا قسمت همگن را حل می کنیم:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

تعریف ۴-۲(ماتریس اساسی): با فرض اینکه A دارای ابعاد n×n است n شرط اولیه مستقل $x_1(t_0)$ ، $x_2(t_0)$ و ... $x_n(t_0)$ در نظر میگیریم. فرض کنید $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و ... $x_n(t)$ پاسخ سیستم به شرایط اولیه انتخاب شده است در اینصورت ماتریس اساسی بصورت زیر تعریف می شود.

$$X(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n(t)]$$

29

Solution of LTV state equation

حل معادلات فضای حالت LTV

مثال ۴-۸: ماتریس اساسی سیستم مقابل را بدست آورید.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

شرایط اولیه مستقل بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5t^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5t^2 + 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5t^2 & 0.5t^2 + 2 \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه مستقل همچنین می تواند بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5t^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5t^2 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس اساسی .....

30

Solution of LTV state equation
حل معادلات فضای حالت LTV

نکته : ماتریس اساسی X(t) در معادله همگن زیر صدق می کند.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

پس داریم:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

لم۴-۱ : ماتریس اساسی X(t) به ازای تمام زمانها غیر منفرد است.

31

Solution of LTV state equation
حل معادلات فضای حالت LTV

تعریف ۴-۳(ماتریس گذار حالت):

فرض کنید X(t) هر ماتریس اساسی معادله همگن زیر باشد:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

در اینصورت ماتریس گذار حالت بصورت زیر تعریف میشود:

$$\Phi(t,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

ماتریس گذار حالت جواب منحصر بفرد دستگاه معادله زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$
$$\Phi(t_0,t_0) = I$$

32

Solution of LTV state equation
حل معادلات فضای حالت LTV

مثال ۴-۹: ماتریس گذار حالت سیستم مقابل را بدست آورید.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{bmatrix}x(t)$$

در مثال قبل ماتریس اساسی سیستم محاسبه شد.

$$X(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.5t^2 & 0.5t^2+2\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.5t^2 & 0.5t^2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.25t_0^2+1 & -0.5\\ -0.25t_0^2 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5(t^2-t_0^2) & 1\end{bmatrix}$$

و برای ماتریس اساسی بعدی

$$X(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -0.5t_0^2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5(t^2-t_0^2) & 1\end{bmatrix}$$

نکته : ماتریس اساسی .....

33

Property of state transition matrix
خواص ماتریس انتقال حالت

1- $\Phi(t,t) = I$

2- $\Phi^{-1}(t,t_0)= \Phi(t_0,t)$

3- $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t2,t0)$

34

Solution of LTV state equation حل معادلات فضای حالت LTV

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ در این بخش هدف حل معادلات مقابل بود.

$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$

ادعا می کنیم جواب دستگاه فوق عبارتست از:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$
$$= \Phi(t,t_0)\left(x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

برای اثبات ادعای فوق ابتدا باید نشان دهیم معادله فوق شرط اولیه را ارضا می کند:

$$x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)x_{t_0} + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = x_{t_0}$$

و همچنین باید رابطه داده شده در معادله بالا صادق باشد:

$$\dot{x}(t) = ... = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

پس خروجی عبارتست از:

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_{t_0} + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

Solution of LTV state equation حل معادلات فضای حالت LTV

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ در این بخش هدف حل معادلات مقابل بود.

$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$

ادعا می کنیم جواب دستگاه فوق عبارتست از:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$
$$= \Phi(t,t_0)\left(x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

پس خروجی عبارتست از:

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_{t_0} + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

پاسخ ورودی صفر عبارتست از:

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_{t_0} \qquad x(t) = \Phi(t,t_0)x_{t_0}$$

پاسخ حالت صفر عبارتست از:

$$y(t) = C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left(C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau$$

Solution of LTV state equation

حل معادلات فضای حالت LTV

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

در این بخش هدف حل معادلات مقابل بود.

