# جبرخطی کاربردی

## درس۵

## فضاهای برداری و متعامد سازی

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸

مدرس: صدقی زاده

---

### مفهوم میدان و فضای برداری

- در مطالعه سیستمها فضای برداری را به روی یک میدان تعریف می کنند.

- میدان (Field) مجموعه ای از اسکالرها است به طوریکه همراه با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

۱- بسته بودن نسبت به عمل جمع $\forall a,b \in F, \quad \exists a+b \in F$

۲- بسته بودن نسبت به عمل ضرب $\forall a,b \in F, \quad \exists ab \in F$

۳- برقراری قوانین زیر $\forall a,b,c \in F$

| | |
|---|---|
| قوانین جابجایی پذیری | 1. $a+b=b+a, \quad ab=ba$ |
| قوانین شرکت پذیری | 2. $(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc)$ |
| قانون توزیع پذیری | 3. $a(b+c)=ab+ac$ |
| عضو خنثی در عمل جمع | 4. $\forall a \in F, \quad \exists 0 \in F \rightarrow \quad a+0=a$ |
| عضو خنثی در عمل ضرب | 5. $\forall a \in F, \quad \exists 1 \in F \rightarrow \quad 1a=a$ |
| عضو قرینه در عمل جمع | 6. $\forall a \in F, \quad \exists b \in F \rightarrow \quad a+b=0$ |
| عضو معکوس در عمل ضرب | 7. $\forall a \in F, \quad \exists b \in F \rightarrow \quad ab=1$ |

**مثال ۱**

- مجموعه های اعداد حقیقی $(\Re)$، اعداد مختلط $(C)$ با دو عمل جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می دهند.

- مجموعه اعداد طبیعی $(N)$ با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی دهد، زیرا شرط ششم و هفتم را برآورده نمی سازد.

$$\alpha \in N \rightarrow -\alpha \notin N$$

$$\beta \in N \rightarrow \frac{1}{\beta} \notin N$$

- مجموعه اعداد صحیح $(Z)$ با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی دهد، زیرا شرط هفتم را برآورده نمی سازد.

$$\beta \in Z \rightarrow \frac{1}{\beta} \notin Z$$



**فضای برداری (Vector Space)**

- یک فضای برداری مانند $V$ بر روی میدان $F$، مجموعه ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall c \in F \rightarrow \quad c\mathbf{u} \in V$
3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
4. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists \mathbf{0} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
6. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists -\mathbf{u} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
7. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall a, b \in F \rightarrow \quad (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}, \quad a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall a, b \in F \rightarrow \quad a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
9. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists 1 \in F \rightarrow \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

مثال ۲

مثال هایی از فضاهای برداری،

- مجموعه $\Re^n$ (بردارهای $n$ تایی حقیقی) به روی میدان اعداد حقیقی

- مجموعه $M_{n\times n}(\Re)$ (ماتریس های $n\times n$ با عناصر حقیقی) بر روی میدان اعداد حقیقی

- مجموعه ماتریس های متقارن $n\times n$ مختلط بر روی میدان اعداد مختلط

- مجموعه $P_n(\Re)$ چند جمله ای های مرتبه $n$ به فرم $\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ بر روی میدان اعداد حقیقی



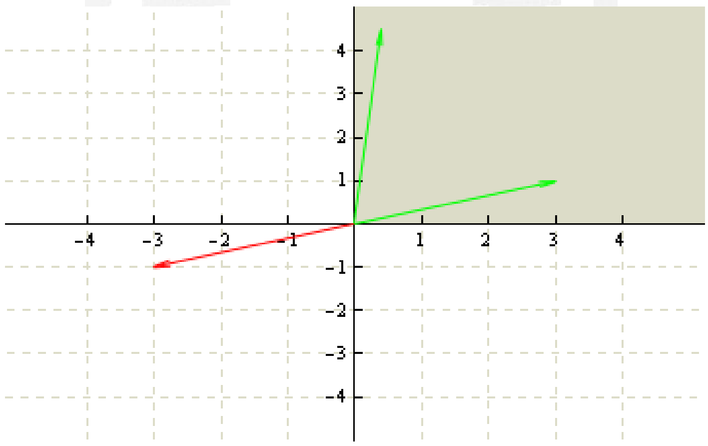
مثال ۳

مثال هایی که فضای برداری نیستند،

- مجموعه ماتریس های $2\times 2$ غیرمنفرد یک فضای برداری نیست، زیرا جمع دو ماتریس غیرمنفرد ممکن است ماتریسی منفرد باشد.

