www.fera.ir

هر آنچه شما نیاز دارید

هر جزوه ای که بخوایی

www.fera.ir

حسابان

فصل ۳

www.fera.ir

توابع مثلثاتی

❖ **توابع** $y=\sin x$ **و** $y=\cos x$ **از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند که به ازای هر مقدار** x **تعریف شده‌اند به عبارتی دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی** $\Re$ **است و با تغییر** x **مقادیری که برای** $\sin x$ **و** $\cos x$ **به دست می‌آید اعدادی بین ۱ و ۱- می‌باشند که در حقیقت برد این توابع** $[-1,1]$ **می‌شود.**

❖ **در حالت کلی‌تر، بیش‌ترین مقدار توابع** $y=a\sin bx$ **و** $y=a\cos bx$، $|a|$ **و کم‌ترین مقدار** $-|a|$ **و دوره تناوب آن‌ها** $\frac{2\pi}{b}$ **می‌باشند.**

❖ **هم‌چنین بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار** $y=a\sin bx+c$ **و** $y=a\cos bx+c$ **عبارتست از:**

$$\max=|a|+c \quad \text{و} \quad \min=-|a|+c$$

مثال: در تابع $f(x)=-2\sin 3x$ مقادیر حداقل و حداکثر و T، دوره تناوب تابع را مشخص کرده، نمودار آن را در بازه‌ی $[0,T]$ رسم کنید.

حل:

$$\min f=-|-2|=-2\ ,\quad \max f=|-2|=2\ ,\quad T=\frac{2\pi}{3}$$

برای رسم، نقاطی که تابع مقادیر حداکثر و حداقل دارد را به دست آورده، هم‌چنین نقاطی که تابع صفر می‌شود را نیز مشخص می‌کنیم. سپس با توجه به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ شکل را کامل می‌کنیم.

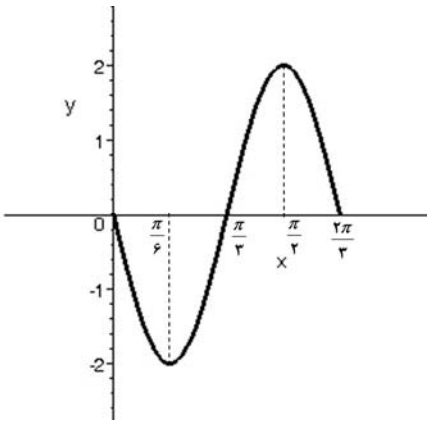
$$2=-2\sin 3x\Rightarrow \sin 3x=-1\Rightarrow 3x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$-2=-2\sin 3x\Rightarrow \sin 3x=1\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

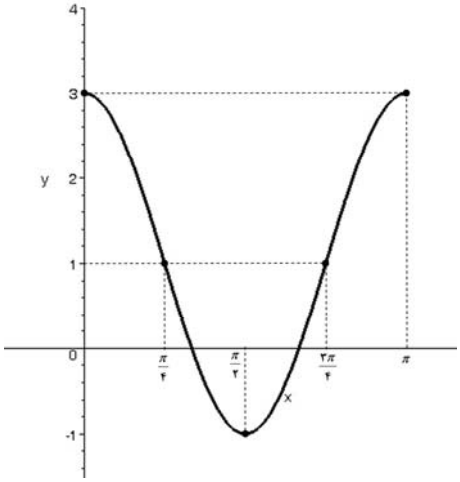
$$0=-2\sin 3x\Rightarrow \sin 3x=0\Rightarrow \begin{cases} 3x=0\Rightarrow x=0 \\ 3x=\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \\ 3x=2\pi\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

نمودار تابع به صورت زیر است:

www.fera.ir



مثال: تابع مثلاتی مربوط به نمودار رسم شده را بنویسید (موج کسینوسی)



حل:

$$\left.\begin{array}{l}\min y=-۱=-|a|+c\\ \max y=۳=|a|+c\end{array}\right\}\Rightarrow c=۱,\ \ |a|=۲$$

با توجه به شکل $a=۲$ می‌باشد چون موج کسینوسی از بالا شروع شده است. هم‌چنین:

$$T=\pi\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{b}\Rightarrow b=۲\Rightarrow y=۲\cos(۲x)+۱$$

مثال: اگر آونگ یک ساعت بزرگ، نوسانات عمودی داشته باشد و ضابطه این نوسانات $d(t)=۲\cos\frac{\pi t}{۱۰}+۶$ باشد (t بر حسب ثانیه و d برحسب متر)،

الف) آونگ از حالت تعادل حداکثر چند متر بالا می‌رود.

ب) چه مدت طول می‌کشد تا یک نوسان کامل انجام گیرد.

ج) پاندول چند نوسان کامل در مدت ۲ دقیقه انجام می‌دهد

د) نمودار تابع را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل: الف)

در واقع باید بیشترین مقدار تابع را محاسبه نمود، بنابراین کافیست به جای $\cos\frac{\pi t}{۱۰}$ عدد یک قرار داده یعنی $\max d=|a|+c$ بنابراین $\max d=۲+۶=۸$.

www.fera.ir

ب)

$b=\frac{\pi}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}}=۲۰$ در ۲۰ ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌گیرد

ج)

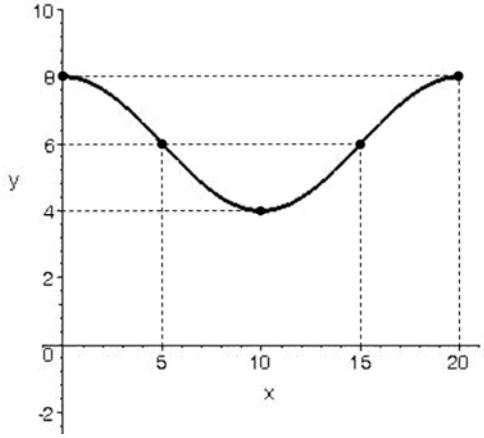
نوسان کامل $۲۰\div ۶=۱۲۰$ $\Rightarrow$ ثانیه $۲\times ۶۰=۱۲۰$

د)

$$\max d=۸\Rightarrow ۸=۲\cos\frac{\pi}{۱۰}t+۶\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۰}t=۱\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=۰\ ,\ \frac{\pi}{۱۰}t=۲\pi\Rightarrow t=۰\ ,\ t=۲۰$$

$$\min d=۴\Rightarrow ۴=۲\cos\frac{\pi}{۱۰}t+۶\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۰}t=-۱\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=\pi\Rightarrow t=۱۰$$

$$d=۰\Rightarrow \cos(\frac{\pi t}{۱۰})=۰\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۱۰}t=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow t=۵\ ,\ t=۱۵$$

