# رهیافت حل مسئله در تحلیل سازه ها

## حل بیش از ۵۰۰ مسئله

## بر اساس کتاب هیبلر

ترجمه و تدوین : مهندس مهدی علیرضایی
مهندس امین بهنیا
مهندس مصطفی کاظمی اصل

**مهندسی سازه:**

- هنر استفاده از مصالحی است که تنها می‌توان خصوصیات آنها را تخمین زد؛
- ساختن سازه‌های واقعی است، که تنها می‌توان آنها را به صورت تقریبی تحلیل نمود؛
- ایجاد مقاومت در برابر نیروهایی است که به صورت دقیق شناخته شده نیستند؛

## پیشگفتار

شکر و سپاس خداوند یکتا را که این توفیق را به ما عطا کرد با ترجمه و تالیف این کتاب گامی هر چند ناچیز در جهت ادای وظیفه خود به جامعه علمی و دانشگاهی کشور برداریم. طراحی هر سازه‌ای در مهندسی نیازمند بررسی و تعیین بارهای وارده بر سازه و تحلیل نیروها و تعیین تنش‌ها و تغییرمکان‌های ایجاد شده در سازه است. از ویژگی‌های مهم تحلیل سازه‌ها قطعیت‌های موجود در آن و ارتباط تنگاتنگ آن با ریاضیات است. کلید موفقیت در درک رفتار سازه‌ها در اثر اعمال بارها و موفقیت در درس‌های تحلیل سازه و مقاومت مصالح حل تمرین‌های مختلف و متنوع است. کتاب حاضر گام کوچکی در تحقق خواسته‌های فوق می‌باشد که امید است مورد توجه دانشجویان رشته مهندسی عمران قرار گیرد. متن اصلی در تدوین کتاب پیش رو، کتاب ***Structural Analysis*** تالیف ***R.C.Hibbeler*** ویرایش پنجم است که یکی از بهترین کتاب‌های موجود در زمینه تحلیل سازه‌ها می‌باشد. این کتاب صرفاً به صورت حل مسئله تحلیل سازه‌ها برای درس «تحلیل سازه‌های *I* و*II*» دانشجویان دوره کارشناسی رشته مهندسی عمران نوشته شده است. از سوی دیگر کتاب می‌تواند برای عزیزانی که در امتحانات دوره کارشناسی ارشد شرکت می‌کنند و همچنین دیگر همکاران علاقه‌مند به این مباحث مفید باشد. در اینجا از تمامی عزیزانی که دست یاری دادند، بخصوص آقای مهندس پیمان کریم‌پور، آقای مهندسی علی حاجی بابایی و خانم مهندس مرضیه رضوی، تا این مجموعه طبع آراسته گردد بسیار سپاسگذاریم. دریافت نظرات، پیشنهادات و رهنمون‌های همکاران محترم، دانشجویان گرامی و خوانندگان عزیز موجب امتنان است.

امین بهنیا- مهدی علیرضائی – مصطفی کاظمی اصل - تابستان ۱۳۸۹



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

فهرست مطالب


| عنوان | صفحه |
|---|---|
| فصل اول- انواع سازه‌ها و بارها | ۱ |
| فصل دوم - تحلیل سازه‌های معین استاتیکی | ۶ |
| فصل سوم - تحلیل خرپاهای معین استاتیکی | ۵۷ |
| فصل چهارم- نیروهای داخلی در اعضای سازه‌ای | ۱۴۵ |
| فصل پنجم- تحلیل سیستم‌های کابلی و قوسی | ۲۱۳ |
| فصل ششم- خط تاثیر برای سازه‌های معین | ۲۳۱ |
| فصل هفتم- تحلیل تقریبی سازه‌های نامعین استاتیکی | ۲۶۲ |
| فصل هشتم- خیز و شیب | ۲۹۲ |
| فصل نهم- روش‌های انرژی برای تحلیل سازه‌های معین ایستایی | ۳۲۵ |
| فصل دهم- تحلیل سازه‌های نامعین ایستایی با استفاده از روش نیرو | ۳۷۳ |
| فصل یازدهم- تحلیل سازه‌ها بر اساس روش جابجایی: معادلات شیب افت | ۴۳۱ |
| فصل دوازدهم- تحلیل سازه‌ها بر اساس روش جابجایی: پخش لنگر | ۴۶۶ |
| فصل سیزدهم- تحلیل تیرها و قاب‌ها با اعضای غیر منشوری | ۴۹۵ |
| فصل چهاردهم- تحلیل خرپاها با استفاده از روش سختی | ۵۰۱ |
| فصل پانزدهم- تحلیل تیرها با استفاده از روش سختی | ۵۲۱ |
| فصل شانزدهم- تحلیل قاب‌ها با استفاده از روش سختی | ۵۳۶ |




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل اول
# انواع سازه‌ها و بارها

## ۱-۱ کلیات

مکانیک بخش بزرگی از علوم مهندسی را در بر می‌گیرد. بخش اعظم مسائل مهندسی در ارتباط با نیروهایی هستند که به سیستم‌های مورد بحث اعمال می‌شود. به صورت کلی تمام نیروهای اعمالی به سیستم‌ها، تابعی از زمان می‌باشند. لیکن در بعضی مسائل کاربردی می‌توان آنها را بدون در نظر گرفتن فاکتور زمان بررسی نمود که در این حالت مسائل مورد بررسی ساده‌تر خواهند شد. عملکرد اصلی هر سازه‌ای، تحمل بارهای وارد بر آن است. البته این امر به هدفی که سازه برای آن ساخته می‌شود، بستگی دارد. در یک ساختمان چند طبقه با اسکلت فولادی، قاب‌های فولادی بایستی وزن پشت‌بام و کف طبقات را که شامل بارهای مرده و زنده می‌باشند را تحمل نمایند. همچنین این قاب‌ها باید قادر باشند تا بار ناشی از باد و زلزله را در هنگام وقوع آنها تحمل کرده و پایداری خود را نیز حفظ نمایند. بام این ساختمان بایستی وزن برف و یا باد (بسته به میزان شیب آن) را حمل کند. دیوارهای خارجی در مواجه با بارهای باد بایستی قادر به تحمل آنها باشند. و در نهایت تمام این نیروها توسط قاب‌های فولادی به پی منتقل می‌شود. کلید موفقیت در حل مسائل تحلیل سازه، درک فیزیکی مسئله است که در مسائل این کتاب سعی شده تا آنجا که امکان دارد، مسائل به صورت کاربردی آورده شوند.

## ۱-۲ انواع توزیع نیروی گسترده

*الف) توزیع خطی:* هنگامی که یک نیرو در طول یک خط توزیع شده باشد به آن توزیع خطی گویند. شدت آن معمولاً با واحد $kg/m$ یا $N/m$ (در واحد $SI$) می‌سنجند.

*ب) توزیع سطحی:* واحد شدت آن $N/m^2$ یا همان $Pa$ (پاسکال) می‌باشد. در این حالت نیرو در یک سطح گسترده شده است. مانند فشار هیدرواستاتیک آب بر دیوار درونی سد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

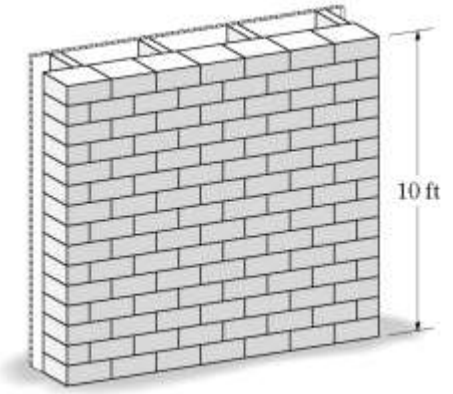


ج) *توزیع حجمی*: این نیرو بر کل ذرات جسم وارد می‌شود و به همین علت به آن نیروی حجمی گویند. واحد آن $N/m^3$ است مانند نیروی وزن که برآیند آن بر مرکز ثقل جسم وارد می‌شود.[1]

**۱-۳ مسائل:**

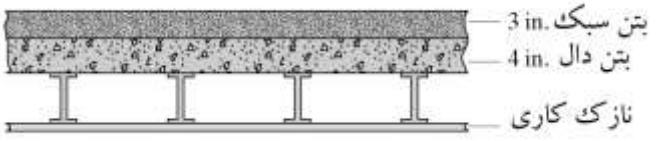
۱-۱) یک دیوار خارجی مطابق شکل زیر، از آجر ساخته شده است، که وزن هر فوت مربع دیوار برابر با $79lb/ft^2$ می‌باشد. همچنین سمت داخلی دیوار توسط پانل‌های چوبی که وزن هر فوت آنها نیز برابر $12lb/ft^2$ می‌باشد کار شده است. مقدار شدت بار خط ناشی از این دیوار، در پای آن را حساب نمایید.

$$DL = 79(10)+12(10) = 910 lb/ft$$




*شکل مسئله ۱-۱*

۱-۲) یک دتایل اجرایی از یک سقف مرکب در شکل زیر نشان داده شده است. در صورتی که وزن یک اینچ بتن دال برابر $12lb/ft^2$، وزن یک اینچ بتن سبک برابر $9\ lb/ft^2$ و همچنین وزن یک فوت مربع، نازک‌کاری انجام شده توسط پلاستر برابر $10\ lb/ft^2$ باشد، مقدار وزن یک فوت مربع سقف را تعیین نمایید. از وزن تیرهای فرعی صرف نظر نمایید.




*شکل مسئله ۱-۲*

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در این رابطه به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



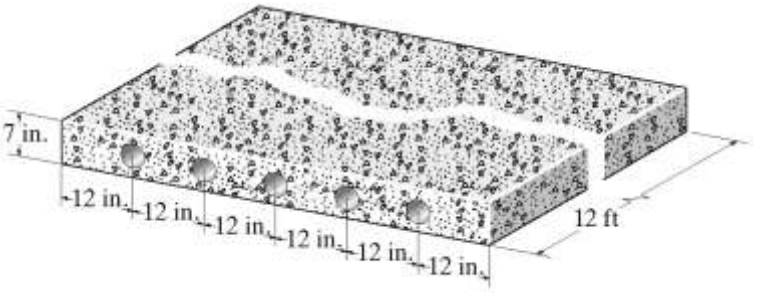
وزن یک فوت مربع بتن دال به ضخامت ٤ اینچ $= 4(12) = 48\frac{lb}{ft^2}$

وزن یک فوت مربع بتن سبک به ضخامت ۳ اینچ $= 3(9) = 27\frac{lb}{ft^2}$

وزن یک فوت مربع بتن پلاستر $= 10\frac{lb}{ft^2}$

بنابراین وزن کل سقف برابر $85lb/ft^2$ می‌باشد.

۱-۳) پانل بتنی ساخته شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در صورتی که وزن مخصوص بتن استفاده شده، برابر $144\ lb/ft^3$ باشد، همچنین سوراخ‌هایی به قطر ٤ اینچ در پانل وجود داشته باشد، مقدار وزن پانل را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۱-۳*

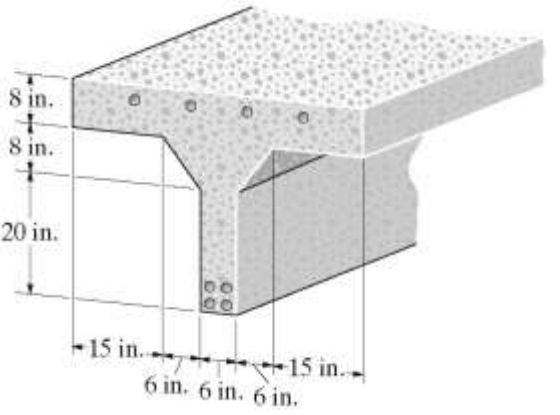
$$W = \left(144\frac{lb}{ft^3}\right)\left[(12\,ft)(6\,ft)\left(\frac{7}{12}\,ft\right) - 5(12\,ft)(\pi)\left(\frac{2}{12}\,ft\right)^2\right] = 5.29k$$

۱-٤) یک تیر $T$ شکل ساخته شده از بتن مسلح را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن هر فوت طول این تیر را تعیین نمایید. وزن مخصوص بتن و فولاد به ترتیب برابر $150\frac{lb}{ft^3}$ ، $492\frac{lb}{ft^3}$ و قطر آرماتورها برابر ۰/۷۵ اینچ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱-٤

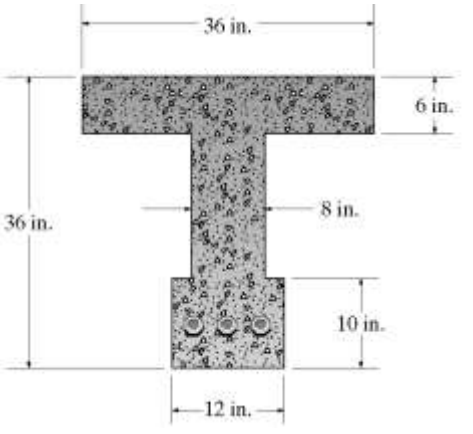
$$A=(28)(6)+(8)(48)+2\left(\frac{1}{2}\right)(6)(8)=600in^2=4.167\,ft^2$$

مساحت فولادها $A_{steel}=8\left(\frac{\pi(0.75)^2}{4}\right)=3.534in^2=0.02454\,ft^2$

مساحت بتن $A_{conc}=4.167\ ft^2-0.02454\ ft^2=4.142\ ft^2$

$$W=4.142\,ft^2\left(150\frac{lb}{ft^3}\right)+0.02454\,ft^2\left(492\frac{lb}{ft^3}\right)=633\frac{lb}{ft}$$

۱-۵) تیر $T$ شکل زیر را در نظر بگیرید که از بتن با وزن مخصوص $125\ lb/ft^3$ ساخته شده است. مقدار بار مرده ناشی از وزن تیر بر واحد طول آن را تعیین نمایید. از وزن میلگردها صرف نظر نمایید.




شکل مسئله ۱-۵

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

$$A = 36 \times 6 + 8 \times 20 + 12 \times 10 = 496 in^2$$

$$DL = \left(496 in^2\right)\left(\frac{1 ft^2}{144 in^2}\right)\left(125 \frac{lb}{ft^3}\right) = 431 \frac{lb}{ft}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل دوم
# تحلیل سازه‌های معین استاتیکی

## ۲-۱ کلیات

شکل سازه‌های طراحی شده به هدف، کاربری و مصالح استفاده شده در آنها بستگی دارد که طرح معماری و جنبه‌های زیبایی طرح نیز از جمله عوامل تاثیر گذار در روند طراحی هستند. یک آرشیتکت بسته به کاربری سازه شروع به طراحی سازه می‌کند تا به مسائل مربوطه پاسخ داده شود. همچنین جنبه‌های اقتصادی طرح از جمله موارد مهم به شمار می‌آید. بارهای اعمالی به سازه بایستی توسط سازوکاری نهایتاً به پی و زمین منتقل شوند. در عمل رفتار تکیه‌گاه‌ها پیچیده می‌باشد؛ ولی برای انجام روند تحلیل می‌بایست آنها را به صورت ایده‌آل منظور نمود. هنگامی که نیرویی به یک تیر اعمال می‌شود، عکس‌العمل‌هایی در تکیه‌گاه‌های آن تیر ایجاد می‌شود که بدست آوردن این عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی اولین گام در حل اکثر مسائل می‌باشد. عکس‌العمل‌های ایجاد شده در اثر اعمال بار به نوع تکیه‌گاه بستگی دارد. بنابراین تکیه‌گاه‌ها با ایجاد نیروهایی از حرکت تیر در جهات مختلف جلوگیری می‌کنند. در بسیاری از سازه‌ها تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به اندازه‌ای است که می‌توان با نوشتن معادلات تعادل استاتیکی مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمود. این نوع سیستم‌ها، معین استاتیکی (یا ایزواستاتیک) نامیده می‌شوند. در صورتی که تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و یا تعداد اعضا بیش از تعدادی باشد که با استفاده از معادلات تعادل قابل حل باشند، به این نوع، سیستم‌های نامعین استاتیکی یا سازهای هیپراستاتیک[1] گویند. بعد از روند طراحی اولیه و شکل معماری طرح، نوبت به مرحله تحلیل سازه برای بدست آوردن نیروهای داخلی آن می‌شود. در این مرحله باید نیروها و بارهایی که آن سازه در طی مدت بهره‌برداری با آنها مواجه خواهد شد را بدست آورده و به سازه اعمال نمود تا نیروهای ایجاد شده در سازه تحت این بارهای اعمالی را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال فرض کنید با یک ساختمان طبقاتی مسکونی مواجه هستیم.

[1] Hyperstatic systems

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در ابتدا با حدس اولیه، یک سری مقاطع برای این سازه در نظر گرفته می‌شود. بارهایی که سازه در طی مدت بهره‌برداری با آن مواجه خواهد شد، شناسایی و به سازه اعمال می‌شود. از جمله بارهایی که به هر سازه‌ای اثر می‌کند، وزن اجزای مرده ساختمان است. بار مرده شامل وزن اجزایی است که به صورت دائمی با سازه باقی می‌مانند. وزن خود سازه، وزن کف سازی و وزن دیوارهای خارجی از جمله بارهای مرده به شمار می‌آیند. بارهای زنده عبارت است از بارهای غیردائمی که در حین استفاده و بهره‌برداری از ساختمان به آن وارد می‌شود. این بارها شامل بار برف و زلزله نمی‌شود. این بارها به سازه اثر داده شده و پاسخ سازه به این بارها بررسی می‌شود. این مرحله را تحلیل سازه گویند.

**۲-۲ معادلات تعادل**

در حالت کلی برای تعیین معینی و نامعینی سازه‌ها می‌توان تعداد مجهولات را از تعداد معادلات کم نمود. در صورتی که عدد بدست آمده برابر صفر بود، سازه معین بوده، در صورتی که بیشتر از صفر باشد، نامعین و در صورتی که کمتر از صفر شد، سیستم ناپایدار است. توجه نمایید در صورتی که سازه‌ای معین و یا نامعین بود، دلیل بر پایداری آن نیست و بایستی پایداری سازه به صورت جداگانه بررسی شود. برای پایداری دو شرط زیر بایستی همواره برقرار باشند:

- ✓ امتداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در یک امتداد نباشند،
- ✓ امتداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در یک نقطه به یکدیگر نرسند،

در بحث ایستایی عمدتاً با بیان شرایط نیرو سروکار داریم که برای تامین حالت تعادل سازه‌های مهندسی لازم و کافی هستند. تعادل بخش اصلی و با اهمیت استاتیک است و باید آن را کاملاً فرا گرفت. یک جسم را در صفحه در نظر بگیرید. حالت‌های که ممکن است این جسم داخل صفحه به صورت مستقل حرکت کند شامل حرکت افقی، حرکت به صورت قائم و یک حرکت دورانی است.

پس برای اینکه این سه حالت حرکت خنثی شده و جسم دارای تعادل باشد بایستی مجموع نیروها در جهت $x$ و مجموع نیروها در جهت $y$ برابر صفر شده تا از حرکت جسم در جهت محورهای $x$ و $y$ جلوگیری شود. همچنین برای اینکه از دوران جسم نیز جلوگیری

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

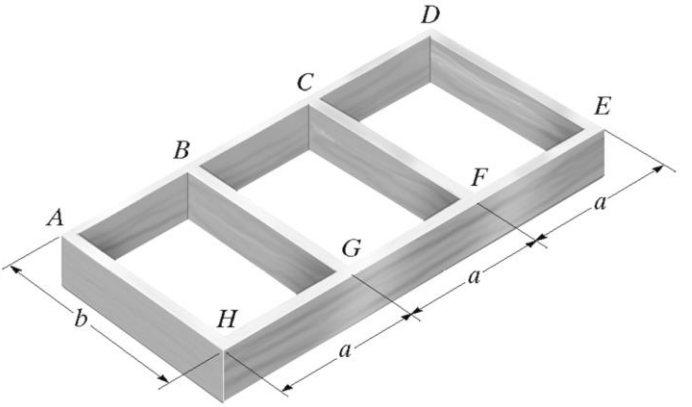


شود بایستی مجموع لنگرهای اعمال شده به صفحه حول هر نقطه دلخواهی برابر صفر گردد[1]. یعنی:

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0$$

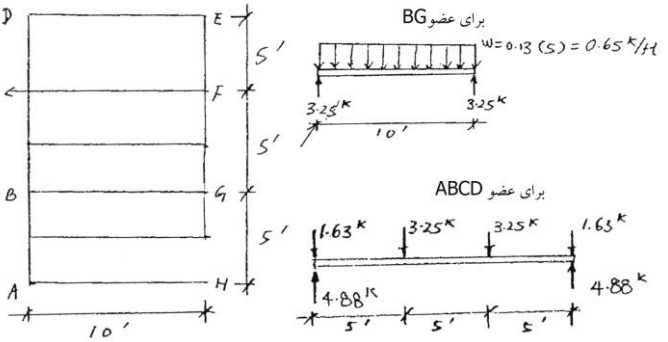
**۲-۳ مسائل:**

۲-۱) یک قاب که متحمل بار سقف چوبی گسترده یکنواخت به شدت $130lb/ft^2$ می‌باشد را در نظر بگیرید. در صورتی که $a=5ft$ و $b=10ft$ باشد، مقدار سهم بار عضو $BG$ و $ABCD$ را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۱*

حل) با توجه به اینکه $b/a = 10/5 = 2$ می‌باشد، بنابراین پخش بار دال به صورت یک طرفه است. بنابراین، با توجه به دیاگرام جسم آزاد ترسیم شده برای $BG$، شدت بار $w = 0.65k/ft$ و مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی عضو $ABCD$، برابر $4.88k$ می‌باشد.



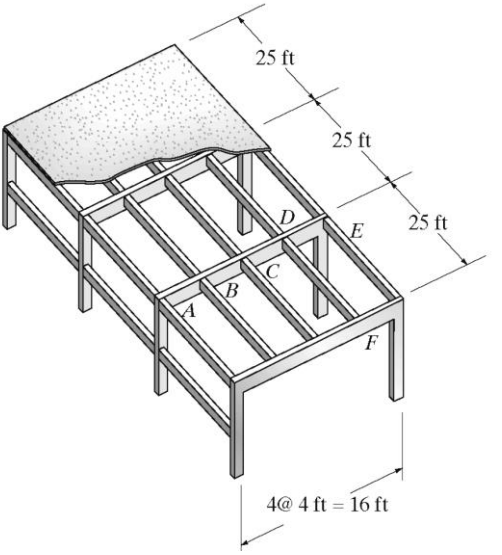

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در این رابطه به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

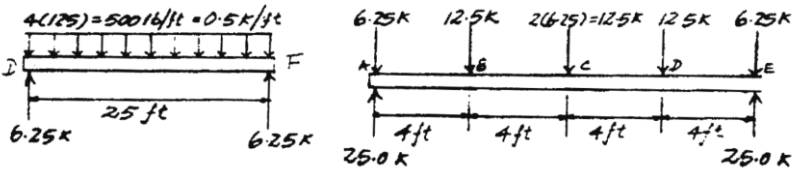
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۲-۲) یک سقف یک طبقه مانند شکل نشان داده شده در زیر تحت بارهای مرده و زنده به شدت $125lb/ft^2$ می‌باشد. در صورتی که لاپه‌های سقف از یکدیگر ٤ فوت فاصله داشته باشند و طول هر یک از آنها ۲۵ فوت باشد، مقدار بار ایجاد شده بر روی لاپه $DF$ و $A$، $B$، $C$، $D$ و $E$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۲-۲




حل) به دلیل آنکه $\frac{L_2}{L_1}=\frac{25}{4}=6.25>2$ می‌باشد، بنابراین رفتار دال به صورت یکطرفه می‌باشد. مقدار سهم باربری در امتداد $DF$ برابر با $(125lb/ft^2)(4ft)=500lb/ft$ است.

مقدار نیروی ایجاد شده در نقطه $A$ و $E$: $F=6250lb=6.25k$

مقدار نیرو نیروی ایجاد شده درنقاط $B$، $C$ و $D$: $F=2(6250)=12500lb=12.5k$

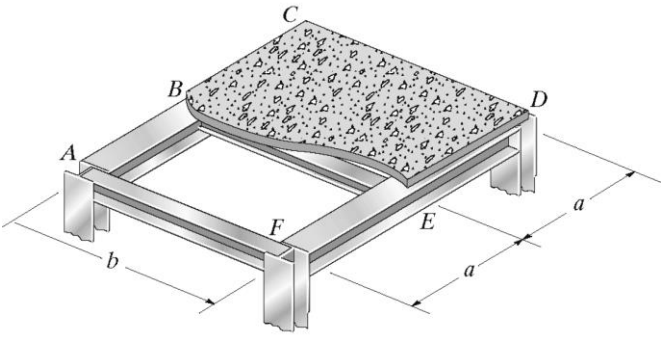
۲-۳) یک سقف مرکب فولادی همراه با دال بتنی به ضخامت ٤ اینچ که تحت یک بار گسترده زنده به میزان $500lb/ft^2$ قرار دارد را در نظر بگیرید. مقدار سهم بار عضو $BE$ و

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



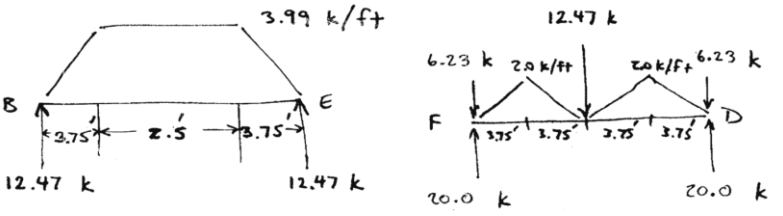
$FD$ را با ترسیم شکل شماتیک توزیع بار بر روی آنها نشان دهید. در شکل، $b=10ft$، $a=7.5ft$ می‌باشند.




*شکل مسئله ۲-۳*

حل) مقدار عکس‌العمل در $B = 12.5k$

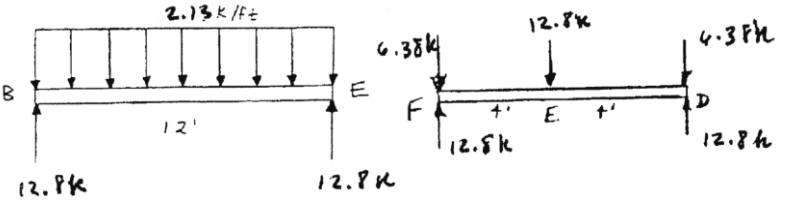
مقدار عکس‌العمل در $F = 20k$




۲-٤) مسئله۲-۳ را یکبار دیگر در حالت $b=12ft$ و $a=4ft$ حل نمایید.

$DL = 8(4) = 32\ psf$ $\qquad$ $LL = 500\ psf \Rightarrow$ در نتیجه کل بار $= 532\ psf$

$\frac{L_2}{L_1} = \frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3 > 2 \quad \Rightarrow$ بنابراین رفتار دال به صورت یکطرفه می‌باشد

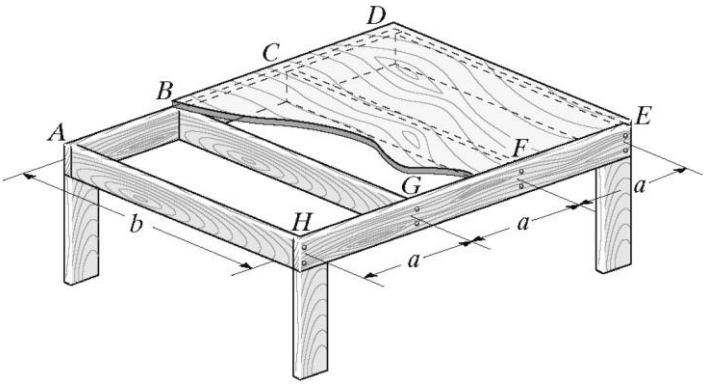



۲-۵) قاب نشان داده شده در شکل زیر وزن یک سقف چوبی را تحمل می‌کند. در صورتی که $b=10ft$ و $a=5ft$ و مقدار بار زنده بر روی سقف برابر $40psf$ باشد. مقدار سهم باربری اعضای $BG$ و $ABCD$ را تعیین نمایید.

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



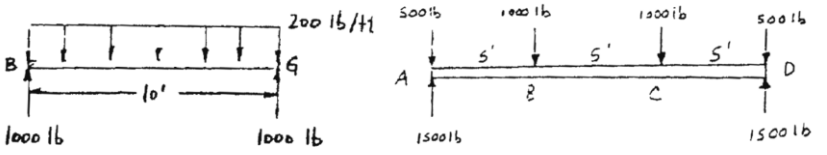



شکل مسئله ۲-۵

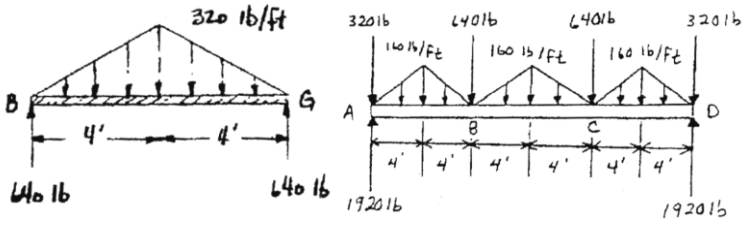
حل)

$\frac{L_2}{L_1}=\frac{b}{a}=\frac{10}{5}=2 \quad \Rightarrow$ بنابراین رفتار دال به صورت یکطرفه می‌باشد

$A$ مقدار عکس‌العمل در $1500lb$ =




۲-۶) مسئله۲-۵ را یکبار دیگر در حالتی که $b=8ft$ و $a=8ft$ حل نمایید.




$\frac{L_2}{L_1}=\frac{b}{a}=\frac{8}{8}=1<2 \quad \Rightarrow$ بنابراین رفتار دال به صورت دوطرفه می‌باشد

$A$ مقدار عکس‌العمل در $1920lb$ =

۲-۷) مسئله۲-۵ را در حالتی که $b=15ft$ و $a=10ft$ باشد، حل نمایید.

حل)

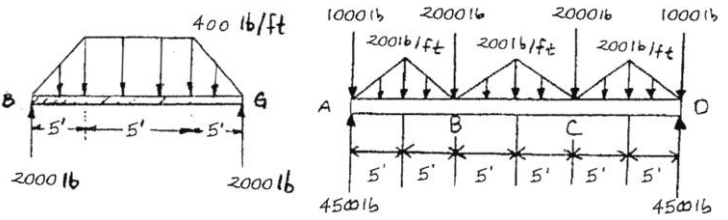
$\frac{L_2}{L_1}=\frac{b}{a}=\frac{15}{10}=1.33<1.5 \quad \Rightarrow$ بنابراین رفتار دال به صورت دو طرفه می‌باشد

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

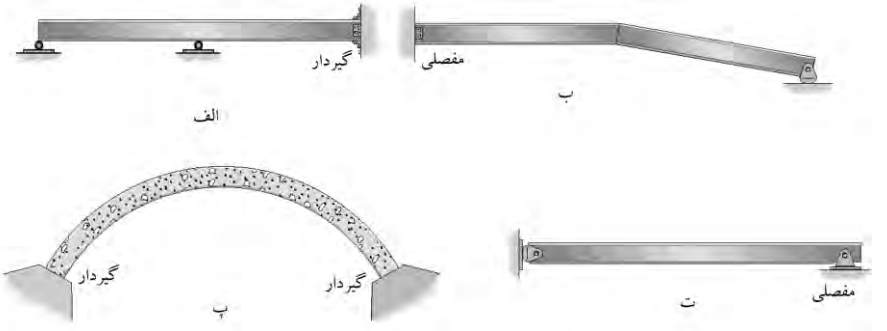
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



مقدار عکس‌العمل‌ها در $BG$ و $AD$ به ترتیب ۲۰۰۰ و ٤٥٠٠ پوند می‌باشد.

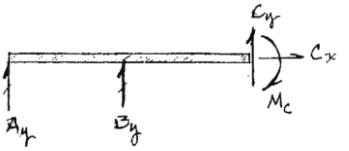



۲–۸) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین کنید.




*شکل مسئله ۲–۸*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 5$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۲ می‌باشد.

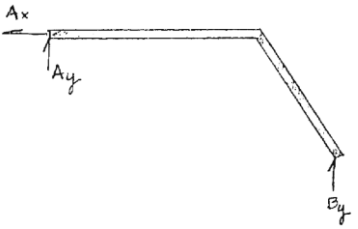



ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 3$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم معین و پایدار می‌باشد.

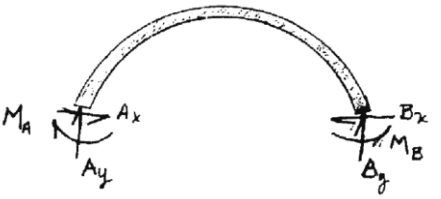
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



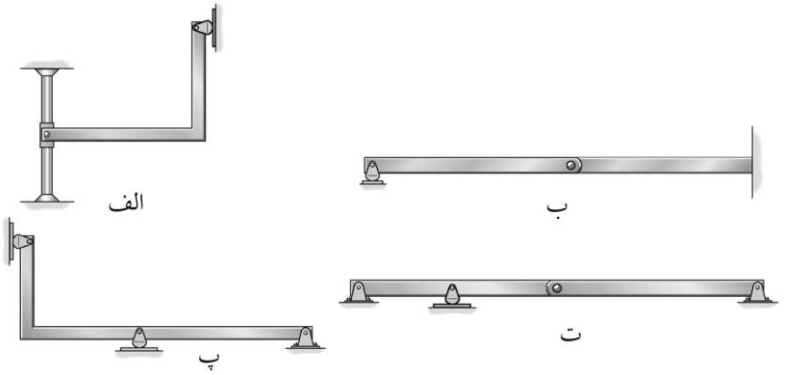



پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$ ، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$ ، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۳ می‌باشد.




ت) چون امتداد تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از یک نقطه عبور می‌کنند، بنابراین سیستم ناپایدار است.

۲-۹) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید. در شکل (الف) اتصال دو قطعه به یکدیگر به صورت غلافی بوده و امکان جابجایی در امتداد قائم آزاد است.




*شکل مسئله ۲-۹*

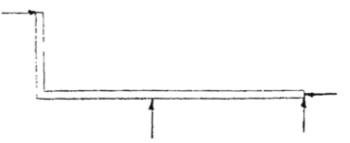
حل) الف) برای این سازه تعادل نیروها در جهت قائم برابر صفر نمی‌گردد. بنابراین سیستم ناپایدار است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=4$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، همچنین تعداد روابط شرطی $m=1$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − (روابط شرطی + معادلات)) سیستم معین و پایدار می‌باشد.

پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=4$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۱ می‌باشد.



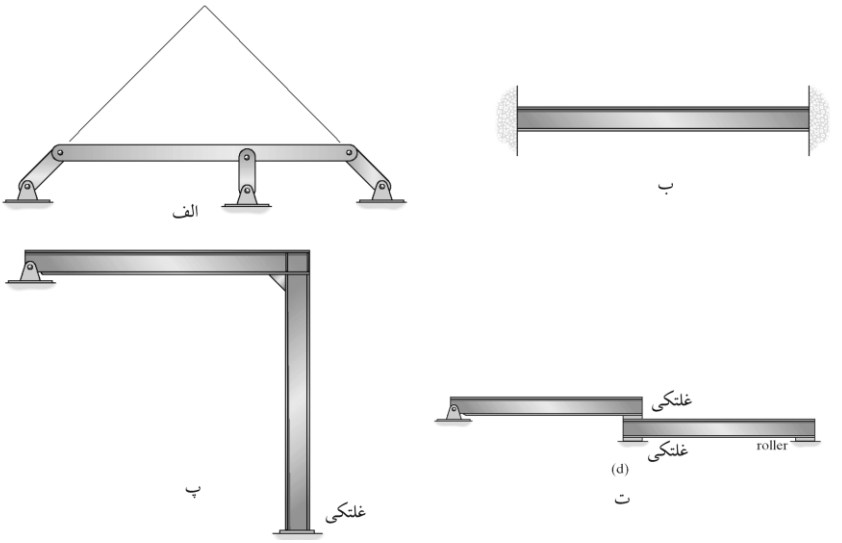
ت) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=5$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، همچنین تعداد روابط شرطی $m=1$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − (روابط شرطی + معادلات)) سیستم ۱ درجه نامعین می‌باشد.

۲-۱۰) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

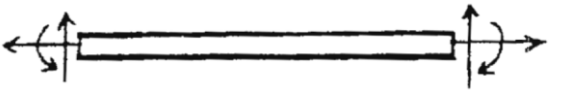





*شکل مسئله ۲-۱۰*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 3$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم معین می‌باشد. همچنین امتداد تمام نیروهای محوری ایجاد شده در بازوهای سیستم، از یک نقطه عبور نمی‌کند، بنابراین، سیستم ناپایدار نیست.

ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۳ می‌باشد.

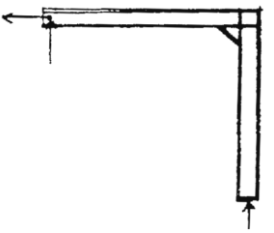


پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 3$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم معین و پایدار می‌باشد.

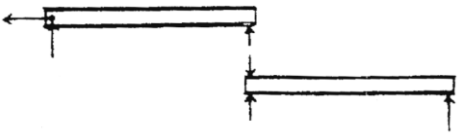
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

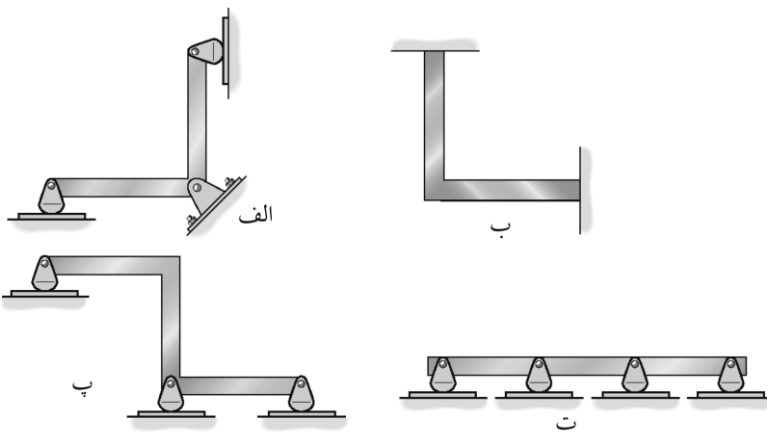




ت) چون عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای قطعه سمت راست، با یکدیگر موازی هستند، بنابراین سیستم ناپایدار است.

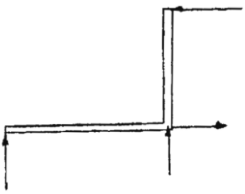


۲-۱۱) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۱۱*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 4$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۱ می‌باشد.

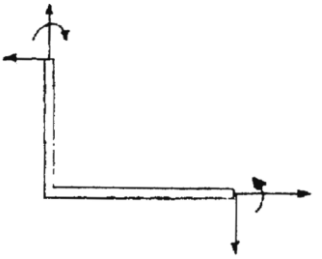


Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

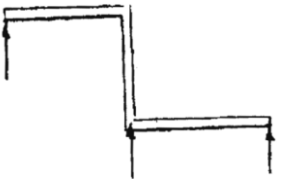
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − (روابط شرطی + معادلات)) سیستم ۳ درجه نامعین می‌باشد.



پ) در این سیستم تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با هم موازی بوده، بنابراین سیستم ناپایدار می‌باشد.



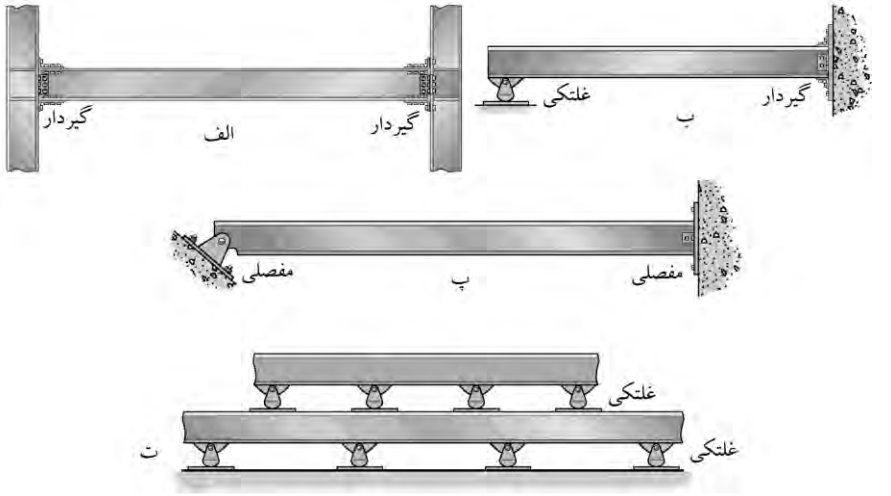
ت) در این سیستم تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با هم موازی بوده، بنابراین سیستم ناپایدار می‌باشد.

