

تمرینهای مشتق و انتگرال توابع مختلط

۱-

بررسی کنید که توابع زیر در چه ناحیه ای تحلیلی هستند.

a) $f(z) = z^r$

d) $f(z) = (1+i)(x-y)^r$

۲-

a و b را طوری بیابید که هریک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آنها را بیابید.

$u = e^{ax} \cos by$

۳-

مطلوب است محاسبه $\int_c f(z) dz$ که در آن $f(z) = \operatorname{Re} z$ ، c سهمی $y = x^2$ از $z = 0$ تا $z = 1+i$

۴-

سری لوران توابع زیر را حول نقطه داده شده بدست آورید.

(i) $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, (ii) $f(z) = z^r \cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

۵-

با استفاده از نوشتن سری لوران تابع $f(z) = \frac{\sin z^r}{z^r \left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$ حول نقطه صفر برای حالتی که $1 < |z| < \infty$ مقدار مانده $f(z)$ را محاسبه کنید.

-۶

مانده‌های تابع $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ را در نقاط $z = 1, 2, 3$ بیابید و نشان دهید مانده این تابع در $z = \infty$ برابر صفر می‌شود.

-۷

انتگرالهای داده شده زیر را بدست آورید.

$$(i) \oint_c \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z} dz, \quad c: |z| = 2, \quad (ii) \oint_c \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{z^2 + 1}, \quad |c|: |z - i| = \frac{3}{2}.$$

-۸

نشان دهید

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$
$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{3\pi}{8}$$

-۹

۱- کار انجام شده از نقطه $A(-1, 1)$ تا $B = (1, 1)$ را روی سهمی گذرا از مرکز مختصات بوسیله نیروی $\vec{f} = (2xy + x^2)\vec{i} + x^2\vec{j}$ محاسبه نمایید.