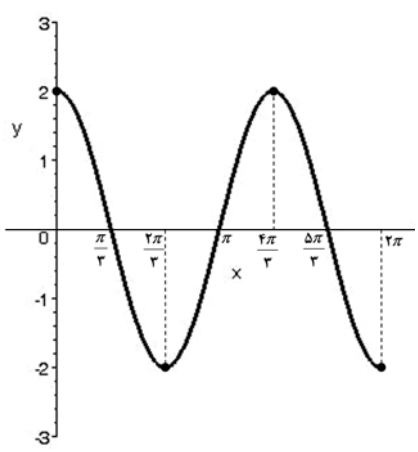


www.fera.ir

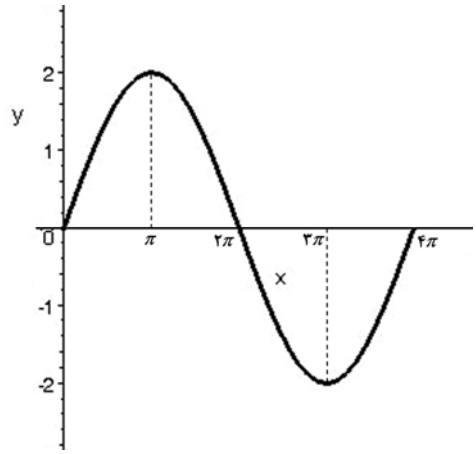
تمرین:

۱- معادله توابعی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید.

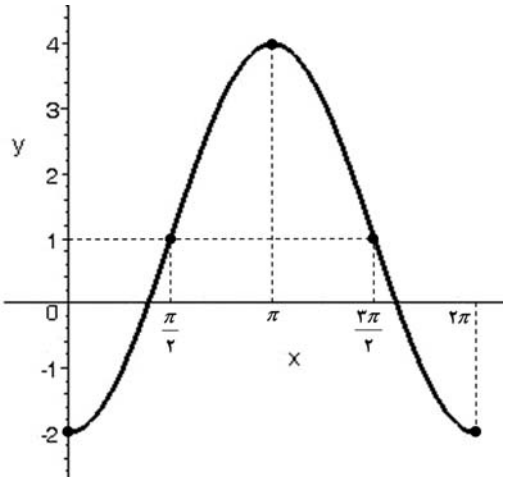
الف)



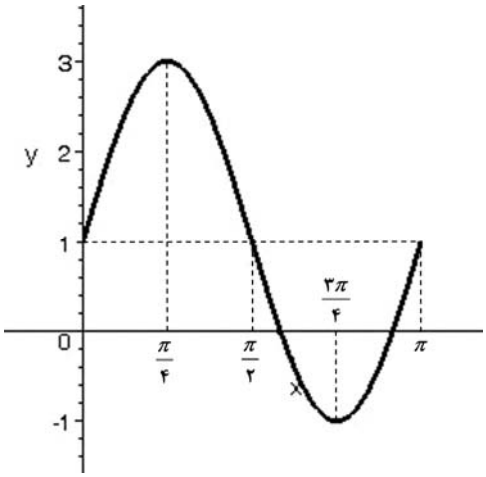
ب)



ج)



د)



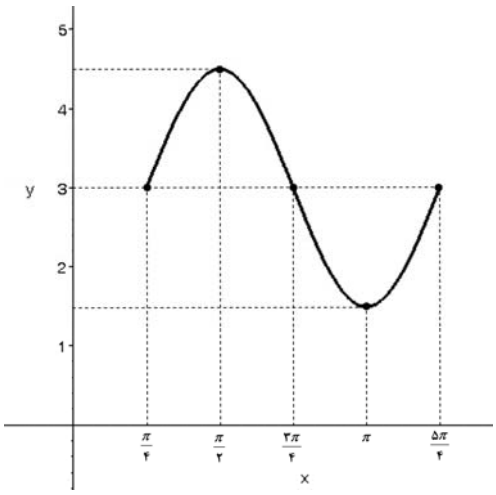
۲- در یک نمایشگاه چرخ و فلکی قرار دارد که در هر کابین آن دو نفر می‌توانند سوار شوند. مریم و زهرا تصمیم گرفتند سوار یکی از کابینهای چرخ و فلک شوند که محل استقرار آنها ۴ متر با زمین فاصله دارد حرکت این چرخ و فلک بدین گونه است که در بدو حرکت به طرف پایین‌ترین نقطه که یک متر با زمین فاصله دارد، آمده و سپس به بالاترین نقطه که ۷ متر با زمین فاصله دارد حرکت می‌کند و مدت زمان یک دوران کامل ۱۲ ثانیه طول می‌کشد تابع مربوط به ارتفاع کابین مریم و زهرا نسبت به زمین را به صورت یک تابع سینوسی بنویسید؟ آیا می‌توان این تابع را به صورت تابع کسینوسی نیز نوشت؟

۳- اگر حداقل و حداکثر تابع کسینوسی $y = a\cos bx + c$ به ترتیب ۵ و ۹ و دوره تناوب آن ۱۲ باشد (با شرط $a < ۰$, $b < ۰$) معادله این تابع را بنویسید. آیا موج کسینوسی این تابع حتماً باید از $x = ۰$ آغاز شود.

www.fera.ir

❖ **معادله‌ی توابع سینوسی و کسینوسی در حالت کلی به صورت $y=a\sin[b(t-c)]+d$ و $y=a\cos[b(t-c)]+d$ می‌باشد که مقدار c نمایشگر تعداد واحدی است که $y=a\sin(bt)$ و $y=a\cos(bt)$ در راستای محور طول‌ها انتقال می‌یابند. هرگاه $c>0$ انتقال به طرف راست محور طول‌ها و هرگاه $c<0$ انتقال در جهت چپ محور طول‌ها صورت می‌گیرد. d تعداد واحدی است که توابع $y=a\sin[b(t-c)]$ و $y=a\cos[b(t-c)]$ در راستای محور عرض‌ها منتقل می‌شود. اگر $b>0$ انتقال به طرف بالا و اگر $b<0$ انتقال در جهت پایین صورت می‌گیرد.**

مثال: معادله تابع مربوط به نمودار مثلاتی زیر که در یک دوره‌ی تناوب رسم شده است را بنویسید (با شرط $a>0$).