۲-۱۲) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

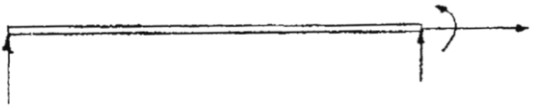





*شکل مسئله ۲-۱۲*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۳ می‌باشد.

ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=4$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۱ می‌باشد.



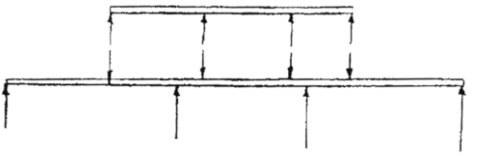
پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=4$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات − معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۱ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

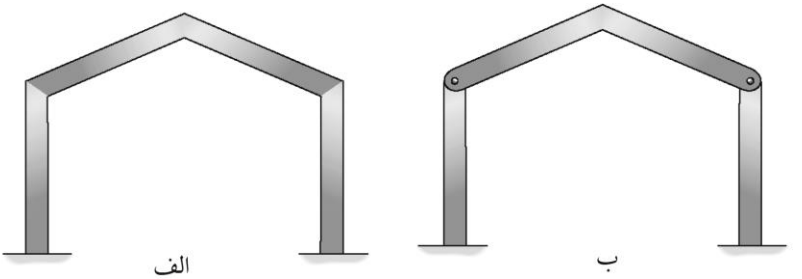
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



ت) تمام عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در این سیستم با یکدیگر موازی بوده، بنابراین این سیستم ناپایدار می‌باشد.

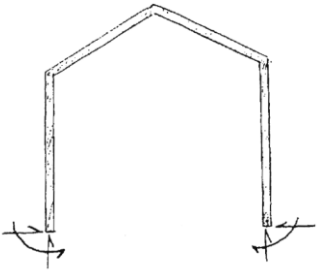


۲-۱۳) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۱۳*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۳ می‌باشد. سیستم کادر بسته نیز ندارد.

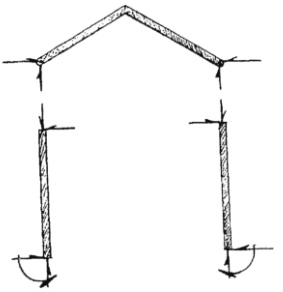


ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، تعداد روابط شرطی $m=2$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۱ می‌باشد. سیستم کادر بسته نیز ندارد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



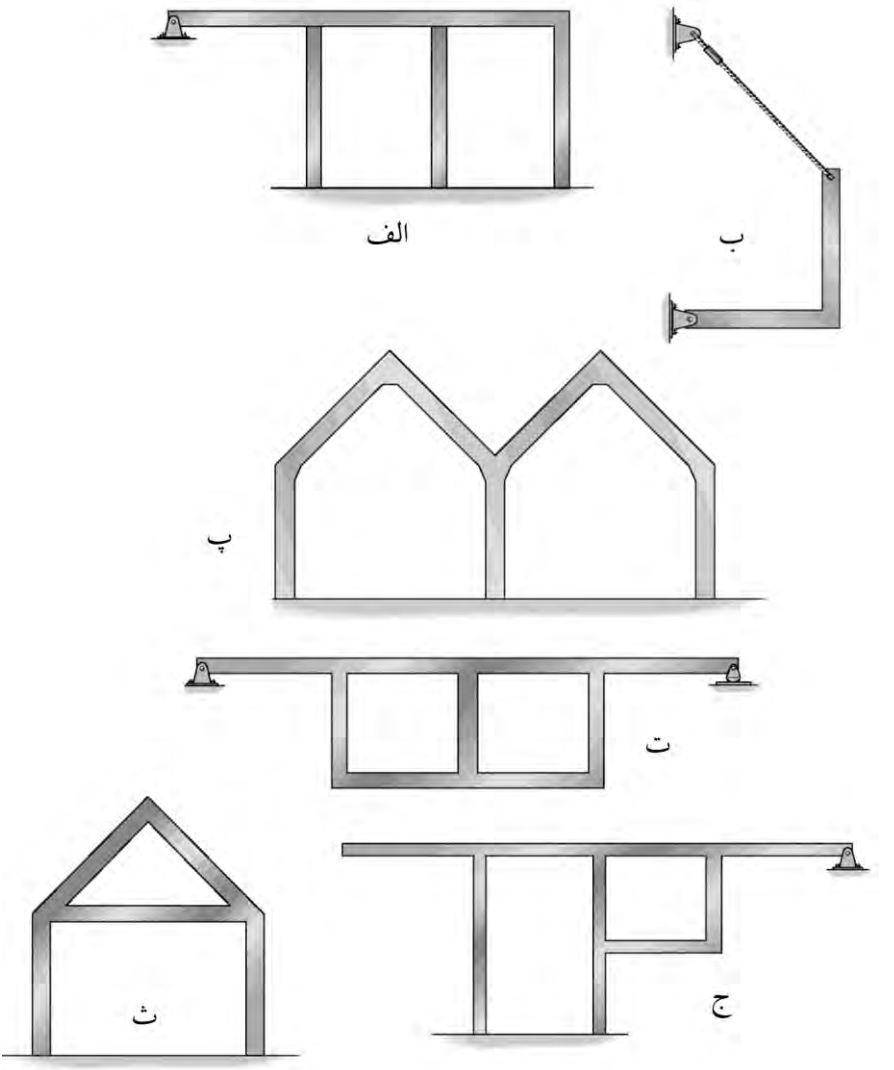


۲-۱٤) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید. تمام اتصالات داخلی در سیستم‌های نشان داده شده به صورت گیردار می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





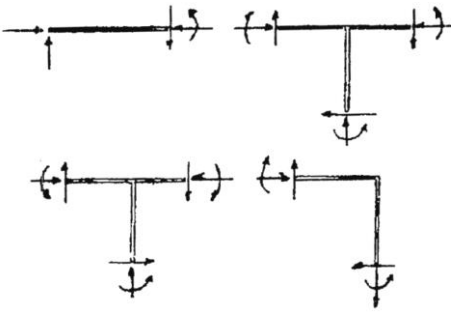

*شکل مسئله ۲-۱۴*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=11$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، بنابراین (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) درجه نامعینی این سیستم برابر ۸ می‌باشد. سیستم کادر بسته نیز ندارد.

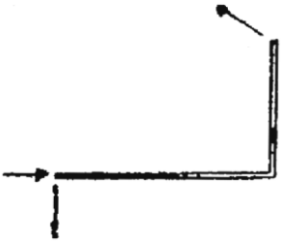
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

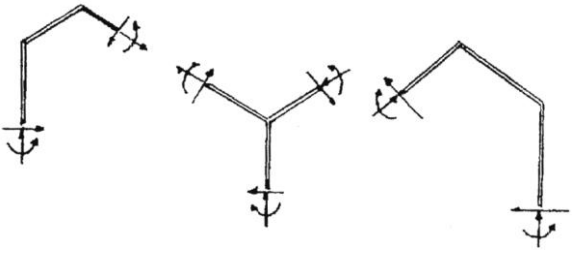




ب) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=2$، همچنین کابل نیز رفتاری محوری داشته و یک مجهول دیگر در اثر وجود کابل اضافه می‌شود. بنابراین کل مجهولات برابر ۳ می‌باشد. تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم معین می‌باشد.



پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=9$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ٦ درجه نامعین می‌باشد.

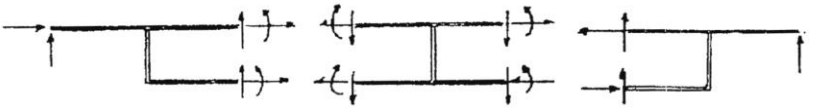


ت) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=3$، همچنین سیستم دارای دو کادر بسته بوده که هر کادر بسته باعث تولید ۳ مجهول می‌شود. تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ٦ درجه نامعین می‌باشد.

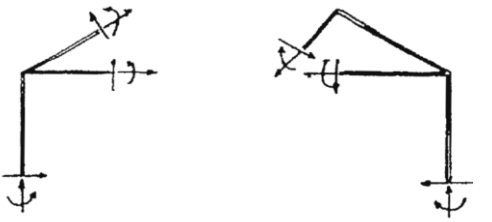
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

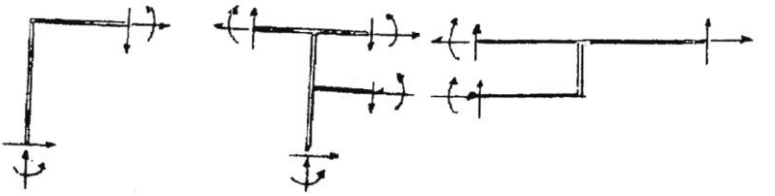




ث) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=6$، همچنین سیستم دارای یک کادر بسته بوده که هر کادر بسته باعث تولید ۳ مجهول می‌شود. تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ٦ درجه نامعین می‌باشد.



ج) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R=8$، همچنین سیستم دارای یک کادر بسته بوده که هر کادر بسته باعث تولید ۳ مجهول می‌شود. تعداد معادلات موجود در صفحه $n=3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ۸ درجه نامعین می‌باشد.

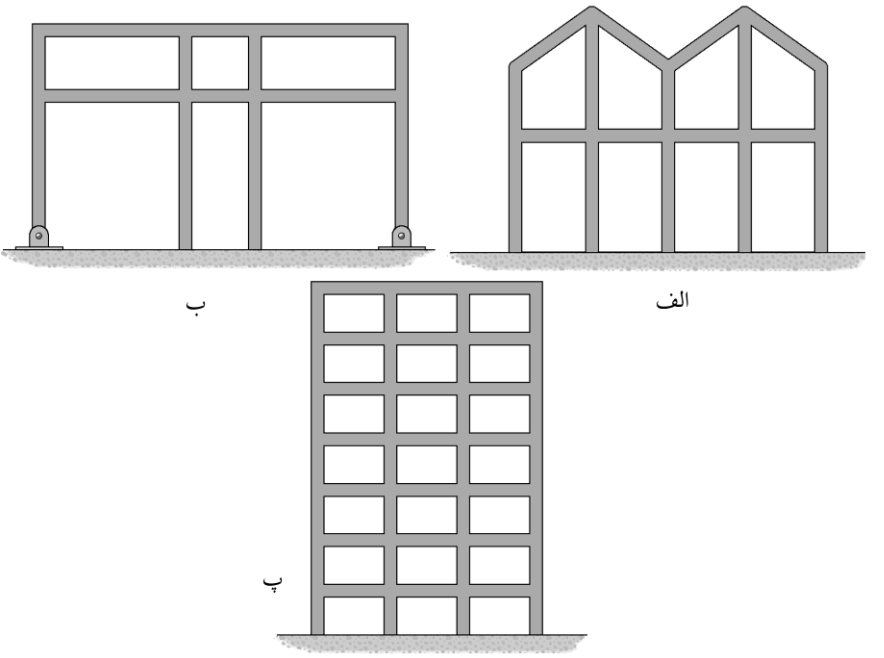


۲-۱۵) درجه نامعینی سیستم‌های زیر را تعیین کنید. تمام اتصالات اعضاء به یکدیگر در شکل‌های زیر به صورت گیردار هستند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

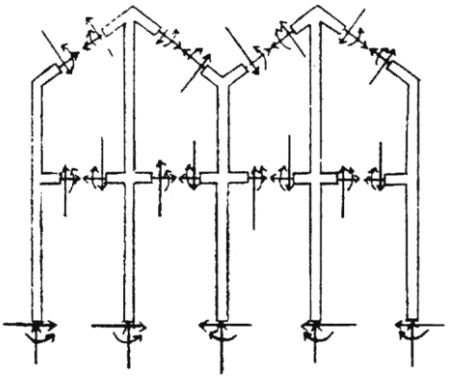
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۲-۱۵*

حل) الف) سازه شامل ۵ تکیه‌گاه گیردار بوده که هر یک از آنها سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی دارد. بنابراین کل مجهولات تکیه‌گاهی سیستم برابر با $R=5\times3=15$، می‌باشد. همچنین سیستم مورد نظر شامل ٤ کادر بسته بوده که هر کادر بسته تولید ۳درجه نامعینی می‌نماید. در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ٢٤ درجه نامعین می‌باشد.



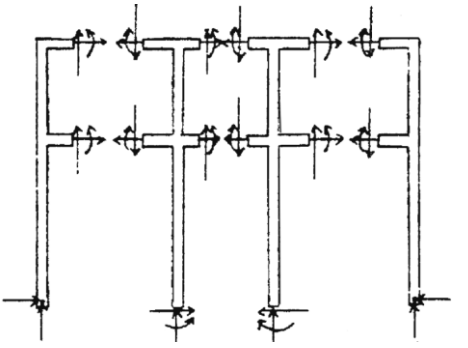
ب) سازه شامل ۲ تکیه‌گاه گیردار و ۲ تکیه‌گاه مفصلی است. بنابراین کل مجهولات تکیه‌گاهی سیستم برابر با $R=2\times3+2\times2=10$، می‌باشد. همچنین سیستم مورد نظر

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

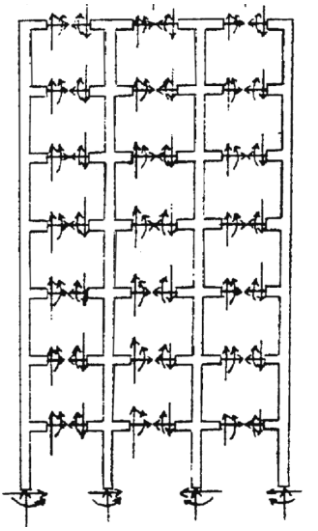
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



شامل ۳ کادر بسته بوده که هر کادر بسته تولید ۳درجه نامعینی می‌نماید. در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ۱۶ درجه نامعین می‌باشد.



پ) سازه شامل ٤ تکیه‌گاه است. بنابراین کل مجهولات تکیه‌گاهی سیستم برابر با $R=4\times3=12$، می‌باشد. همچنین سیستم مورد نظر شامل ۱۸ کادر بسته بوده که هر کادر بسته تولید ۳ درجه نامعینی می‌نماید. در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ٦۳ درجه نامعین می‌باشد.

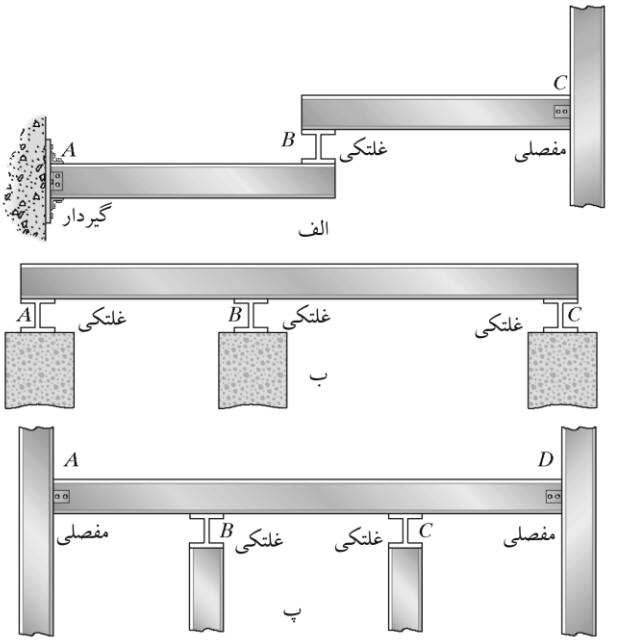


۲-۱٦) پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی سازه‌های زیر را تعیین نمایید. در صورت نامعینی، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

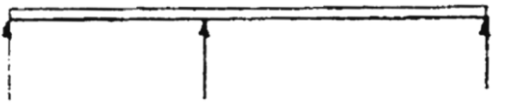





*شکل مسئله ۲-۱۶*

حل) الف) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 5$، همچنین سیستم دارای یک غلتک در وسط بوده که خود باعث ایجاد ۲ رابطه شرطی (لنگر و مولفه افقی صفر می‌باشد) می‌شود. تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم معین استاتیکی می‌باشد.

ب) تمام عکس‌العمل‌ها با یکدیگر برابراند، بنابراین سیستم ناپایدار می‌باشد.

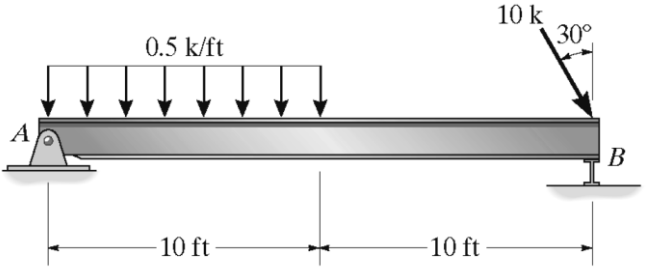


پ) تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی(مجهولات) $R = 6$، تعداد معادلات موجود در صفحه $n = 3$، در نتیجه (تعداد درجات نامعینی = مجهولات – معادلات) سیستم ۳ درجه نامعین می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

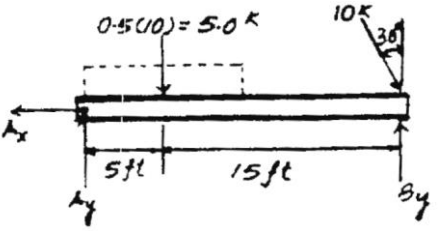
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

۲-۱۷) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر شکل زیر را تعیین نمایید. فرض کنید که تیر در تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی بوده و از ضخامت تیر صرف نظر نمایید.




*شکل مسئله ۲-۱۷*

حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:




$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(20) - 10\cos 30^\circ(20) - 5(5) = 0$ (پادساعتگرد مثبت)

$\Rightarrow B_y = 9.91k$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 9.91 - 5 - 10\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 3.75k$

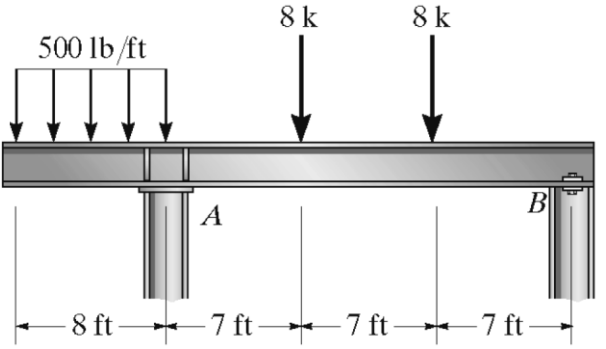
$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + 10\sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 5.0k$

۲-۱۸) در شکل زیر مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $A$ و $B$ را تعیین نمایید. فرض کنید که $A$ غلتکی و $B$ به صورت مفصلی است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۱۸

حل) سازه معین بوده و با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

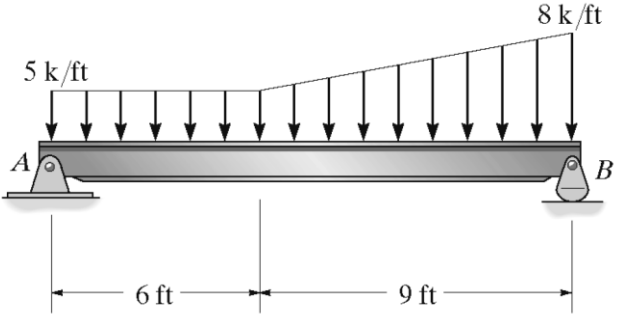
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y(21)+8(7)+8(14)+4(25)=0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow A_y = 12.8k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + 12.76 - 4 - 8 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 7.24k$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

۲-۱۹) مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیر شکل زیر را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۲-۱۹

حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(15) - 75(7.5) - 13.5(12) = 0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow B_y = 48.3k$$

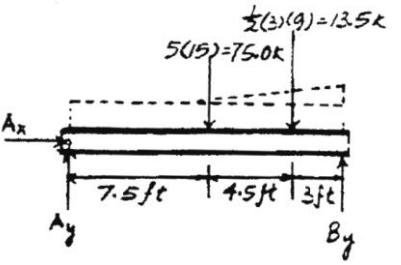
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 48.3 - 75 - 13.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 40.2k$$

$$\underset{\rightarrow}{+} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

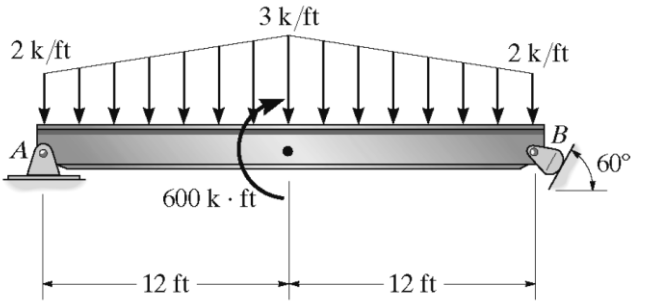
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۲-۲۰) مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیر شکل زیر را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۲۰*

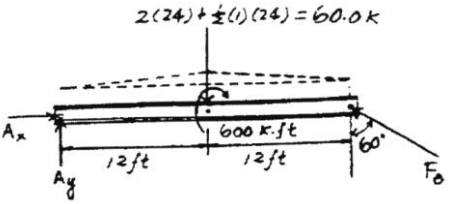
حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -60(12) - 600 + F_B \cos 60^\circ (24) = 0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow F_B = 110k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 110\cos 60^\circ - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5k$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 110\sin 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 95.3k$$

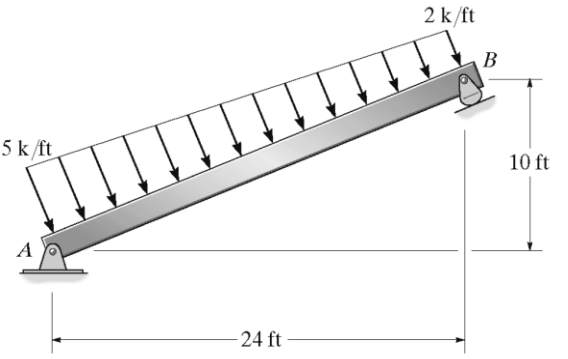



۲-۲۱) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۲۱

حل) سازه معین استاتیکی بوده، بنابراین با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

$$(\text{پادساعتگرد مثبت}) \sum M_A = 0 \Rightarrow F_B(26) - 52(13) - 39\left(\frac{1}{3}\right)(26) = 0$$

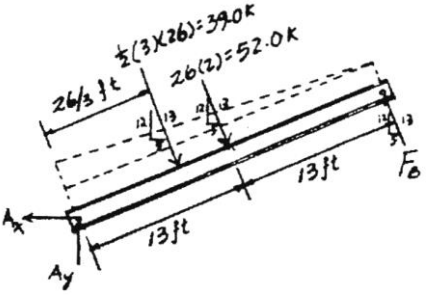
$$\Rightarrow F_B = 39.0k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{12}{13}(39) - \frac{12}{13}(52) + \frac{12}{13}(39.0) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 48.0k$$

$$\overset{\rightarrow}{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + \left(\frac{5}{13}\right)39 + \left(\frac{5}{13}\right)52 - \left(\frac{5}{13}\right)39.0 = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 20.0k$$

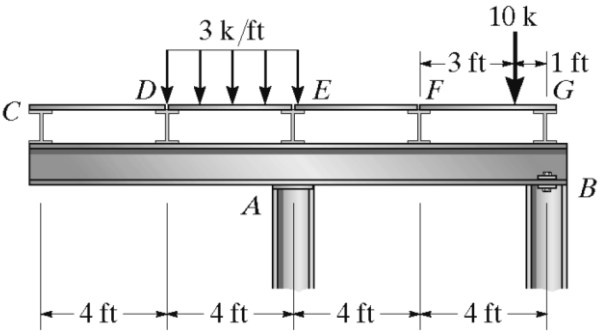



۲-۲۲) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ غلتکی و تکیه‌گاه $B$ مفصلی است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۲۲

حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

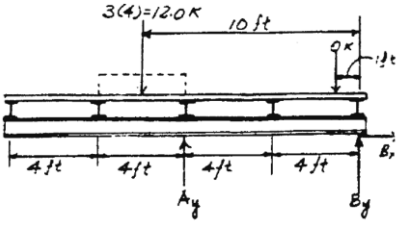
$$(\text{پادساعتگرد مثبت}) \sum M_B = 0 \Rightarrow 10(1)+12(10)-A_y(8)=0$$

$$\Rightarrow A_y = 16.25k \approx 16.3k$$

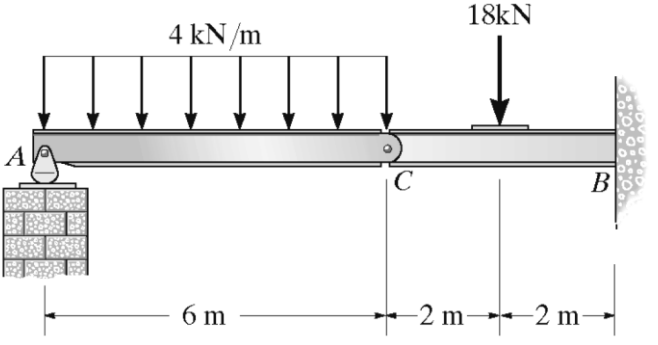
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 16.25-12-10+B_y = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 5.75k$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$




۲-۲۳) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ غلتکی و تکیه‌گاه $B$ گیردار است. همچنین تیر در $C$ دارای مفصل داخلی است.




شکل مسئله ۲-۲۳

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه برای قطعه $AC$ داریم:

$$(\text{پادساعتگرد مثبت}) \sum M_C = 0 \Rightarrow 24(3) - A_y(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 12kN$$

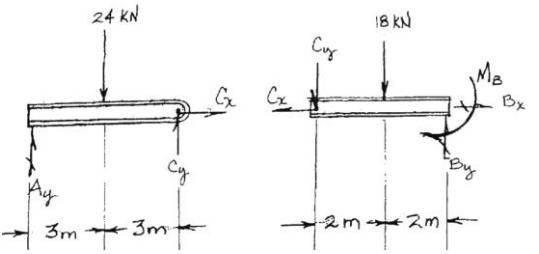
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 12 - 24 + C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 12kN$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$

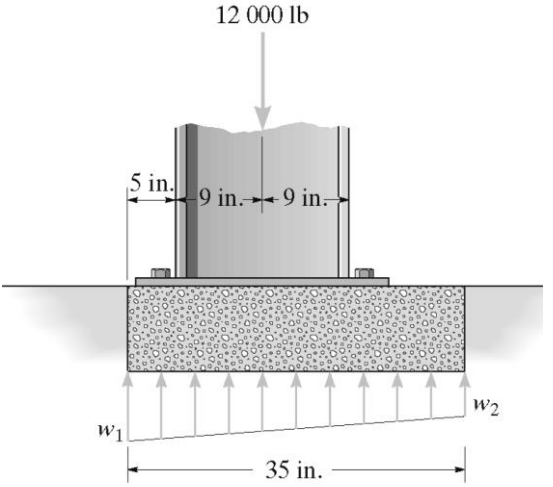
همچنین برای قطعه $CB$ خواهیم داشت:

$$(\text{پادساعتگرد مثبت}) \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_B + 18(2) + 12(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 84kN.m$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -12 - 18 + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 30$$




۲-۲٤) صفحه ستون شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت نیروی محوری فشاری $12000lb$ می‌باشد. مقادیر شدت عکس‌العمل‌های زیر صفحه ستون برای حفظ تعادل را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۲٤*

حل) با گشتاورگیری حول نقطه $A$ که برآیند نیروهای مثلثی شکل از آن عبور می‌کند، داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

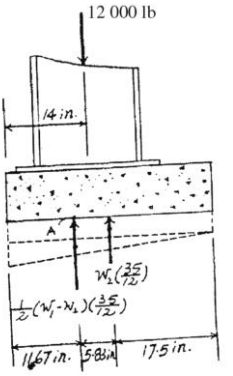
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



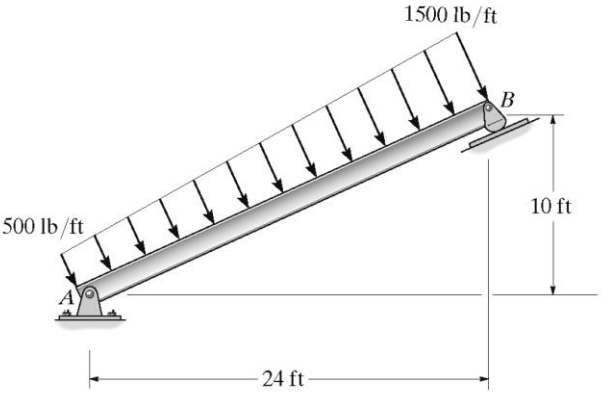
(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_A = 0 \Rightarrow w_2\left(\frac{35}{12}\right)(17.5-11.67)-12(14-11.67)=0$

$\Rightarrow w_2 = 1.646\frac{kips}{ft} = 1.65\frac{kips}{ft}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(w_1-1.646)\left(\frac{35}{12}\right)+1.646\left(\frac{35}{12}\right)-12=0 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 6.58\frac{kips}{ft}$




۲-۲۵) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۲-۲۵*

حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_A = 0 \Rightarrow F_B(26)-13(13)-13(17.33)=0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 15.17k$

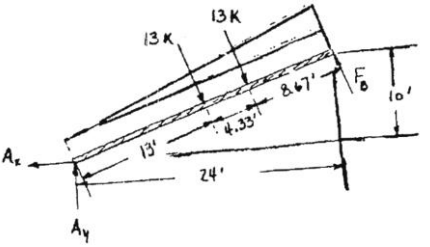
$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + 26\left(\frac{10}{26}\right)-15.17\left(\frac{10}{26}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 4.17k$

$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 26\left(\frac{24}{26}\right)+15.17\left(\frac{24}{26}\right)=0 \quad \Rightarrow A_y = 10.0k$

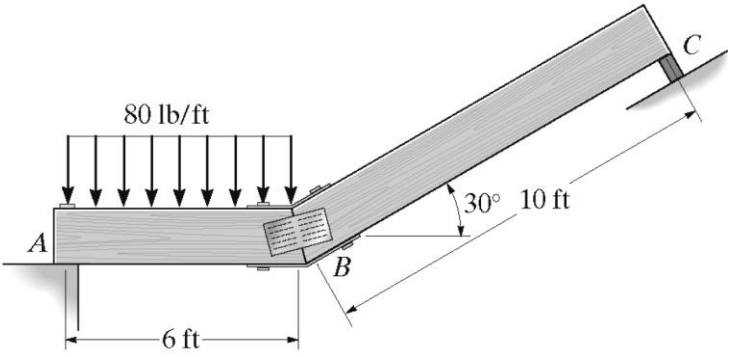
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۲-۲٦) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض نمایید که اتصال دو قطعه در نقطه $B$ گیردار و تکیه‌گاه $C$ غلتکی می‌باشد. همچنین تکیه‌گاه $A$ را به صورت مفصلی در نظر بگیرید.




شکل مسئله ۲-۲٦

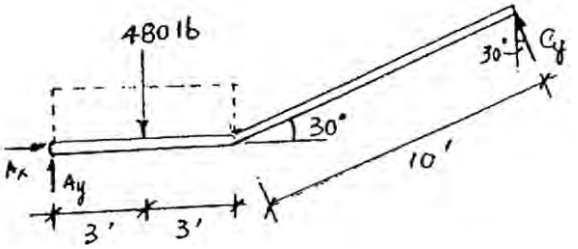
حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

$$(\text{پادساعتگرد مثبت}) \sum M_A = 0 \Rightarrow C_y\left(10 + 6\sin 60^\circ\right) - 480(3) = 0$$

$$\Rightarrow C_y = 94.76lb = 94.8lb$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 94.76\sin 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 47.4\,lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 94.76\cos 30^\circ - 480 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 398\,lb$$

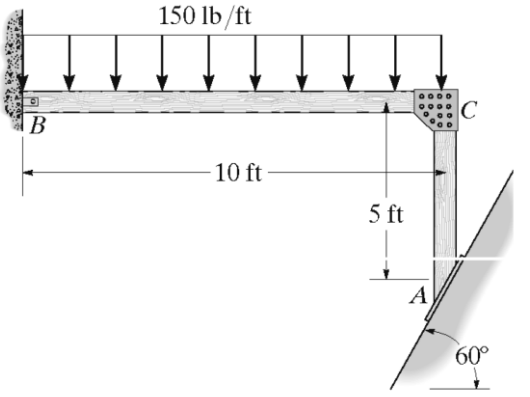



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۲-۲۷) در تیر شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تیر در نقطه $A$ صاف و در $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.




*شکل مسئله ۲-۲۷*

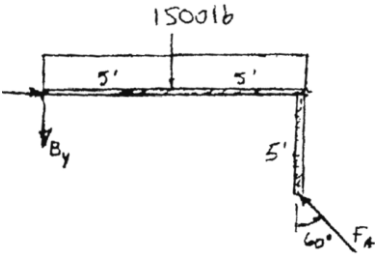
حل) با نوشتن سه معادله تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -1500\times 5 + F_A \cos 60^\circ \times 10 - F_A \sin 60^\circ \times 5 = 0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow F_A = 11196.15lb = 11.2k$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x - 11196.15 \times \sin 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 9.7\,lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -B_y - 1500 + 11196.15\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 4.1k$$

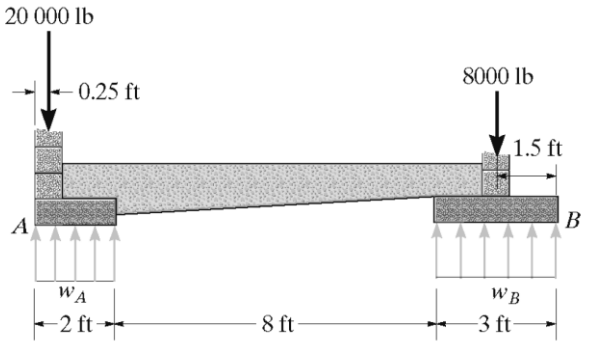



۲-۲۸) یک پی مانند شکل زیر تحت بارهای نشان داده شده قرار دارد. مقدار شدت بار یکنواخت $w_A$ و $w_B$ را بر حسب *lb/ft* تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





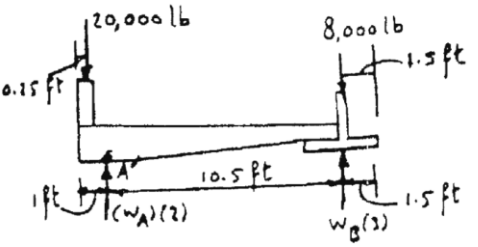

شکل مسئله ۲-۲۸

حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -8000 \times 10.5 + w_B \times 3 \times 10.5 + 20000 \times 0.75 = 0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

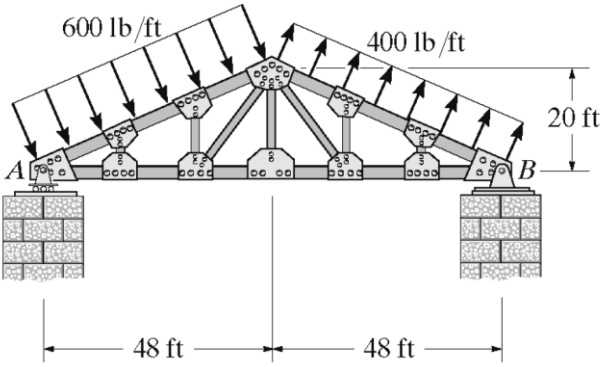
$$\Rightarrow w_B = 2190.5 lb/ft = 2.19 kip/ft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 2190.5 \times 3 - 28000 + w_A \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_A = 10.7 kip/ft$$




توجه شود، در نوشتن معادله، گشتاور نسبت به مرکز سطح پی تعادل نوشته شده است.

۲-۲۹) در خرپای شکل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. توزیع بار بر روی خرپا ناشی از باد است.




شکل مسئله ۲-۲۹

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

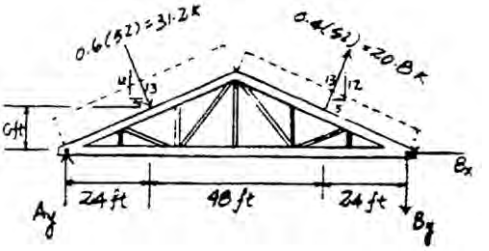
$$(\text{پادساعتگرد مثبت})\ \sum M_A = 0 \Rightarrow -B_y \times 96 + \frac{12}{13}\times 20.8\times 72 - \frac{5}{13}\times 20.8\times 10$$

$$-\frac{12}{13}\times 31.2\times 24 - \frac{5}{13}\times 31.2\times 10 = 0$$

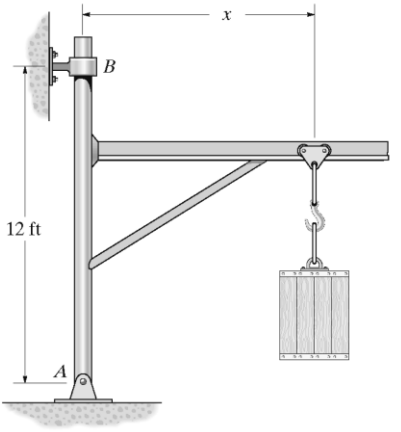
$$\Rightarrow B_y = 5.117\,kN = 5.12\,kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5.117 + \frac{12}{13}\times 20.8 - \frac{12}{13}\times 31.2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 14.7kN$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -B_x + \frac{5}{13}\times 31.2 + \frac{5}{13}\times 20.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 20kN$$




۲-۳۰) جرثقیل بازویی[1] زیر را در نظر بگیرید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و در $B$ به صورت غلاف و بدون اصطکاک می‌باشد. محل بار $5000lb$ را طوری تعیین نمایید که مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه حداقل و حداکثر باشند. مقدار $x$ حداقل ٤ و حداکثر می‌تواند ۱۰ فوت باشد. همچنین از وزن جرثقیل صرف نظر نمایید.