$$P+Q=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

- مجموعه بردارهای دوتایی در ربع اول صفحه مختصات،



## مفهوم زیر فضای برداری (Subspace)

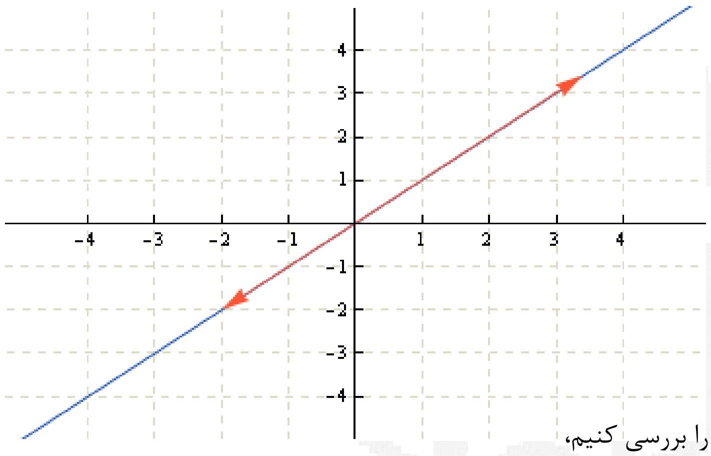
- اگر $V$ یک فضای برداری بر روی میدان $F$ و $S$ یک زیر مجموعه غیر تهی از $V$ باشد. $S$ را یک زیر فضا از $V$ می نامند هرگاه،

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \forall \mathbf{s},\mathbf{t} \in S \to \quad \mathbf{s}+\mathbf{t} \in S \\ 2. & \forall \mathbf{s} \in S, \quad \forall a \in F \to \quad a\mathbf{s} \in S \end{array}}$$



## مثال ۴

در فضای برداری دو بعدی $\Re^2$ هر خط راستی که از مبدأ عبور کند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ می باشد،




$$\boxed{S = \{(x,y) \in \Re^2 : ax+by=0\}}$$

برای بررسی باید برقراری شرایط یک و دو را بررسی کنیم،

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in S \to ax+by=0 \\ (u,v) \in S \to au+bv=0\end{array}\right\} \to \quad a(x+u)+b(y+v)=0$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u, y+v) \in S$ می باشد و شرط اول بر قرار است.

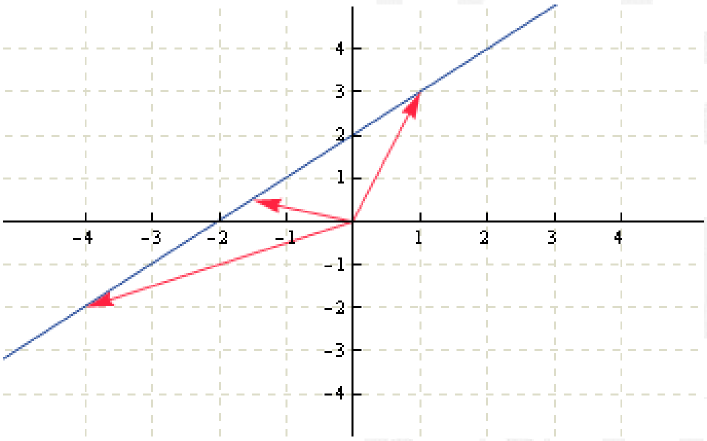
$$(x,y) \in S \to \quad ax+by=0 \to \quad a(cx)+b(cy)=0$$

از این رو $c(x,y)=(cx,cy) \in S$ می باشد و شرط دوم نیز برقرار است.