حل:

$$a=\frac{۴/۵-۱/۵}{۲}=۱/۵$$

$$T=\frac{۵\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=۲$$

همچنین با توجه به شکل، نمودار شبیه نمودار سینوسی است که از $x=\frac{\pi}{۴}$ شروع شده است. یعنی موج سینوسی به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به طرف راست منتقل شده است. پس $c=\frac{\pi}{۴}$ و مقدار d نیز برابر است با:

$$d=\frac{\max y+\min y}{۲}=\frac{۴/۵+۱/۵}{۲}=۳$$

در نتیجه معادله‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y=۱/۵\sin[۲(t-\frac{\pi}{۴})]+۳$$

تحقیق کنید آیا معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت $y=-۱/۵\cos ۲t+۳$ نیز نوشت؟

www.fera.ir

مثال: ارتفاع یک موج سوار نسبت به سطح زمین در حرکت بر روی آب از رابطه‌ی

$$h(t)=۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲$$

بدست می‌آید. (h برحسب متر و t برحسب ثانیه)

الف) بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع موج سوار چقدر است؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا موج سوار از نقطه با کم‌ترین ارتفاع به نقطه با بیش‌ترین ارتفاع برسد؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا یک حرکت نوسانی کامل انجام گیرد؟

د) در طول یک دقیقه در چه زمان‌هایی ارتفاع موج سوار نسبت به سطح زمین ۱۷ متر خواهد بود؟

حل: الف:

$$\max h=۱۰+۱۲=۲۲$$
$$\min h=۱۲-۱۰=۲$$

ب:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲=۲۲\Rightarrow \sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]=۱ \\ \qquad\qquad \Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t-۱۵=۱۵\Rightarrow t=۳۰ \\ ۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲=۲ \Rightarrow \sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]=-۱ \\ \qquad\qquad \Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t-۱۵=-۱۵\Rightarrow t=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow ۳۰-۰=۳۰s$$

ج:

$$T=\frac{۲\pi}{b}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳۰}}=۶۰s$$

با استفاده از قسمت ب نیز می‌توان تشخیص داد که دوره تناوب $۲\times ۳۰=۶۰$ ثانیه می‌شود.

د)

$$h(t)=۱۷\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵))=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{\pi}{۶}\ ,\ \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow t=۲۰\ ,\ t=۴۰$$

www.fera.ir

تمرین:

۱- ارتفاع آب در یکی از ورودی‌های جزیره‌ی ونکوور در کانادا در هر ساعت از شبانه‌روز از تابع

$$h(t) = ۵\sin(\frac{\pi}{۶}t - \frac{۲\pi}{۳}) + ۱۳$$

به دست می‌آید.

الف) در هر روز چند بار عمق آب ماکسیمم می‌گردد؟

ب) در چه ساعاتی از روز عمق آب ماکسیمم می‌شود؟

ج) ارتفاع بیش‌ترین عمق آب چقدر است؟

۲- در نزدیکی یک لنگرگاه بیشترین مقدار عمق آب $۱/۸m$ در ساعت ۹ صبح و کمترین عمق آب $۰/۱m$، ۶ ساعت بعد اتفاق می‌افتد.

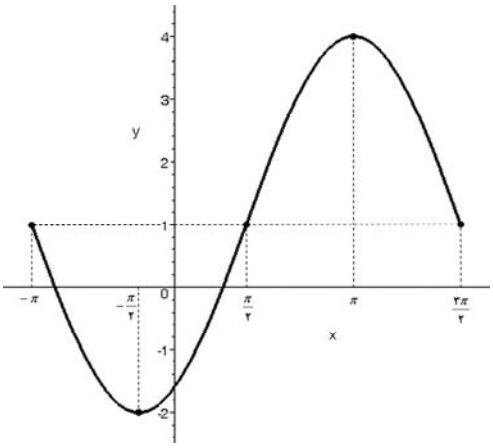
الف) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع کسینوسی بنویسید.

ب) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع سینوسی بنویسید.

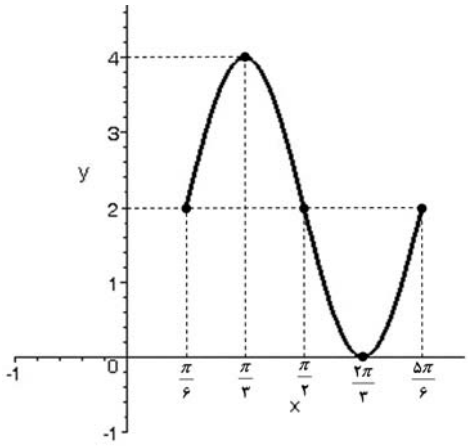
ج) در ساعت ۵ بعد از ظهر عمق آب چقدر است؟

۳- معادله توابع مثلثاتی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید. برای هر شکل یک معادله سینوسی و یک معادله کسینوسی بنویسید.

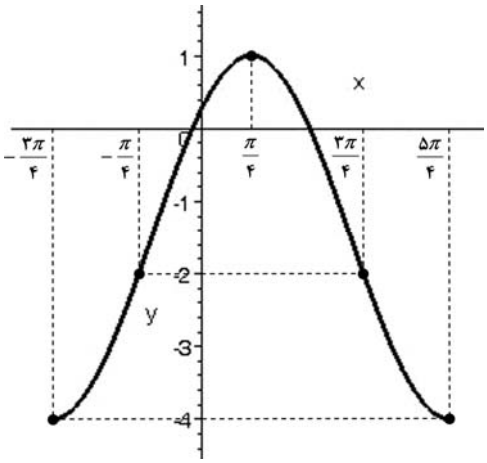
الف)



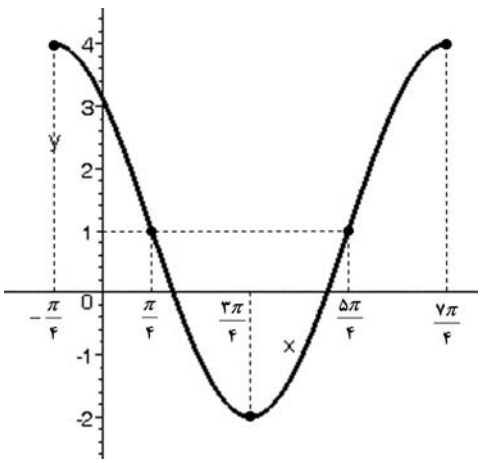
ب)



ج)



د)



www.fera.ir

۴- اگر $\frac{-\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۳}$ و $۲\cos\alpha-۱=m^۲-۳$، حدود m را بیابید.