شکل مسئله ۲-۳۰

[1] Jib Crane

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_B \times 12 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 0.4167\,x \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5kip$$

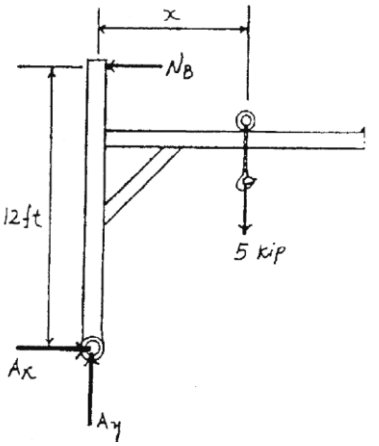
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 0.4167\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0.4167\,x$$

مقدار حداکثر عکس‌العمل در $x=10$ ایجاد می‌شود. با جایگذاری در روابط فوق داریم:

$$x = 10 \quad \Rightarrow \quad A_x = N_B = 4.17kip \quad , \quad A_y = 5kip$$

مقدار حداقل عکس‌العمل در $x=4$ ایجاد می‌شود. با جایگذاری در روابط فوق داریم:

$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad A_x = N_B = 1.67kip \quad , \quad A_y = 5kip$$

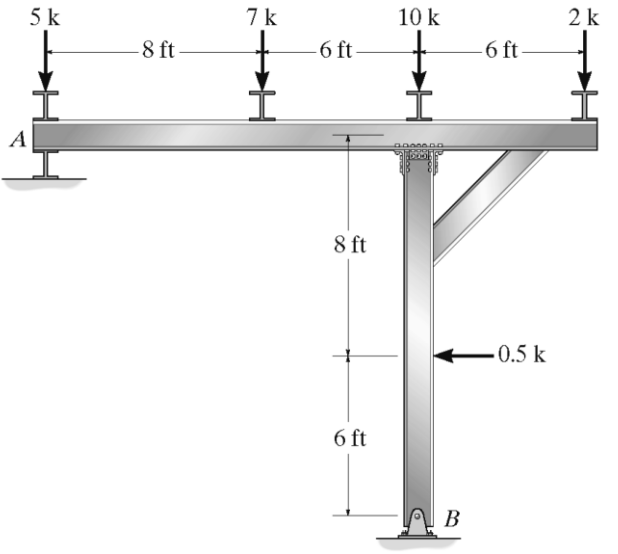



۲-۳۱) در شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ و $B$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که $A$ غلتکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۲-۳۱*

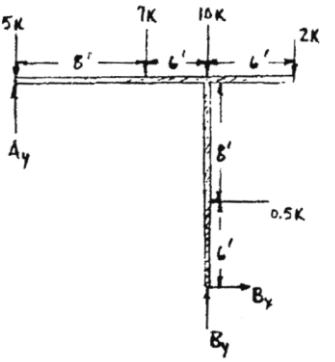
حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -0.5\times 6 + 2\times 6 - 7\times 6 - 5\times 14 + A_y \times 14 = 0 \quad \text{(ساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow A_y = 7.36k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 7.36 - 5 - 7 - 10 - 2 + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 16.6k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -0.5 + B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0.5k$$

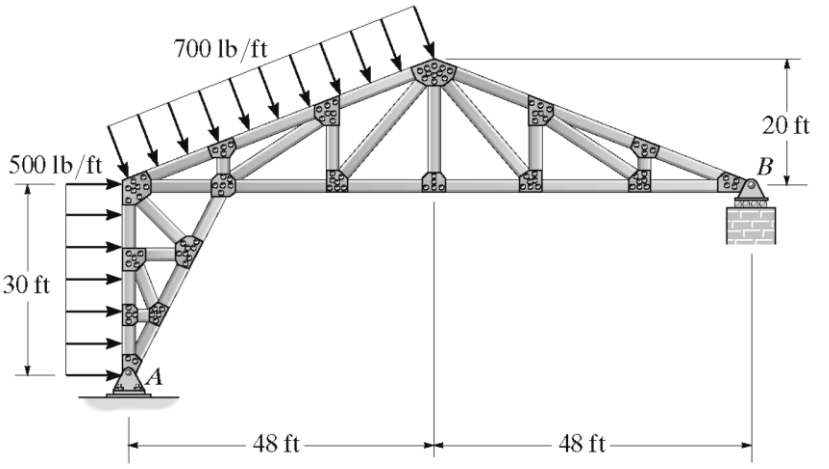



۲-۳۲) در خرپای زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ و $B$ را تعیین نمایید. نیروی گسترده بر روی سازه ناشی از بار باد است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۳۲

حل) بارهای گسترده را به نیروهای متمرکز تبدیل می‌نماییم.

$$700\frac{lb}{ft}\times 52\,ft = 36400lb = 36.4k$$

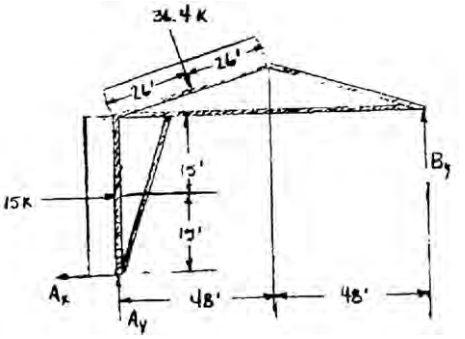
$$500\frac{lb}{ft}\times 30\,ft = 15000lb = 15.0k$$

(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_A = 0 \Rightarrow 96\times B_y - 24\times\frac{48}{52}\times 36.4 - 40\times\frac{20}{52}\times 36.4 - 15\times 15 = 0$

$$\Rightarrow B_y = 16.58 = 16.6k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 15 + \frac{20}{52}\times 36.4 - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 29.0k$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \frac{48}{52}\times 36.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 17.0k$$

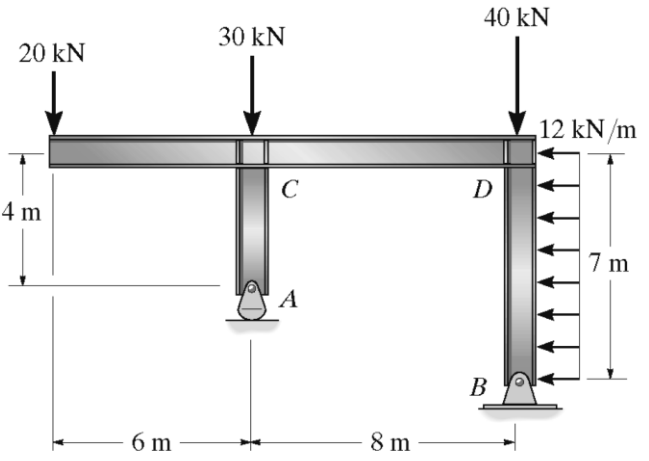



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۲-۳۳) مولفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ و $B$ را تعیین نمایید. اتصال اعضا در $C$ و $D$ به صورت گیردار می‌باشد.




شکل مسئله ۲-۳۳

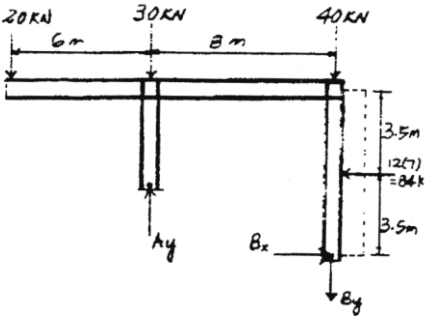
حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 20\times 14 + 30\times 8 + 84\times 3.5 - A_y \times 8 = 0 \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow A_y = 101.75kN = 102kN$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x - 84 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 84kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 101.75 - 20 - 30 - 40 - B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 11.75kN$$

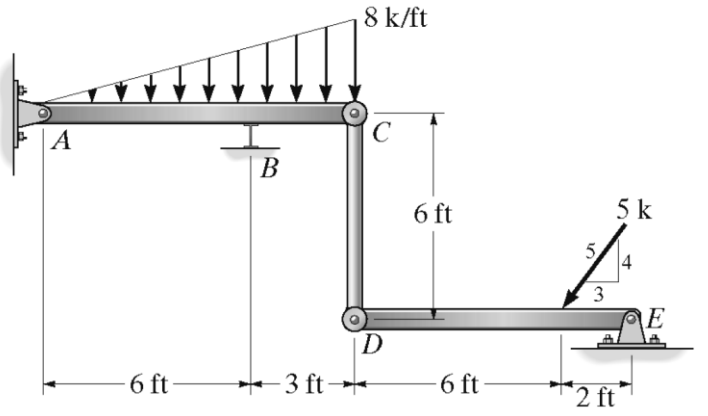



۲-۳٤) در شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ ، $B$ و $E$ را تعیین نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۲-۳٤*

حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه برای قطعه (ب) داریم:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F \times 8 - 5 \times \frac{4}{5} \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 1.0k$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y + 1.0 - 5 \times \frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 3.0k$$

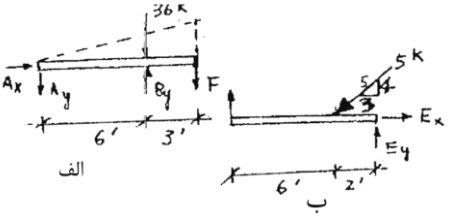
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow E_x + 1.0 - 5 \times \frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 3.0k$$

با نوشتن معادلات تعادل در صفحه برای قطعه (الف) داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 6 - 36 \times 6 - 1.0 \times 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 37.5k$$

$$\downarrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 37.5 + 36 + 1.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 0.5k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

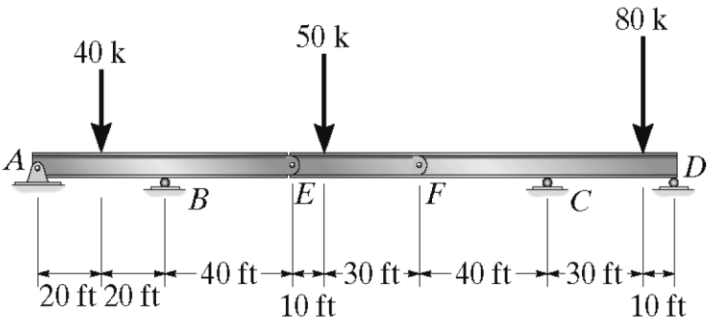



۲-۳۵) در شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض نمایید که تیر در نقاط $A$، $E$ و $F$ مفصلی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۳۵

حل) برای عضو $DF$ داریم:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = 0$$

برای عضو $EF$ داریم:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 0$$

(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_F = 0 \Rightarrow 50\times 30 - E_y \times 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 37.5k$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow 37.5 + F_y - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 12.5k$$

برای عضو $DF$ داریم:

(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_D = 0 \Rightarrow 80\times 10 - C_y \times 40 + 12.5\times 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 45.0k$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow -12.5 + 45.0 + D_y - 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 47.5k$$

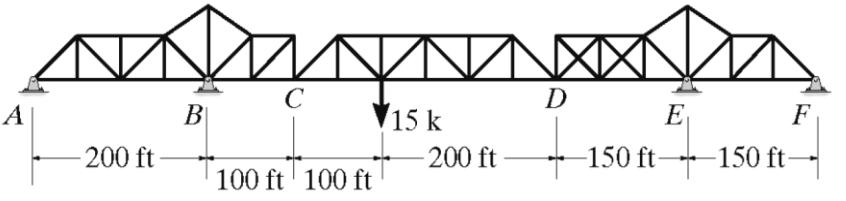
برای عضو $AE$ داریم:

(پادساعتگرد مثبت) $\sum M_A = 0 \Rightarrow -40\times 20 + B_y \times 40 - 37.5\times 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 95.0k$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y + 95.0 - 40 - 37.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 17.5k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

۲-۳۶) در خرپای زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۲-۳۶

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

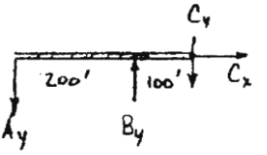
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



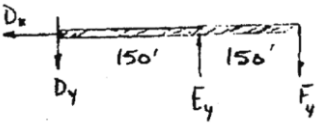
حل) برای قطعه $ABC$ داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 200 - 10 \times 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 15.0k \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow 15 - 10 - A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5.0k$$



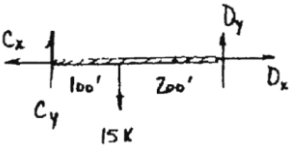

برای قطعه $DEF$ داریم:




$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 5 \times 300 - E_y \times 150 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 10.0k \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow -5 + 10 - F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 5.0k$$

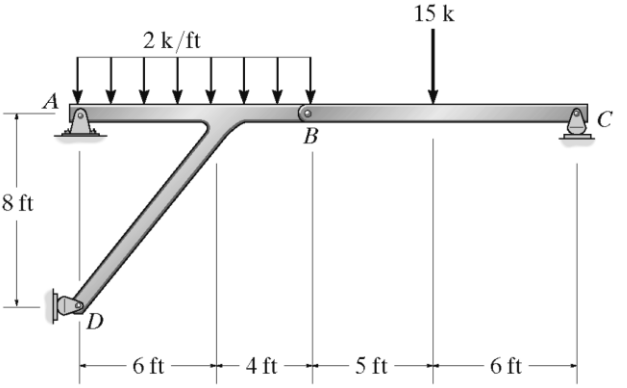
برای قطعه $CD$ داریم:




$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 15 \times 200 - C_y \times 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 10.0k \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow -15 + 10 + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 5.0k$$

۲-۳۷) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۲-۳۷

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) برای قطعه $BC$ داریم:

$$\text{(پادساعتگرد مثبت)} \sum M_B = 0 \Rightarrow C_y \times 11 - 15 \times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 6.82k$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + 6.818 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 8.182k$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

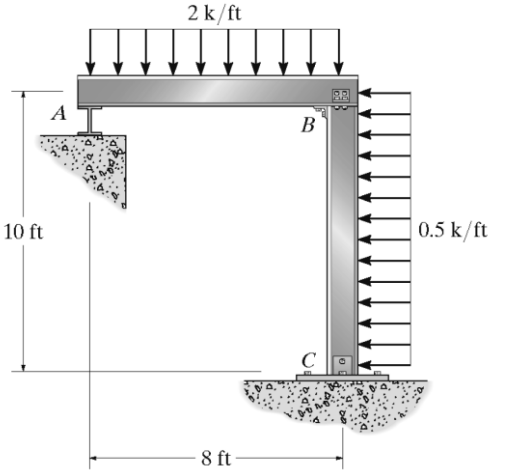
برای قطعه $ABD$ داریم:

$$\text{(پادساعتگرد مثبت)} \sum M_A = 0 \Rightarrow D_x \times 8 - 8.182 \times 10 - 20 \times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = 22.7k$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 20 - 8.182 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 28.2k$$

$$+ \leftarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x - 22.73 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 22.73 = 22.7k$$

۲-۳۸) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه $A$ غلتکی، $C$ مفصلی و اتصال $B$ گیردار است.




شکل مسئله ۲-۳۸

حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$\text{(پادساعتگرد مثبت)} \sum M_C = 0 \Rightarrow 5 \times 5 + 16 \times 4 - A_y \times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 11.125 = 11.1k$$

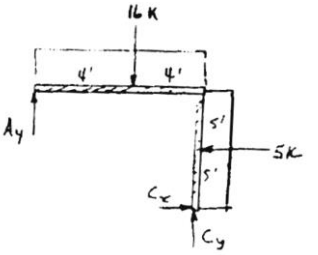
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 11.125 - 16 + C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 4.875 = 4.88k$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -5 + C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 5.0k$$

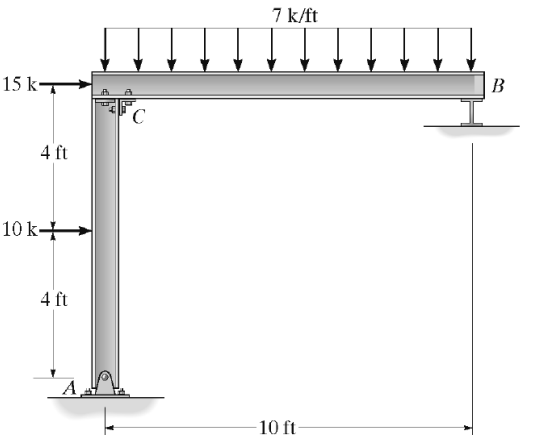
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۲-۳۹) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه $B$ غلتکی، $C$ گیردار است.



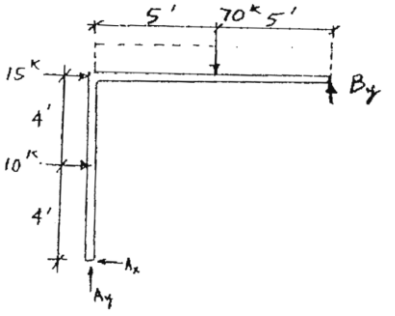

*شکل مسئله ۲-۳۹*

حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 10 - 70 \times 5 - 10 \times 4 - 15 \times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 51k \quad \text{(پادساعتگرد مثبت)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 51 - 70 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 19k$$

$$+\leftarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 10 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 25.0k$$

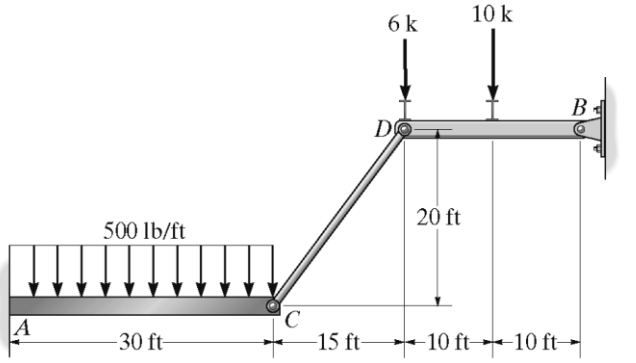



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



٢-٤٠) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ و $B$ را تعیین نمایید.



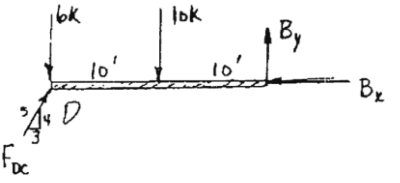

شکل مسئله ٢-٤٠

حل) برای عضو $DB$ داریم:

$$\text{(ساعتگرد مثبت)}\ \sum M_B = 0 \Rightarrow F_{DC}\times\frac{4}{5}\times 20 - 6\times 20 - 10\times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = 13.75k$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - 16 + 13.75\times\frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 5k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -B_x + 13.75\times\frac{3}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 8.25k$$

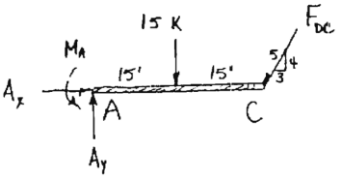



برای عضو $AC$ داریم:

$$\text{(ساعتگرد مثبت)}\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 13.75\times\frac{4}{5}\times 30 + 15\times 15 - M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 555k.ft$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 13.75\times\frac{3}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 8.25k$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 15 - 13.75\times\frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 26.0k$$

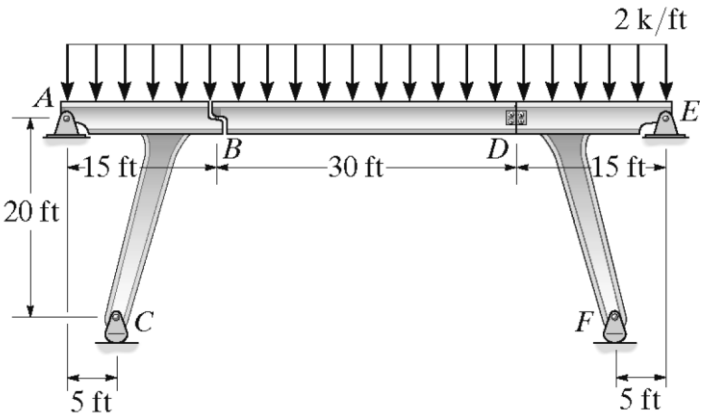



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۲-٤۱) در پل نشان داده در شکل زیر زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. پل را می‌توان به سه قطعه تقسیم نمود. پل در نقاط $A$، $E$ و $D$ مفصلی و در نقاط $B$، $C$ و $F$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۲-٤۱

حل) برای قطعه $BD$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow 2\times 30\times 15 - B_y \times 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 30 kip \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + 30 - 20\times 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 30.0 kip$$

برای قطعه $ABC$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow C_y \times 5 - 2\times 15\times 7.5 - 30\times 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 135 kip \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y + 135 - 2\times 15 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 75.0 kip$$

برای قطعه $DEF$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \Rightarrow -F_y \times 5 + 2\times 15\times 7.5 + 30\times 15 = 0 \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow \quad F_y = 135 kip$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow E_x = 0$$

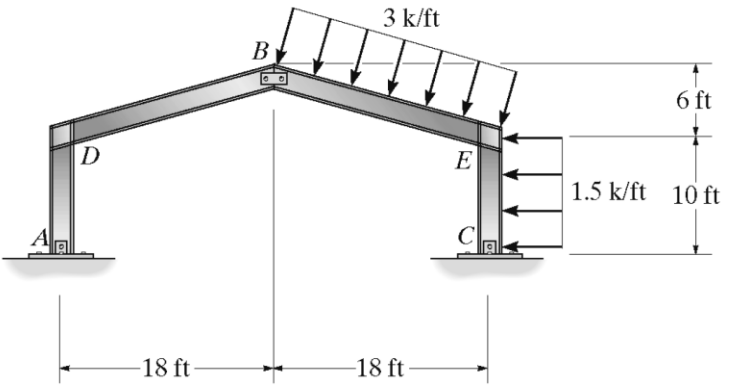
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -E_y + 135 - 2\times 15 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 75.0 kip$$

۲-٤۲) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. سازه در $A$، $C$ و $B$ مفصلی می‌باشد. همچنین اتصال اعضا در نقاط اتصال $D$ و $E$ به صورت گیردار می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۲-۴۲*

حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه برای کل سیستم داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow -18\times B_y + 16\times B_x = 0 \qquad (1) \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 15\times 5 + 9\times 56.92\left(\cos 18.43^\circ\right) + 13\times 56.92\left(\sin 18.43^\circ\right) - 16\times B_x - 18\times B_y = 0 \qquad (2) \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

با حل همزمان روابط فوق داریم:

$$B_y = 22.08k \quad \text{و} \quad B_x = 24.84k$$

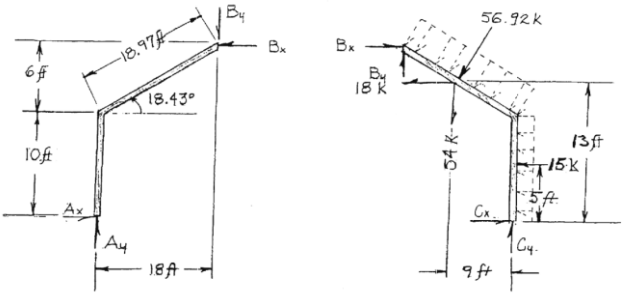
$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 24.84k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 22.08 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 22.08k$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - 15 - \sin\left(18.43^\circ\right)\left(56.92\right) + 24.84 = 0$$

$$\Rightarrow C_x = 8.15k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + 22.08 - \cos\left(18.43^\circ\right)\left(56.92\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 31.92k$$

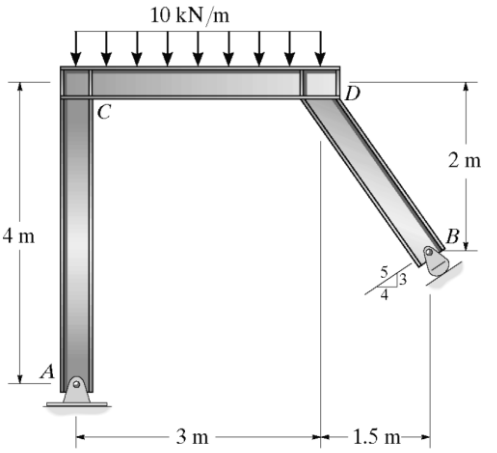



۲-۴۳) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-۴۳

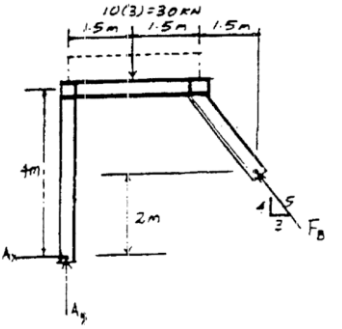
حل) با نوشتن معادلات تعادل در صفحه برای کل سیستم داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}\times F_B \times 4.5 + \frac{3}{5}F_B \times 2 - 30\times 1.5 = 0 \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow \quad F_B = 9.375kN = 9.38kN$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \frac{3}{5}\times 9.375 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 5.63kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{4}{5}\times 9.375 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 22.5kN$$

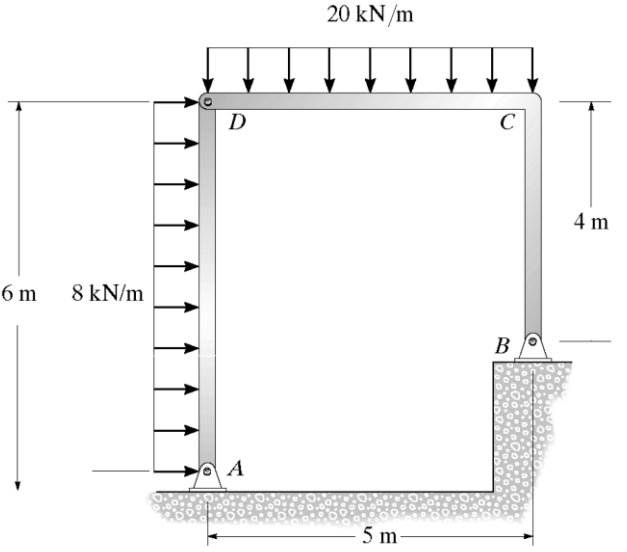



۲-۴۴) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۲-٤٤

حل) برای عضو $AD$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -48\times 3 + D_x \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = 24kN \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 48 - 24 - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 24kN$$

برای عضو $BCD$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow 100\times 2.5 - 24\times 4 - D_y \times 5 = 0 \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$\Rightarrow \quad D_y = 30.8kN$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 24 - B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 24kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 30.8 - 100 + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 69.2kN$$

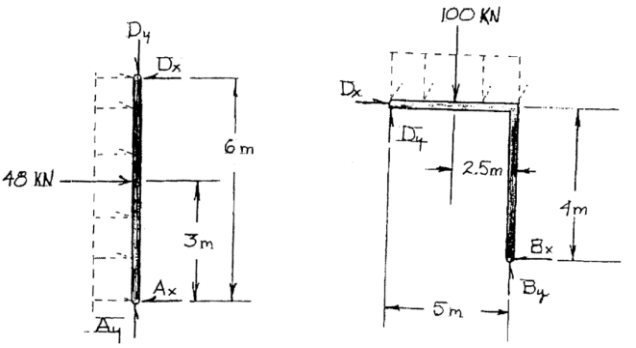
برای عضو $AD$ داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -30.8 + A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 30.8kN$$

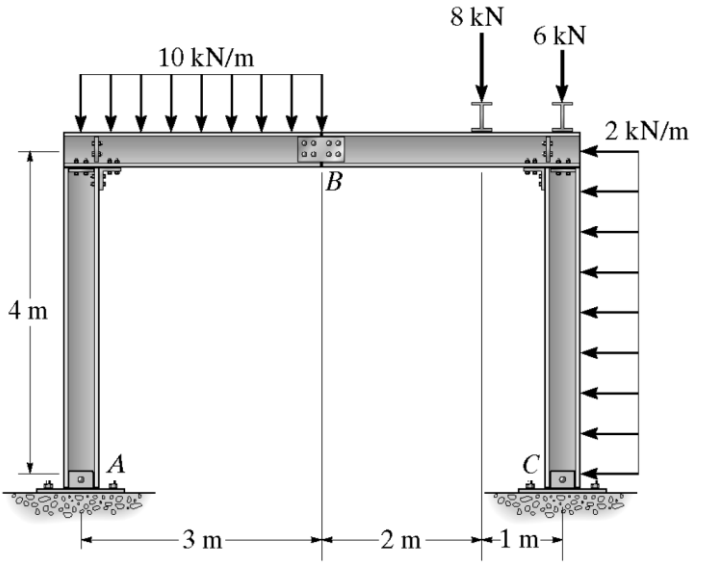
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۲-۴۵) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. سازه در نقاط $A$، $B$ و $C$ مفصل و در گره‌های دیگر گیردار می‌باشد.




*شکل مسئله ۲-۴۵*

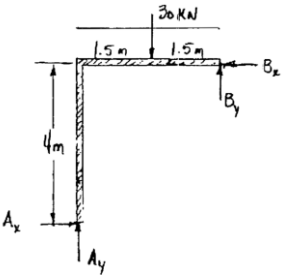
حل) برای عضو $AB$ داریم:

$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \times 4 + B_y \times 3 - 30 \times 1.5 = 0$ (پاد ساعتگرد مثبت)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

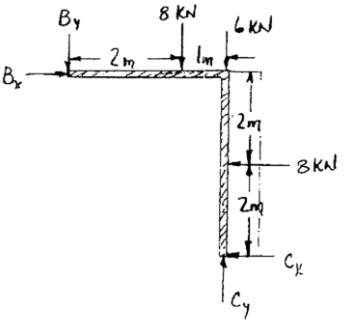
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






برای عضو $BC$ داریم:

$\sum M_C = 0 \Rightarrow -B_x \times 4 + B_y \times 3 + 8 \times 2 + 8 \times 1 = 0$ (پاد ساعتگرد مثبت)




با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$B_x = 8.625\,kN \qquad B_y = 3.5kN$

برای عضو $AB$ داریم:

$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 8.625 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 8.62kN$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 30 + 3.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 26.5kN$

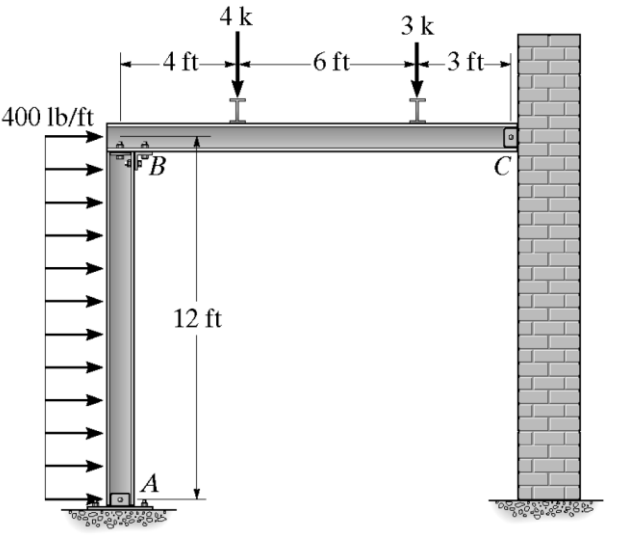
برای عضو $BC$ داریم:

$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -C_x - 8 + 8.625 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 0.625\,kN$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - 6 - 8 - 3.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 17.5kN$

۲-٤٦) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. سازه در نقاط $A$، $B$ و $C$ مفصل می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel




شکل مسئله ۲-٤٦

حل) برای عضو $AB$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \times 12 - 4.8 \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 2.4k \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$+\leftarrow \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + 2.4 - 4.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 2.4k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - B_y = 0$$

برای عضو $BC$ داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow -B_y \times 13 + 4 \times 9 + 3 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 3.46\,k \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$+\leftarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - 2.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 2.4k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + 3.462 - 4 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 3.54k$$

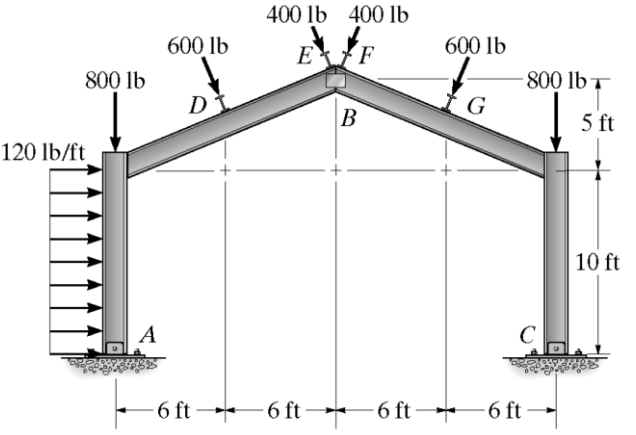
بنابراین داریم:

$$A_y = 3.46$$

۲-٤۷) در سازه شکل زیر مقادیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. سازه در نقاط $A$، $B$ و $C$ مفصل می‌باشد.

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





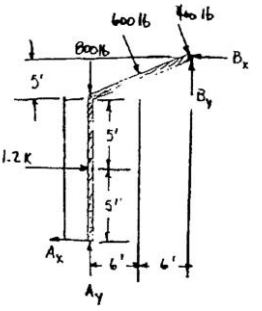

شکل مسئله ۲-۴۷

حل) برای عضو $AB$ داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_x \times 15 + B_y \times 12 - 1200 \times 5 - 600 \times \frac{12}{13} \times 6 \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

$$- 600 \frac{5}{13} \times 12.5 - 400 \frac{12}{13} \times 12 - 400 \frac{5}{13} \times 15 = 0$$

$$\Rightarrow B_x \times 15 + B_y \times 12 = 18946.154$$




برای عضو $BC$ داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -B_x \times 15 + B_y \times 12 + 600 \times \frac{12}{13} \times 6 + 600 \times \frac{5}{13} \times 12.5 \quad \text{(پاد ساعتگرد مثبت)}$$

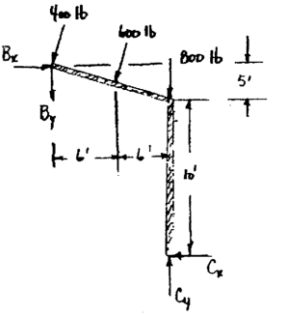
$$+ 400 \frac{12}{13} \times 12 + 400 \frac{5}{13} \times 15 = 0$$

$$\Rightarrow B_x \times 15 + B_y \times 12 = 12446.15$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با حل همزمان دو رابطه بدست آمده داریم:

$$\Rightarrow B_x = 1063.08lb \qquad B_y = 250.0lb$$

برای عضو $AB$ داریم:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + 1200 + 1000\times\frac{5}{13} - 1063.08 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 522lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 800 - 1000\times\frac{12}{13} + 250 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 1473lb$$

برای عضو $BC$ داریم:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -C_x - 1000\times\frac{5}{13} + 1063.08 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 678lb$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - 800 - 1000\times\frac{12}{13} - 250 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 1973lb$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

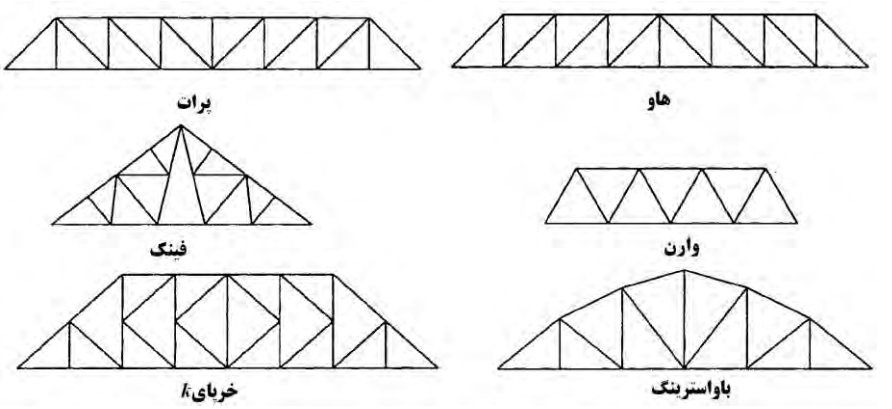
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل سوم
# تحلیل خرپاهای معین استاتیکی

## ۳-۱ کلیات

چارچوبی از اعضاء که انتهای آنها به هم متصل باشد و سازه صلبی را بسازد، به خرپا موسوم است. (پل‌ها، تکیه‌گاه‌های بام، دکل‌های برج حفاری و ...). مثلث جزء اصلی خرپای صفحه‌ای است. معمولاً شکل خرپا به هدف طراحی آن بستگی دارد. در شکل۳-۱ انواع خرپاهای متداول نشان داده شده است.



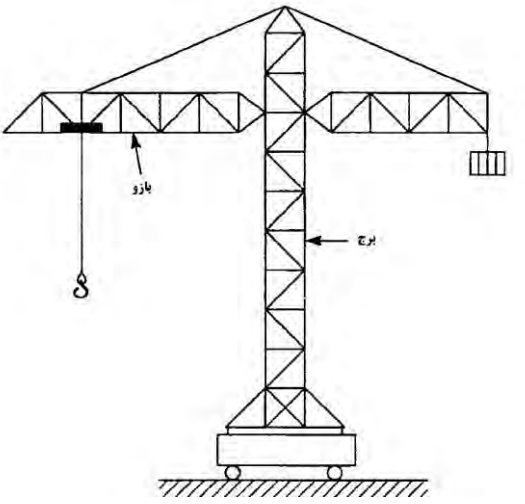

*شکل۳-۱ انواع خرپا*

اعضای خرپا با اتصال به یکدیگر اشکال سه بعدی ایجاد می‌کنند. برای مثال در شکل۳-۲ بازوی جرثقیل از تعدادی میله تشکیل شده که اتصال آنها به یکدیگر یک شکل جعبه‌ای ایجاد نموده است. اعضای خرپا باید طوری به هم متصل شوند که اشکال مثلثی ایجاد کنند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

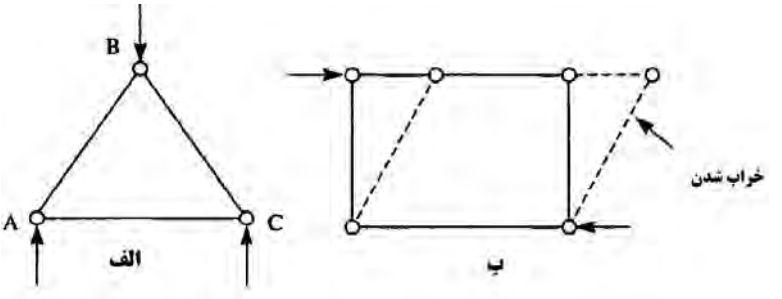





*شکل ۳-۲ سازه یک جرثقیل*

### ۳-۲ فرضیات اساسی در تحلیل خرپا

با نگاه به شکل۳-۱ دیده می‌شود که خرپا متشکل از یک سری اعضای مثلثی است. اعضای خرپا در انتها توسط مفصل یا پین به یکدیگر متصل شده‌اند. این نوع اتصال در شکل ۳-۳الف نشان داده شده است. در شکل۳-۳ب چهار میله دیده می‌شوند که در انتهای خود توسط پین به یکدیگر متصل شده‌اند. دیده می‌شود که در صورتی که به این سازه نیرویی به صورت جانبی وارد شود، به راحتی و بدون هیچ مقاومتی خراب می‌شود و پایداری خود را از دست می‌دهد ولی شکل مثلثی همچنان پایدار است.




*شکل ۳-۳ واحد اساسی خرپا*

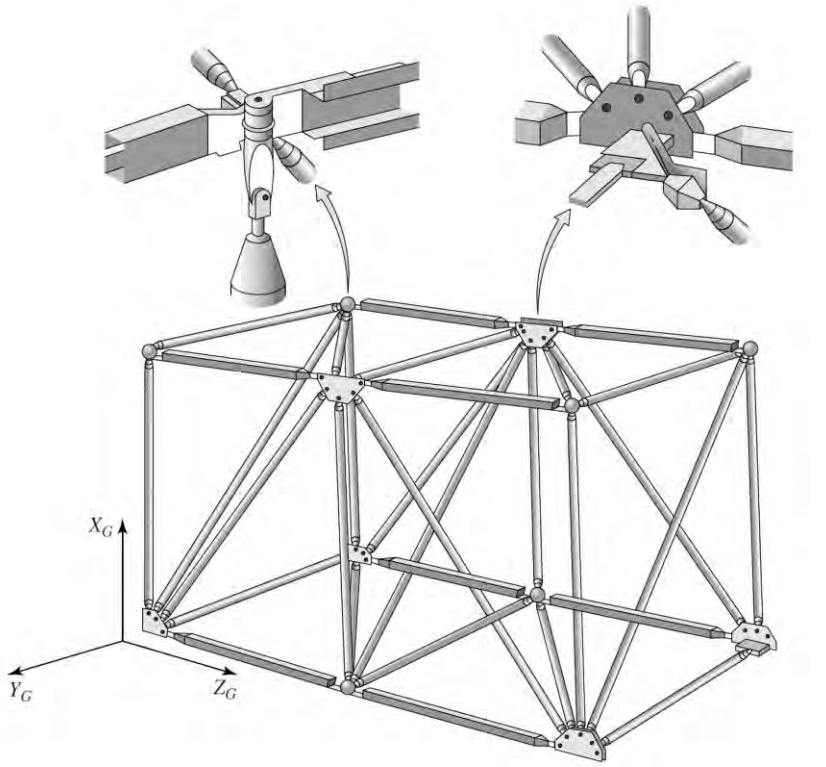
این مفصل‌ها در اتصالات اعضا باعث می‌شوند تا نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپا همیشه به صورت دو نیرویی باشند، یعنی فشاری و یا کششی هستند و در آنها هیچ‌گاه

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



خمش یا برش ایجاد نمی‌شود. در شکل ۳-٤، نمونه‌ای یک خرپای فضایی نشان داده شده است که در آنها امتداد تمام اعضا در محل اتصال، در یک نقطه به یکدیگر می‌رسند.