ادعا می کنیم جواب دستگاه فوق عبارتست از:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$
$$= \Phi(t,t_0)\left(x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right)$$

پس خروجی عبارتست از:

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_{t_0} + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

پاسخ حالت صفر عبارتست از:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left(C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)\right)u(\tau)d\tau$$

قبلا دیدیم:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

Equivalent state equation for LTV systems

معادلات فضای حالت همانند در سیستم LTV

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad y = cx + du$$

$$\xrightarrow[\text{w=Px}]{\text{Similarity transformation}}$$

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u \qquad y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

$$\hat{A} = PAP^{-1} \qquad \hat{b} = Pb$$
$$\hat{c} = cP^{-1} \qquad \hat{d} = d$$

خواص مهم: عدم تغییر مقادیر ویژه و توابع انتقال یکسان

اما در مورد سیستمهای LTV داریم:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u \qquad y = c(t)x + d(t)u$$

$$\xrightarrow[\text{w=P(t)x}]{\text{Similarity LTV transformation}}$$

$$\dot{w} = \hat{A}(t)w + \hat{b}(t)u \qquad y = \hat{c}(t)w + \hat{d}(t)u$$

$$\hat{A}(t) = ...$$
$$\hat{b}(t) = P(t)b,\ \hat{c}(t) = cP^{-1}(t),\ \hat{d} = d$$

خواص مهم: عدم تغییر پاسخ ضربه

38

Equivalent state equation for LTV systems

معادلات فضای حالت همانند در سیستم LTV

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + b(t)u\\ y &= c(t)x + d(t)u\end{aligned} \quad \underset{w=P(t)x}{\overset{\text{Similarity LTV transformation}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{aligned}\dot{w} &= \hat{A}(t)w + \hat{b}(t)u\\ y &= \hat{c}(t)w + \hat{d}(t)u\end{aligned}$$

قضیه ۴-۳: فرض کنید A_0 ماتریس ثابت دلخواه باشد در اینصورت در رابطه بالا تبدیل $P(t)$ را بگونه ای می توان انتخاب نمود که $\hat{A}(t) = A_0$

اثبات:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + b(t)u\\ y &= c(t)x + d(t)u\end{aligned} \quad \underset{w=P(t)x}{\overset{\text{Similarity LTV transformation}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{aligned}\dot{w} &= A_0 w + \hat{b}(t)u\\ y &= \hat{c}(t)w + \hat{d}(t)u\end{aligned}$$

$\downarrow$ Fundumental matrix $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$ Fundumental matrix

$X(t)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $W(t) = e^{A_0 t}$

$$W(t) = e^{A_0 t} = P(t)X(t) \qquad P(t) = e^{A_0 t}X^{-1}(t)$$

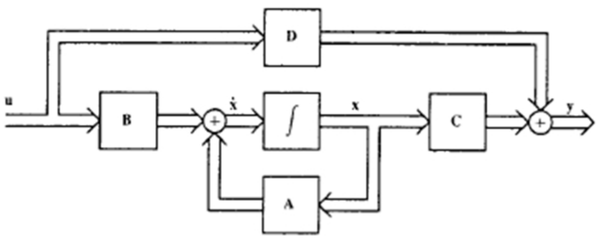
$$\hat{A}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = A_0$$

39

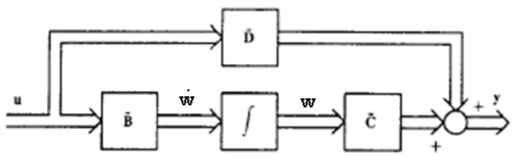
Equivalent state equation for LTV systems

معادلات فضای حالت همانند در سیستم LTV

در حالت خاص در قضیه قبل با فرض $A_0=0$ داریم



$$W = P(t)x \qquad \Downarrow$$



40

Equivalent state equation for LTV systems

معادلات فضای حالت همانند در سیستم LTV

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + b(t)u \\ y &= c(t)x + d(t)u\end{aligned} \quad \underset{w=P(t)x}{\overset{\text{Similarity LTV transformation}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{aligned}\dot{w} &= \hat{A}(t)w + \hat{b}(t)u \\ y &= \hat{c}(t)w + \hat{d}(t)u\end{aligned}$$

تعریف ۴-۴(تبدیل لیاپانوفی): ماتریس P(t) تبدیل لیاپانوفی نامیده می شود اگر

۱- P(t) غیر منفرد باشد.

۲- P(t) و P'(t) پیوسته باشد.

۳- P(t) و $P^{-1}(t)$ برای تمام t کراندار باشد.