۵- برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y=۳\sin^۲ x+۱$

ب) $y=\sin(x+\frac{\pi}{۴})-۱$

ج) $y=\sin^۲ x+\sin x-۱$

د) $y=\sin^۲ x+۳\sin x+۱$

۶- یک تابع سینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع زوج درآورد؟

۷- یک تابع کسینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع فرد درآورد؟

۸- اگر $x\in(\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶})$ و $\sin x=\frac{۲-m^۲}{۴+m^۲}$ مقدار m در چه فاصله ای قرار می گیرد؟

۹- صعودی یا نزولی بودن توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در چهار ناحیه دستگاه مختصات بررسی کنید.

۱۰- اگر $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ باشد، چه رابطه ای بین $\sin x$ و $\cos x$ وجود دارد؟ و اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد، این رابطه چگونه خواهد بود؟

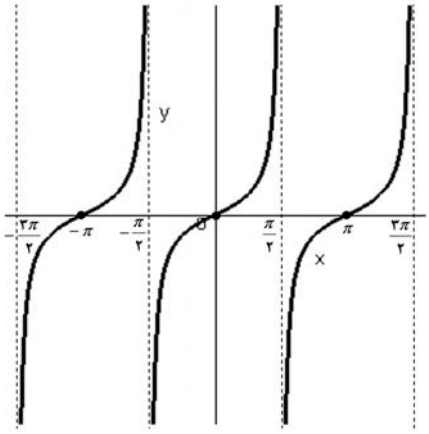
۱۱- یک به یک بودن توابع سینوس و کسینوس را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید و سپس دامنه را به گونه‌ای تحدید کنید تا تابع یک به یک شود.

www.fera.ir

❖ **یکی دیگر از توابع مثلثاتی** $y=\tan x$ **است که از رابطه** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ **به دست می آید. بنابراین** $\tan x$ **به ازای** x **هایی که** $\cos x=0$ **تعریف نمی شود. یعنی تانژانت زوایایی که کمان آن ها بر حسب رادیان به صورت** $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ **تعریف نمی شوند. بنابراین دامنه تابع تانژانت برابر است با** $\Re-\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\},\ k\in Z$ **و با توجه به این که** $\tan(x+\pi)=\tan x$**، دوره تناوب تابع تانژانت** $T=\pi$ **می باشد.**

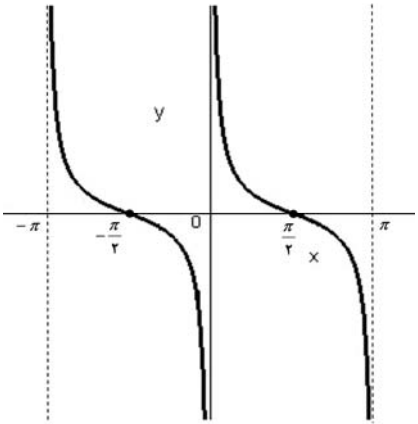
❖ **یکی دیگر از توابع مثلثاتی** $y=\cot x$ **است که برابر است با** $y=\frac{1}{\tan x}$ **و چون** $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ **بنابراین تابع** $y=\cot x$ **به ازای هر** x **که** $\sin x=0$ **تعریف نمی شود. یعنی دامنه‌ی تابع کتانژانت برابر است با** $D=\Re-\{x \mid x=k\pi\},k\in Z$**.**

نمودار تابع $y=\tan x$ در فاصله‌ی $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ به صورت زیر می‌باشد:



دیده می‌شود که هر شاخه در فاصله‌های به طول π تکرار می‌گردد. واضح است که هر شاخه از منحنی صعودی است. اما تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

هم‌چنین نمودار تابع $y=\cot x$ در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ به صورت زیر می‌باشد:



واضح است که هر شاخه از منحنی نزولی است.

www.fera.ir

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه مقادیر تابع $y = \tan x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار دارند.

مثال: اگر $-\frac{\pi}{2} < x < -\pi$ آن‌گاه مقادیر تابع $y = \cot x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار می‌گیرند.

تمرین:

۱- دامنه تابع $y = \tan(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ را به دست آورید.

۲- اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ و $\tan\alpha = \frac{2}{m-1}$ حدود m را به دست آورید.

۳- اگر $0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ و $\tan\alpha = m - 1$، حدود m را بیابید.

۴- دامنه تابع $y = -2\cot(x + \frac{2\pi}{5}) - 2$ را بیابید.

۵- آیا تابع تانژانت را می توان به یک تابع کتانژانت تبدیل کرد؟ چگونه؟

۶- یک به یک بودن تابع تانژانت و کتانژانت را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید.

❖ روابط زیر بین توابع مثلثاتی برقرار است (اتحادهای مثلثاتی):

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

۳) $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

۴) $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

۵) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

۶) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

۷) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۸) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

مثال: درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

ب) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

ج) $\frac{2\sin 2x}{2\cos 2x + 1} = \frac{\sin x}{2\cos x - 1} + \frac{\sin x}{2\cos x + 1}$

www.fera.ir

حل: الف)

$$\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$$
$$=۲\sin x\cos x$$
$$=\sin ۲x$$

ب)

$$\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$$
$$=\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}$$
$$=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$
$$=\cos ۲x$$

ج)

$$\frac{\sin x}{۲\cos x-۱}+\frac{\sin x}{۲\cos x+۱}=\frac{۲\sin x\cos x+\sin x+۲\sin x\cos x-\sin x}{۴\cos^۲ x-۱}$$
$$=\frac{۴\sin x\cos x}{۴\cos^۲ x-۱}$$
$$=\frac{۲\sin ۲x}{۲\left(۲\cos^۲ x-۱\right)+۱}$$
$$=\frac{۲\sin ۲x}{۲\cos ۲x+۱}$$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۵ درجه را بیابید.