*شکل ۳-٤ خرپای فضایی متشکل از اعضای مورب و افقی*

در تحلیل خرپاها همیشه سه فرض اساس وجود دارد:

- ✓ اعضای خرپا توسط پین یا مفصل به یکدیگر متصل شده‌اند.
- ✓ بارهای اعمال شده به خرپا تنها به محل مفصل‌ها وارد می‌شود.
- ✓ نیروهای درونی در اعضای خرپا همیشه به صورت محوری هستند.

**۳-۳ روش مفصل برای تحلیل خرپاها**

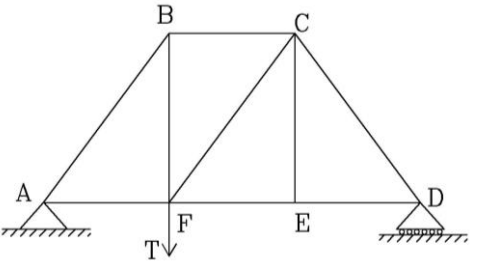
در این روش برای پیدا کردن نیروی وارد بر اعضای یک خرپای ساده به کار می‌رود و از طریق برآورد کردن شرایط تعادل برای نیروهای وارد بر مفصل هر اتصال به نتیجه می‌رسد. چون این روش با نیروهای متقارب سروکار دارد و چنین نیروهایی به خودی خود شرایط گشتاور مساوی صفر را ارضا می‌کنند در نتیجه دو معادله مستقل تعادل برای هر مفصل در

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

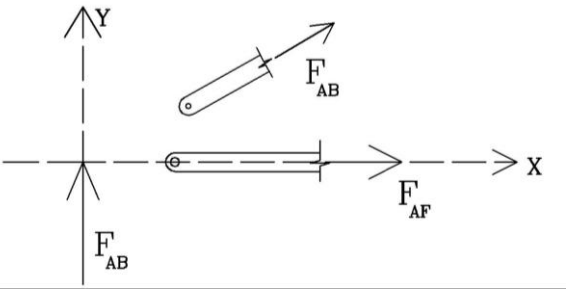


اختیار ما می‌گذارد. برای شروع از مفصلی آغاز می‌کنیم که حداقل یک نیروی معلوم بر آن وارد شود و بیش از دو نیروی مجهول به آن اعمال نگردد. برای مثال شکل ۳-۵ را در نظر بگیرید.




*شکل ۳-۵ استفاده از روش مفصل برای تحلیل خرپا*

قبل از هر چیز بایستی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شوند برای این کار با توجه به مطالب ذکر شده در قسمت تعادل می‌توانیم از معادلات $\Sigma F_x$ و $\Sigma F_y$ و $\Sigma M$ استفاده کنیم. با معلوم بودن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از یک گره به دلخواه شروع می‌کنیم. به عنوان مثال از $A$ شروع می‌کنیم و این گره را بیرون می‌آوریم.




*شکل ۳-٦ استفاده از روش مفصل برای تحلیل خرپا*

با بیرون آوردن این گره و نوشتن معادلات تعادل $\Sigma F_x$ و $\Sigma F_y$، نیروهای $F_{AB}$ و $F_{AF}$ بدست می‌آیند. البته در ابتدا جهت نیروها (کششی یا فشاری بودن آنها) فرض می‌شود. معمولاً جهت را کششی فرض کرده (جهت نیروها از گره به سمت بیرون است) و آنرا حل می‌کنیم و در صورت که جهت اشتباه باشد مقداری منفی به دست می‌دهد.

**۳-٤ شرایط مرزی**

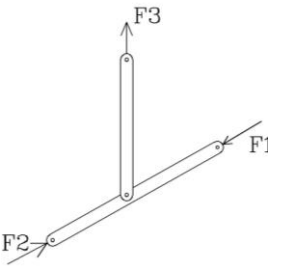
- اگر به مانند شکل ۳-۷ سه عضو به یک مفصل متصل شوند و دو عضو در یک امتداد باشند، در صورتی شرایط تعادل برقرار است که نیروی عضو سوم صفر

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

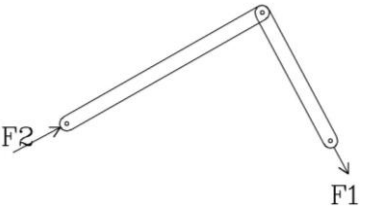


باشد. البته اگر نیرویی خارجی به مفصل وارد شود که مولفه‌ای در امتداد $y$ داشته باشد این نیرو صفر نیست.



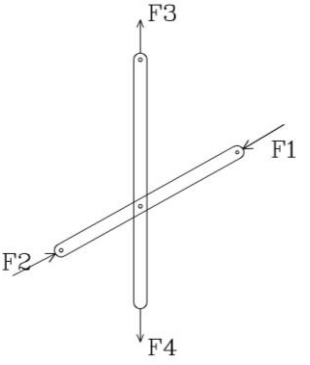

*شکل ۳-۷ برخورد یک عضو به مفصل*

- اگر مطابق شکل ۳-۸ دو نیرو غیر هم‌امتداد به مفصلی متصل شده باشد و نیروی خارجی‌ای به آن مفصل وارد نشود نیروهای آن دو عضو صفر خواهد بود.




*شکل ۳-۸ دو نیروی غیر هم امتداد*

- اگر مطابق شکل ۳-۹ چهار عضو که دو به دو با یکدیگر هم امتداد هستند به مفصلی متصل شوند و نیروی خارجی‌ای نیز بر آن وارد نشود، نیروی اعضای هم امتداد با یکدیگر مساوی و مختلف الجهت خواهند بود.




*شکل ۳-۹ هم امتداد بودن چهار عضو به صورت دو به دو*

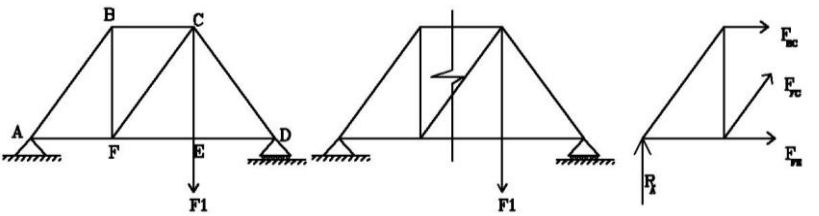
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



### ۳-۵ روش مقطع برای تحلیل خرپاها

دو اِشکال در روش تحلیل مفصل وجود دارد. اول آنکه یکی از معادلات تعادل بی‌استفاده می‌ماند (معادله گشتاور) و دوم آنکه بتوان نیروی یک عضو خاص را بدست آورد گاه مجبوریم تمام یا اغلب مفصل‌ها را بررسی کنیم. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.




*شکل ۳-۱۰ استفاده از روش مقطع برای تحلیل خرپا*

در این شکل هدف ما بدست آوردن نیروی عضو $BC$ است. در ابتدا واکنش‌های تکیه‌گاهی را بایستی بدست آوریم. در گام بعدی میتوان با استفاده از روش مقطع نیروی عضو $BC$ را بدست آورد در صورتی که اگر از روش گره استفاده کنیم بایستی از یک گره که دارای حداکثر دو مجهول است شروع نماییم. برای این منظور مقطعی می‌زنیم (شکل۳-۱۰). سمت راست خرپا را بیرون می‌آوریم. نیروی $R_A$ از واکنش‌های تکیه‌گاهی بدست آمده و معلوم است حال با استفاده از معادله $\Sigma M_F = 0$ می‌توان نیروی $F_x$ را بدست آورد. زیرا دو نیروی مجهول $F_{FC}$ و $F_{FE}$ از نقطه $F$ عبور می‌کنند و در معادله وارد نمی‌شوند. در صورتی که بخواهیم نیروی عضو $FC$ را بدست آوریم می‌توان در همان قطعه معادله $\Sigma F_y = 0$ را بنویسیم و دو نیروی دیگر حذف شوند.[1]

### ۳-۳ مسائل:

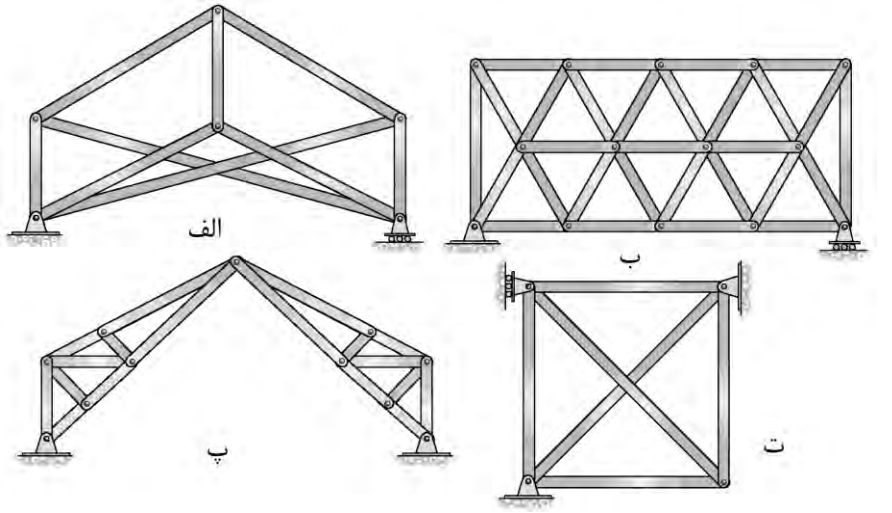
۳-۱) خرپاهای نشان داده در شکل زیر را از نظر پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی آنها بررسی نمایید. در صورتی که سیستم‌های نشان داده شده نامعین می‌باشند، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۳-۱*

حل) الف) تعداد اعضای خرپا برابر ۹، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ٦ می‌باشد، بنابراین:

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 12=12$$

بنابراین سیستم معین استاتیکی است.

ب) تعداد اعضای خرپا برابر ۲۹، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ١٤ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r>2j \quad \Rightarrow \quad 32>28$$

بنابراین سیستم نامعین استاتیکی بوده و درجه نامعینی آن برابر ٤ می‌باشد.

پ) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۸، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ٤ و تعداد مفصل‌ها برابر ۱۱ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 22=22$$

بنابراین سیستم معین استاتیکی است.

ت) تعداد اعضای خرپا برابر ٦، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۵ و تعداد مفصل‌ها برابر ٤ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r>2j \quad \Rightarrow \quad 11>8$$

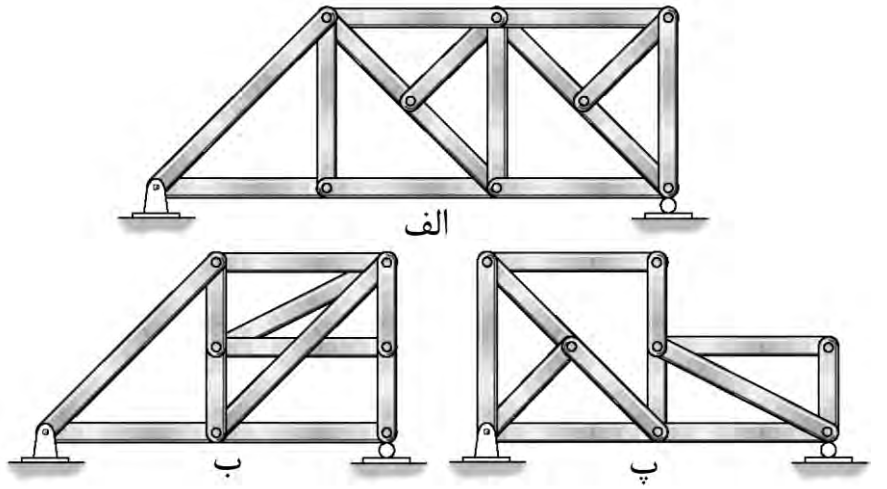
بنابراین سیستم نامعین استاتیکی بوده و درجه نامعینی آن برابر ۳ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۳-۲) خرپاهای نشان داده در شکل زیر را از نظر پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی آنها بررسی نمایید. در صورتی که سیستم‌های نشان داده شده نامعین می‌باشند، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۳-۲*

حل) الف) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۵، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ۹ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 3+15=9(2)$$

بنابراین سیستم معین استاتیکی است.

ب) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۱، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ۷ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 3+11=7(2)$$

سیستم معین استاتیکی است.

پ) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۲، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ۸ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r<2j \quad \Rightarrow \quad 3+12<8(2)$$

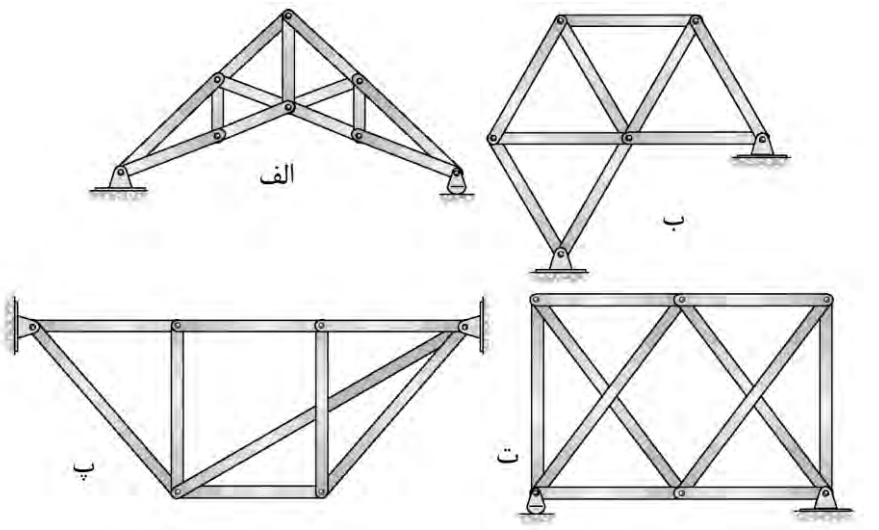
بنابراین سیستم ناپایدار است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۳-۳) خرپاهای نشان داده در شکل زیر را از نظر پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی آنها بررسی نمایید. در صورتی که سیستم‌های نشان داده شده نامعین می‌باشند، درجه نامعینی آنها را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۳-۳*

حل) الف) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۳، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ۸ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 16=16$$

بنابراین سیستم معین استاتیکی است.

ب) تعداد اعضای خرپا برابر ۹، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ٤ و تعداد مفصل‌ها برابر ٦ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r>2j \quad \Rightarrow \quad 13>12$$

سیستم نامعین استاتیکی بوده و درجه نامعینی آن برابر ۱ می‌باشد.

پ) تعداد اعضای خرپا برابر ۹، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ٤ و تعداد مفصل‌ها برابر ٦ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r>2j \quad \Rightarrow \quad 13>12$$

بنابراین سیستم نامعین استاتیکی بوده و درجه نامعینی آن برابر ۱ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

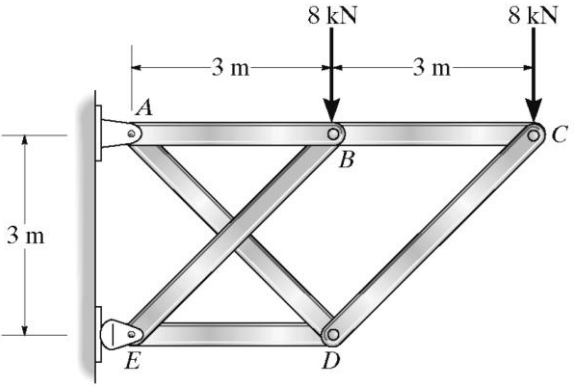


ت) تعداد اعضای خرپا برابر ۱۰، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در خرپا برابر ۳ و تعداد مفصل‌ها برابر ٦ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$b+r>2j \quad \Rightarrow \quad 13>12$$

بنابراین سیستم نامعین استاتیکی بوده و درجه نامعینی آن برابر ۱ می‌باشد.

۳-٤) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را تعیین نمایید.

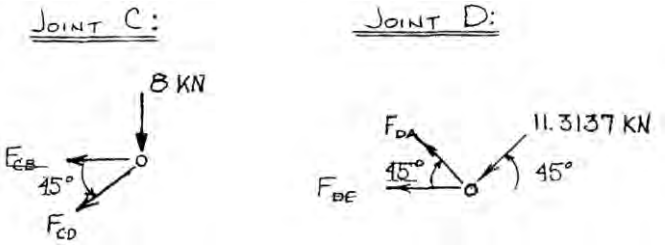



شکل مسئله ۳-٤

حل) در مفصل $C$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y=0 \Rightarrow -8-F_{CD}\sin 45^\circ=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD}=11.3137kN=11.3kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \Rightarrow 11.3137\times\cos 45^\circ-F_{CB}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB}=8kN(T)$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y=0 \Rightarrow -11.3137\sin 45^\circ+F_{DA}\sin 45^\circ=0 \quad \Rightarrow \quad F_{DA}=11.3kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \Rightarrow -11.3\cos 45^\circ-11.3\cos 45^\circ-F_{DE}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE}=16kN(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

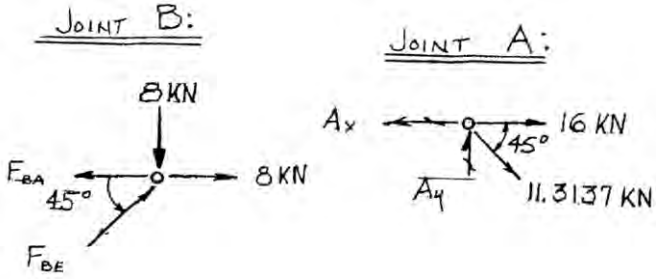
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -8 + F_{BE}\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 11.3kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8 + 11.3\cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA} = 24kN(T)$$

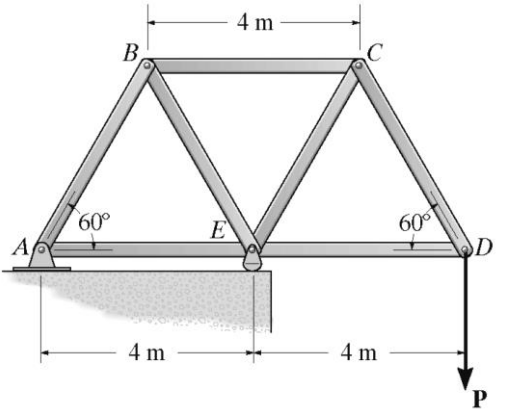



در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 16 + 11.3\cos 45^\circ - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 16kN$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y - 11.3\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 8kN$$

۳-۵) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. مقدار $P=8kN$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۳-۵*

حل) در مفصل $D$ داریم:

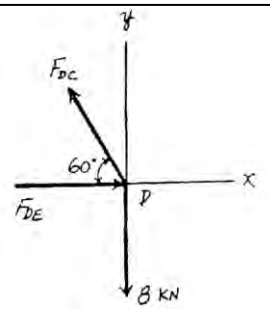
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DC}\sin 60^\circ - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} = 9.238kN(T) = 9.24kN(T)$$

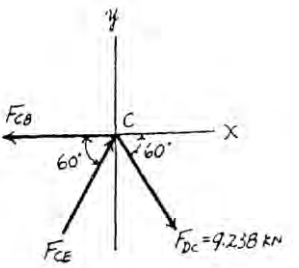
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} - 9.238\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 4.619kN(C) = 4.62kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CE}\sin 60^\circ - 9.238\sin 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 9.238kN = 9.24kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 2\left(9.238\cos 60^\circ\right) - F_{CE} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 9.238kN = 9.24kN(T)$$

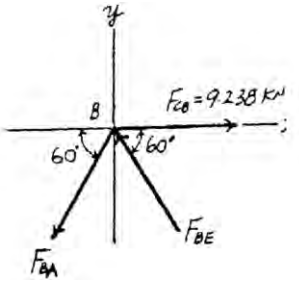
در مفصل $B$ داریم:

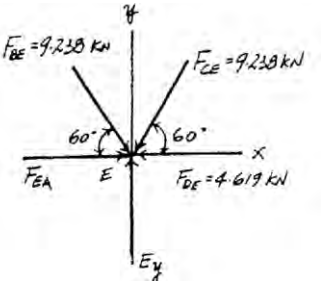
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BE}\sin 60^\circ - F_{BA}\sin 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = F_{BA} = F$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 9.238 - 2F\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 9.238kN$$

بنابراین:

$$F_{BE} = 9.24kN(C) \qquad F_{BA} = 9.24kN(T)$$




در مفصل $E$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y - 2\left(9.23\sin 60^\circ\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 16kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EA} + 9.238\cos 60^\circ - 9.238\cos 60^\circ - 4.619 = 0$$

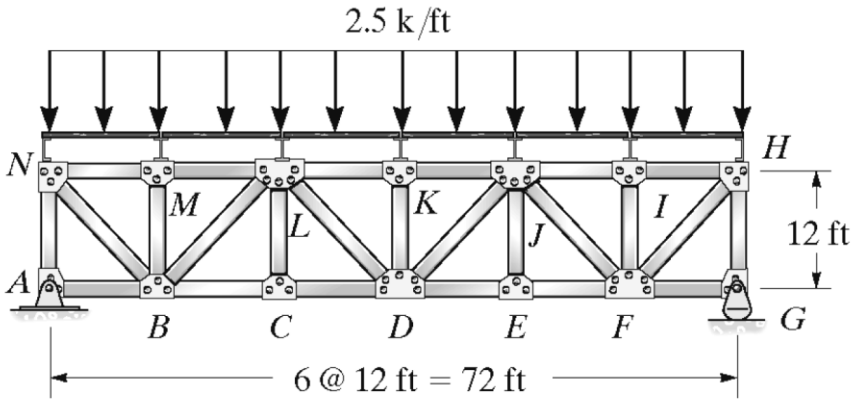
$$\Rightarrow \quad F_{EA} = 4.62kN(C)$$

۳-٦) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-٦

حل) با توجه به تقارن شکل، مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت خواهد بود:

$$A_x = 0 \qquad A_y = 90.0k \qquad G_y = 90.0k$$

در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 90.0 - F_{AN} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AN} = 90.0k(C)$$

در مفصل $N$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 90.0 - 15 - F_{NB}(\sin 45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{NB} = 106.1k = 106k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -106.1(\cos 45^\circ) - F_{NM} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{NM} = 75.0k(C)$$

در مفصل $M$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 75 - F_{ML} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ML} = 75.0k(C)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{MB} - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{MB} = 30k(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{BL}\sin 45^\circ + 106.1\sin 45^\circ - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BL} = 63.64k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 63.64\cos 45^\circ - 106.1\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 120k(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 120k(T)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CL} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $L$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{LD}\sin 45^\circ + 63.64\sin 45^\circ - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{LD} = 21.1k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{LK} + 75 + 63.64\cos 45^\circ + 21.21\cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{LK} = 135k(C)$$

در مفصل $K$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{KD} - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KD} = 30.0k(C)$$

بنابراین با توجه به تقارن سیستم داریم:

$F_{GH} = 90k(C)$ $\quad$ $F_{GF} = 0$

$F_{BF} = 106k(T)$ $\quad$ $F_{HI} = 75.0k(C)$

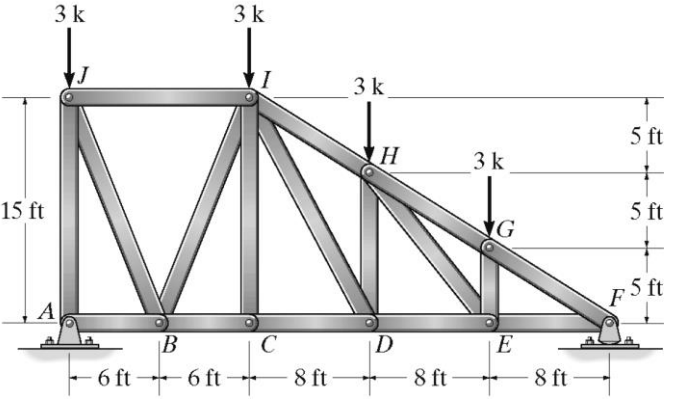
$F_{JI} = 75k(C)$ $\quad$ $F_{IF} = 30.0k(C)$

$F_{FJ} = 63.6k(C)$ $\quad$ $F_{EF} = 120.0k(T)$

$F_{DE} = 120k(T)$ $\quad$ $F_{JE} = 0$

$F_{JD} = 21.2k(T)$ $\quad$ $F_{KJ} = 135k(C)$

۳-۷) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.



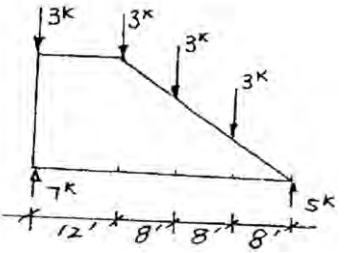

*شکل مسئله ۳-۷*

حل) مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت خواهد بود:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

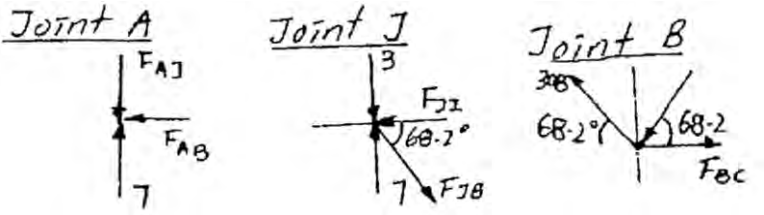





در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AJ} = 7.0k(C)$$




در مفصل $J$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{JB}\sin 68.2^\circ + 3 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JB} = 4.31k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{JI} - 4.308\cos 68.2^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JI} = 1.6k(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

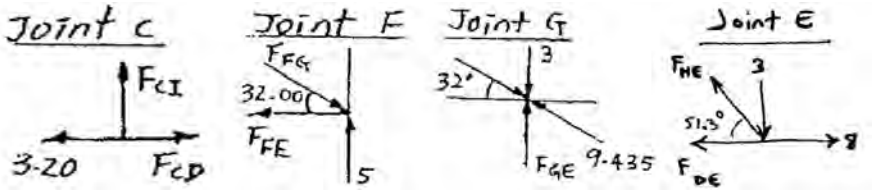
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BI} = 4.31k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 2(4.308)\cos 68.2^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 3.2k(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CI} = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 3.2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 3.2k(T)$$




در مفصل $F$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{FG}\sin 32.0^\circ + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} = 9.43k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{FE} + 9.435\cos 32.0^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE} = 8.0k(T)$$

در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{HG} = 9.43k(C)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{GE} = 3.0k(C)$$

در مفصل $E$ داریم:

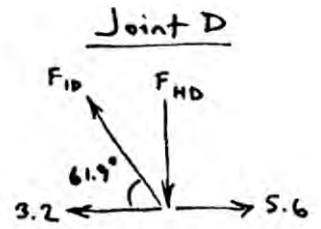
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{HE}\sin 51.3^\circ - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HE} = 3.84k(T)$$

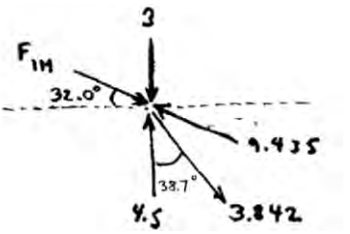
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8 - 3.842\cos 51.3^\circ - F_{DE} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 5.6k(T)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 5.6 - 3.2 - F_{ID}\cos 61.9^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ID} = 5.1k(T)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.1\sin 61.9^\circ - F_{HD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HD} = 4.5k(C)$$




در مفصل $H$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{IH}\cos 32.0^\circ - 9.435\cos 32.0^\circ + 3.842\sin 38.7^\circ = 0$$

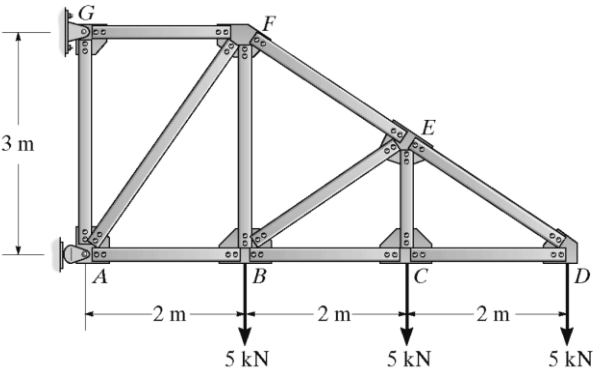
$$\Rightarrow \quad F_{IH} = 6.6k(C)$$

۳-۸) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



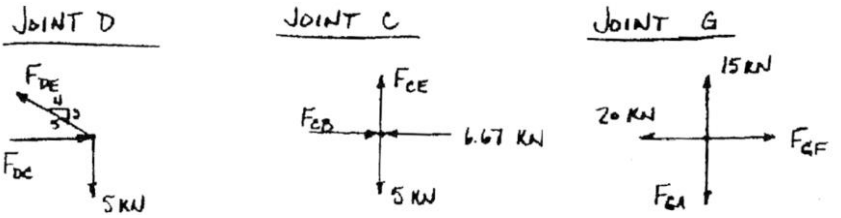



شکل مسئله ۳-۸

حل) در مفصل $D$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{ED}\left(\frac{3}{5}\right) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 8.33kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - \frac{4}{5}(8.33) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 6.67kN(C)$$




در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 6.67 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 6.67kN(C)$$

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 5kN(T)$$

در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{GF} - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 20kN(T)$$

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \Rightarrow 15 - F_{GA} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GA} = 15kN(T)$$

در مفصل $A$ داریم:

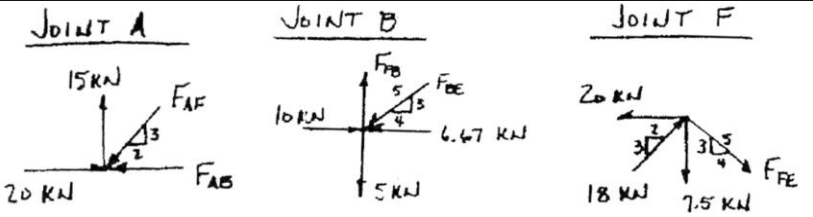
$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \Rightarrow 15 - F_{AF}\left(\sin 56.3^\circ\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF} = 18kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{AB} - 18\cos 56.3^\circ + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 10kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $B$ داریم:

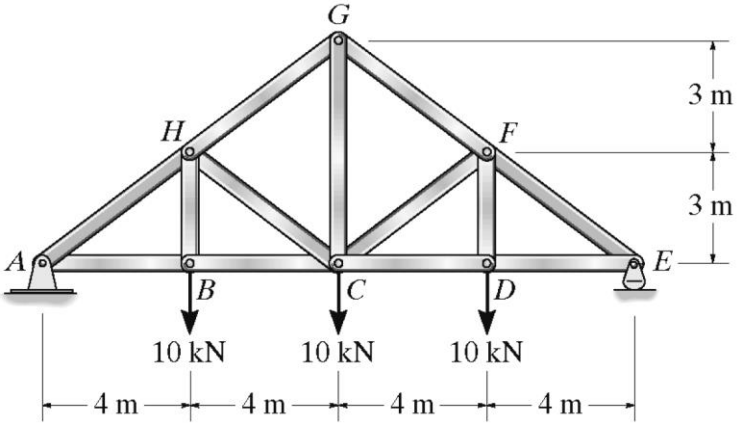
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{BE}\left(\frac{4}{5}\right)+10-6.67=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE}=4.17kN\,(C)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FB}-5-4.17\left(\frac{3}{5}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FB}=7.5kN(T)$$

در مفصل $F$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 18\left(\sin 56.3^\circ\right)-7.5-F_{FE}\left(\frac{3}{5}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE}=12.5kN(T)$$

۳-۹) در خرپای شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۹

حل) در مفصل $A$ داریم:

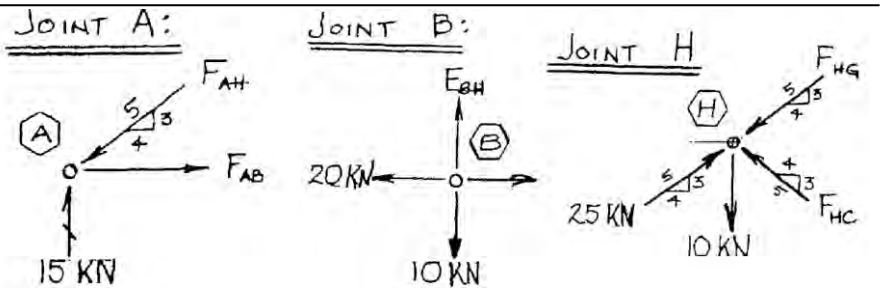
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}F_{AH}+15kN=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH}=25kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -\left(\frac{4}{5}\right)25+F_{AB}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB}=20kN\,(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = 20kN(T)$$
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BH} = 10kN(T)$$

در مفصل $H$ داریم:

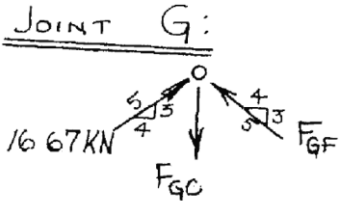
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(25) - 10 + \frac{3}{5}F_{HC} - \frac{3}{5}F_{HG} = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(25) - \frac{4}{5}F_{HC} - \frac{4}{5}F_{HG} = 0$$

با حل همزمان دو رابطه بالا داریم:

$$F_{HG} = 16.7kN(C) \qquad F_{HC} = 8.33kN(C)$$

در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(16.67) - \frac{4}{5}F_{GF} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 16.7kN(C)$$
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(16.67) + \frac{3}{5}(16.67) - F_{GC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GC} = 20kN(T)$$



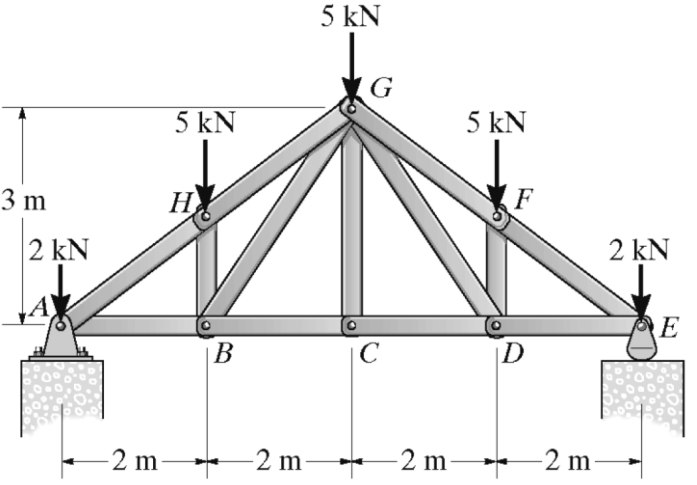

بقیه اعضا نیز به دلیل تقارن به بدست خواهند آمد.