**مثال ۵**

آیا در فضای برداری دو بعدی $\Re^2$ هر خط راستی که از مبدأ عبور نکند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ است؟

$$\boxed{S = \{(x,y) \in \Re^2 : ax + by = k\}}$$



شرایط زیرفضا بودن را بررسی کنیم،

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in S \to ax + by = k \\ (u,v) \in S \to au + bv = k\end{array}\right\} \to \quad a(x+u) + b(y+v) = 2k$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u, y+v) \notin S$ و نیازی به بررسی شرط دوم نیست. لذا هر خط راستی که از مبدأ عبور نکند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ نمی باشد



**مثال ۶**

آیا مجموعه ماتریس های به فرم $\begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ یک زیر فضا از $M_{2\times2}(\Re)$ می باشد؟

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{تمامی ماتریس ها به فرم} \right\}$$

برای زیر فضا بودن باشد شرایط زیر را داشته باشد،

$$1. \quad \forall A, B \in S \quad \to \quad A + B \in S$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \notin S$$

از آنجاییکه شرط اول را برآورده نمی کند، لذا نیازی به بررسی شرط دوم نیست و این مجموعه زیر فضا برای $M_{2\times2}(\Re)$ نمی باشد.

## مثال۷ معرفی فضای ستون های یک ماتریس (Column Space)

ماتریس $A$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$C(A)$ شامل تمامی ترکیب های خطی ستون های ماتریس $A$ است،

$C(A)=\{\alpha[1,2,4]+\beta[3,3,1]\}$ $\leftarrow$ (Column space) فضای ستون های ماتریس $A$

می توان نشان داد که $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است،

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}\in C(A)\quad,\quad \gamma\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\varphi\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma+3\varphi\\2\gamma+3\varphi\\4\gamma+\varphi\end{bmatrix}\in C(A)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma+3\varphi\\2\gamma+3\varphi\\4\gamma+\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi)\\2(\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi)\\4(\alpha+\gamma)+(\beta+\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+3n\\2m+3n\\4m+n\end{bmatrix}\in C(A)$$

$$c\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(c\alpha)+3(c\beta)\\2(c\alpha)+3(c\beta)\\4(c\alpha)+(c\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+3l\\2k+3l\\4k+l\end{bmatrix}\in C(A)$$



## مثال۸ کاربرد فضای ستون ها در حل دستگاه معادلات

به ازای چه مقادیری از بردار $\mathbf{b}$ دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ جواب دارد؟

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

لذا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زمانی جواب دارد که بردار $\mathbf{b}$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس $A$ نمایش داد.

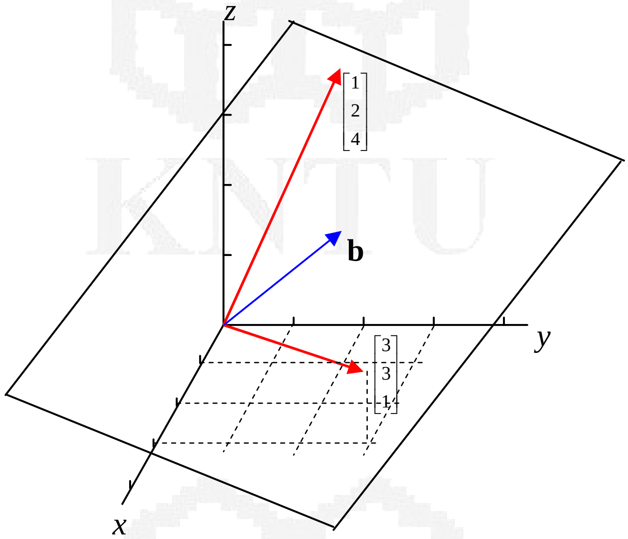
**شرط لازم و کافی برای داشتن جواب آن است که $\mathbf{b}\in C(A)$ باشد.**

**مثال۹** **نمایش هندسی فضای ستون ها**

ماتریس $A$ در مثال۷ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

به لحاظ هندسی فضای ستون های ماتریس $A$ صفحه ای در فضای برداری $\Re^3$ است که از مبدا عبور کرده و بردار ستون های ماتریس $A$ را شامل گردد،




لذا تمامی بردارهایی مانند $\mathbf{b}$ که درون این صفحه قرار دارند جزء فضای ستون های ماتریس $A$ هستند و می توان آنها را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس $A$ نمایش داد و برای این بردارها دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ سازگار است و جواب دارد.