حل:

$$\sin ۷۵=\sin(۴۵+۳۰)=\sin ۴۵\cos ۳۰+\cos ۴۵\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۷۵=\cos(۴۵+۳۰)=\cos ۴۵\cos ۳۰-\sin ۴۵\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۷۵=\tan(۴۵+۳۰)=\frac{\tan ۴۵+\tan ۳۰}{۱-\tan ۴۵\tan ۳۰}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$$

$$\cot ۷۵=\frac{۱}{\tan ۷۵}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

به عنوان تمرین با قرار دادن ۳۰ - ۴۵ در مثال بالا نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵ درجه را بیابید.

www.fera.ir

تمرین:

۱- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\sin^۳ x+\cos^۳ x}{\sin x+\cos x}=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

ب) $\frac{\cos^۲ x}{۱+۲\sin x-۳\sin^۲ x}=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$

ج) $\tan(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})+\cot(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})=\frac{۲}{\cos x}$

د) $\frac{\sin x-\tan\frac{x}{۲}}{\cos x}=\tan\frac{x}{۲}$

هـ) $\tan ۲x\cot x-\tan x\tan ۲x=۲$

و) $\frac{۲}{\tan x+\cot x}=\sin ۲x$

ز) $\frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}=\cot x$

ح) $\cos^۲(\alpha+\beta)+\cos^۲(\alpha-\beta)-\cos ۲\alpha\cos ۲\beta=۱$

۲- اگر $\cos ۱۸^\circ=a$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۹۹ درجه را به دست آورید.

۳- اگر $\sin ۱۸^\circ=b$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۶ درجه را به دست آورید.

۴- حاصل $\sin^۲ ۲\alpha(۲+\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha)$ را بیابید.

۵- اگر $\cos x=\frac{-\sqrt{۵}}{۳}$ و انتهای کمان x در ناحیه دوم باشد $\tan ۲x$ را به دست آورید

۶- اگر $\tan(x+۱۷)=\frac{۳}{۴}$ حاصل $\cot(۲۸-x)$ را بیابید.

۷- اگر $\frac{۳\pi}{۴}\le x\le\frac{۷\pi}{۴}$ حاصل $f(x)=\sqrt{\sin^۲ x(۱+\cot x)+\cos^۲ x(۱+\tan x)}$ را به دست آورید.

۸- مقدار $\sin ۴۰^\circ+\sqrt{۳}\sin ۵۰^\circ$ را به دست آورید.

۹- اگر $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=۳$، مقدار $\tan ۲x$ را به دست آورید.

۱۰- اگر $\frac{\sin(۳۰+x)-\cos(۶۰+x)}{\sin(۳۰+x)+\cos(۳۰+x)}=۲$، مقدار $\cot$ را بیابید.

۱۱- درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin ۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha$

ب) $\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$

ج) $\tan ۳\alpha=\frac{۳\tan\alpha-\tan^۳\alpha}{۱-۳\tan^۲\alpha}$

۱۲- عبارت $\cos ۳x-\cot x\sin ۳x$ را ساده کنید.

۱۳- اگر $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۳}{۵}$ حاصل $\sin^۶ x+\cos^۶ x$ را بیابید.

۱۴- اگر $f(x)=(x^۲-۲)$ و $g(x)=f(f(f(۲\cos x)))$، حاصل $g(\frac{\pi}{۱۶})$ را بیابید.

www.fera.ir

❖ **روابط مثلثاتی زیر همواره برقرار است:**

❖ **قوانین ضرب به جمع**

۱) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

۲) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

۳) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

❖ **قوانین جمع به ضرب**

۱) $\cos\alpha+\cos\beta=۲\cos(\frac{\alpha+\beta}{۲})\cos(\frac{\alpha-\beta}{۲})$

۲) $\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin(\frac{\alpha+\beta}{۲})\cos(\frac{\alpha-\beta}{۲})$

۳) $\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin(\frac{\alpha+\beta}{۲})\sin(\frac{\alpha-\beta}{۲})$

اثبات روابط فوق به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

مثال:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$=۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{x-\frac{\pi}{۲}+x}{۲}$$

$$=\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}-x)$$

$$=\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}+x)$$

مثال:

$$\sin x-\cos x=\sin x-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$=\sin x+\sin(x-\frac{\pi}{۲})$$

$$=۲\sin\frac{x+x-\frac{\pi}{۲}}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$=\sqrt{۲}\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)$$

www.fera.ir

مثال: درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $\dfrac{\sin ۷x+\sin x}{\cos ۷x+\cos x}=\tan ۴x$

ب) $\cos ۵x\cos ۲x+\sin ۴x\sin ۳x-\cos ۴x\cos x=\sin ۲x\sin ۳x$

حل: الف:

$$\frac{\sin ۷x+\sin x}{\cos ۷x+\cos x}=\frac{۲\sin(\frac{۷x+x}{۲})\cos(\frac{۷x-x}{۲})}{۲\cos(\frac{۷x+x}{۲})\cos(\frac{۷x-x}{۲})}=\frac{\sin ۴x}{\cos ۴x}=\tan ۴x$$

ب:

$$\cos ۵x\cos ۲x+\sin ۴x\sin ۳x-\cos ۴x\cos x=\frac{۱}{۲}\left[\cos(۵x+۲x)+\cos(۵x-۲x)\right]$$

$$+\frac{۱}{۲}\left[\cos(۴x-۳x)-\cos(۴x+۳x)\right]$$

$$-\frac{۱}{۲}\left[\cos(۴x+x)+\cos(۴x-x)\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\cos ۷x+\cos ۳x+\cos x-\cos ۷x-\cos ۵x-\cos ۳x\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\cos x-\cos ۵x\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}(-۲)\sin(\frac{x+۵x}{۲})\sin(\frac{x-۵x}{۲})$$

$$=-\sin ۳x\sin(-۲x)$$

$$=\sin ۳x\sin ۲x$$

تمرین:

۱- تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin ۲۰+\cos ۵۰=\cos ۱۰$

ب) $\sin ۱۰+\sin ۵۰-\sin ۷۰=۰$

ج) $\cos\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۱}{۸}$

۲- مقدار عبارت $\dfrac{\sin ۵۴^\circ}{\sin ۱۸^\circ}$ را بیابید.

۳- عبارت $\cot ۲x-\dfrac{۲\sin x}{\cos x-\cos ۳x}$ را ساده کنید.

۴- حاصل $\cos^۲(\frac{\pi}{۱۲})-\cos^۲(\frac{\pi}{۸})$ را بیابید.