۳-۱۰) در خرپای «هاو» نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $GF$، $CD$، $GC$ را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



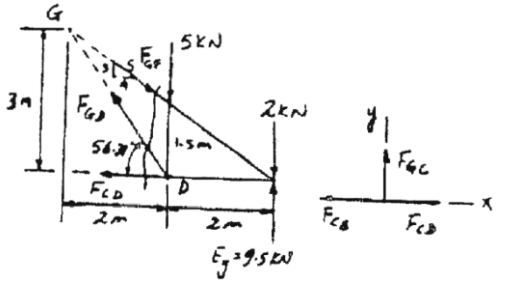



شکل مسئله ۳-۱۰

حل) با گشتاور گیری داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow E_y \times 8 - 2\times 8 - 5\times 6 - 5\times 4 - 5\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 9.5kN$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5}F_{GF}\times 1.5 - 2\times 2 + 9.5\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 12.5kN$$




$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 9.5\times 4 - 2\times 4 - 5\times 2 - F_{CD}\times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 6.67kN(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

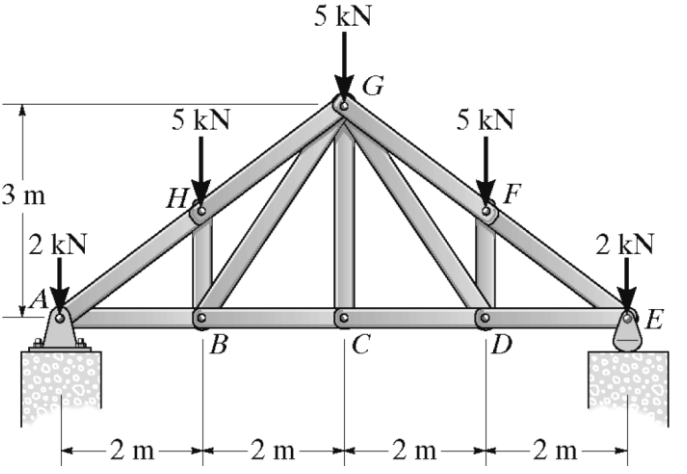
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{GC} = 0$$

۳-۱۱) در خرپای «هاو» نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $GH$، $BC$ و $BG$ را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

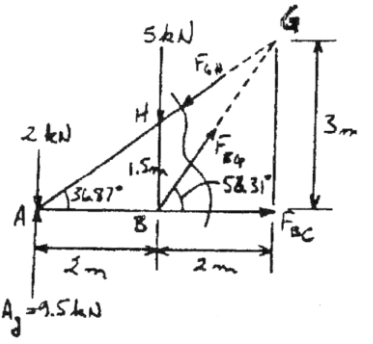
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۱۱

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد خرپا داریم:




$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -7.5\times 2 + F_{GH}\sin 36.87^\circ \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH} = 12.5kN(C)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5\times 2 + F_{BG}\sin 56.31^\circ \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BG} = 6.01kN(T)$$

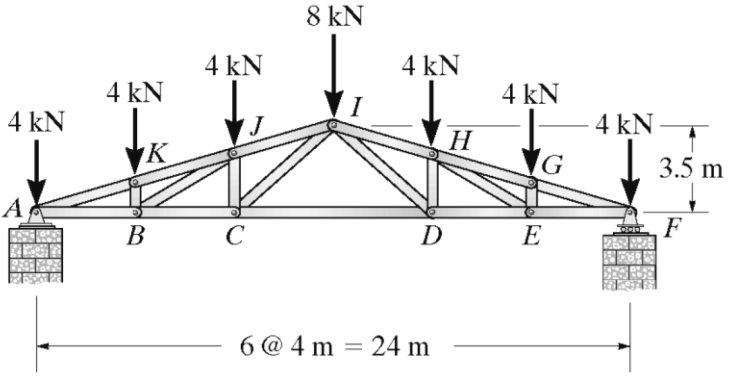
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -7.5\times 4 + 5\times 2 + F_{BC}\times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 6.67kN(T)$$

۳-۱۲) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

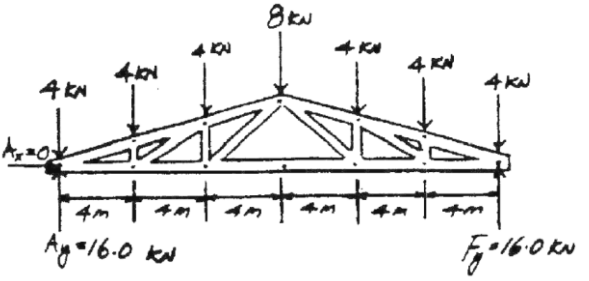
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۱۲

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برابر است با:

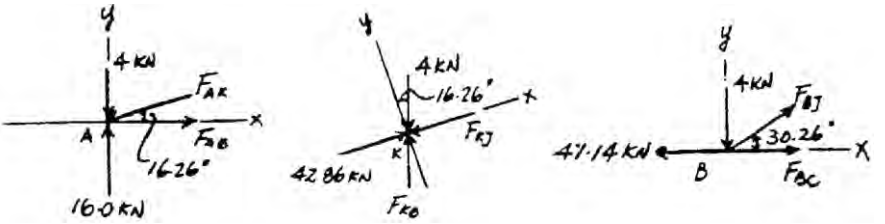



$A_y = 16.0kN \qquad A_x = 0 \qquad F_y = 16.0kN$

در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AK}\sin 16.26^\circ - 4 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AK} = 42.9kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 42.9\cos 16.26^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 41.1kN(T)$$




در مفصل $K$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -4\cos 16.26^\circ + F_{KB}\cos 16.26^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KB} = 4kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 42.9 + 4\sin 16.26^\circ - 4\sin 16.26^\circ - F_{KJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KJ} = 42.9kN(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BJ}\sin 30.26^\circ - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BJ} = 7.94kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} + 7.94\cos 30.26^\circ - 41.14 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 34.3kN(T)$$

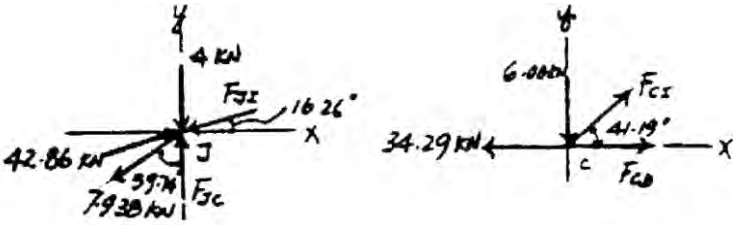
در مفصل $J$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{JI}\cos 16.26^\circ - 7.94\sin 59.74^\circ + 42.86\cos 16.26^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{JI} = 35.7kN(C)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{JC} + 42.86\sin 16.26^\circ - 7.939\cos 59.74^\circ - 4 - 35.71\sin 16.26^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{JC} = 6kN(C)$$




در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CI}\sin 41.19^\circ - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CI} = 9.11kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} + 9.11\cos 41.19^\circ - 34.29 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 27.4kN(T)$$

به سبب تقارن تمام اعضای بدست می‌آیند.

$$F_{IH} = 35.7kN(C)$$

$$F_{HD} = 6.00kN(C)$$

$$F_{HE} = 7.94kN(T)$$

$$F_{FG} = 42.9kN(C)$$

$$F_{ED} = 34.3kN(T)$$

$$F_{ID} = 9.11kN(T)$$

$$F_{HG} = 42.9kN(C)$$

$$F_{GE} = 4.00kN(C)$$

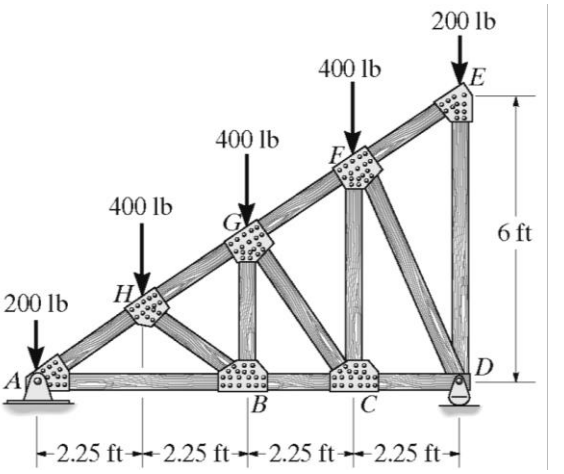
$$F_{FE} = 41.10kN(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



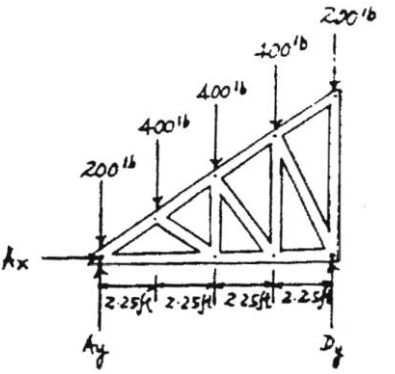
۳-۱۳) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۱۳

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها برابر است با:

$A_y = 800\,lb \qquad A_x = 0 \qquad D_y = 800\,lb$




درمفصل $A$ داریم:

$$\uparrow_{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AH}\sin 33.69^\circ + 800 - 200 = 0$$

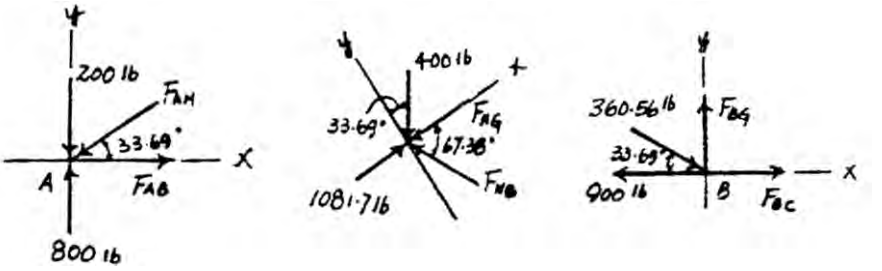
$$\Rightarrow \quad F_{AH} = 1081.7lb = 1.08k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 1081.7\cos 33.69^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 900lb(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






درمفصل $H$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -400\cos 33.69^\circ + F_{HB}\sin 67.38^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{HB} = 360.56lb = 361lb(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1081.7 - F_{HG} - 400\sin 33.69^\circ - 360.56\cos 67.38^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BG} = 721.11lb = 721lb(C)$$

درمفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} + 360.56\cos 33.69^\circ - 900 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 600lb(T)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -360.56\sin 33.69^\circ + F_{BG} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BG} = 200lb(T)$$

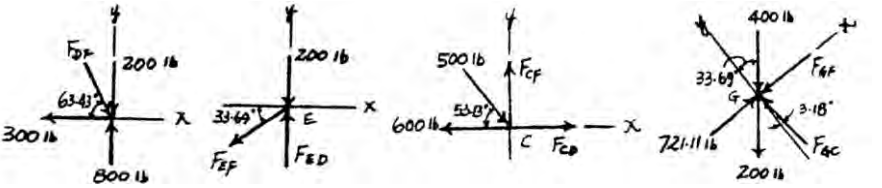
درمفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{GC}\cos 3.18^\circ - 400\cos 33.69^\circ - 200\cos 33.69^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GC} = 500lb(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{GF} + 721.11 - 400\sin 33.69^\circ - 200\sin 33.69^\circ - 500\sin 3.18^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GF} = 361lb(C)$$




درمفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 600 + 500\cos 53.13^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 300lb(T)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CF} - 500\sin 53.13^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = 400lb(T)$$

درمفصل $E$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} = 0$$

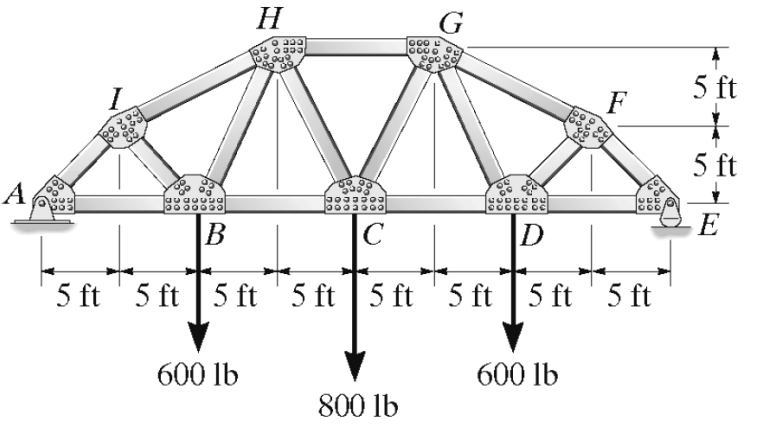
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{ED} - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 200lb(C)$$

درمفصل $D$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -300 + F_{DF}\cos 63.43^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DF} = 670.82lb = 671lb(C)$$

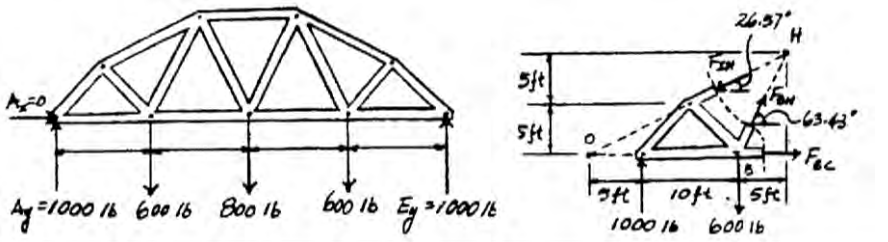
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 800 - 200 - 670.82\sin 63.435^\circ = 0 \quad \text{کنترل}$$

۳-۱۴) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $IH$، $BC$ و $BH$ را تعیین نمایید. همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۱۴

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر به دست می‌آیند.




$$A_y = E_y = 1000\,lb \qquad A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -1000 \times 10 + F_{IH}\sin 26.57^\circ \times 15 = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$F_{IH} = 1490.7lb = 1.49k(C)$$

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow -1000\times 15 + 600\times 5 + F_{BC}\times 10 = 0$$

$$F_{BC} = 1200\,lb = 1.2k(T)$$

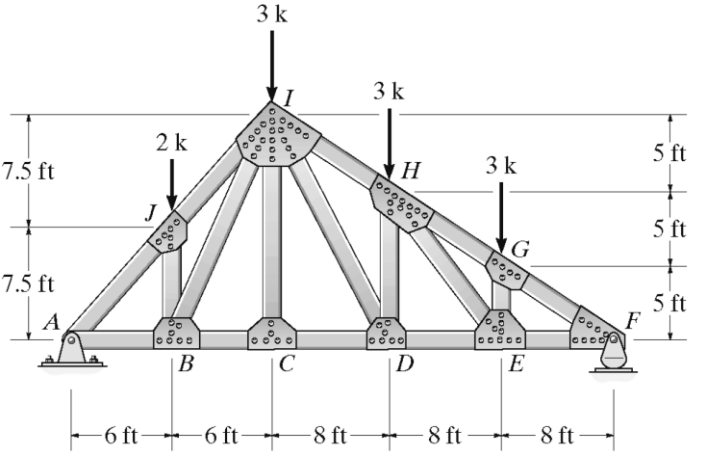
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow 1000\times 5 - 600\times 15 + F_{BH}\sin 63.43^\circ \times 15 = 0$$

$$F_{BH} = 298lb(T)$$

یا $\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 1000 - 600 - 1490.7\sin 26.56^\circ + F_{BH}\sin 63.43^\circ = 0$

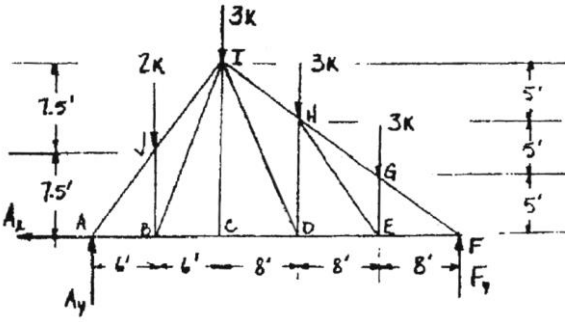
$F_{BH} = 298lb(T)$ کنترل

**۳-۱۵)** در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




*شکل مسئله ۳-۱۵*

حل) با توجه به نمودار جسم آزاد، و نوشتن معادلات تعادل در کل خرپا داریم:




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



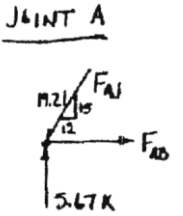
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_y \times 36 + 3\times 28 + 3\times 12 + 3\times 20 + 2\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 5.33k$$

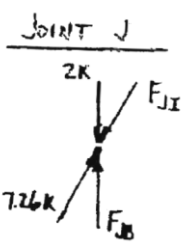
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 5.33 - 2 - 3 - 3 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5.67k$$

در مفصل $A$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.67 - F_{AJ}\left(\frac{15}{19.21}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AJ} = 7.26k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 7.26\left(\frac{12}{19.21}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 4.54k(T)$$




در مفصل $J$ داریم:

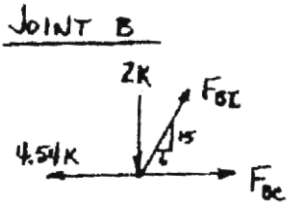
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 7.26\left(\frac{12}{19.21}\right) - F_{JI}\left(\frac{12}{19.21}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JI} = 7.26k(C)$$

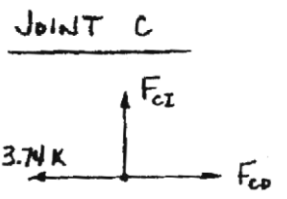
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{JB} - 2 + 7.26\left(\frac{15}{19.21}\right) - 7.26\left(\frac{15}{19.21}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JB} = 2k(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BI}\left(\frac{15}{16.16}\right) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BI} = 2.15k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 4.54 + 2.15\left(\frac{6}{16.16}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 3.74k(T)$$




در مفصل $C$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CI} = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} = 3.74k(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

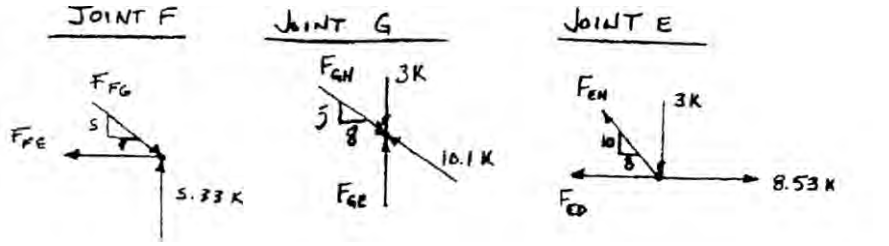
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $F$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.33 - F_{FG}\left(\frac{5}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} = 10.1k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{FE} - 10.1\left(\frac{8}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE} = 8.53k(T)$$




در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -10.1\left(\frac{8}{9.43}\right) + F_{GH}\left(\frac{8}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH} = 10.1k(C)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{GE} - 3 - 10.1\left(\frac{5}{9.43}\right) + 10.1\left(\frac{5}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GE} = 3k(C)$$

در مفصل $E$ داریم:

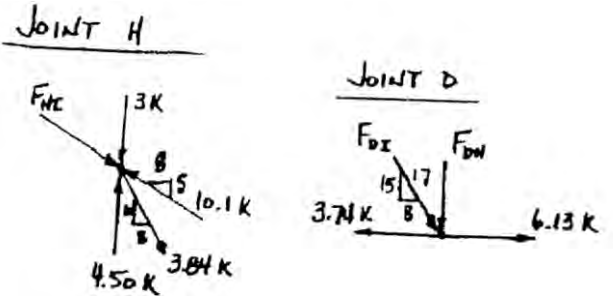
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EH}\left(\frac{10}{12.81}\right) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EH} = 3.84k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8.53 - F_{ED} - 3.84\left(\frac{8}{12.81}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 6.13k(T)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 6.13 - 3.74 - F_{DI}\left(\frac{8}{17}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DI} = 5.10k(T)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.1\left(\frac{15}{17}\right) - F_{DH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DH} = 4.5k(C)$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

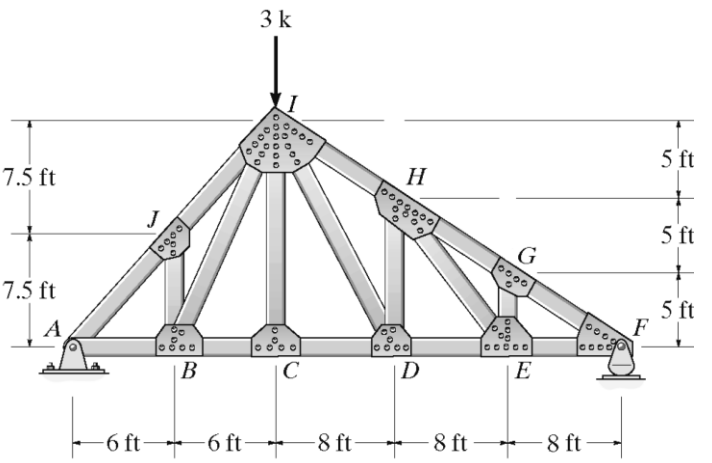
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $H$ داریم:

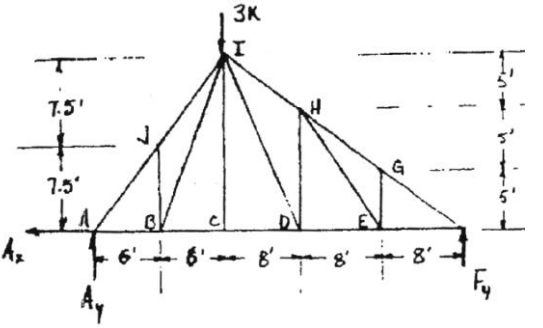
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{HI}\left(\frac{8}{9.43}\right) - 10.1\left(\frac{8}{9.43}\right) + 3.84\left(\frac{8}{12.8}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HI} = 7.23k(C)$$

۳-۱۶) مسئله ۳-۱۵ را دوباره حل نمایید. در این حالت فرض کنید که تنها نیروی خارجی $3k$ بر مفصل $I$ اعمال می‌شود.




*شکل مسئله ۳-۱۶*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد و نوشتن معادلات تعادل در کل سیستم داریم:




$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3\times 12 - 36\times F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 1k$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2k$$

در مفصل $F$ داریم:

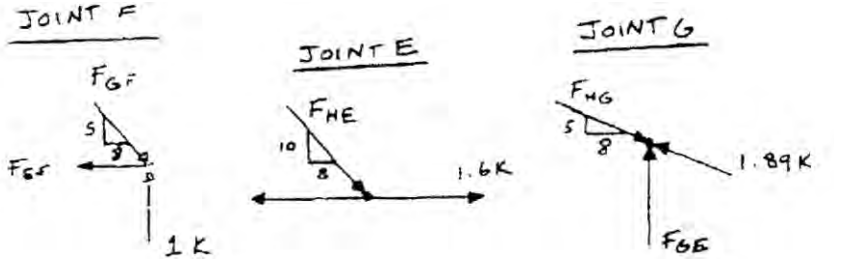
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 - F_{GF}\left(\frac{5}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 1.89k(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1.89\left(\frac{8}{9.43}\right) - F_{EF} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 1.60k(T)$$




در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{HG}\left(\frac{8}{9.43}\right) - 1.89\left(\frac{8}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HG} = 1.89k(C)$$

$$\underset{+}{\overset{\uparrow}{\sum}} F_y = 0 \Rightarrow F_{GE} = 0$$

در مفصل $E$ داریم:

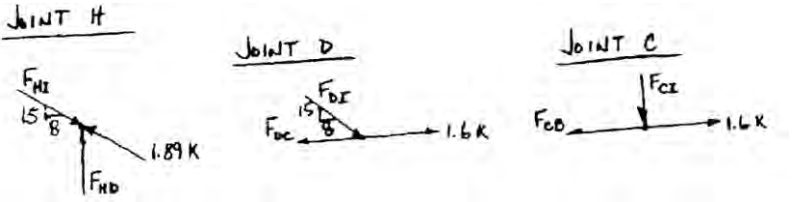
$$\underset{+}{\overset{\uparrow}{\sum}} F_y = 0 \Rightarrow F_{HE} = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1.6 - F_{ED} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 1.6k(T)$$

در مفصل $H$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{IH}\left(\frac{8}{9.43}\right) - 1.89\left(\frac{8}{9.43}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{IH} = 1.89k(C)$$

$$\underset{+}{\overset{\uparrow}{\sum}} F_y = 0 \Rightarrow F_{HD} = 0$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\overset{\uparrow}{\sum}} F_y = 0 \Rightarrow F_{ID} = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1.6 - F_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 1.6k(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\underset{+}{\overset{\uparrow}{\sum}} F_y = 0 \Rightarrow F_{IC} = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1.6 - F_{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 1.6k(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

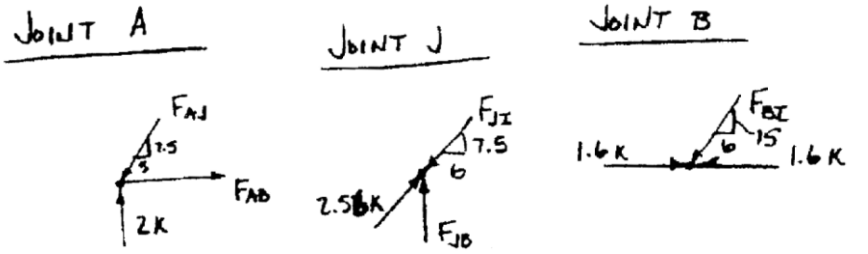
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AJ}\left(\frac{15}{19.21}\right)+2=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AJ}=2.56k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB}-2.56\left(\frac{12}{19.21}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB}=1.6k(T)$$




در مفصل $J$ داریم:

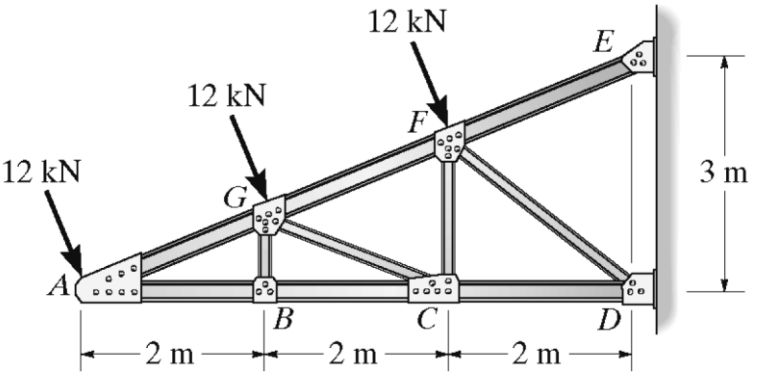
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{IJ}\left(\frac{15}{19.21}\right)+2.56\left(\frac{15}{19.21}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{IJ}=2.56k(C)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BJ}=0$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BI}=0$$

۳-۱۷) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $GF$، $FC$ و $CD$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.



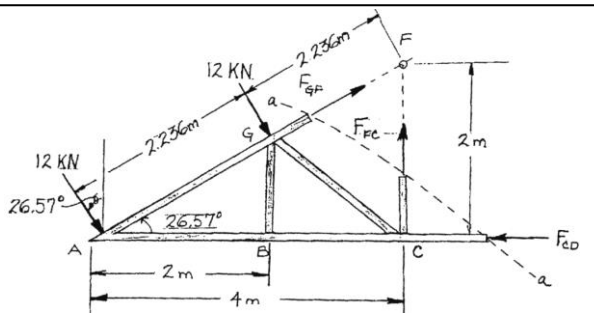

شکل مسئله ۳-۱۷

حل) با زدن یک برش مطابق شکل زیر داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

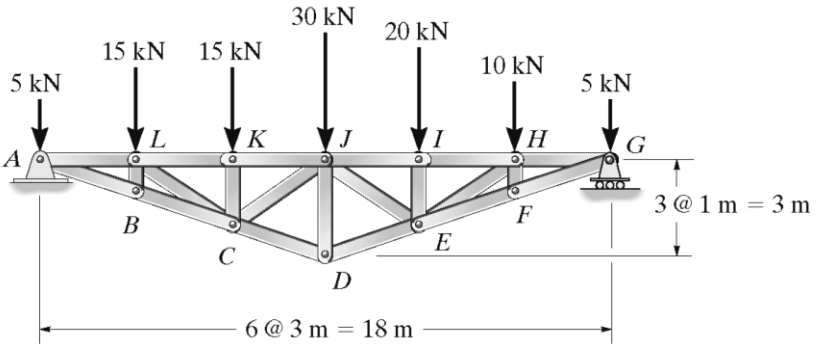
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





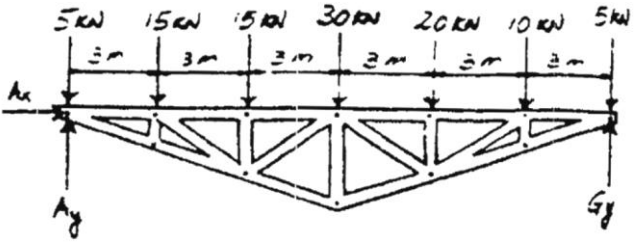

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 12\times\cos 26.57^\circ\times 4 + 12\times\cos 26.57^\circ\times 2$$
$$-12\times\sin 26.57^\circ\times 1 - F_{GF}\times\sin 26.57^\circ\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 33.0kN(T)$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -12\times 2.236 + F_{FC}\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FC} = 6.71kN(T)$$
$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 12\times 2.236 + 12\times 2\times 2.236 - F_{CD}\times 2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 40.2kN(C)$$

۳-۱۸) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $KJ$، $CD$ و $CJ$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۱۸

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا داریم:




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

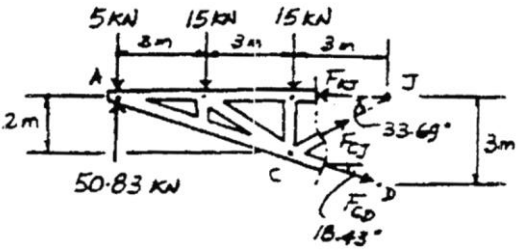
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -15\times 3 - 15\times 6 - 30\times 9 - 20\times 12 - 10\times 15 - 5\times 18 + G_y \times 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad G_y = 49.17kN$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 - 15 - 15 - 30 - 20 - 10 - 5 + 49.167 = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 50.83kN$$

در مقطع زده شده داریم:



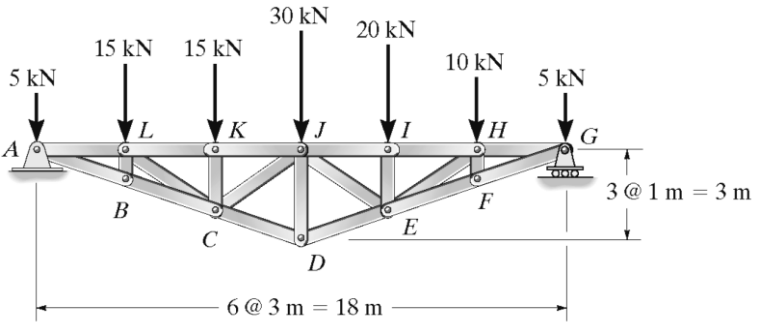

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 15\times 3 + 5\times 6 - 50.83\times 6 + F_{KJ}\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{KJ} = 115kN(C)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -15\times 3 - 15\times 6 + F_{CJ}\sin 33.69^\circ \times 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CJ} = 27.0kN(T)$$

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow -50.89\times 9 + 5\times 9 + 15\times 6 + 15\times 3 + F_{CD}\cos 18.43^\circ \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 97.5kN(T)$$

۳-۱۹) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $JI$، $JD$ و $DE$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۱۹

با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



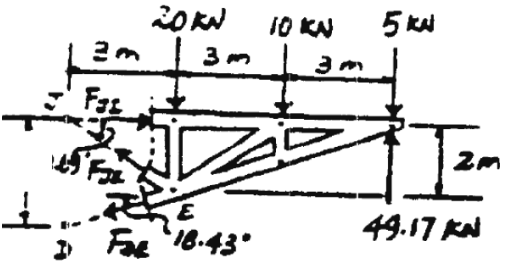
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -15\times 3 - 15\times 6 - 30\times 9 - 20\times 12 - 10\times 15 - 5\times 18 + G_y \times 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad G_y = 49.17kN$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5 - 15 - 15 - 30 - 20 - 10 - 5 + 49.167 = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 50.83kN$$

در مقطع زده شده داریم:




$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -F_{JI}\times 2 - 10\times 3 - 5\times 6 + 49.17\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JI} = 117.5kN(C)$$

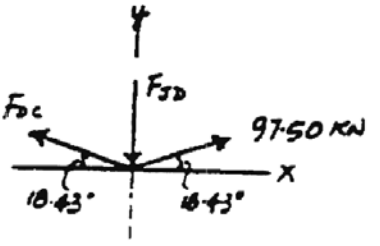
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -20\times 3 - 10\times 6 - 5\times 9 + 49.17\times 9 - F_{DE}\cos 18.43^\circ \times 2$$

$$-F_{DE}\sin 18.43^\circ \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 97.5kN(T)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 97.5\cos 18.43^\circ - F_{CD}\cos 18.43^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 97.5kN(T)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 2\times 97.5\sin 18.43^\circ - F_{JD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{JD} = 61.7kN(C)$$

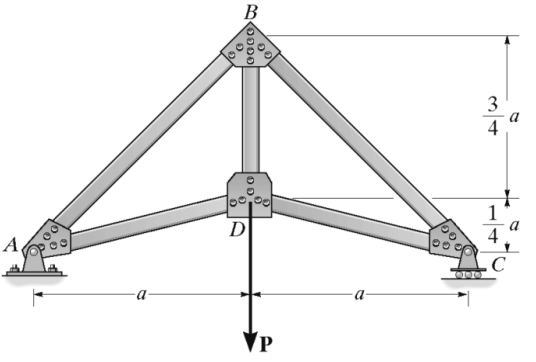



۳-۲۰) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $JI$، $JD$ و $DE$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



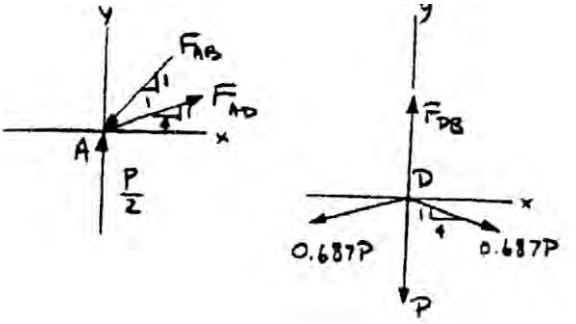



شکل مسئله ۳-۲۰

حل) در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{17}}F_{AD} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_{AB} = 0$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_{AB} + \frac{1}{\sqrt{17}}F_{AD} = 0$$




در نتیجه با حل همزمان دو رابطه فوق و همچنین با توجه به تقارن داریم:

$$\begin{cases} F_{CD} = F_{AD} = 0.687P(T) \\ F_{CB} = F_{AB} = 0.943P(C) \end{cases}$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DB} - 0.687P\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{1}{\sqrt{17}}(0.687P) - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{DB} = 1.33P(T)$$

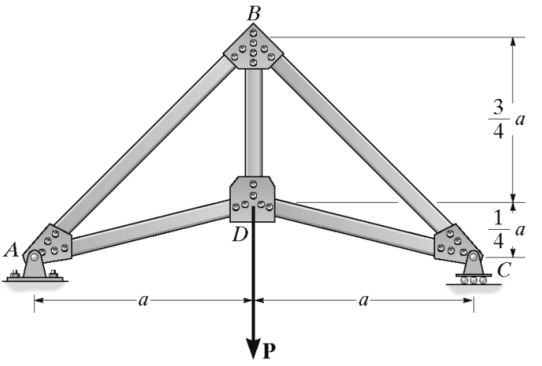
۳-۲۱) در خرپای شکل زیر در صورتی که حداکثر نیروی فشاری قابل تحمل برای اعضای $AB$ و $BC$ برابر ۸۰۰ پوند و حداکثر نیروی کششی قابل تحمل برای اعضای $AD$ ، $DC$ و

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$BD$ برابر ۱۵۰۰ پوند و همچنین مقدار $a$ برابر ۱۰ فوت باشد، مقدار نیروی $P$ را تعیین نمایید.



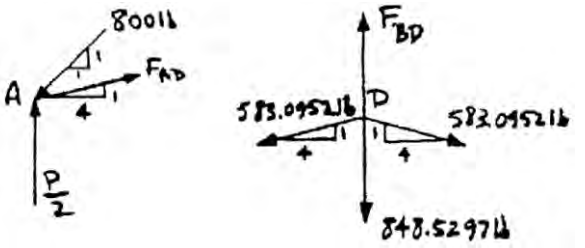

شکل مسئله ۳-۲۱

حل) فرض می‌نماییم که نیروی عضو $AB$ برابر ۸۰۰ پوند باشد. در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -800\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+F_{AD}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=0$$

$$F_{AD} = 583.0952\,lb < 1500\,lb \qquad OK$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}(800)+\frac{1}{\sqrt{17}}(583.0952)=0 \quad \Rightarrow \quad P = 848.5297lb$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -848.5297-583.0952(2)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+F_{DB}=0$$

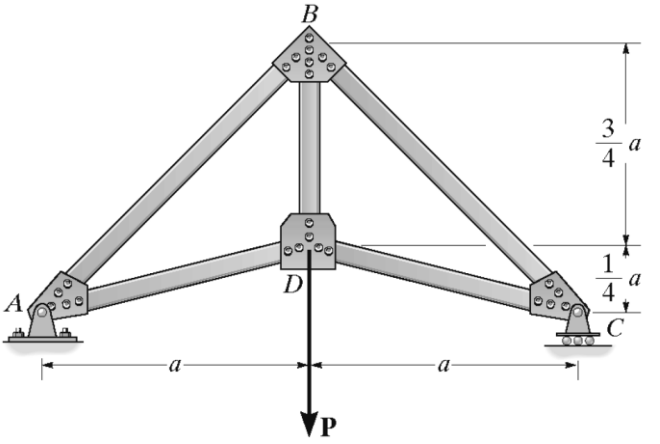
$$\Rightarrow \quad F_{DB} = 1131.3724\,lb < 1500\,lb \qquad OK$$

۳-۲۲) در خرپای شکل زیر در صورتی که حداکثر نیروی فشاری قابل تحمل برای اعضای $AB$ و $BC$ برابر ۸۰۰ پوند و حداکثر نیروی کششی قابل تحمل برای اعضای $AD$، $DC$ و $BD$ برابر ۲۰۰۰ پوند و همچنین مقدار $a$ برابر ٦ فوت باشد، مقدار نیروی $P$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





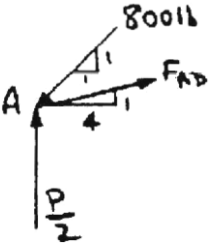

شکل مسئله ۳-۲۲

حل) فرض می‌نماییم که نیروی عضو $AB$ برابر ۸۰۰ پوند باشد. در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -800\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+F_{AD}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=0$$

$$F_{AD} = 583.0952\,lb < 1500\,lb \qquad OK$$

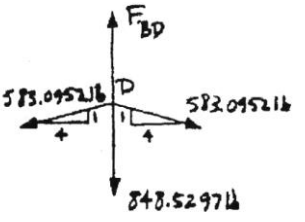
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}(800)+\frac{1}{\sqrt{17}}(583.0952)=0 \quad \Rightarrow \quad P = 848.5297lb$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -848.5297-583.0952(2)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+F_{DB}=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{DB} = 1131.3724\,lb < 2000\,lb \qquad OK$$



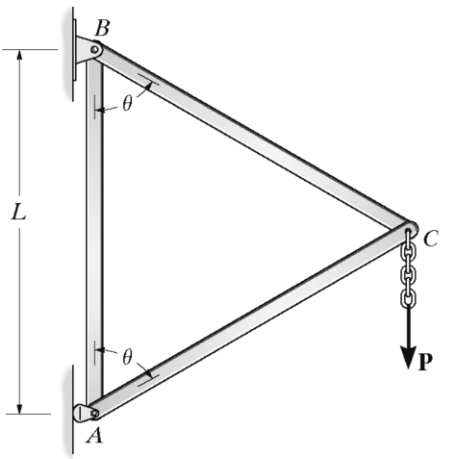

$$\Rightarrow \quad P_{\max} = 849\,lb$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



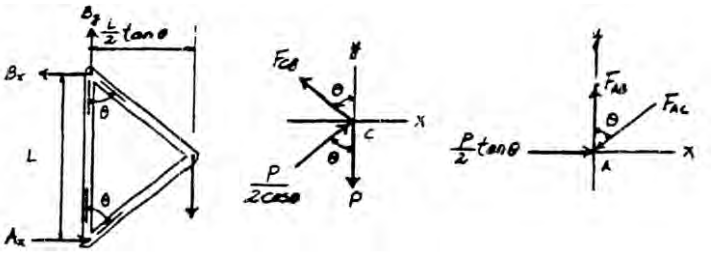
۳-۲۳) خرپای سه عضوی زیر را در نظر بگیرید. مقدار زاویه $\theta$ را طوری تعیین نمایید که حداکثر نیروی کشش ایجاد شده در اعضا به $1.25P$ و حداکثر نیروی فشاری ایجاد شده در اعضا به $0.8P$ محدود گردد.