41

Equivalent state equation for LTV systems

معادلات فضای حالت همانند در سیستم LTV

مثال ۴-۱۱: برای سیستم مقابل تبدیل همانندی ای بیابید که

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}(t) = A_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

و سیستم جدید را نمایش دهید. آیا تبدیل بدست آمده لیاپانوفی است؟

تبدیل همانندی مورد نظر عبارتست از:

$$P(t) = e^{A_0 t} X^{-1}(t)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

تبدیل بدست آمده لیاپانوفی نیست.

$$\hat{A}(t) = \left(P(t)A + \dot{P}(t)\right)P^{-1}(t) = \left(\begin{bmatrix}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\right)P^{-1}(t) = \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{b}(t) = P(t)b(t) = \begin{bmatrix}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{2t} \\ 0\end{bmatrix} \qquad \hat{c}(t) = c(t)P^{-1}(t) = \begin{bmatrix}e^{-2t} & e^{-t}\end{bmatrix} \qquad \hat{d}(t) = 0$$

42

Realization for LTV systems

پیاده سازی سیستمهای LTV

معادلات فضای حالت

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

$\xrightarrow[\text{is unique}]{\text{This transformation}}$

پاسخ ضربه

$$G(t,\tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

پاسخ ضربه

$$G(t,\tau) = C(t)X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

$\xrightarrow[\text{This transformation is not unique}]{\text{Realization}}$

معادلات فضای حالت

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

نکته مهم: برای چه سیستمهایی امکان محاسبه توصیف فضای حالتی وجود دارد؟

43

Realization for LTV systems

پیاده سازی سیستمهای LTV

قضیه ۴-۴: ماتریس پاسخ ضربه $G_{q\times p}(t,\tau)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر بتوان $G(t,\tau)$ را بصورت زیر

$$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

بیان نمود.

اثبات: واضح است که برای اثبات باید هر دو طرف قضیه را اثبات کرد.

ماتریس پاسخ ضربه $G(t,\tau)$ قابل پیاده سازی $\Longrightarrow$ $G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$

$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$ $\Longrightarrow$ ماتریس پاسخ ضربه $G(t,\tau)$ قابل پیاده سازی

ابتدا به اثبات قسمت اول می پردازیم:

چون پاسخ ضربه $G(t,\tau)$ قابل پیاده سازی است لذا معادلات فضای حالت مقابل وجود دارد

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

پس پاسخ ضربه عبارتست از:

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) = \dots\dots\dots = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

44

Realization for LTV systems پیاده سازی سیستمهای LTV

قضیه ۴-۴: ماتریس پاسخ ضربه $G_{q\times p}(t,\tau)$ قابل پیاده سازی اگر و فقط اگر بتوان $G(t,\tau)$ را بصورت زیر

$$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

بیان نمود.

حال به اثبات قسمت دوم می پردازیم:

$$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \Longrightarrow$$ ماتریس پاسخ ضربه $G(t,\tau)$ قابل پیاده سازی

ادعا می کنیم معادلات فضای حالت سیستم مقابل عبارتست از:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + N(t)u$$

$$y = M(t)x + D(t)u$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(t,\tau) &= C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= M(t)IN(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \end{aligned}$$

45

Realization for LTV systems پیاده سازی سیستمهای LTV

مثال ۴-۱۲: پاسخ ضربه $g(t)=te^{\lambda t}$ را در نظر بگیرید. در صورت امکان یک پیاده سازی LTI و یک پیاده سازی LTV بدست آورید.

$$g(t) = te^{\lambda t}$$

$$g(s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2} = \frac{1}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$$

پیاده سازی LTI :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$g(t-\tau) = (t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}$$

$$g(t-\tau) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda\tau} \\ e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix}$$

پیاده سازی LTV :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -te^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda t} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} x$$

46

Exercises

تمرینها

تمرین ۴-۱: معادله حالت مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

مطلوبست پاسخ سیستم به شرط اولیه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

تمرین ۴-۲: مطلوبست پاسخ پله واحد سیستم مقابل به پله واحد(شرط اولیه صفر است)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x$$

تمرین ۴-۳: مطلوبست فرم کانونی و فرم مودال سیستم مقابل:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

47

Exercises

تمرینها

تمرین ۴-۴: معادله حالت مقابل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

تبدیل همانندی ای بیابید که دامنه متغیرهای حالت با خروجی یکسان باشد. اگر به ورودی پله با دامنه a اعمال شود مقدار a را بگونه ای تنظیم کنید که کلیه حالات و خروجی در بازه ۱۰± باشد.