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\ 3\\ 1\end{bmatrix}x_2=\mathbf{b}$$

اگر بردار $\mathbf{b}$ طوری انتخاب شود که خارج از این صفحه قرار گیرد، دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ناسازگار بوده و جواب ندارد.

**مثال۱۰**

ماتریس $A$ در مثال۸ و بردارهای $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{b}_2$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

- دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ یک دستگاه معادلات سازگار است و جواب دارد،

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&3&-1\\4&1&-7\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=1\end{cases}$$

لذا $\mathbf{b}_1\in C(A)$ و می توان بردار $\mathbf{b}_1$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس $A$ نمایش داد،

$$(-2)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix}$$

- حال دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$ را در نظر می گیریم، این دستگاه معادلات ناسازگار است و جواب ندارد،

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&3&1\\4&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

لذا $\mathbf{b}_2\notin C(A)$ و نمی توان بردار $\mathbf{b}_2$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس $A$ نمایش داد،

## مثال۱۱ — معرفی فضای پوچی یک ماتریس (Null Space)

ماتریس $A$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$$

$N(A)$ شامل تمامی پاسخ های ممکن دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\Re^3 \to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\} \quad \leftarrow \quad \text{(Null space)}\ \text{فضای پوچی ماتریس}\ A$$

می توان نشان داد که $N(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است،

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x}\in N(A)\to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\\ \mathbf{y}\in N(A)\to A\mathbf{y}=\mathbf{0}\end{array}\right\}\to A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=0\to \mathbf{x}+\mathbf{y}\in N(A)$$

$$\mathbf{x}\in N(A)\to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad ,\quad A(c\mathbf{x})=c(A\mathbf{x})=\mathbf{0}\to c\mathbf{x}\in N(A)$$

حال فضای پوچی ماتریس $A$ را بدست آوریم، یعنی باید تمامی جواب های دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ بدست آوریم.

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\to\quad\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

یکی از جواب ها پاسخ بدیهی $\mathbf{x}=[0,0,0]$ و با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته پاسخ های دیگری هم بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}\xrightarrow{x_3=\alpha}\mathbf{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

لذا بردار $\mathbf{x}=[1,1,-1]$ یکی از جواب ها است و هر ترکیب خطی از این بردار هم می تواند پاسخ دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ باشد. بنابراین فضای پوچی ماتریس $A$ بصورت زیر قابل نمایش است،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\Re^3\to\mathbf{x}=\alpha[1,1,-1]\}$$

لذا فضای پوچی ماتریس $A$ یک خط در فضای برداری $\Re^3$ است.

## مفهوم اسپن (Span)

- بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ فضای $V$ را **اسپن** می کنند، اگر،

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V \\ 2. & \forall \mathbf{u} \in V \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \end{array}}$$

- فضای اسپن شده توسط بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ را بصورت زیر نمایش می دهند،

$$\boxed{\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}}$$



## مثال ۱۲

بررسی کنید که آیا بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

$$\boxed{\mathbf{u} = [1,2,1], \quad \mathbf{v} = [1,1,1], \quad \mathbf{w} = [0,2,-1]}$$

برای اسپن کردن باید بتوان هر برداری در فضای برداری $\Re^3$ مانند $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]$ را بصورت ترکیب خطی از این سه بردار نمایش داد،

$$\mathbf{r} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=r_1 \\ 2a+b+2c=r_2 \\ a+b-c=r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

حال باید بررسی کنیم که این دستگاه معادلات سازگار است یا ناسازگار، یعنی حداقل یک جواب دارد یا نه.

از آنجائیکه $|A| = 1$ می باشد، بنابراین، برای هر بردار دلخواه $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]$ می توان یک جواب پیدا کرد.

لذا، بردارهای $\mathbf{u} = [1,2,1], \mathbf{v} = [1,1,1], \mathbf{w} = [0,2,-1]$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

## استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

- اگر معادله ای به شکل زیر،

$$\boxed{c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = 0}$$

فقط به ازای شرط $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ برقرار باشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را مستقل خطی (Linear Independent) گویند.

- در غیر اینصورت بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را وابسته خطی (Linear Dependent) گویند.