*شکل مسئله ۳-۲۳*

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل سیستم داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times L - P\left(\frac{L}{2}\tan\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{P}{2}\tan\theta$$




در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}\tan\theta - F_{AC}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} = \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta}(C)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} - \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta}\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = \frac{P}{2}(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC}\sin\theta + \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta}(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



برای ارضای شرط فشاری در اعضا داریم:

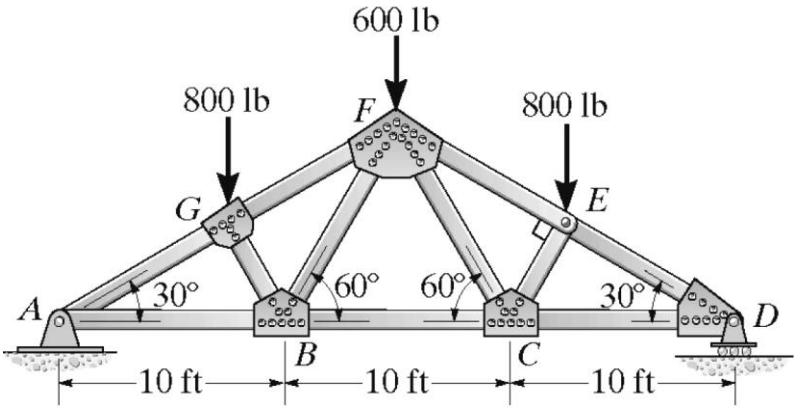
$$0.8P \ge \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \le 51.3^\circ$$

برای ارضای شرط کششی در اعضا داریم:

$$1.2P \ge \frac{P}{2}\frac{1}{\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \le 66.4^\circ$$

بنابراین $\theta \le 51.3^\circ$

۳-۲٤) در خرپای فینک نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $GF$ و $FB$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۲٤

حل) به علت تقارن عکس‌العمل‌های قائم تکیه‌گاهی در $A$ و $D$ برابر است. $D_y = A_y$

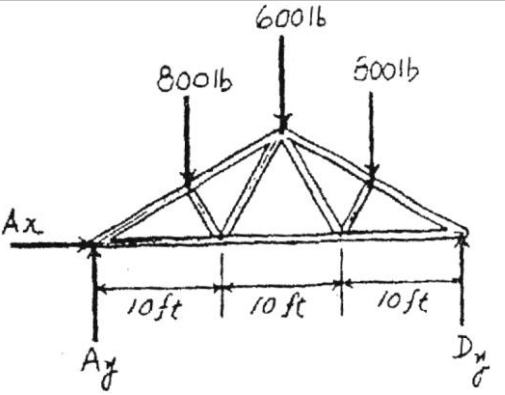
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 2A_y - 800 - 600 - 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 1100lb$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

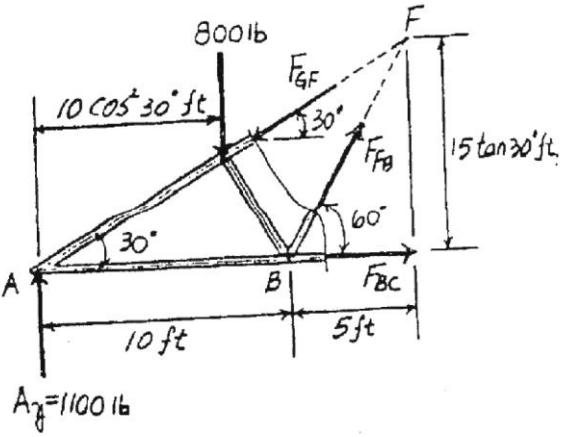
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با استفاده از روش مقطع برای خرپا داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{GF}\sin 30^\circ \times 10 + 800\left(10 - 10\cos^2 30^\circ\right) - 1100 \times 10 = 0$$
$$\Rightarrow F_{GF} = 1800\,lb(C) = 1.8k(C)$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{FB}\sin 60^\circ \times 10 - 800\left(10\cos^2 30^\circ\right) = 0$$
$$\Rightarrow F_{FB} = 692.82lb(T) = 693lb(T)$$
$$\sum M_F = 0 \Rightarrow F_{BC} \times 15 \times \tan 30^\circ + 800\left(15 - 10\cos^2 30^\circ\right) - 1100 \times 15 = 0$$
$$\Rightarrow F_{BC} = 1212.43lb(T) = 1.21k(T)$$

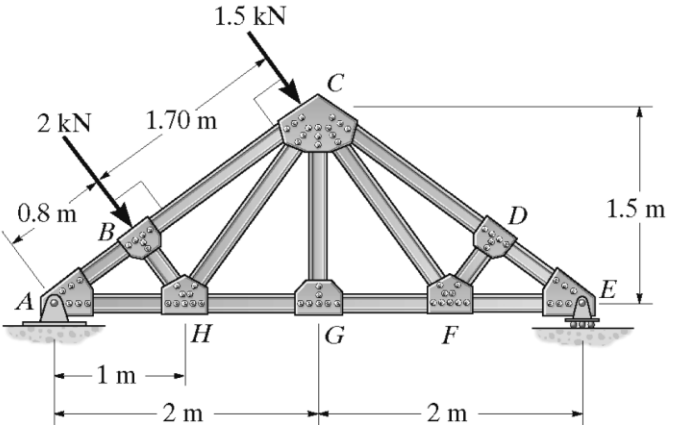



۳-۲۵) در خرپای فینک نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *GF*، *CF* و *CD* و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۲۵

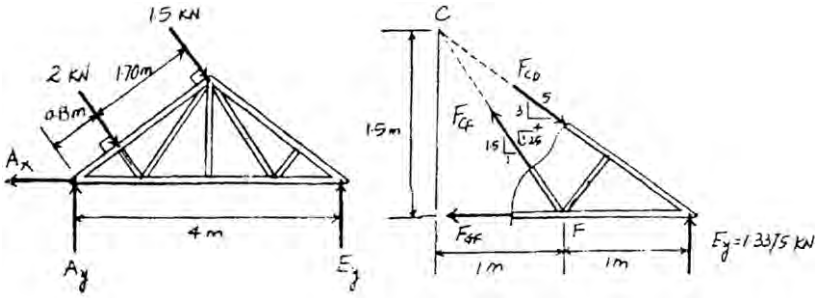
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow E_y \times 4 - 2 \times 0.8 - 1.5 \times 2.5 = 0 \qquad E_y = 1.3375\,kN$$

با استفاده از روش مقطع برای خرپا داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 1.3375 \times 2 - F_{GF} \times 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GF} = 1.78kN(T)$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 1.3375 \times 1 - F_{CD}\left(\frac{3}{5}\right) \times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 2.23kN(C)$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{CF}\left(\frac{1.5}{\sqrt{3.25}}\right)(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = 0$$

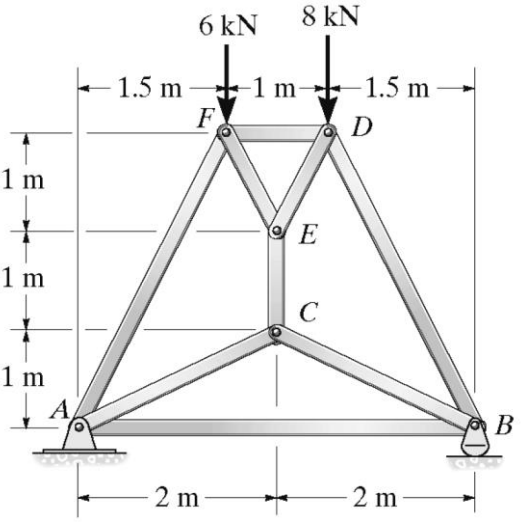



۳-۲۶) معینی، نامعینی و پایداری خرپای زیر را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

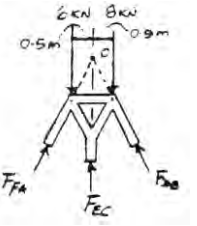





شکل مسئله ۳-۲۶

حل) اعضای $ABC$ و $FED$ توسط میله‌های $FA$، $EC$ و $DB$ به یکدیگر مرتبط شده‌اند. در خرپای فوق تعداد مجهولات برابر تعداد معادلات است.

$$b+r=2j \quad \Rightarrow \quad 9+3=2(6)=12$$




در نتیجه در نگاه مقدماتی سیستم معین است. لیکن با گشتاورگیری حول نقطه $O$ داریم:

$$\sum M_O = 6\times 0.5 - 8\times 0.5 \neq 0$$

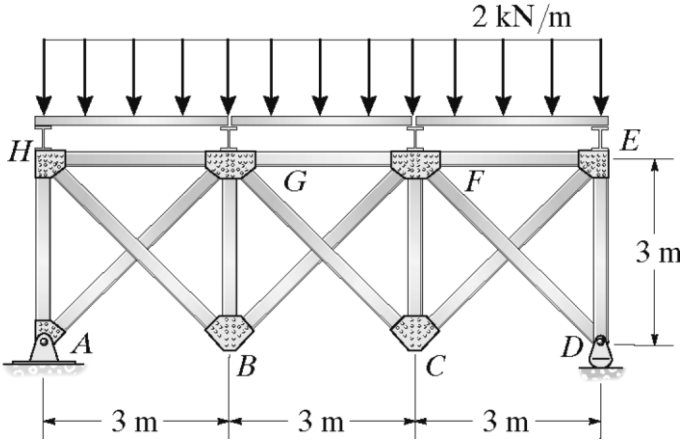
در نتیجه در این مقطع تعادل بر قرار نبوده و خرپا به صورت داخلی ناپایدار است.

۳-۲۷) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

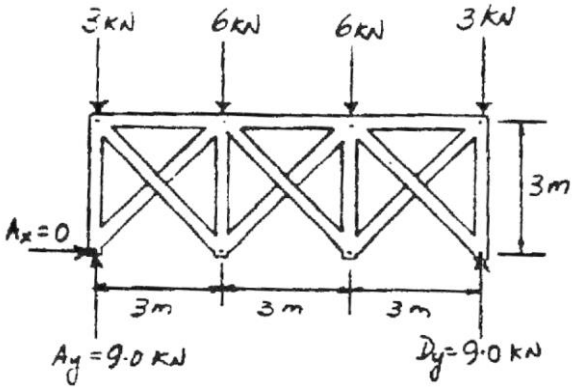





شکل مسئله ۳-۲۷

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برابر با:

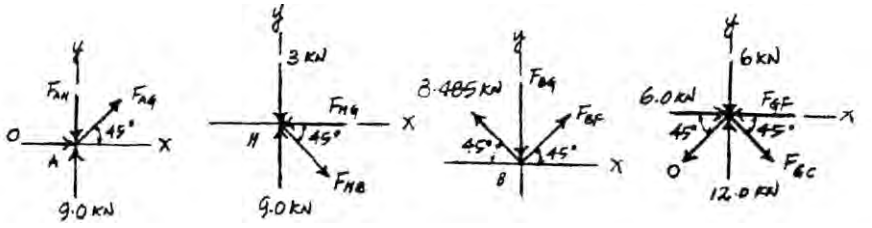
$$A_x = 0 \qquad A_y = 9.00kN \qquad D_y = 9.0kN$$




در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AG}\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AG} = 0$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AH} + 9.00 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH} = 9.00kN(C)$$




در مفصل $H$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 9.00 - 3 - F_{HB}\sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{HB} = 8.485kN = 8.49kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8.485\cos 45^\circ - F_{HG} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HG} = 6.00kN(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BF}\cos 45^\circ - 8.485\sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BF} = 8.485kN = 8.49kN(T)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 8.485\cos 45^\circ + 8.485\sin 45^\circ - F_{BG} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BG} = 12.0kN(C)$$

در مفصل $G$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 6 + 8.485\cos 45^\circ - F_{GF} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GF} = 12kN(C)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{GC}\sin 45^\circ - 6 + 12.0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GC} = 8.485kN = 8.49kN(T)$$

همچنین به سبب تقارن سازه داریم:

$$F_{DF} = F_{AG} = 0$$

$$F_{DE} = F_{AH} = 9.00kN(C)$$

$$F_{EC} = F_{HB} = 8.49kN(T)$$

$$F_{EF} = F_{HG} = 6.00kN(C)$$

$$F_{CF} = F_{BG} = 12.0kN(C)$$

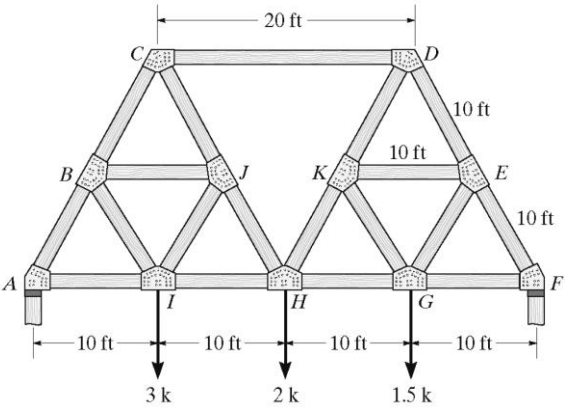
$$F_{FB} = F_{GC} = 8.49kN(T)$$

۳-۲۸) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $JH$، $BJ$ و $BI$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند. زاویه تمام اعضا نسبت به یکدیگر ۶۰ درجه می‌باشد. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و تکیه‌گاه $F$ غلتکی در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





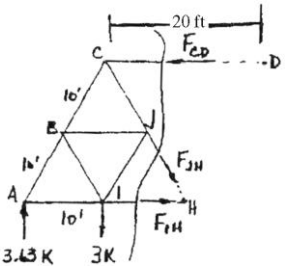

شکل مسئله ۳-۲۸

حل) در مقطع زده شده داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 3.63\times 10 - F_{IH}\times 17.32 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{IH} = 2.09k(T)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 3.63\times 30 - 3\times 20 - 2.09\times 17.32 - F_{JH}\cos 30^\circ \times 20 = 0$$

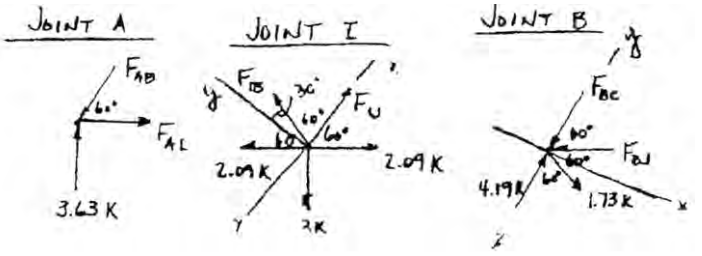
$$\Rightarrow F_{JH} = 0.733k(T)$$




در مفصل $A$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{3.36}{\sin 60^\circ} = 3.88k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AJ} = 3.88\cos 60^\circ = 1.94k(T)$$




در مفصل $I$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

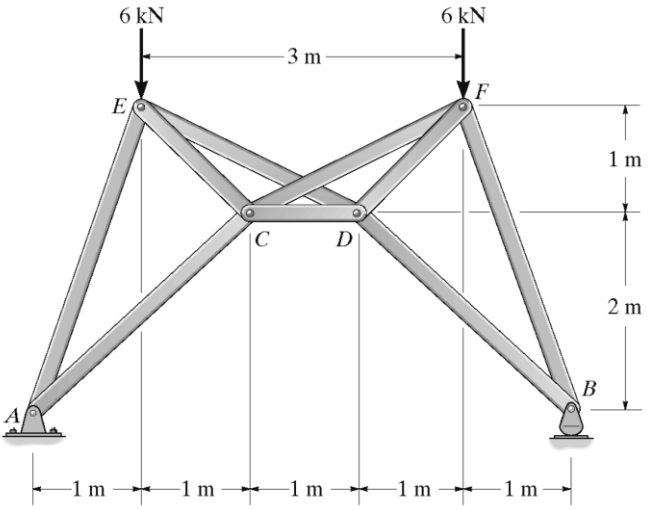


$$\underset{+}{\downarrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{IB}\times\cos 30^\circ + 2.09\times\cos 30^\circ + 3\times\cos 60^\circ - 2.09\times\cos 30^\circ = 0$$
$$\Rightarrow F_{IB} = 1.73k(T)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 1.73\cos 30^\circ - F_{BJ}\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BJ} = 1.73k(C)$$

۳-۲۹) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $CF$، $ED$ و $CD$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۲۹

حل) با گشتاوری گیری حول نقطه $G$ که محل تلاقی اعضای $CF$ و $ED$ می‌باشد داریم:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 2.5\times 6 - 1.5\times 6 - 0.25\times F_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 24.0kN(T)$$
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 3\times 6 - 2\times 6 - F_{CF}\sin 26.56^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = 13.4kN(C)$$
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 2\times 6 - 1\times 6 - \sqrt{2}F_{ED}\sin 18.43^\circ = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_{ED} = 13.42 = 13.4kN(C)$$

در مفصل $A$ داریم:

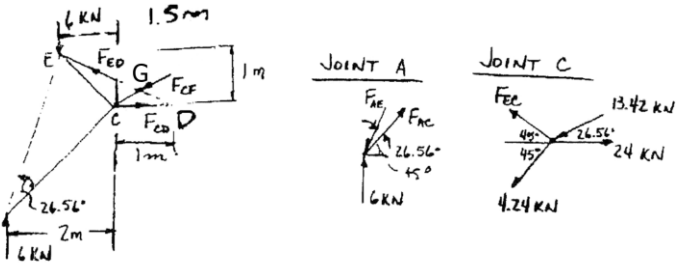
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC}\cos 45^\circ - F_{AE}\cos 71.56^\circ = 0$$
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 6 + F_{AC}\sin 45^\circ - F_{AE}\sin 71.56^\circ = 0$$
$$\Rightarrow F_{AE} = 9.49kN(C) = F_{BF}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$\Rightarrow F_{AC} = 4.24kN(C) = F_{BC}$

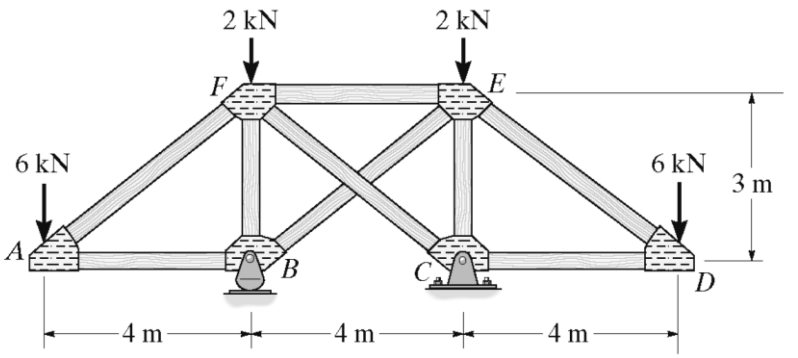



در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 24 - 13.42\cos 26.56^\circ - F_{EC}\cos 45^\circ - 4.24\cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{EC} = 12.7kN(T) = F_{DF}$$

۳-۳۰) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۳۰

حل) در مقطع زده شده داریم:

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow F_{BE}\left(\frac{4}{5}\right)\times 3 - 6\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 10kN(C)$$

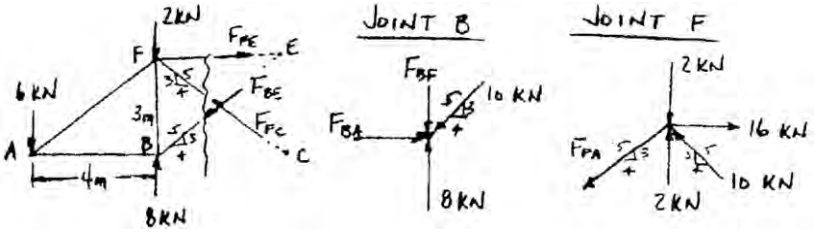
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FC} = 10kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{FE} - 2\times 10\times\frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE} = 16kN(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\leftarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 10\frac{4}{5} - F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 8kN(C)$$

$$\underset{+}{\downarrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 10\times\frac{3}{5} - 8 + F_{FB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FB} = 2kN(C)$$

در مفصل $F$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 10\times\frac{3}{5} - \frac{3}{5}F_{AF} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF} = 10kN(T)$$

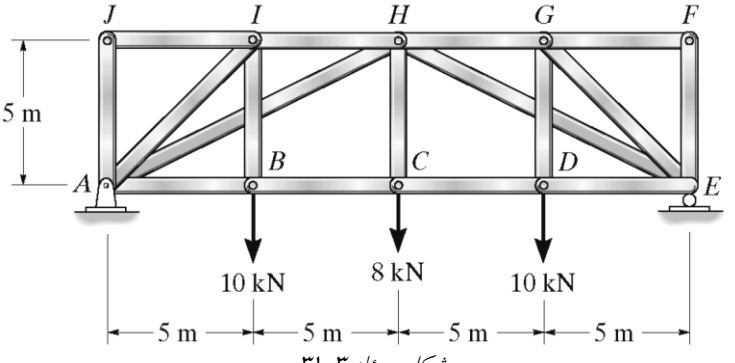
به سبب تقارن داریم:

$$\Rightarrow F_{ED} = 10kN(T)$$

$$\Rightarrow F_{EC} = 2kN(C)$$

$$\Rightarrow F_{CD} = 8kN(C)$$

۳-۳۱) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.



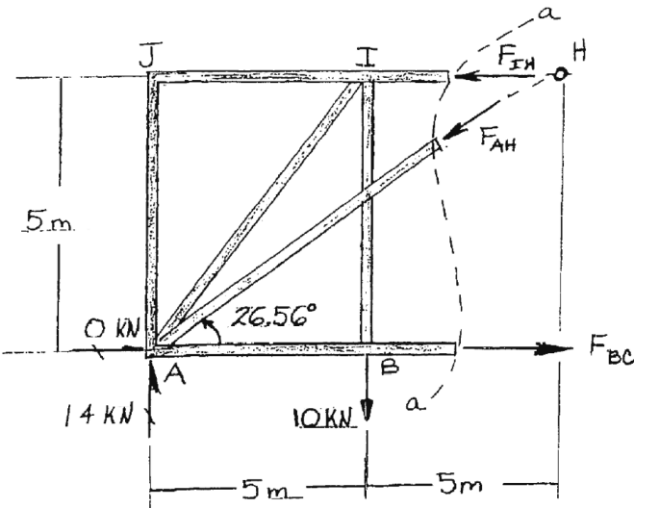

*شکل مسئله ۳-۳۱*

حل) در برش زده شده مطابق شکل زیر داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



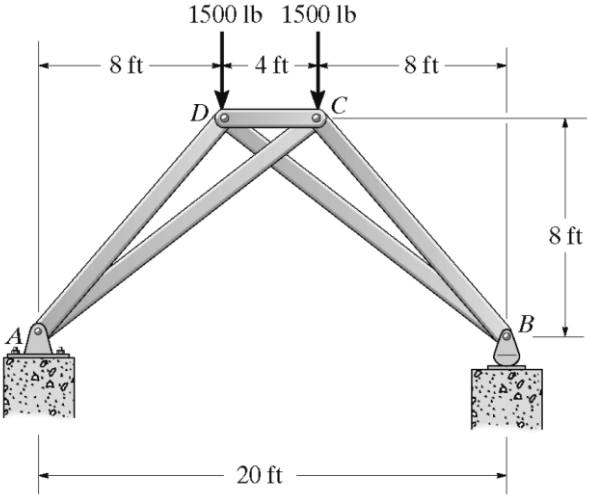



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{IH} \times 5 - 10 \times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{IH} = 10kN(C)$$

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow F_{BC} \times 5 + 10 \times 5 - 14 \times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 18kN(T)$$

$$\underset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow 14 - 10 - F_{AH} \sin 26.56^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH} = 8.94kN(C)$$

۳-۳۲) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۳۲

حل) در مفصل $A$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



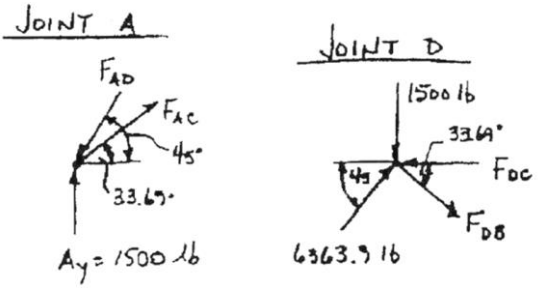
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC}\cos 33.69^\circ - F_{AD}\cos 45^\circ = 0$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 1500 - F_{AD}\sin 45^\circ + F_{AC}\sin 33.69^\circ = 0$$

با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$F_{AC} = 5408.3lb = 5.41k(T)$$

$$F_{AD} = 6363.9lb = 6.36k(C)$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 6363.9\sin 45^\circ - 1500 - F_{DB}\sin 33.69^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{DB} = 5408.3lb = 5.41k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 6363.9\cos 45^\circ - F_{DC} + F_{DB}\cos 33.69^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{DC} = 9000\,lb = 9.00k(C)$$

با توجه به تقارن داریم:

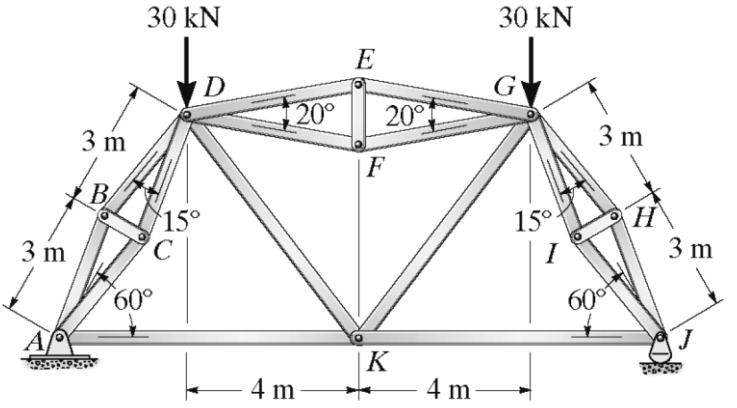
$$F_{CB} = 6363.9lb = 6.36k(C)$$

۳-۳۳) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

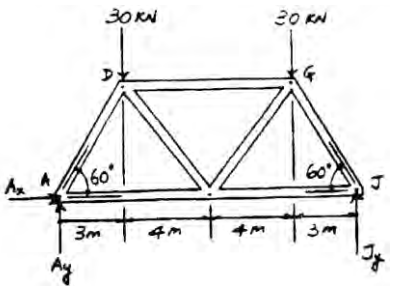





شکل مسئله ۳-۳۳

حل) با توجه به تقارن خرپا مقدار عکس‌العمل‌ها به صورت زیر می‌باشد:

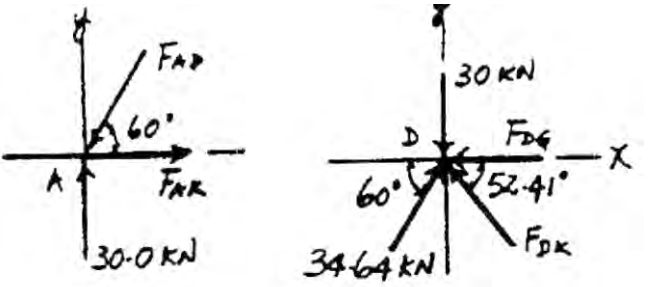
$A_x = 0 \qquad A_y = 30.0kN \qquad J_y = 30.0kN$




در مفصل $A$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AD}\sin 60^\circ + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 34.64kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AK} - 34.64\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AK} = 17.3kN(T)$$




در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DK}\sin 52.41^\circ + 34.64\sin 60^\circ - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DK} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{DG} + 34.64\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DG} = 17.3kN(C)$$

در مفصل $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} = F_{AB} = F$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -2F\cos 7.5^\circ + 34.64 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 17.47kN(C)$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 17.5kN(C)$$

$$\Rightarrow F_{AB} = 17.5kN(C)$$

به سبب تقارن در هندسه و بارگذاری داریم:

$$F_{GK} = F_{DK} = 0$$

$$F_{JK} = F_{AK} = 17.3kN(T)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 17.47\cos 7.5^\circ - F_{BD}\cos 7.5^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BD} = 17.47kN = 17.5kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 2\times 17.47\sin 7.5^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 4.56kN(T)$$

به سبب تقارن در هندسه و بارگذاری داریم:

$$F_{CD} = F_{IG} = F_{HG} = F_{IJ} = F_{HJ} = 17.5kN(C)$$

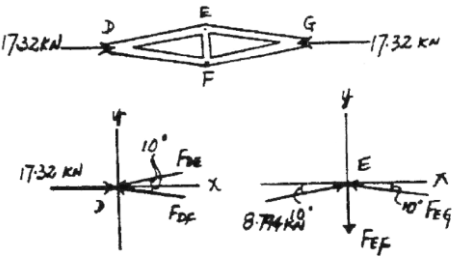
$$F_{IH} = 4.56kN(T)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = F_{DE} = F$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -2F\cos 10^\circ + 17.32 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 8.794kN(C)$$

$$\Rightarrow F_{DE} = F_{DF} = 8.79kN(C)$$




در مفصل $E$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8.794\cos 10^\circ - F_{EG}\cos 10^\circ = 0$$

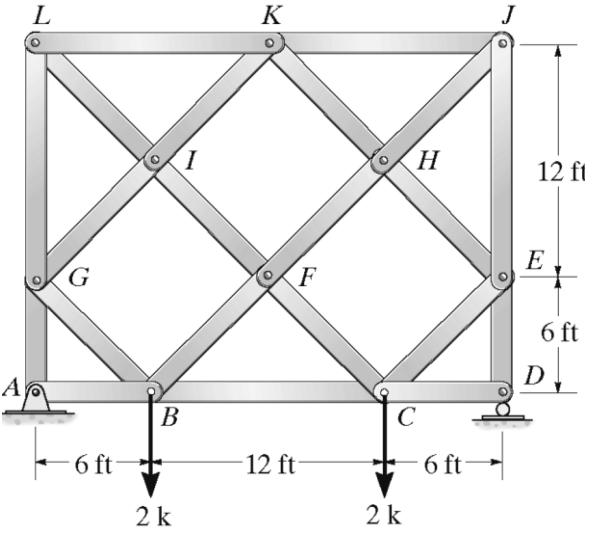
$$\Rightarrow \quad F_{EG} = 8.794\,kN = 8.79(C)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{EF} + 2\times 8.794\sin 10^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 3.05kN(T)$$

به سبب تقارن در هندسه و بارگذاری داریم:

$$F_{FG} = F_{EG} = 8.79kN(C)$$

۳-۳٤) در خرپای بغرنج نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند. برای تحلیل، میله $JE$ را با یک میله مابین مفصل‌های $K$ و $F$ جانشانی کنید.




شکل مسئله ۳-۳٤

حل) با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

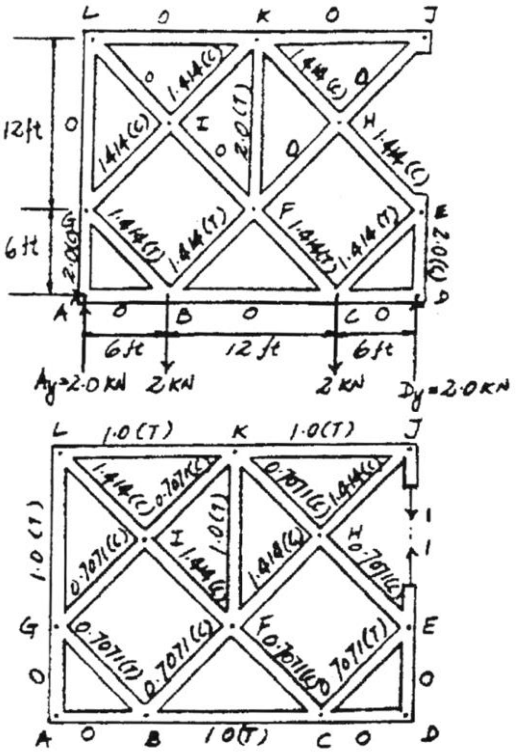
$$S_{FK} = S'_{FK} + xs'_{FK} = 0$$

| عضو | $S'_i$ | $s'_i$ | $xs'_i$ | $S_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $JH$ | 0 | -1.414 | 2.828 | 2.38(T) |
| $JK$ | 0 | 1.0 | -2.0 | 2.0(C) |
| $DC$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $DE$ | -2.0 | 0 | 0 | 2.0(C) |
| $EC$ | 1.414 | 0.7071 | -1.414 | 0 |
| $EH$ | -1.414 | -0.7071 | 1.414 | 0 |
| $CF$ | 1.414 | -0.7071 | 1.414 | 2.83(T) |

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{CB}$ | 0 | 1.0 | -2.0 | 2.0(C) |
| $\mathcal{AG}$ | -2.0 | 0 | 0 | 2.0(C) |
| $\mathcal{AB}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{BG}$ | 1.414 | 0.7071 | -1.414 | 0 |
| $\mathcal{BF}$ | 1.414 | -0.7071 | 1.414 | 2.83(T) |
| $\mathcal{GI}$ | -1.414 | -0.7071 | 1.414 | 0 |
| $\mathcal{GL}$ | 0 | 1.0 | -2.0 | 2.0(C) |
| $\mathcal{LK}$ | 0 | 1.0 | -2.0 | 2.0(C) |
| $\mathcal{LI}$ | 0 | -1.414 | 2.828 | 2.83(T) |
| $\mathcal{IF}$ | 0 | -1.414 | 2.828 | 2.83(T) |
| $\mathcal{IK}$ | -1.414 | -0.7071 | 1.414 | 0 |
| $\mathcal{HF}$ | 0 | -1.414 | 2.828 | 2.83(T) |
| $\mathcal{HK}$ | -1.414 | -0.7071 | 1.414 | 0 |
| $\mathcal{JE}$ | 0 | 1.0 | -2.0 | 2.0(C) |



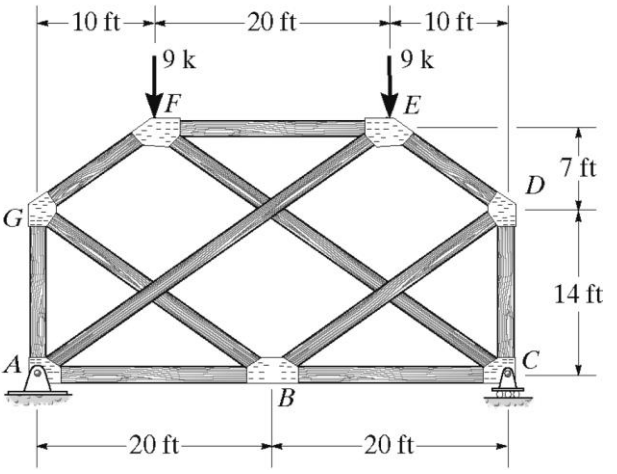

$$\Rightarrow 2+x(1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

۳-۳۵) در خرپای بغرنج نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۳۵

حل) با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

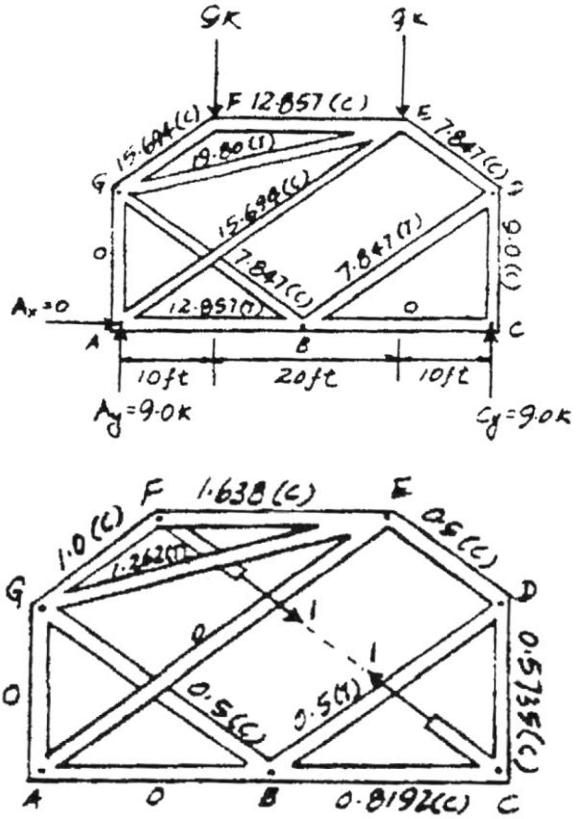
$$S_{FK} = S'_{FK} + xs'_{FK} = 0 \quad \Rightarrow \quad 19.8 + 1.262 \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -15.694$$

| عضو | $S'_i$ | $s'_i$ | $xs'_i$ | $S_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $CB$ | 0 | -0.8192 | 12.85 | 12.9(T) |
| $CD$ | -9.00 | -0.5735 | 9.00 | 0 |
| $DB$ | 7.847 | 0.5 | -7.847 | 0 |
| $DE$ | -7.847 | -0.5 | 7.847 | 0 |
| $BG$ | -7.847 | -0.5 | 7.847 | 0 |
| $BA$ | 12.857 | 0 | 0 | 12.9(T) |
| $AE$ | -15.694 | 0 | 0 | 15.7(C) |
| $AG$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $FG$ | -15.694 | -1.00 | 15.69 | 0 |
| $FE$ | -12.857 | -1.638 | 25.71 | 12.9(T) |
| $CF$ | 0 | 1.0 | -15.69 | 15.7(C) |

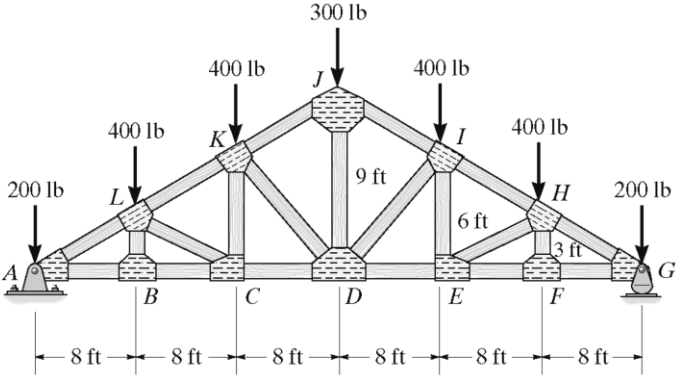
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۳-۳۶) در خرپای پرات نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *JI*، *DI* و *DE* و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.



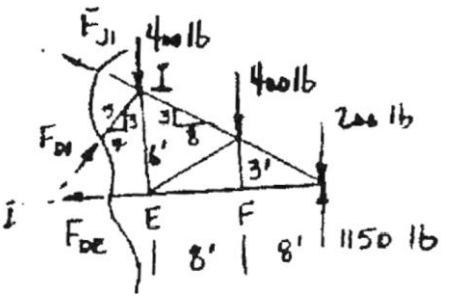

*شکل مسئله ۳-۳۶*

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با توجه به برش زده در خرپا و نوشتن معادلات تعادل داریم:




$$\sum M_I = 0 \Rightarrow 200\times 16 - 1150\times 16 + F_{DE}\times 6 + 8\times 400 = 0$$

$$\Rightarrow F_{DE} = 2000\,lb = 2.00k(T)$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow F_{DI}\left(\frac{3}{5}\right)\times 24 - 400\times 16 - 400\times 8 = 0$$

$$\Rightarrow F_{DI} = 666.7lb = 667\,lb(C)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 400\times 8 + 400\times 16 + 200\times 24 - 1150\times 24 - F_{JI}\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)\times 24 = 0$$

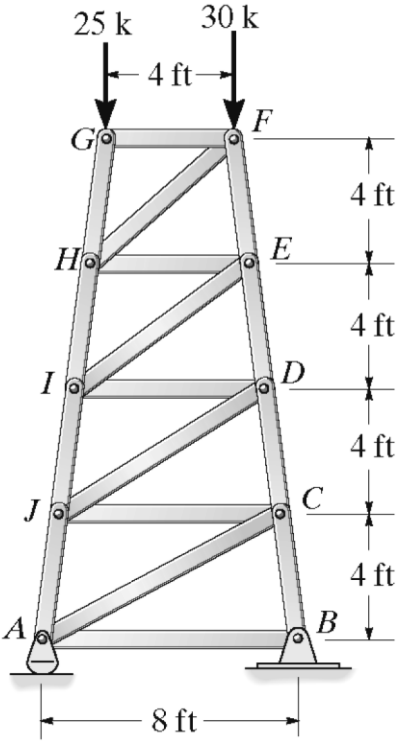
$$\Rightarrow F_{JI} = 1566.4lb = 1.57k(C)$$

۳-۳۷) در خرپای چوبی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $JI$، $JD$ و $ID$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۳۷

حل) با زدن یک برش به صورت زیر داریم:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -F_{JI}\cos 7.125^\circ \times 6 + 25\times 5 + 30\times 1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{JI} = 26.0k(C)$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow F_{JD}\cos 31.61^\circ \times 24 + F_{JD}\sin 31.61^\circ \times 3 - 30\times 2 + 25\times 2 = 0$$

$$\Rightarrow F_{JD} = 0.4543\,k = 0.454k(C)$$

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow F_{CD}\cos 7.125^\circ \times 7 - 25\times 1.5 - 30\times 5.5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = 29.15k(C)$$

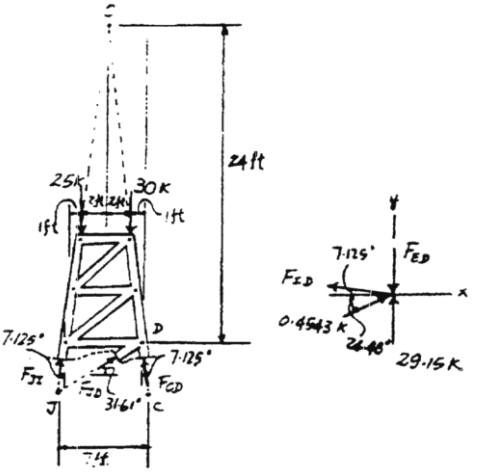
در مفصل $D$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 0.4543\cos 24.48^\circ - F_{ID}\cos 7.125^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ID} = 0.417k(T)$$

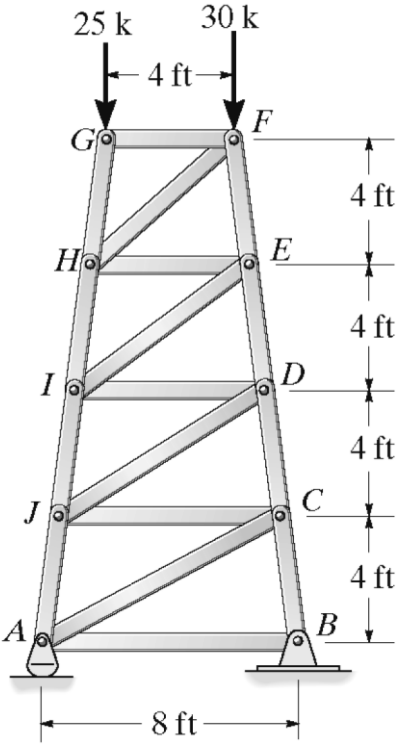
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۳-۳۸) در خرپای چوبی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *HI*، *ED* و *EI* و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۳۸

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با زدن یک برش به صورت زیر داریم:

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow 25\times 2 - 30\times 2 + F_{EI}\cos 36.03^\circ \times 20 + F_{EI}\times \sin 36.03^\circ \times 2.5 = 0$$

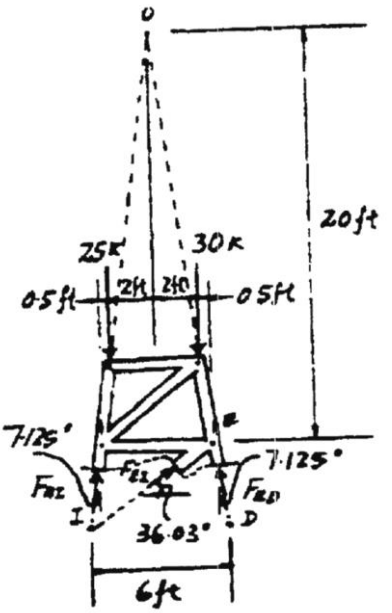
$$\Rightarrow F_{EI} = 0.567k(C)$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 30\times 0.5 + 25\times 4.5 - F_{HI}\cos 7.125^\circ \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{HI} = 25.7k(C)$$

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow -25\times 1 - 30\times 5 + F_{ED}\cos 7.125^\circ \times 6 = 0$$

$$\Rightarrow F_{ED} = 29.4k(C)$$

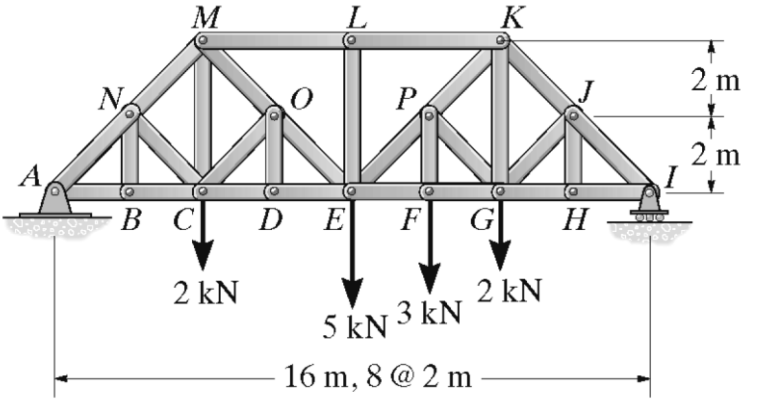



۳-۳۹) در خرپای بالتیمور نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *EF*، *EP* و *LK* و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





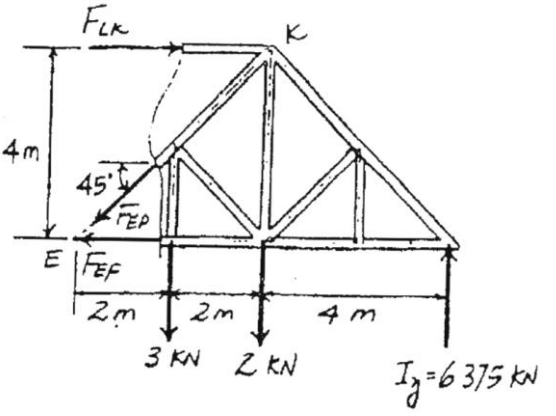

شکل مسئله ۳-۳۹

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow I_y \times 16 - 2\times 12 - 3\times 10 - 5\times 8 - 2\times 4 = 0$$
$$\Rightarrow I_y = 6.375\,kN$$

با استفاده از روش مفصل نیروی اعضای $BN$، $NC$، $DO$، $OC$، $HJ$، $LE$ و $JG$ برابر صفر می‌باشد. همچنین با استفاده از مقطع داریم:

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow 3\times 2 + 6.375\times 4 - F_{EF}\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 7.875\,kN(T)$$
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 6.375\times 8 - 2\times 4 - 3\times 2 - F_{LK}\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{LK} = 9.25\,kN(C)$$
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 6.375 - 3 - 2 - F_{ED}\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 1.94\,kN(T)$$

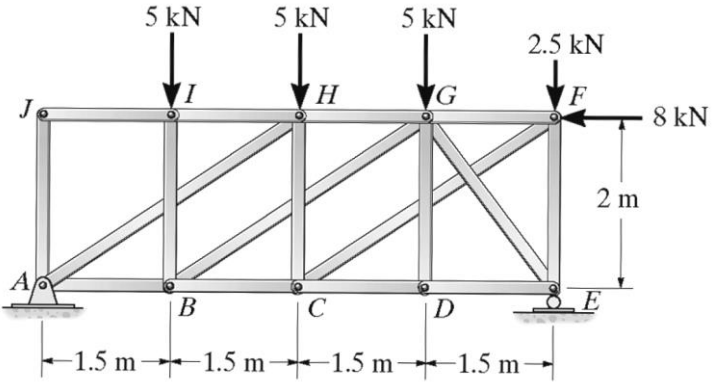



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۳-٤۰) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $HG$، $BG$ و $BC$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.