تمرین ۴-۵: معادله حالات مقابل را در نظر بگیرید آیا این دو معادله حالت همانند هستند؟ آیا هم ارز حالت صفر هستند.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

48

Exercises

تمرینها

تمرین ۴-۶: پیاده سازی ماتریس انتقال مقابل را بیابید:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1} & \dfrac{2s-3}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s-2}{s+1} & \dfrac{s}{s+2}\end{bmatrix}$$

تمرین ۴-۷: پیاده سازی ماتریس انتقال مقابل را از طریق یافتن معادله حالت برای هر ستون و الحاق آنها را بیابید:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1} & \dfrac{2s-3}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s-2}{s+1} & \dfrac{s}{s+2}\end{bmatrix}$$

Exercises

تمرینها

تمرین ۴-۸: ماتریس اساسی و ماتریس انتقال حالت سیستم مقابل را بیابید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}x$$

تمرین ۴-۹: ماتریس اساسی و ماتریس انتقال حالت سیستم مقابل را بیابید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}x$$

تمرین ۴-۱۰: ماتریس اساسی و ماتریس انتقال حالت سیستم مقابل را بیابید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\sin t & 0\\ 0 & -\cos t\end{bmatrix}x$$

تمرین ۴-۱۱: یک سیستم غیر متغیر با زمان برای سیستم مقابل بیابید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\sin t & 0\\ 0 & -\cos t\end{bmatrix}x$$

Exercises
تمرینها

تمرین ۴-۱۲: در صورت امکان یک پیاده سازی LTI و یک پیاده سازی LTV برای سیستم مقابل بیابید.

$$g(t) = t^2 e^{\lambda t}$$

تمرین ۴-۱۳: در صورت امکان یک پیاده سازی LTI و یک پیاده سازی LTV برای سیستم مقابل بیابید.

$$g(t,\tau) = \sin t (e^{-(t-\tau)}) \cos\tau$$

تمرین ۴-۱۴: برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

$$\det\Phi(t,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} (a_{11}(\tau) + a_{22}(\tau)) d\tau\right]$$

تمرین ۴-۱۵: نشان دهید که $X(t)=e^{At}Ce^{Bt}$ جواب معادله زیر است:

$$\dot{X} = AX + XB \quad X(0) = C$$

51

Exercises
تمرینها

تمرین ۴-۱۶: فرض کنید

$$\Phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت سیستم مقابل است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} x$$

نشان دهید که:

$$\Phi_{21}(t,t_0) = 0 \quad for\ all\ t\ and\ t_0$$

$$(\partial/\partial t)\Phi_{ii}(t,t_0) = A_{ii}\Phi_{ii}(t,t_0) \quad for \quad i = 1,2$$

تمرین ۴-۱۷: نشان دهید که جواب معادله

$$\dot{X}(t) = A_1 X(t) - X(t) A_1$$

عبارتست از:

$$X(t) = e^{A_1 t} X(0) e^{-A_1 t}$$

و همچنین مقادیر ویژه X(t) از t مستقل است.

Answers to selected problems

جواب ۴-۱:

$$x(t)=\begin{bmatrix}\cos t+\sin t\\ \cos t-\sin t\end{bmatrix}$$

جواب ۴-۲:

$$y(t)=5e^{-t}\sin t \quad for\ t\geq 0$$

جواب ۴-۵: همانند نیستند ولی هم ارز حالت صفر هستند.

جواب ۴-۶:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 2 & 4 & -3\\ -3 & -2 & -6 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u$$

53

Answers to selected problems

جواب ۴-۸:

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix}1 & \int_0^t e^{0.5\tau^2}d\tau\\ 0 & e^{0.5t^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}1 & -e^{0.5t^2}\int_{t_0}^t e^{0.5\tau^2}d\tau\\ 0 & e^{0.5(t^2-t_0^2)}\end{bmatrix}$$

جواب ۴-۹:

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{t}\\ 0 & 2e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}e^{-(t-t_0)} & 0.5(e^{t}e^{t_0}-e^{-t}e^{t_0}\\ 0 & e^{-(t-t_0)}\end{bmatrix}$$

جواب ۴-۱۰:

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}e^{\cos t-\cos t_0} & 0\\ 0 & e^{-\sin t+\sin t_0}\end{bmatrix}$$

جواب ۴-۱۲:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}+\begin{bmatrix}t^2e^{-\lambda t}\\ -2te^{-\lambda t}\\ e^{-\lambda t}\end{bmatrix}u \quad y=[e^{\lambda t}\ \ te^{\lambda t}\ \ t^2e^{\lambda t}]\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}3\lambda & -3\lambda^2 & \lambda^3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \quad y=[0\ \ 0\ \ 2]\mathbf{x}$$

54