## مثال ۱۳

استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = [-2,1], \quad \mathbf{u}_2 = [-1,-3], \quad \mathbf{u}_3 = [4,-2]}$$

با توجه به تعریف استقلال خطی بردارها داریم،

$$c_1\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}-2c_1 - c_2 + 4c_3\\ c_1 - 3c_2 - 2c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات مربوطه به شکل زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است، جوابها را بصورت زیر می توان بدست آورد،

$$c_1 = 2c_3 , \qquad c_2 = 0$$

بنابراین بردارهای $\mathbf{u}_1 = [-2,1], \mathbf{u}_2 = [-1,-3], \mathbf{u}_3 = [4,-2]$ وابسته خطی می باشند.

## مفهوم پایه و بُعد در فضای برداری

- در فضای برداری $V$، مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ تشکیل یک **پایه**(Basis) می دهند، اگر دو شرط زیر را داشته باشند،

۱- آن فضای برداری را اسپن کنند، $V = \text{sp}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$

۲- بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

- تعداد بردارهای پایه در یک فضای برداری $V$ را **بُعد** (Dimension) آن فضا می نامند.

**چند نکته:**

- برای فضای برداری $V$ بردارهای پایه منحصر بفرد نیستند، ولی نمایش هر بردار توسط این بردارهای پایه منحصربفرد است.

- بُعد یک فضا برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا است.

- در فضای برداری $n$ بُعدی مانند $V$ هر مجموعه از $n$ بردار مستقل خطی تشکیل یک پایه می دهد.



## نمایش فضاهای برداری براساس پایه ها

- یکی از روش های نمایش فضاهای برداری استفاده از پایه های آن فضا است،

- فضای برداری $\Re^3$:

$$\Re^3 = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim(\Re^3) = 3$$

- فضای برداری $M_{2\times2}(\Re)$:

$$M_{2\times2}(\Re) = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim(M_{2\times2}) = 4$$

- فضای برداری $P_2(\Re)$:

$$P_2(\Re) = \text{sp}\{x^2, x, 1\} \quad , \quad \dim(P_2) = 3$$

به این پایه ها پایه های استاندارد می گویند.

**مثال ۱۴**

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\boxed{\mathbf{u}_1=[1,-1,1],\quad \mathbf{u}_2=[0,1,2],\quad \mathbf{u}_3=[3,0,-1]}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری $\Re^3$ باید هر بردار دلخواه مانند $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از این سه بردار نمایش داد،

$$\mathbf{r}=c_1\mathbf{u_1}+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3\rightarrow\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ از تعریف آن استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u_1}+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است $(|A|=-10)$، بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی بوده و فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند. لذا تشکیل یک پایه برای فضای برداری $\Re^3$ می دهند.

**مثال ۱۵**

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\boxed{\mathbf{u}_1=[0,1,1],\quad \mathbf{u}_2=[-1,1,2],\quad \mathbf{u}_3=[1,2,-1],\quad \mathbf{u}_4=[-1,0,-1]}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپین کردن فضای برداری $\Re^3$ باید هر بردار دلخواه مانند $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از این چهار بردار نمایش داد،

$$\mathbf{r}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3+c_4\mathbf{u}_4\to\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}0&-1&1&-1\\1&1&2&0\\1&2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}\quad\to\quad\begin{cases}-c_2+c_3-c_4=r_1\\c_1+c_2+2c_3=r_2\\c_1+2c_2-c_3-c_4=r_3\end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&1&-1&r_1\\1&1&2&0&r_2\\1&2&-1&-1&r_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}\quad\to\quad\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-4&\frac{5}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2+\frac{3}{2}r_3\\0&1&0&2&\frac{-3}{2}r_1+\frac{1}{2}r_2-\frac{1}{2}r_3\\0&0&1&1&\frac{-1}{2}r_1+\frac{1}{2}r_2-\frac{1}{2}r_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}$$

$c_4$ متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد. بنابراین این چهار بردار فضای برداری $\Re^3$ را اسپین می کنند.

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$ از تعریف آن استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3+c_4\mathbf{u}_4=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

معادلات ماتریس افزوده و فرم سطری پلکانی کاهش یافته حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&1&-1&0\\1&1&2&0&0\\1&2&-1&-1&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}\quad\to\quad\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-4&0\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $c_4$ متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد، بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه بدهند.