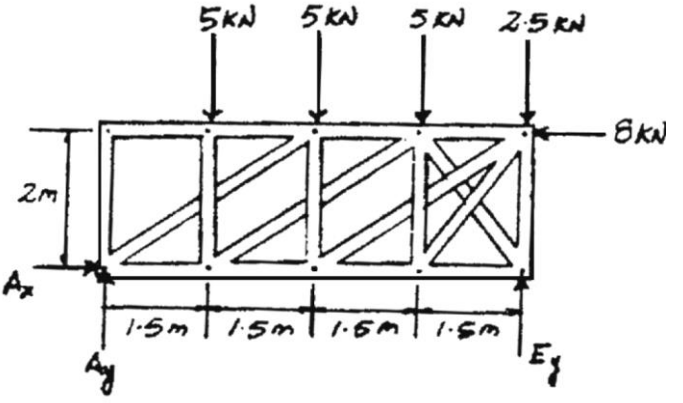

*شکل مسئله ۳-٤۰*

حل) با نوشتن معادله تعادل برای کل خرپا داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5\times1.5-5\times3-5\times4.5-2.5\times6+8\times2+E_y\times6=0$$
$$\Rightarrow \quad E_y = 7.333kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 8kN$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 5-5-5-2.5+7.333=0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 10.167kN$$




در مفصل $J$ داریم:

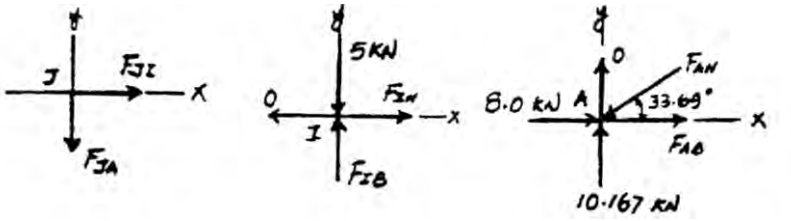
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{JI} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{JI} = 0$$




در مفصل $I$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{IH} = 0$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{IB} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{IB} = 5.00kN(C)$$

در مفصل $A$ داریم:

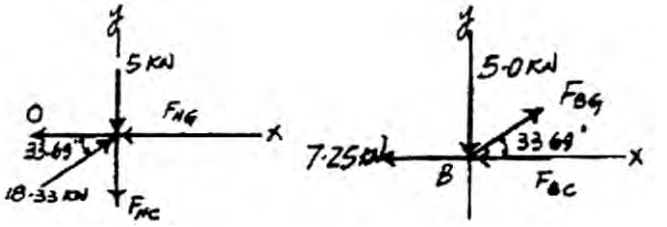
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 10.167 - F_{AH}\sin 33.69^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH} = 18.33kN(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 8.0 - 18.33\cos 33.69^\circ + F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 7.25kN(T)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BG}\sin 33.69^\circ - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BG} = 9.014kN = 9.01kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 9.014\cos 33.69^\circ - 7.25 - F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 0.25kN(C)$$




در مفصل $H$ داریم:

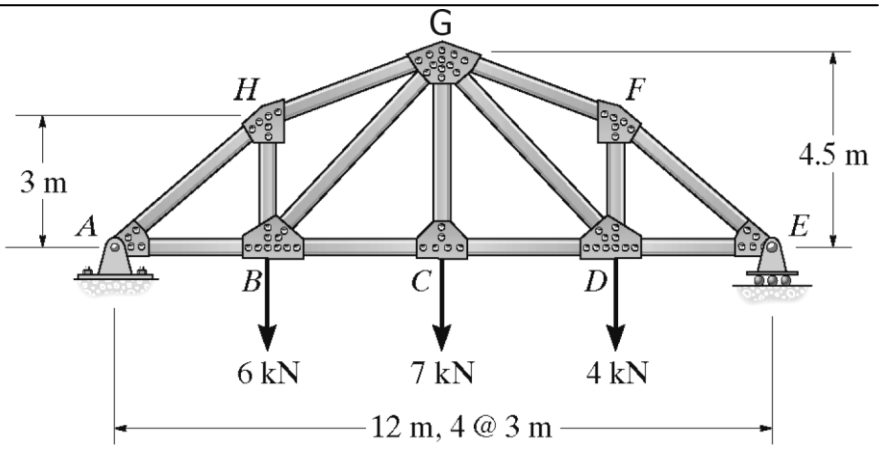
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow 18.33\cos 33.69^\circ - F_{HG} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HG} = 15.25kN(C)$$

۳-۴۱) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $BG$، $HG$ و $BC$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



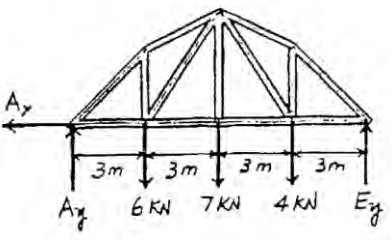


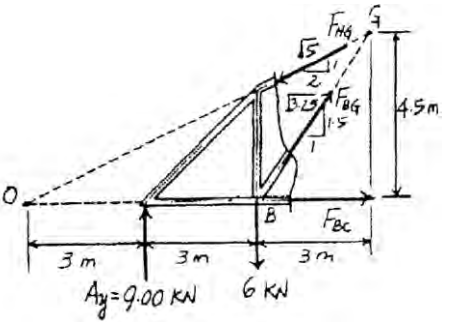

شکل مسئله ۳-۴۱

حل) با گشتاورگیری در کل خرپا داریم:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 6\times 9 + 7\times 6 + 4\times 3 - A_y \times 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 9.00kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$




با استفاده از روش مقطع داریم:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow F_{BC}\times 4.5 + 6\times 3 - 9\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 8.00kN(T)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{HG}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times 6 - 9\times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HG} = 10.1kN(C)$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow F_{BG}\left(\frac{1.5}{\sqrt{3.25}}\right)\times 6 + 9\times 3 - 6\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BG} = 1.8kN(T)$$

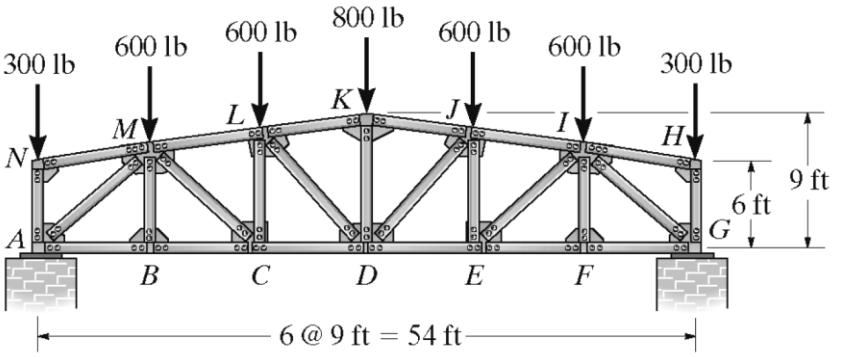
۳-۴۲) در خرپای وارون نشان داده شده در شکل زیر که از آن برای پوشش سقف یک ساختمان استفاده شده است، مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *LD*، *CD* و *KD* و

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین و تکیه‌گاه‌های خرپا به صورت غلتکی می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۴۲

$$\sum M_L = 0 \Rightarrow 18\times 1.9 - 18\times 0.3 - 9\times 0.6 - 8\times F_{CD} = 0$$

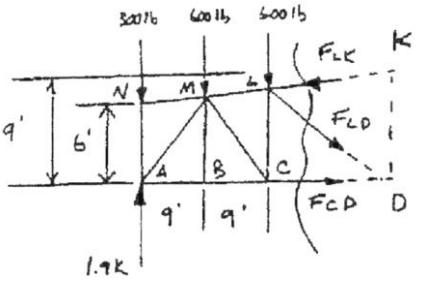
$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 2.925 = 2.92k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{145}}F_{LD} - \frac{9}{\sqrt{82}}F_{LK} + 2.925 = 0$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 1.9 - 0.3 - 0.6 - 0.6 - \frac{8}{\sqrt{145}}F_{LD} - \frac{1}{\sqrt{82}}F_{LK} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{LK} = 3.02k(C)$$

$$\Rightarrow \quad F_{LD} = 0.100k(T)$$



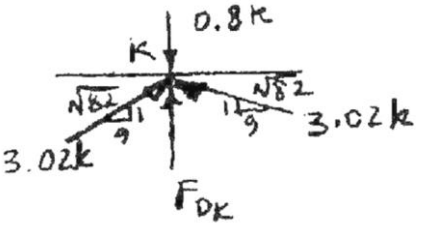

در مفصل $K$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{82}}\right)(3.02) + F_{DK} - 0.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DK} = 0.133k(C)$$

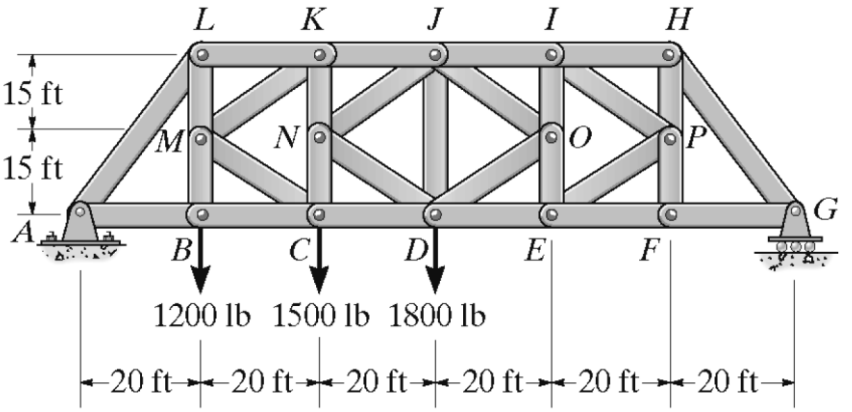
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۳-۴۳) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای *KJ*، *NJ*، *ND* و *CD* و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

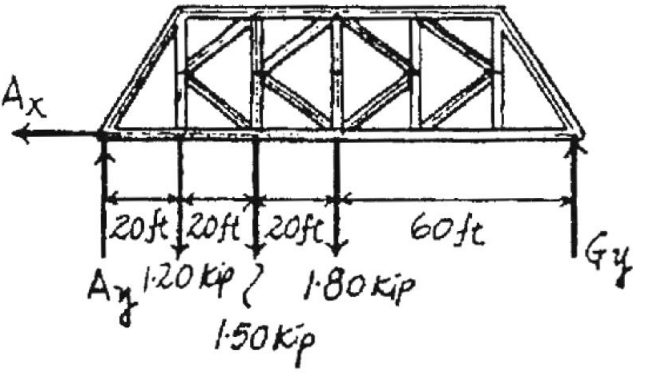



شکل مسئله ۳-۴۳

حل) با گشتاورگیری در کل خرپا داریم:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 1.2\times100 + 1.5\times80 + 1.8\times60 - A_y \times 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2.9k$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$



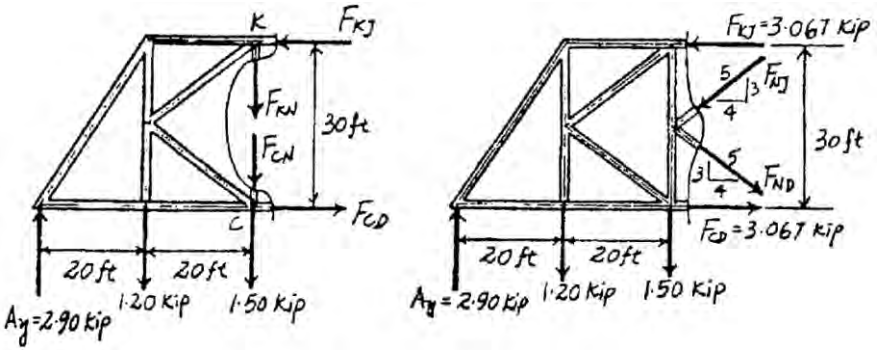

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مقطع زده داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{KJ} \times 30 + 1.2 \times 20 - 2.9 \times 40 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_{KJ} = 3.067k = 3.07k(C)$$
$$\sum M_K = 0 \Rightarrow F_{CD} \times 30 + 1.2 \times 20 - 2.9 \times 40 = 0$$
$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 3.067k = 3.07k(T)$$




$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ND}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{NJ}\left(\frac{4}{5}\right) + 3.067 - 3.067 = 0$$

$$\Rightarrow F_{ND} = F_{NJ}$$

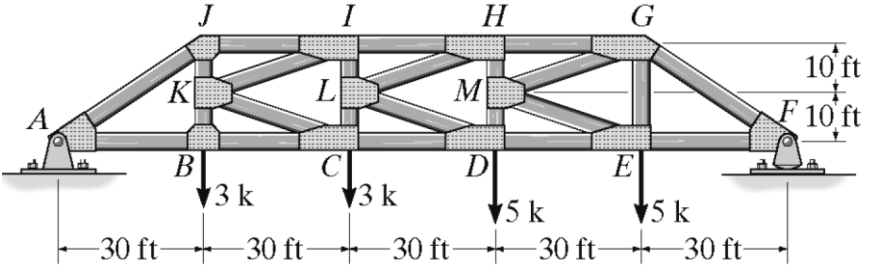
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 2.9 - 1.2 - 1.5 - F_{ND}\left(\frac{3}{5}\right) - F_{NJ}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F_{ND} + F_{NJ} = 0.3333$$

با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$\Rightarrow F_{ND} = 0.167k(T) \qquad F_{NJ} = 0.167k(C)$$

۳-٤٤) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $IH$، $CD$ و $LH$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-٤٤

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

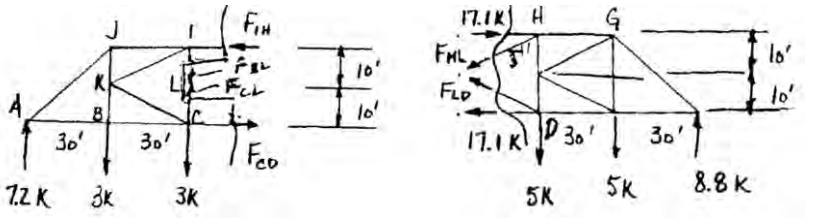
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) در مقطع نشان داده شده در شکل داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{IH} \times 20 + 3 \times 30 - 7.2 \times 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{IH} = 17.1k(C)$$

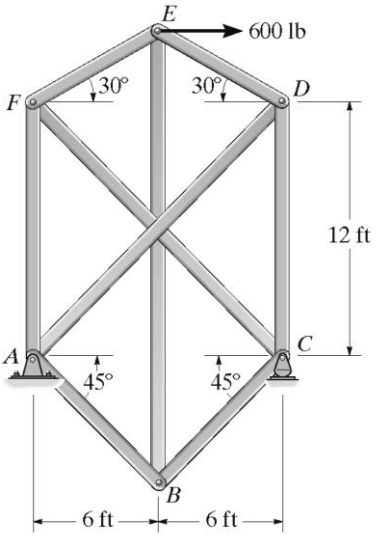
$$\sum M_I = 0 \Rightarrow F_{CD} \times 20 - 7.2 \times 60 - 3 \times 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 26.1k(T)$$




$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -17.1 \times 20 - 5 \times 30 + 8.8 \times 60 - F_{HL} \times 20\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{HL} = 1.90k(C)$$

۳-۴۵) در خرپای بغرنج نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند. برای تحلیل مکان عضو $AD$ را توسط میله‌ای در بین $E$ و $C$ عوض نمایید.




*شکل مسئله ۳-۴۵*

حل) با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

$$S_i = S_i' + xs_i' = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

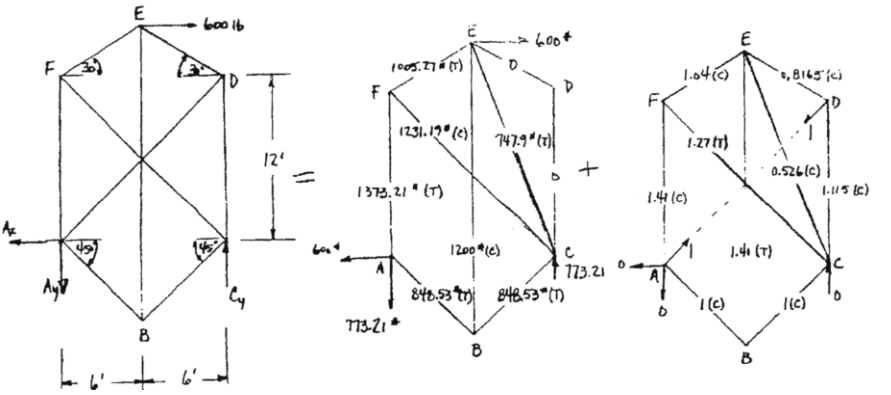
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$F_{EC} = S'_{EC} + (x)s_{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad 747.9 + (x)0.526 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1421.86$$

$$F_{AF} = S'_{AF} + (x)s_{AF} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1373.21 + (1421.86)(-1.41) = -631.61lb \quad \Rightarrow \quad F_{AF} = 631.61lb(C)$$




به صورتی مشابه داریم:

$$F_{AB} = 580\,lb(C)$$

$$F_{EB} = 820\,lb(T)$$

$$F_{BC} = 580\,lb(C)$$

$$F_{EF} = 473\,lb(C)$$

$$F_{CF} = 580\,lb(T)$$

$$F_{CD} = 1593\,lb(C)$$

$$F_{ED} = 1166\,lb(C)$$

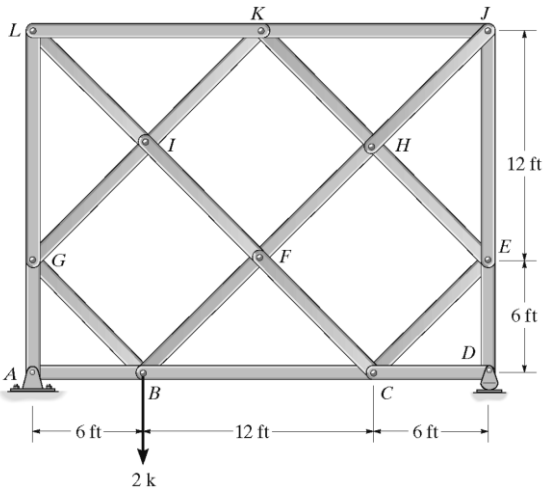
$$F_{DA} = 1428\,lb(T)$$

۳-٤٦) در خرپای بغرنج نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند. برای تحلیل عضو $JE$ را توسط میله‌ای در بین $K$ و $F$ عوض نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-٤٦

حل) با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

$$S_i = S_i' + xs_i' = 0$$

$$F_{KF} = 1.5 + 1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.5$$

بنابراین داریم:

$$F_{AB} = 0$$

$$F_{AG} = 1.5k(C)$$

$$F_{GB} = 0.707\,k(T)$$

$$F_{GL} = 0.50k(C)$$

$$F_{GI} = 0.707\,k(C)$$

$$F_{LI} = 0.707\,k(T)$$

$$F_{LK} = 0.500\,k(C)$$

$$F_{IK} = 0.707\,k(C)$$

$$F_{IF} = 0.707\,k(T)$$

$$F_{BF} = 2.12k(T)$$

$$F_{BC} = 1.00k(C)$$

$$F_{FC} = 0.707\,k(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$F_{FH} = 2.12k(T)$

$F_{KH} = 0.707\,k(T)$

$F_{KJ} = 1.50k(C)$

$F_{JH} = 2.12k(T)$

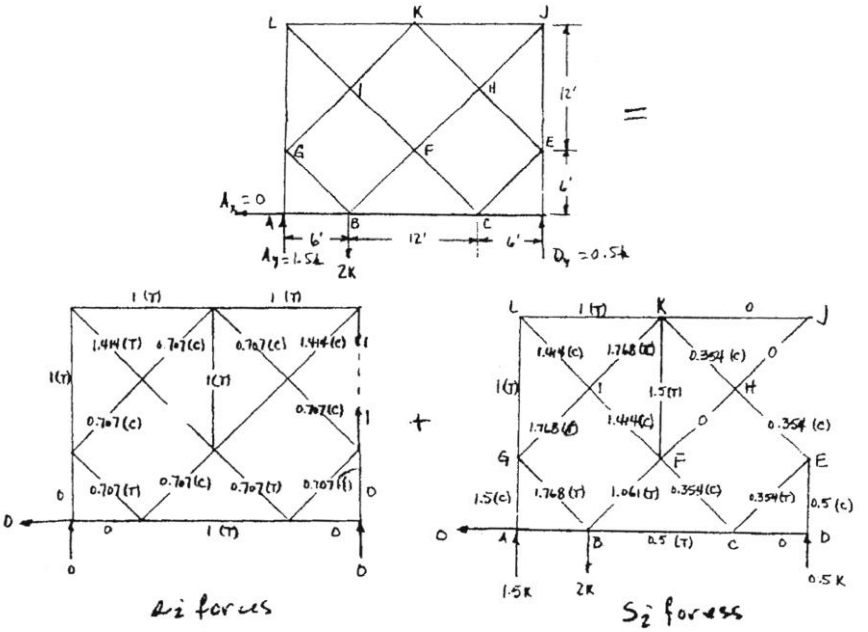
$F_{CD} = 0$

$F_{DE} = 0.500\,k(C)$

$F_{CE} = 0.707\,k(C)$

$F_{HE} = 0.707\,k(T)$

$F_{JE} = 1.50k(C)$

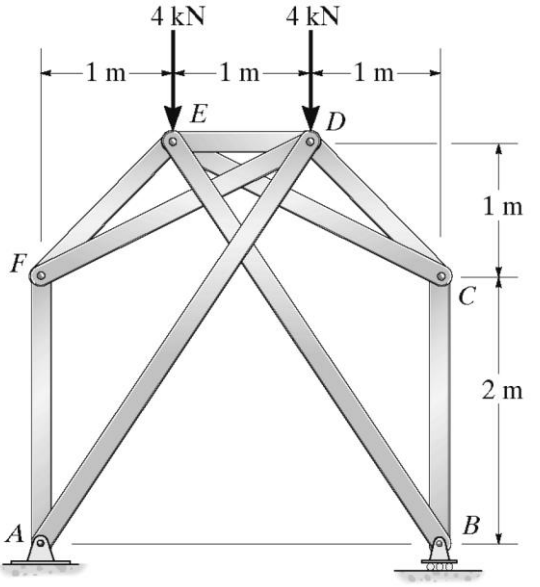



۳-۴۷) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

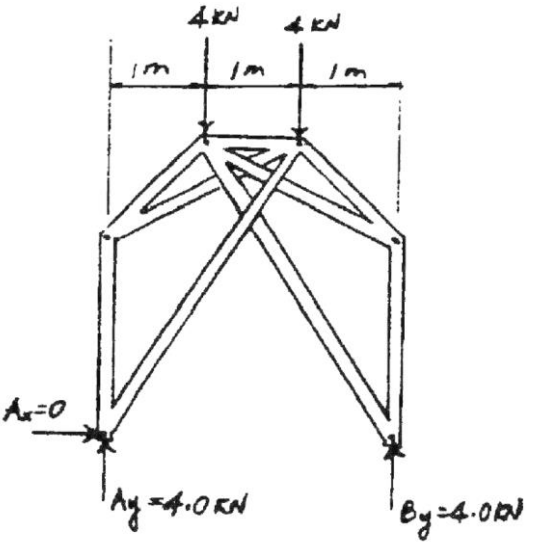





شکل مسئله ۳-۴۷

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای خرپا، داریم:

$A_x = 0 \qquad A_y = 4.00kN \qquad B_y = 4.00kN$




در مفصل $A$ داریم:

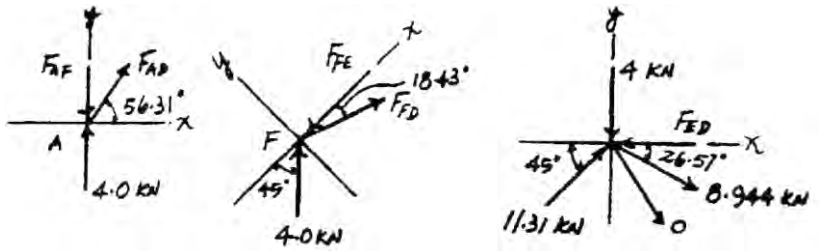
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AD} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 4 - F_{AF} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF} = 4.0kN(C)$$




در مفصل $F$ داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow 4\sin 45^\circ - F_{FD}\sin 18.43^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{FD} = 8.944\,kN = 8.94kN(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{FE}\cos 45^\circ + 8.944\cos 18.43^\circ - F_{FE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{FE} = 11.313\,kN = 11.3kN(C)$$

با توجه به تقارن در هندسه و بارگذاری داریم:

$$F_{BC} = 4.00kN(C)$$
$$F_{CE} = 8.94kN(T)$$
$$F_{BE} = 0$$
$$F_{CD} = 11.3kN(C)$$

در مفصل $E$ داریم:

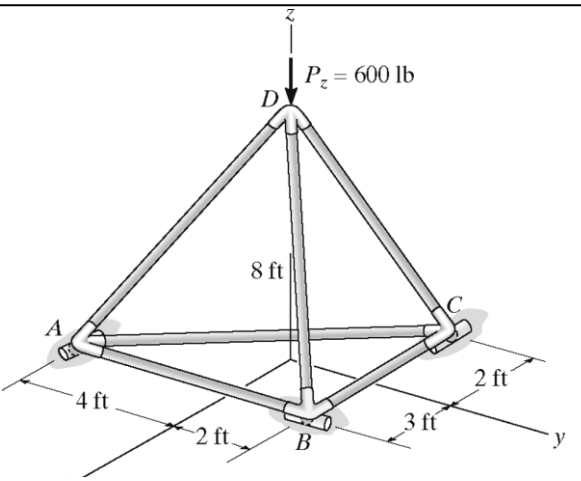
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{ED} + 8.944\cos 26.56^\circ + 11.31\cos 45^\circ = 0$$
$$\Rightarrow F_{ED} = 16.0kN(C)$$
$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow -4 - 8.944\sin 26.56^\circ + 11.31\sin 45^\circ = 0 \text{ کنترل}$$

۳-۴۸) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $BA$، $AD$ و $CD$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۴۸

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل خرپا داریم:

$$\sum M_{AB} = 0 \Rightarrow C_z \times 5 - 600 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_z = 360\,lb$$

$$\sum M_{CB} = 0 \Rightarrow 600 \times 2 - A_y \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = 200\,lb$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = 40.0\,lb$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - C_y = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow A_y \times 3 + C_y \times 2 = 0$$

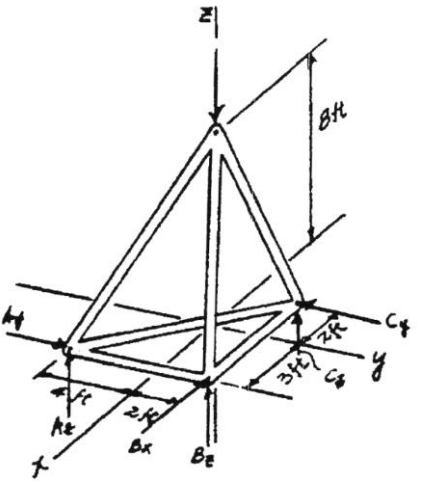
$$\Rightarrow A_y = 0$$

$$\Rightarrow C_y = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



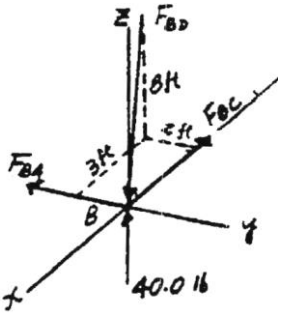



در مفصل $B$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\frac{8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BD} = 43.87lb = 43.9lb(C)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{77}}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \times 43.87 - F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 15.0lb(T)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{77}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \times 43.87 - F_{BA} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA} = 10.0lb(T)$$




در مفصل $A$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\frac{8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 235.9lb = 236lb(C)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{\sqrt{89}}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \times 235.9 - F_{AC} \sin 36.8^\circ = 0$$

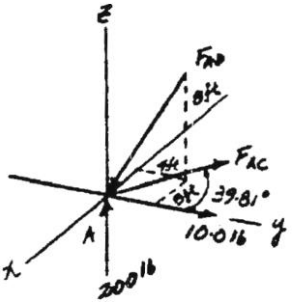
$$\Rightarrow \quad F_{AC} = 117.2lb = 117lb(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

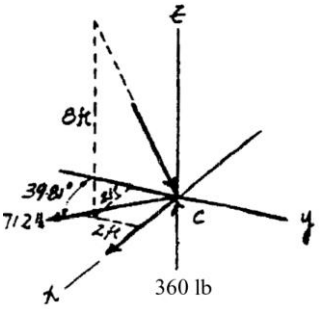


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 117.2\cos 39.81^\circ - \left(\frac{5}{\sqrt{89}}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\times 235.9 + 10.0 = 0$$ کنترل




در مفصل $C$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\frac{8}{\sqrt{72}}F_{CD} + 360 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 382lb(C)$$

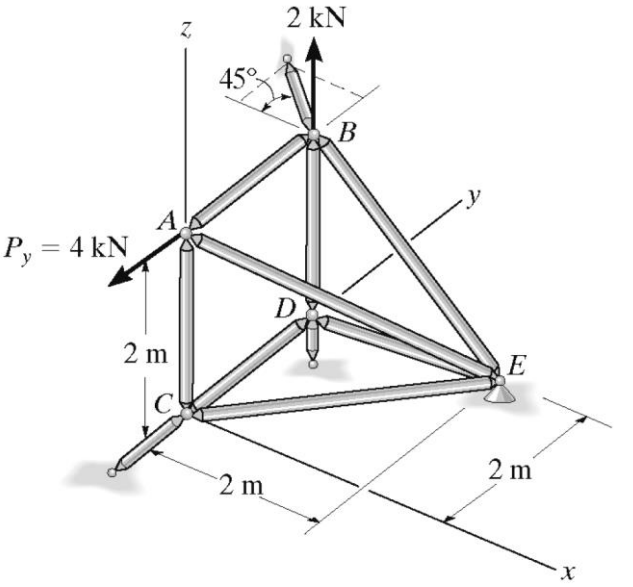



۳-۴۹) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

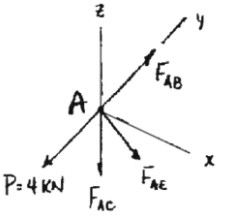





شکل مسئله ۳-٤۹

حل) در مفصل $A$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0.577\,F_{AE} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -4 + F_{AB} + 0.577\,F_{AE} = 0$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -F_{AC} - 0.577\,F_{AE} = 0$$
$$\Rightarrow F_{AC} = F_{AE} = 0$$
$$\Rightarrow F_{AB} = 4kN(T)$$




در مفصل $B$ داریم:

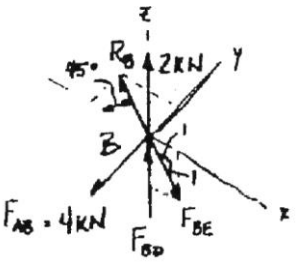
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_B\left(\cos 45^\circ\right) + 0.707\,F_{BE} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -4 + R_B \sin 45^\circ = 0$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 2 + F_{BD} - 0.707\,F_{BE} = 0$$
$$\Rightarrow R_B = F_{BE} = 5.66kN(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

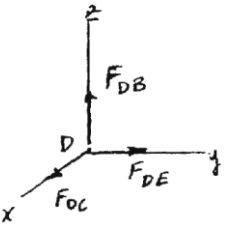


$\Rightarrow F_{BD} = 2kN(C)$




در مفصل $D$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DC} = 0$$




در مفصل $C$ داریم:

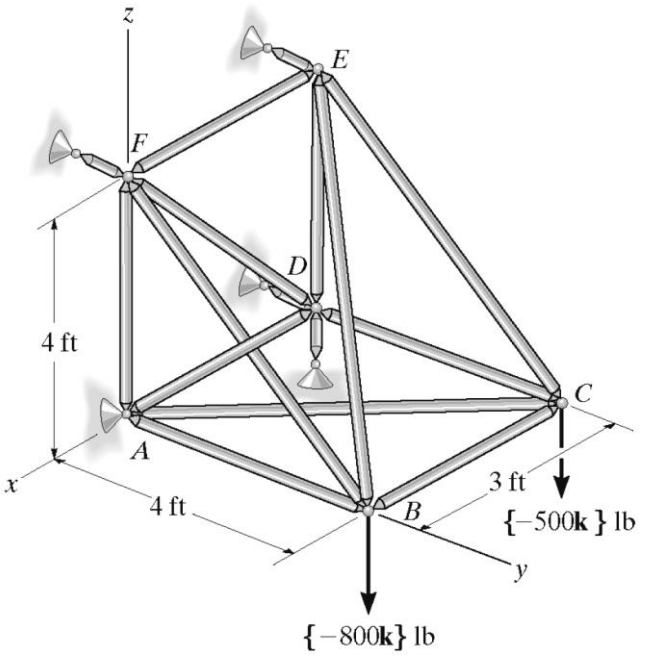
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CE} = 0$$

۳-۵۰) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۵۰

حل) در مفصل $C$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{CE}\left(\sin 45^\circ\right) - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 707.1lb = 707\,lb(T)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CD} - 707.1\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 500\,lb(C)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CB} = 0$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BE}\left(\frac{-3}{\sqrt{41}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{BF}\sin 45^\circ - 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BF} = 1131.4lb = 1.13k$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BA} - 1131.4\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA} = 800\,lb(C)$$

در مفصل $E$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{ED} - 0.707.1\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED} = 500\,lb(C)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 707.1\left(\cos 45^\circ\right) - E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 500\,lb$$

در مفصل $F$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{FD}\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FD} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{FA} - 1131.4\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FA} = 800lb(C)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1131.4\sin 45^\circ - F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 800lb$$

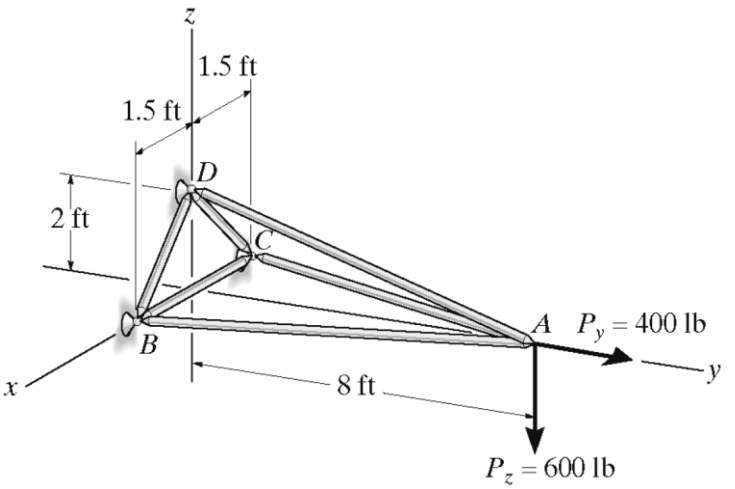
در مفصل $D$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DA} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 500lb$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_z - 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_z = 500lb$$

۳-۵۱) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $AB$، $AD$ و $AC$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۵۱

حل) در مفصل $A$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{AD}\sin 14.04^\circ - 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 2473.9lb(T) = 2.47k(T)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = F_{AC}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 400 + 2F_{AB}\sin 79.38^\circ - 2473.9\cos 14.04^\circ = 0$$

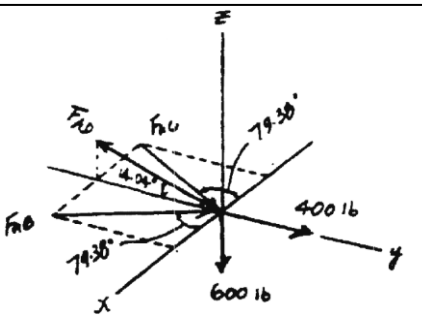
$$\Rightarrow F_{AB} = 1017\,lb(C) = 1.02k(C)$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 1017\,lb(C) = 1.02k(C)$$

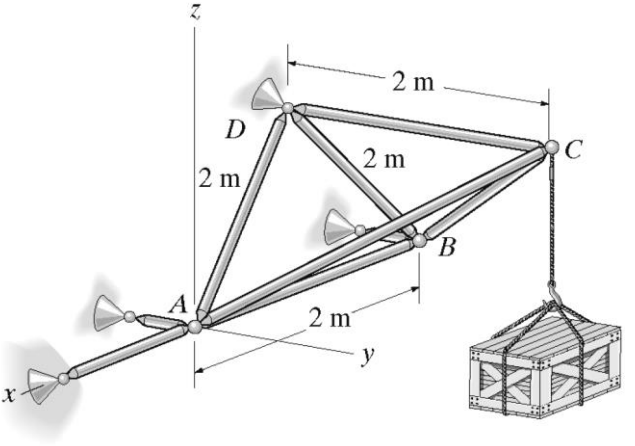
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۳-۵۲) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا را تحت وزن جعبه‌ای به مقدار $5kN$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۵۲

حل) در مفصل $C$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) - F_{BC}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} = F_{BC} = F$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1.732F}{\sqrt{8}}\right) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 4.0826kN(C)$$

$$\Rightarrow F_{AC} = F_{BC} = 4.08kN(C)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{2\times 4.0826}{\sqrt{8}}\right) - F_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = 5.7736\,kN = 5.77kN(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $B$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{BD}\sin 60^\circ - \frac{1.732\times 4.0826}{\sqrt{8}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BD} = 2.8867\,kN = 2.89kN(T)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2.8867\cos 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{8}}4.0826 + F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - \frac{2}{\sqrt{8}}\times 4.0826 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 2.89kN$$

در مفصل $A$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{AD}\sin 60^\circ - \frac{1.732\times 4.0826}{\sqrt{8}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{AD} = 2.8867\,kN = 2.89kN(T)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{2\times 4.0826}{\sqrt{8}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2.8868kN = 2.89kN$$

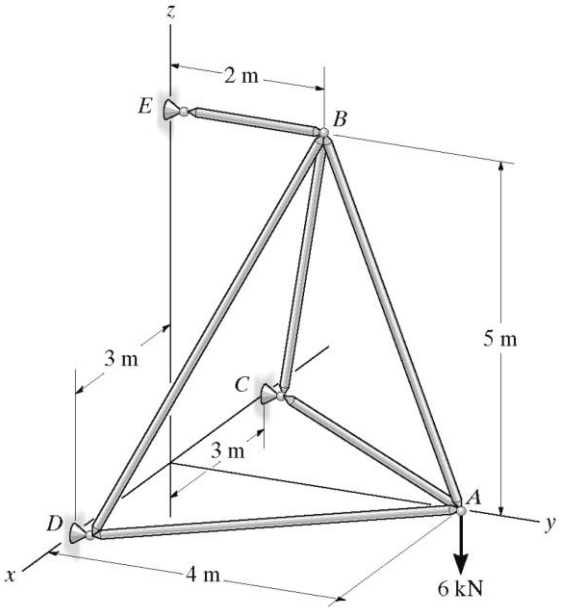
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_y - 2.8868(\cos 60^\circ) + \frac{4.0826}{\sqrt{8}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

۳-۵۳) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضا و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۳-۵۳

حل) در مفصل $A$ داریم:

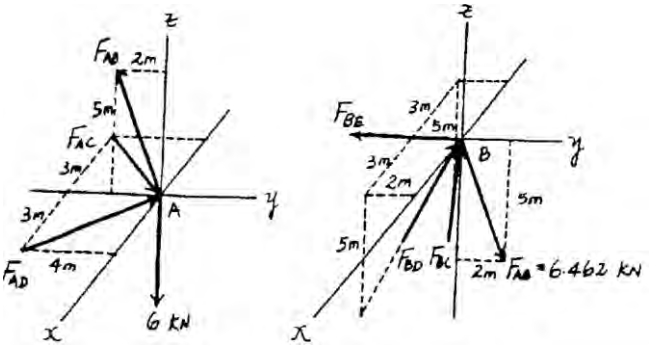
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{AB}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 6.462kN(T) = 6.46kN(T)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC}\left(\frac{3}{5}\right) - F_{AD}\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} = F_{AD}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC}\left(\frac{4}{5}\right) + F_{AD}\left(\frac{4}{5}\right) - 6.462\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} + F_{AD} = 3.0$$

با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$F_{AC} = F_{AD} = 1.50kN(C)$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $B$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right) - F_{BD}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = F_{BD}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{BC}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right) + F_{BD}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right) - 6.462\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BC} + F_{BD} = 7.397$$

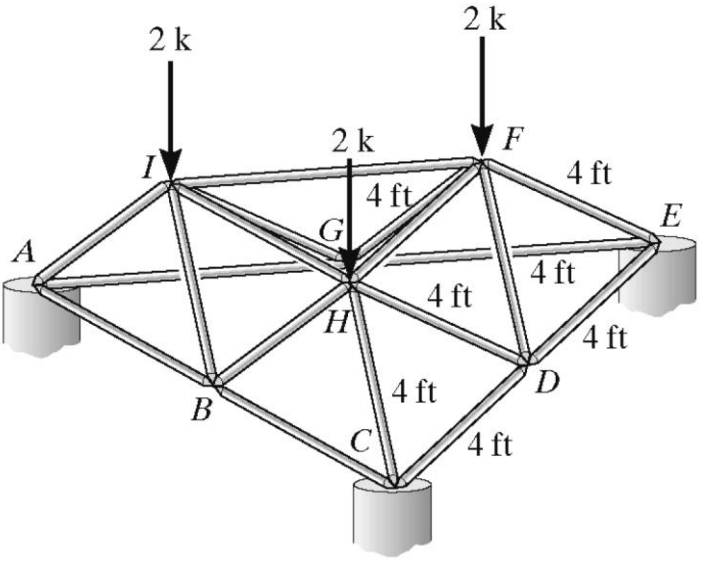
با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$\Rightarrow \quad F_{BC} = F_{BD} = 3.699\,kN(C) = 3.70\,kN(C)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2\left(3.699\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right)\right) + 6.462\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) - F_{BE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BE} = 4.80\,kN(T)$$

۳-٥٤) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $CD$، $DH$ و $CH$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند. تکیه‌گاه‌های خرپا به صورت صاف و بی اصطکاک است.