۵- حاصل $\sin ۷۰^\circ\sin ۶۵^\circ(\tan ۲۰^\circ+\tan ۲۵^\circ)$ را بیابید.

www.fera.ir

❖ **حل ۴ معادله‌ی مثلثاتی اصلی به صورت‌های زیر است ($k \in Z$):**

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \, , x = ۲k\pi + \pi - \alpha$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

۳) $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

۴) $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos^۲\theta + \cos\theta = ۱$

ب) $۱ - ۳\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

ج) $۴\tan x + \cot x = ۵$

حل: الف)

$$۲\cos^۲\theta + \cos\theta = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲\theta + \cos\theta - ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\cos\theta - ۱)(\cos\theta + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\cos\theta - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos\theta + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos\theta = -۱ = \cos\pi \Rightarrow \theta = ۲k\pi + \pi \text{ یا } \theta = ۲k\pi - \pi \end{cases}$$

ب)

$$۱ - ۳(۱ - ۲\sin^۲ x) = ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۱ - ۳ + ۶\sin^۲ x = ۲\sin^۲ x \Rightarrow +۴\sin^۲ x = +۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴}$$

چهار جواب معادله‌ی مثلثاتی فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۴}, \; k \in Z$$

ج)

$$۴\tan x + \cot x = ۵ \Rightarrow ۴\tan x + \frac{۱}{\tan x} = ۵ \overset{\tan x \neq ۰}{\Rightarrow} ۴\tan^۲ x + ۱ = ۵\tan x \quad (x \neq \frac{k\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲ x - ۵\tan x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۱ = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = \frac{۱}{۴} = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

چون کوچک‌ترین زاویه‌ای که مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{۱}{۴}$ است را بدون ماشین حساب نمی‌توان یافت از زاویه α استفاده کردیم.

www.fera.ir

تمرین:

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

الف) $۲-۳\cos^۲ x-۲\sin x=۰$

ب) $\cot^۲\theta-\cos^۲\theta=۰$

ج) $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۵}{۸}$

د) $\sin\frac{x}{۲}+\cos x=۱$

هـ) $\cos ۳x+۲\cos x=۰$

و) $\sin x-\sqrt{۳}\cos x=۱$

ز) $\tan x-\cot x=۴\cos ۲x$

ح) $۲\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})$

ط) $\sin x-\cos x=\cos ۲x$

ی) $\sin ۳x+\sin x=۰$

ک) $\cos x+\cos ۲x+\cos ۳x=۰$

www.fera.ir

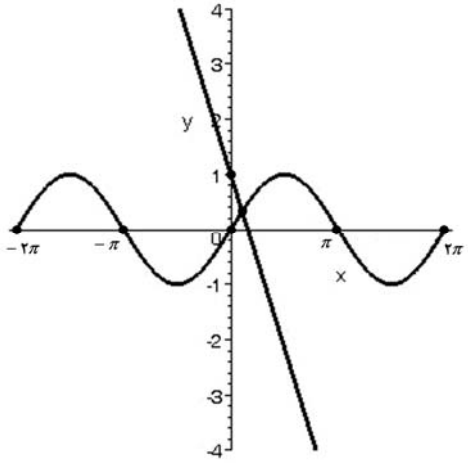
حل معادلات مثلثاتی به روش نمودار

بعضی از معادلات مثلثاتی از طریق جبری قابل حل نیستند و فقط با استفاده از رسم نمودار می‌توان تعداد جواب‌ها را بدست آورد و مقدار آن‌ها را تخمین زد.

مثال: معادله $\sin x + ۲x = ۱$ را حل کنید.

حل:

ابتدا معادله را به صورت $\sin x = -۲x + ۱$ می‌نویسیم. سپس نمودارهای $f(x) = \sin x$ و $g(x) = -۲x + ۱$ را رسم می‌کنیم طول نقاط تلاقی این دو نمودار جواب معادله مورد نظر می‌باشد.



همان‌طورکه مشاهده می‌کنید معادله یک جواب دارد که بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ است با روش آزمایش و خطا می‌توان جواب تقریبی را بدست آورد. مثلاً:

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \approx \frac{۱/۴}{۲} = ۰/۷ \\ g(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\pi}{۲} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۲} + ۱ = -۰/۵۷ \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ g(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{\pi}{۳} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۳} + ۱ \approx -۰/۰۵ \end{cases}$$

$$x = ۱۵^\circ = \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۱۲}) = \sin ۱۵^\circ \approx ۰/۲۵ \\ g(\frac{\pi}{۱۲}) - \frac{\pi}{۶} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۶} + ۱ = \frac{۲/۸۶}{۶} = ۰/۴۸ \end{cases}$$

لذا جواب معادله‌ی فوق نزدیک به $\frac{\pi}{۱۲} \approx ۰۲۶$ است و با ادامه‌ی این روش و با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب‌های بهتری یافت.

www.fera.ir

تمرین:

معادلات زیر را با روش نموداری حل کنید و تعداد جواب و حدود جواب را مشخص کنید.

الف) $\tan ۳x = x - ۲$

ب) $۱ - ۲\cot x = \frac{x}{۳}$

ج) $۱ - ۲x = \cot(x + \frac{\pi}{۳})$

د) $۲\sin x = x^{۲}$

هـ) $\sin x + |x - ۲| = ۱$

و) $\cos x - ۲x = x^{۲}$

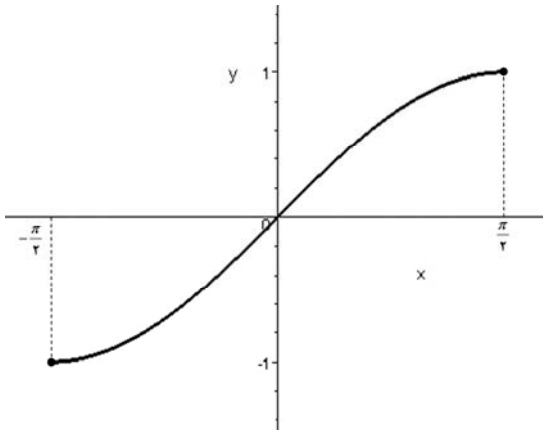
www.fera.ir

وارون توابع مثلثاتی

می‌دانیم تابعی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد بنابراین برای بدست آوردن وارون توابع مثلثاتی که یک به یک نیستند، باید دامنه‌ی آن‌ها را تحدید کنیم تا آن‌ها تبدیل به یک تابع یک به یک شوند.

تحدید تابع $y = \sin x$ به بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

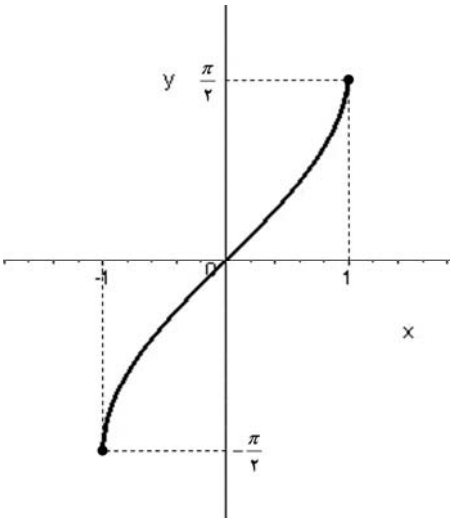
$$y = \sin x \quad , \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



معکوس $y = \sin x$ را با نمادهای $y = \arcsin x$ یا $y = \sin^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

$$y = \sin^{-1} x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

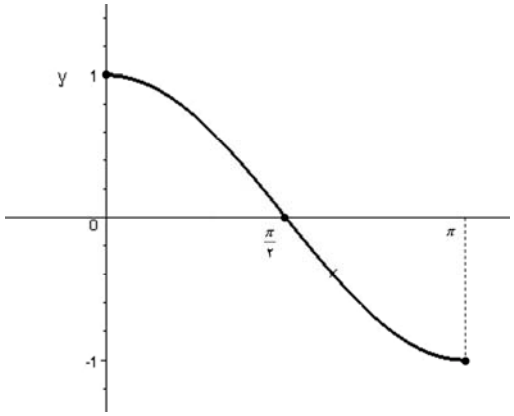
و نمودار آن به صورت زیر است:



www.fera.ir

تحدید تابع $y=\cos x$ به بازه‌ی $[۰,\pi]$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

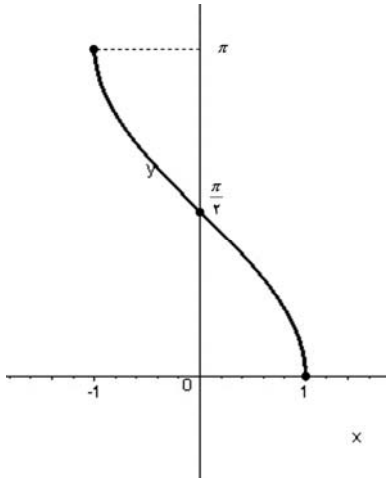
$y=\cos x \quad , \quad x\in[۰,\pi]$



معکوس $y=\cos x$ را با نمادهای $y=\arccos x$ یا $y=\cos^{-۱} x$ نمایش می دهیم. پس:

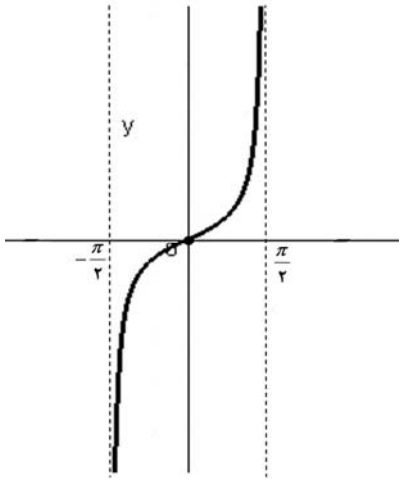
$y=\cos^{-۱} x:[-۱,۱]\to[۰,\pi]$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تحدید تابع $y=\tan x$ به بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

$y=\tan x \quad , \quad x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$

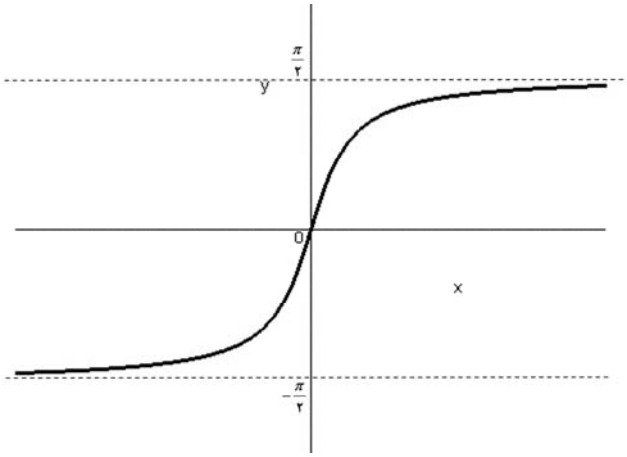


www.fera.ir

معکوس $y = \tan x$ را با نمادهای $y = \arctan x$ یا $y = \tan^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

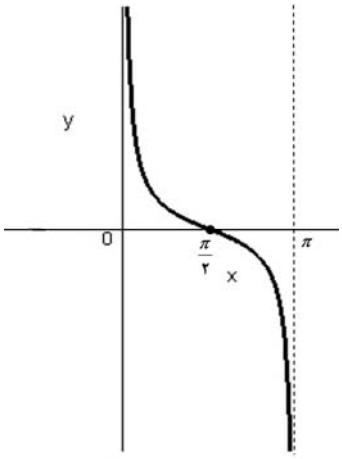
$$y = \tan^{-1} x : \Re \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تابع $y = \cot x$ به بازه‌ی $(0, \pi)$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

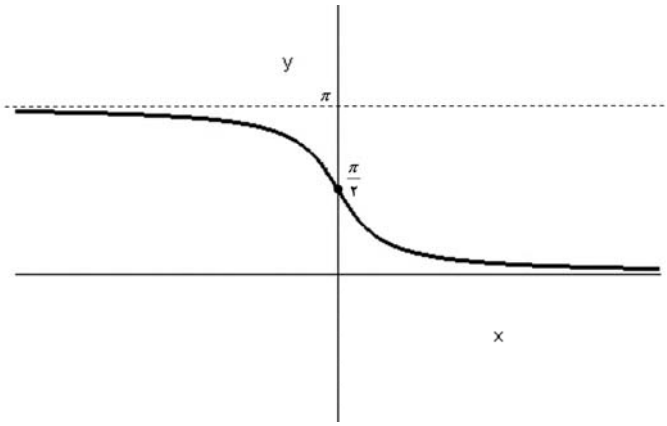
$$y = \cot x \quad , \quad x \in (0, \pi)$$



معکوس $y = \cot x$ را با نمادهای $y = arc\cot x$ یا $y = \cot^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

$$y = \cot^{-1} x : \Re \to (0, \pi)$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



www.fera.ir

مثال: مقدار $\sin^{-1}(۰)$ و $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ و $\tan^{-1}(۱)$ و $\cot^{-1}(-۱)$ را بدست آورید.

حل:

$\sin^{-1}(a)=b$ یعنی $\sin b=a$. با این توضیح داریم:

$\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\pi}{۴}$ $\qquad$ $\sin^{-1}(۰)=۰$

$\cot^{-1}(-۱)=\frac{۳\pi}{۴}$ $\qquad$ $\tan^{-1}(۱)=\frac{\pi}{۴}$

تمرین:

آیا تساوی‌های زیر نیز درست است؟ چرا؟

$\sin^{-1}(۰)=\pi$ $\qquad$ $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{\pi}{۴}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos[۲\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+\cos^{-1}(\frac{-۱}{۲})]$

ب) $\cos(\sin^{-1}(-\frac{۴}{۵}))$

حل: الف)

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{\pi}{۳}\\ \cos^{-1}(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\pi}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(-\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳})=\cos ۰=۱$$

ب)

$\sin^{-1}(-\frac{۴}{۵})=A$ بنابراین $\sin A=-\frac{۴}{۵}$. چون سینوس A منفی است و دامنه تابع $y=\sin^{-1}x$ بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ است. پس A در ناحیه چهارم قرار دارد بنابراین $\cos A$ مثبت بوده و

$$\cos A=\sqrt{۱-\sin^{۲}A}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۳}{۵}$$

تابع $f(x)=\arcsin(\sin x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است، زیرا:

$$f(x+۲\pi)=\arcsin(\sin(x+۲\pi))=\arcsin(\sin x)$$

همچنین اگر $-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}$، داریم:

www.fera.ir

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

اگر $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ آن‌گاه $-\frac{\pi}{2}\le\pi-x\le\frac{\pi}{2}$ و بنابراین:

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$$

به طور مشابه تابع $g(x)=\arccos(\cos x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است و به ازای $0\le x\le 2\pi$ داریم:

$$\arccos(\cos x)=\begin{cases} x & 0\le x\le\pi \\ 2\pi-x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

همچنین تابع $h(x)=\arctan(\tan x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\arctan(\tan x)=x$$

و بالاخره تابع $k(x)=arc\cot(\cot x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $0<x<\pi$ داریم:

$$arc\cot(\cot x)=x$$

تمرین:

۱- نمودار توابع f ، g ، h و k تعریف شده در بالا را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید

۲- نمودار توابع $\sin(\arcsin x)$ و $\cos(\arccos x)$ را رسم کنید.

۳- دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\arctan(\cos x)$ ب) $y=\arctan\frac{x}{1+x}$

ج) $y=\arcsin\frac{x}{1+x^2}$

۴- درستی اتحاد های زیر را بررسی کنید.

الف) $\tan(\sin^{-1}0)+\cot(\cos^{-1}0)=\cos(\sin^{-1}1)$

ب) $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$

ج) $\sin(\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{3}{5})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

۵- دامنه تابع با ضابطه $y=\tan^{-1}\sqrt{x-1}$ را به دست آورید.

۶- مقدار عبارت های زیر را بیابید.

الف) $\cot^{-1}(\tan\frac{19\pi}{4})+\cos^{-1}(\sin\frac{21\pi}{4})$

www.fera.ir

ب) $\cot^{-1}(-1)+\cos^{-1}(\sin(\frac{-\pi}{3}))$

۷- برد تابع $y=2+\sin^{-1}(1+x^2)$ چند عضو دارد؟

۸- معادله $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{4}$ را در نظر گرفته تابع y برحسب x را در این معادله بیابید.

۹- تابع $y=\sin^{-1}\frac{1}{x-1}$ صعودی است یا نزولی؟

۱۰- دامنه تابع $y=\sin^{-1}\sqrt{x-1}+\cos^{-1}(2x-1)$ را بیابید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- اگر $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

۲- اگر $\sin\alpha=\frac{m+1}{2}$ و $\cos\alpha=\frac{m-1}{2}$ باشد، چند مقدار متمایز برای m به دست می آید.

۳- معادله $\tan x+\cot x=5$ چند جواب در بازه‌ی $[0,3\pi]$ دارد؟

۴- معادله $3\sin x+\cos 2x=2$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۵- حاصل $\cos(45+x)\cos(45-x)$ را بیابید.

۶- کسر $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+2\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$ را ساده کنید.

۷- معادله $\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در فاصله $[0,\pi]$ چند جواب دارد؟

۸- حاصل $\frac{\sin 40+\sin 20}{\cos 40-\cos 20}$ را بیابید.

۹- معادله $\cos 5x+\cos 3x=0$ چند جواب در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ دارد؟

۱۰- معادله $\sin 5x-\sin 3x=\sin x$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۱۱- معادله $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱۲- فرض کنیم $x\neq\frac{k\pi}{2}$ و $|\sin x+\tan x|=|\sin x|+|\tan x|$ انتهای کمان x در چه ناحیه‌ای از دستگاه مختصات واقع است؟

۱۳- اگر $\cos 3x=\frac{m-1}{2}$ باشد و $|x|<\frac{\pi}{9}$. حدود مقادیر m را بیابید.

۱۴- کم‌ترین مقدار عبارت $3\sin^2\pi x-7\sin\pi x$ را در فاصله $[\frac{3}{2},\frac{11}{6}]$ را به دست آورید.

۱۵- اگر $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ آنگاه مقدار $\cos 4x$ چقدر است؟

۱۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+5=0$ را بیابید.

۱۷- معادله $2\sin x-\tan x=0$ چند جواب متمایز در بازه‌ی $[0,2\pi]$ دارد؟

۱۸- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

www.fera.ir

الف) $\cos^{-1}(\cos(-\frac{3\pi}{2}))$ ب) $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3})$

ج) $\tan(\cot^{-1}\frac{11}{60})$ د) $\tan(\sin^{-1}\frac{21}{29})$

۱۹- معادله $1+\cos 2x = 4\cos 4x$ در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۲۰- جواب کلی معادله $\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$ را بیابید.

۲۱- از رابطه‌ی $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin\alpha$ با فرض $\sin 2x=1$ چند مقدار برای α که $\alpha\in[0,2\pi]$ بدست می‌آید.

۲۲- مقدار $A=(1-\cot 23)(1-\cot 22)$ را بیابید.

۲۳- معادله‌ی $2\cot 2x+\tan x=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ روی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۲۴- در صورتی که بدانیم $\sin\alpha=\frac{7}{12}$ و $\tan\beta=\frac{5}{12}$ و زوایای α و β حاده باشند مطلوبست محاسبه‌ی هر یک از عبارت‌های زیر:

الف) $\tan[\pi-(\alpha+\beta)]$ ب) $\cos(\pi-\alpha+\beta)$

۲۵- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

۱) $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$

۲) $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$

۳) $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}$

۴) $8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$