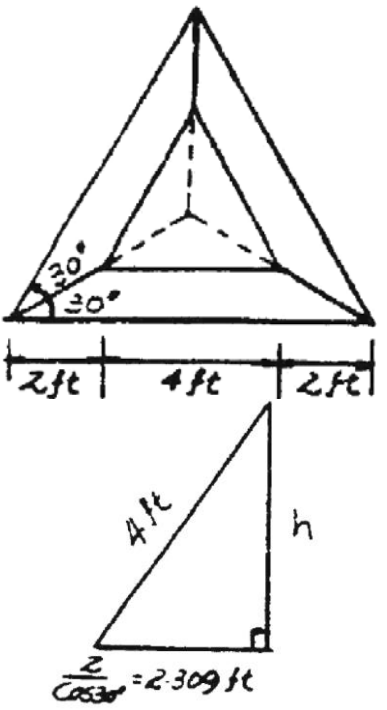

*شکل مسئله ۳-٥٤*

حل) در شکل زیر نمای بالای خرپا نشان داده شده است:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$$h = \sqrt{4^2 - 2.309^2} = 3.2660\ ft$$

به سبب تقارن داریم:

$$A_y = C_y = E_y = 2.0k$$

در گره $C$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 2.0 - \frac{3.266}{4} F_{CH} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 2.449k = 2.45k(C)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{CB}\cos 30^\circ + \frac{1.155}{4}(2.449) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CB} = 0.8165\,k = 0.817k(T)$$

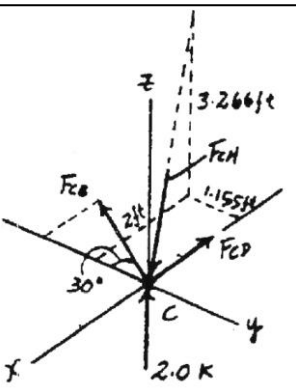
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{CD} - 0.8165\sin 30^\circ + \left(\frac{2}{4}\right)(2.449) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 0.8165\,k = 0.817k(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در گره $D$ داریم:

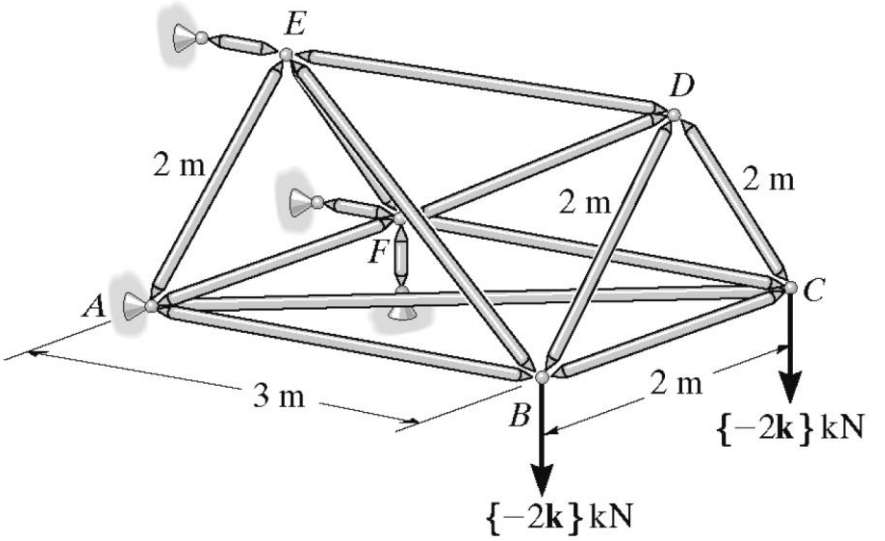
به سبب تقارن داریم:

$$F_{DE} = F_{CD} = 0.8165\,k(T)$$

$$F_{DH} = F_{DF}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F_{DH}\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DH} = 0$$

۳-۵۵) در خرپای فضایی نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $BC$، $BE$ و $DF$ و همچنین نوع بار (کششی یا فشاری بودن آنها) را نیز تعیین نمایید. فرض کنید تمام اتصالات به صورت پین می‌باشند.




شکل مسئله ۳-۵۵

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

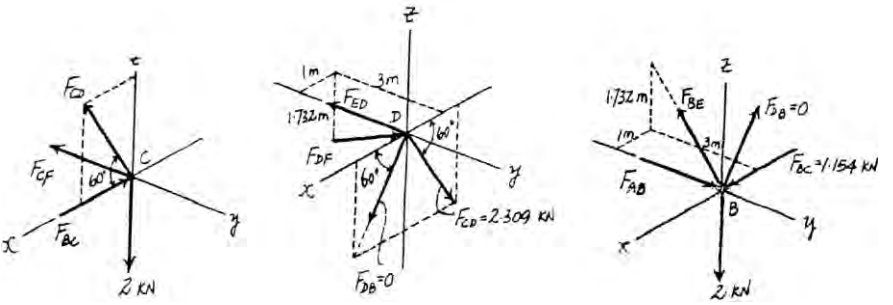
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) در گره $C$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{CD}\sin 60^\circ - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 2.309\,kN(T)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2.309\cos 60^\circ - F_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 1.154\,kN(C) = 1.15kN(C)$$




در گره $D$ داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DF}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) - 2.309\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DF} = 4.16kN(C)$$

در $B$ داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{BE}\left(\frac{1.732}{\sqrt{13}}\right) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 4.16kN(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل چهارم
# نیروهای داخلی در اعضای سازه‌ای

## ٤-۱ کلیات

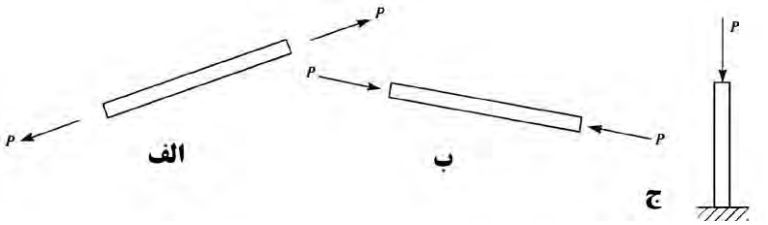
هدف اصلی سازه‌ها تحمل و انتقال بارهای وارد بر آنهاست. برای رسیدن به این هدف سازه باید قادر باشد تا بارهای اعمالی را از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر انتقال دهد، مثلاً باید قادر باشد تا نیروهای وارده را به راحتی به تکیه‌گاه منتقل کند.

## ٤-۲ انواع بارها

یک سازه ممکن است تحت تاثیر بارهای مختلف و پیچیده‌ای قرار گیرد. به‌هرحال بارهای وارده به سازه‌های مورد بحث را می‌توان در چهار نوع خلاصه کرد: نیروهای محوری، نیروهای برشی، لنگرخمشی و پیچشی.

**بارهای محوری**

بارهای محوری در امتداد محور طولی یک عضو سازه اعمال می‌شود. در صورتی که عمل بار روی عضو به صورتی باشد که مانند شکل٤-۱الف باعث افزایش طول آن شود، بار از نوع کششی است و در صورتی که باعث کوچک شدن طول عضو شود (مانند شکل ٤-۱ب) به آن بار فشاری گویند.




*شکل ٤-۱ بارهای محوری*

اعضایی همچون شکل ٤-۱الف و ب در قاب‌های با اتصالات مفصلی و خرپاها دیده می‌شوند. شکل٤-۱ج نیز یک پایه را نشان می‌دهد که تحت بار فشاری محوری قرار دارد.

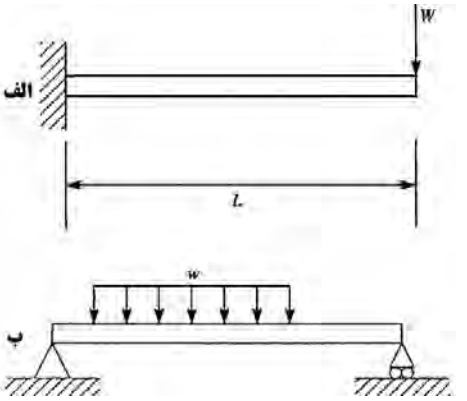
**بارهای برشی**

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



نیروی برشی همیشه عمود بر محور عضو اعمال می‌شود. در شکل٤-٢الف یک تیر را که نیروی برشی متمرکز $W$ را تحمل می‌کند نشان داده شده است. در شکل ٤-٢ب نیروی برشی در طول عضو پخش شده و شدت بار برابر $w$ بر واحد طول می‌باشد. بار متمرکز قادر است که به یک نقطه اعمال شود. در عمل تمام بارها به صورت گسترده بر روی تیر پراکنده شده‌اند ولی در بعضی مواقع که نقطه اثر بار کوچک است آنها را به صورت متمرکز در نظر می‌گیریم. مثال عملی از این حالت وقتی است که تیرهای فرعی بر روی یک تیر اصلی به صورت عرضی قرار گرفته‌اند. نیروی ناشی از تیرهای فرعی به صورت متمرکز به تیر اصلی وارد می‌شود. به عنوان مثالی از بارهای گسترده می‌توان به وزن خود تیرها اشاره کرد که در طول آنها گسترده شده است و یا در صورتی که بر روی یک تیر قرار گرفته باشد، وزن دیوار به صورت گسترده بر روی تیر زیرین اعمال می‌شود.




*شکل٤-٢ نیروهای برشی*

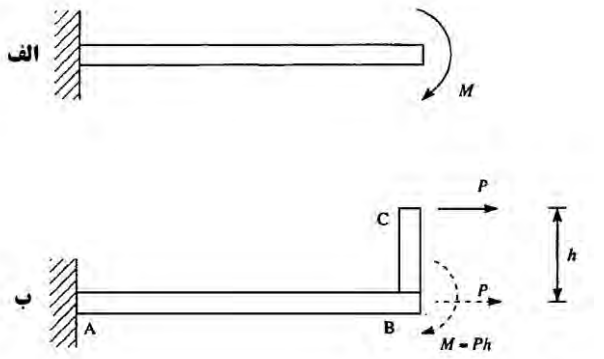
**لنگر خمشی**

در حالات عملی به سختی اتفاق می‌افتد که تیری تحت خمش خالص مانند شکل ٤-٣الف قرار گیرد و در اکثر مواقع تیرها تحت بارهای مختلف مانند تیر نشان داده شده در شکل ٤-٣ب قرار می‌گیرند. در این شکل عضو عمودی $BC$ که در انتهای تیر $AB$ قرار دارد نیروی افقی $P$ را حمل می‌کند. این بار باعث ایجاد نیروی محوری و یک لنگر خمشی به اندازه $M=Ph$ در تیر می‌شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

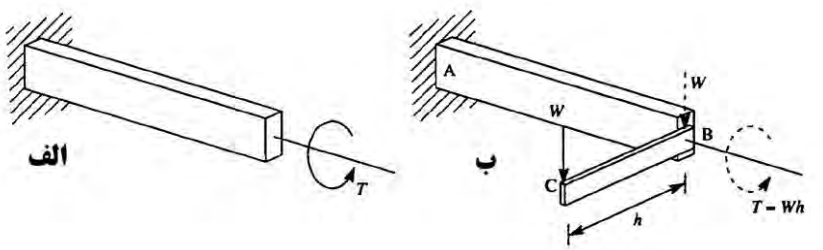





*شکل٤-٣ لنگر خمشی اعمال شده بر تیر*

**پیچش**

یک مثال عملی از پیچش در شکل ٤-٤الف نشان داده شده است. در این شکل تیر در پیچش خاص قرار دارد. در شکل ٤-٤ب عضو افقی $BC$ نیروی قائم $W$ را تحمل می‌کند که این نیرو در تیر اصلی موجب ایجاد یک لنگر پیچشی به اندازه $T=Wh$ و همچنین یک نیروی برشی به اندازه $W$ می‌شود.




شکل٤-٤ پیچش اعمال شده بر روی یک تیر

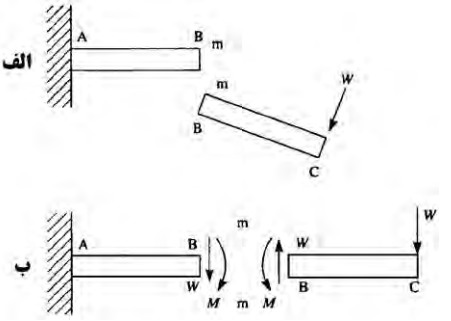
تمام بارهای نشان داده شده در شکل‌های ٤-١ تا ٤-٤ به صورت خارجی و به نمایندگی از بارهای واقعی بر روی تیرها اعمال شده‌اند. هرکدام از این بارها موجب ایجاد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌شوند. این سازه‌ها تحت بارهای اعمالی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تحت تعادل قرار می‌گیرند و می‌توان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را نیز به عنوان نیروهای خارجی که بر سازه اثر می‌کنند در نظر گرفت. حال تیر کنسول شکل ٤-٢الف را در نظر بگیرید. در صورتی که مانند شکل ٤-٥الف تیر را در محل $mm$ برشی بزنیم و قسمت $BC$ را جدا نماییم، قسمت $AB$ می‌تواند نیروهای اعمالی را مانند قبل تحمل کند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



کل جسم در تعادل است، بنابراین هر مقطع فرضی از جسم نیز باید در حال تعادل باشد و ایستایی خود را حفظ کند. بنابراین برای اینکه تیر دارای تعادل باشد در هر مقطع فرضی از آن بایستی سه نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی وجود داشته باشد تا تعادل در آن برقرار شود. در شکل ٤-٥ب این نیروها نشان داده شده است. در صورتی که به سمت چپ مقطع برش خورده نگاه کنیم جهت مثبت فرض شده برای نیروهای داخلی مانند جهت نشان داده شده بر روی تیر $AB$ است و در صورتی که به قسمت سمت راست نگاه کنیم جهت مثبت فرض شده برای نیروهای داخلی مانند جهت نشان داده شده بر روی تیر $BC$ خواهد بود. در صورتی که در تحلیل علامتی منفی به دست آمد به این معنی است که جهت واقعی نیروی داخلی خلاف علامت فرض شده است.




*شکل ٤-٥ نیروهای داخلی ایجاد شده در یک تیر*

### ٤-٢ نمادگذاری و قرارداد علامت‌ها

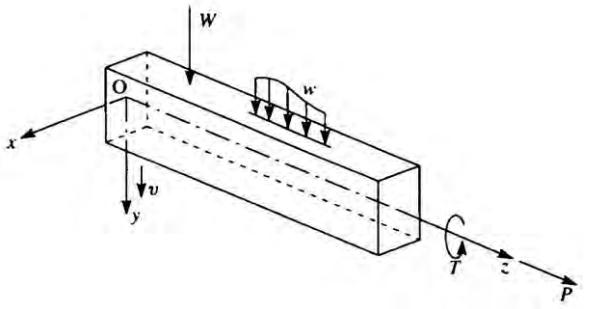
باید در روند تحلیل برای رسیدن به جواب‌های یکسان قراردادهایی در مورد محورهای مختصات و علامت‌های نیروها منظور شود. در تیرهای مورد بررسی مانند تیر نشان داده در شکل ٤-٦ محور $Oz$ محور طولی تیراست، محور$Oy$ به سمت پایین بوده و فرض می‌شود که نیروهای خارجی در جهت $y$ اعمال می‌شوند. در این صورت جابجایی در تیر را با $v$ نمایش می‌دهیم و جهت مثبت آن در جهت $y$ است. در صورتی که نیروی محوری که بر روی تیر اعمال می‌شود به صورت کششی باشد مثبت در نظر گرفته می‌شود. و همچنین در صورتی که یک لنگر پیچشی بر تیر اثر کند مانند شکل ٤-٦ و جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد (پاد ساعتگرد) مثبت در نظر گرفته می‌شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

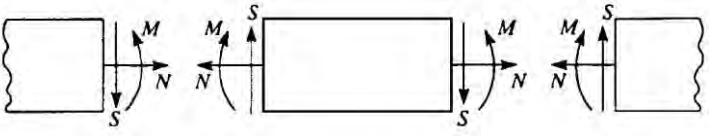
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



جهت مثبت نیروهای داخلی نیز در شکل ٤-٧ نشان داده شده است. با توجه به شکل دیده می‌شود وقتی برشی از تیر زده می‌شود در صورتی که به سمت چپ برش نگاه کنیم جهت مثبت برای نیروی برشی $S$ بالا به پایین است.




*شکل ٤-٦ نمادگذاری و قرارداد علامت‌ها*

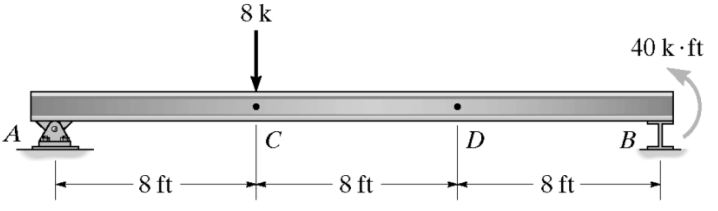



*شکل ٤-٧ قرارداد علامت‌های مثبت برای نیروهای داخلی*

همچنین جهت مثبت لنگر خمشی $M$ پادساعتگرد و نیروی محوری$N$ از چپ به راست است.[1]

**٤-٣ مسائل:**

٤-١) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقاط $C$ و $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ٤-١*

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

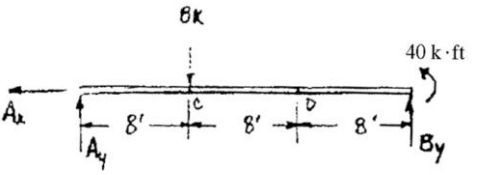


حل) تیر به صورت معین استاتیکی می‌باشند، بنابراین با استفاده از سه معادله تعادل در صفحه، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌شود.

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 40000 + 8000 \times 16 - 24A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 7000\ lb$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 7000 - 8000 + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 1000\ lb$$

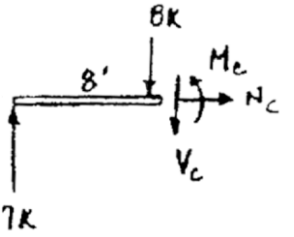



برای مقطع $C$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 7000 - 8000 - V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = -1000\ lb = -1k$$

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C - 7000 \times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 56000\ lb.ft = 56k.ft$$



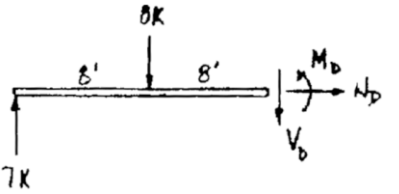

برای مقطع $D$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 7000 - 8000 - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = -1000\ lb = -1k$$

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D + 8000 \times 8 - 7000 \times 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_D = 48000\ lb.ft = 48k.ft$$

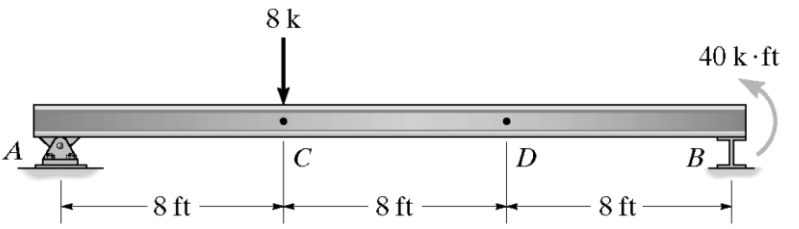



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

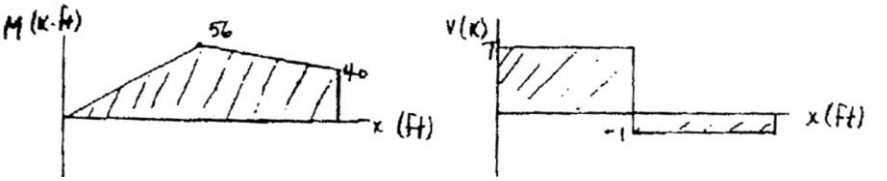


٤-٢) برای تیر نشان داده شده در سوال ٤-١، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم نمایید.

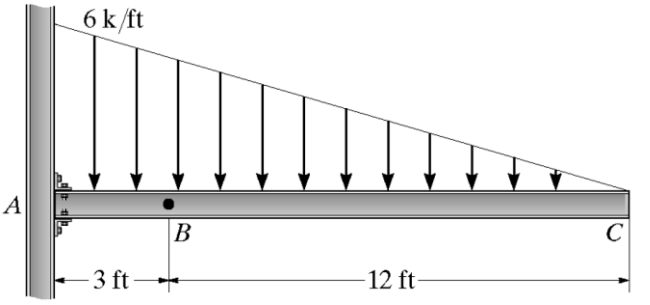



شکل مسئله ٤-٢

حل)




٤-٣) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $B$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ٤-٣

حل) برای مقطع $B$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 0$$

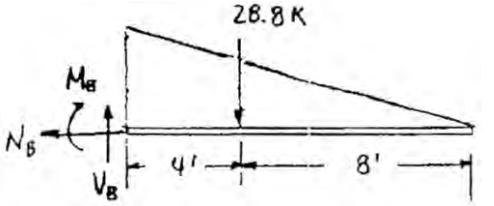
$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - 28.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 28.8lb$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B + 4\times 28.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = -115k.ft$$

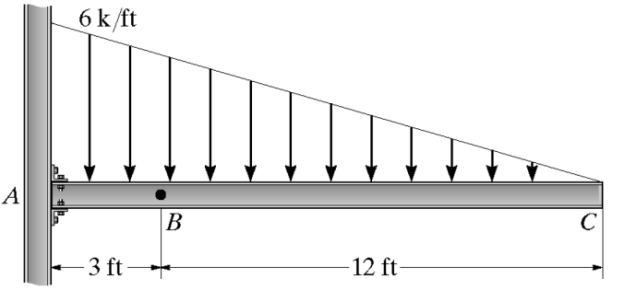
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



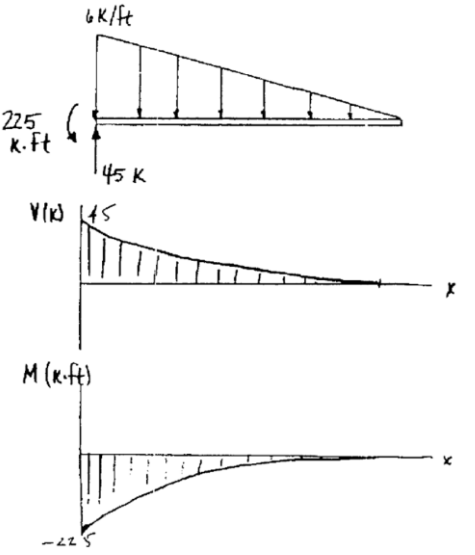



٤-٤) برای تیر نشان داده شده در سوال قبل، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ٤-٤*

حل)

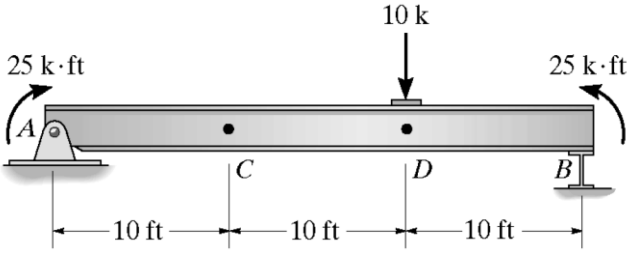



٤-٥) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقاط $C$ و $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





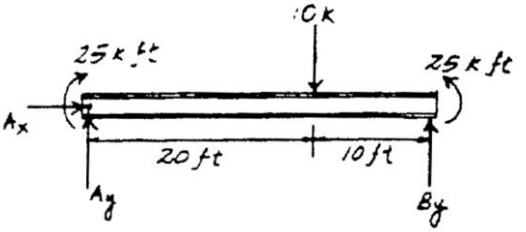

شکل مسئله ٤-٥

حل) با گشتاورگیری برای کل تیر داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \times 30 + 25 - 25 - 10 \times 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 6.667k$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 6.667 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 3.333k$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

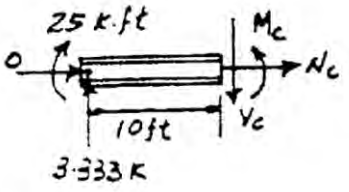


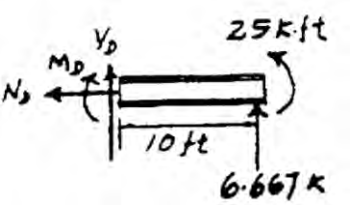

در قطعه $AC$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_C + 3.333 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 3.333k$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C - 25 - 3.333 \times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 58.3k.ft$$




در قطعه $DB$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D + 6.6667 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = -6.67k$$

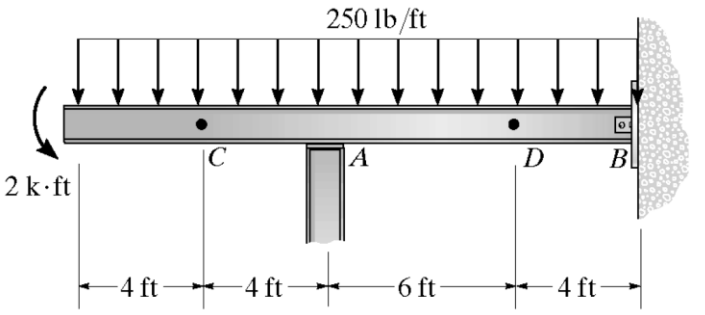
$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_D + 25 + 6.667 \times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 91.7k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



٤-٦) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقاط $C$ و $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.



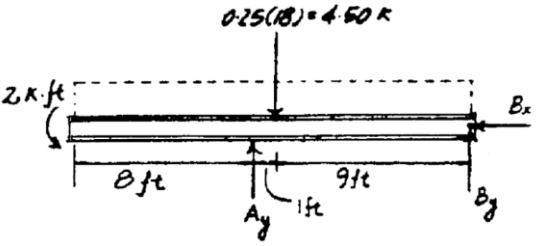

شکل مسئله ٤-٦

حل) با گشتاورگیری برای کل تیر داریم:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 4.5\times 9 + 2 - A_y \times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 4.25k$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y + 4.25 - 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 0.25k$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

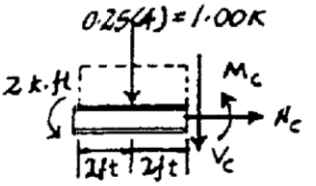



در قطعه سمت چپ $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_C - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 1.00k$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C + 1.00\times 2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = -4.00k.ft$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

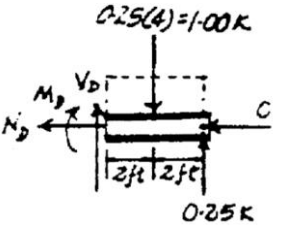


در قطعه $DB$ داریم:

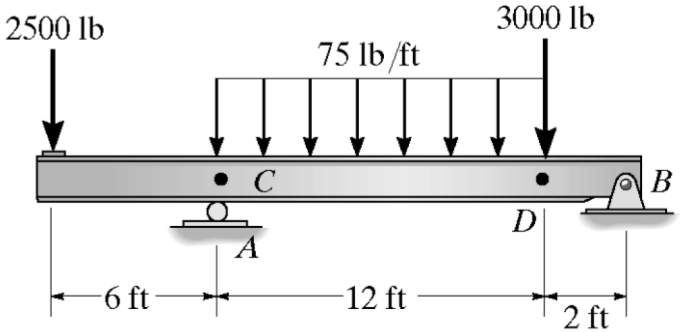
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D + 0.25 - 1.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 0.750k$$

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_D + 0.25 \times 4 - 1.00 \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = -1.00k.ft$$




۷-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ که نقطه سمت راست $A$ می‌باشد و $D$ که نقطه‌ای بر روی تیر در سمت چپ نیروی متمرکز $3000lb$ می‌باشد را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.




*شکل مسئله ۷-٤*

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل تیر داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2500 \times 20 - A_y \times 14 + 900 \times 8 + 3000 \times 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 4514.29lb$$

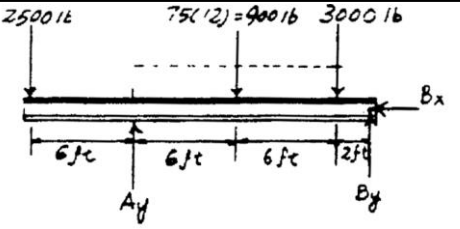
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2500 - 900 - 3000 + 4514.29 + B_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y = 1885.71lb$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





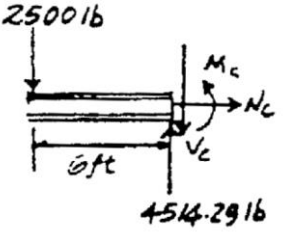

در قطعه سمت چپ $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2500 - V_C + 4514.29 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 2014.3lb = 2.01k$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C + 2500 \times 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_C = -15000\, lb.ft = -15.0k.ft$$

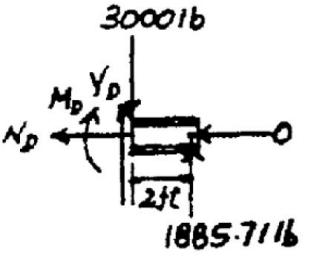



در قطعه $DB$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D + 1885.71 - 3000 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 1114.3lb = 1.11k$$

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 1885.71 \times 2 - M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 3771.4 = 3.77k.ft$$

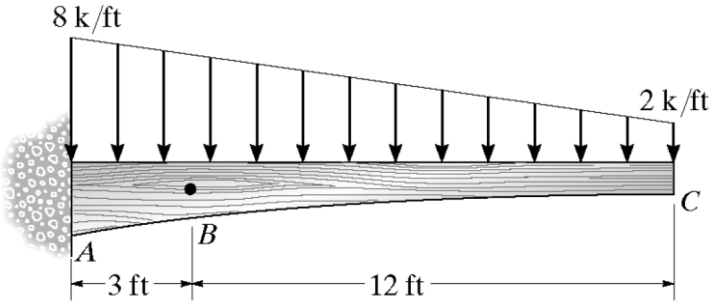



۸–٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $B$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





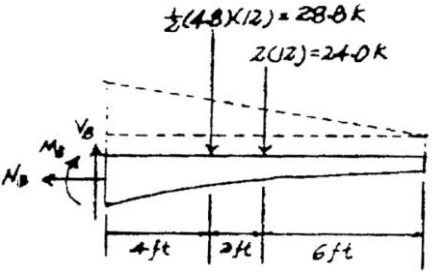

شکل مسئله ٤-٨

حل) در قطعه $BC$ داریم:

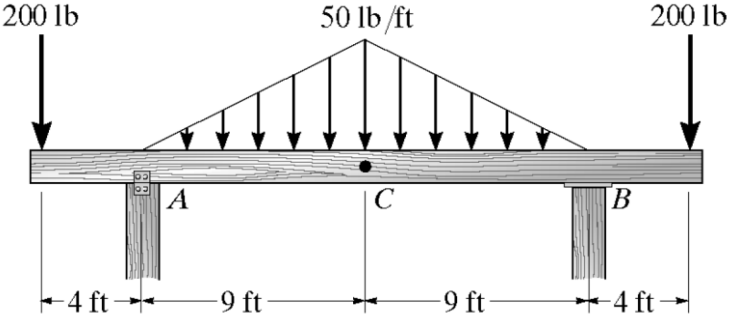
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - 28.8 - 24.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 52.8k$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_B - 28.8\times 4 - 24\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = -259\,k.ft$$




٤-٩) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.




شکل مسئله ٤-٩

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

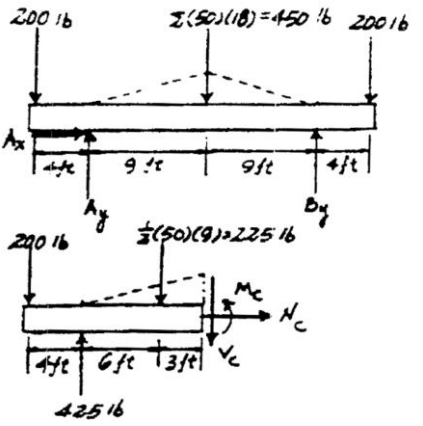


حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل تیر داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \times 18 + 200 \times 4 - 450 \times 9 - 200 \times 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 425\,lb$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 425 - 200 - 450 - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 425\,lb$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$




در قطعه $AC$ داریم:

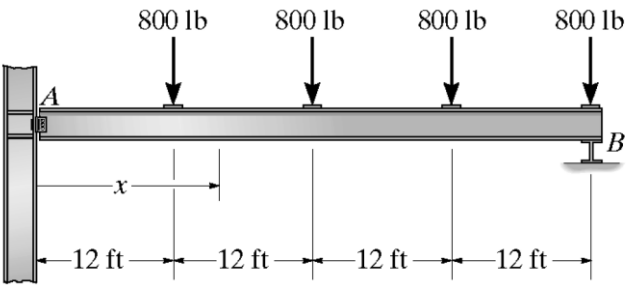
$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_C - 225 - 200 + 425 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C + 225 \times 3 + 200 \times 13 - 425 \times 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_C = 550\,lb.ft$$

۱۰-٤) مقدار نیروی برشی و لنگر خمشی در هر مقطع $x$ از تیر شکل زیر را تعیین نمایید که در مقطع زده شده $12 < x < 24$ می‌باشد. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.




شکل مسئله ۱۰-٤

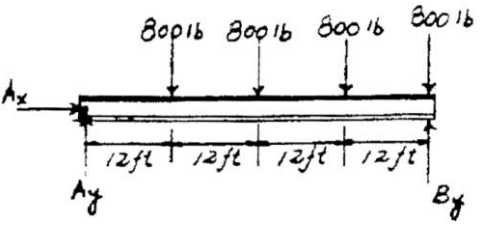
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل تیر داریم:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_y \times 48 + 800 \times (36+24+12) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 1200\,lb$$

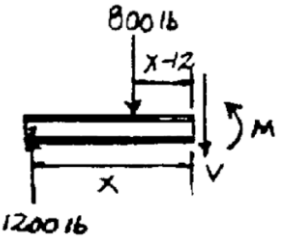



در مقطع زده شده داریم:

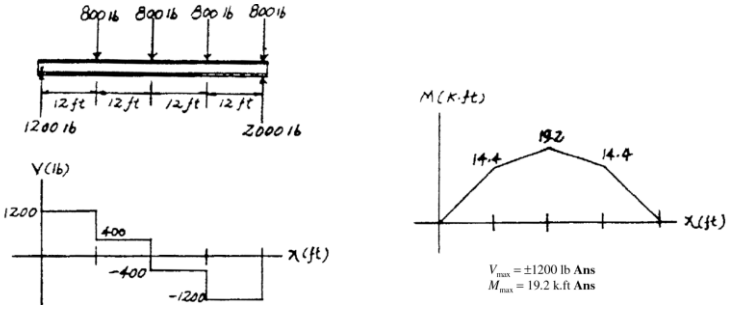
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1200 - 800 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 400\,lb$$

$$\sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad -1200 \times x + 800(x-12) + M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = (400 \times x + 9600)\,lb.ft$$




۱۱-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله ٤-۱۰ را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.

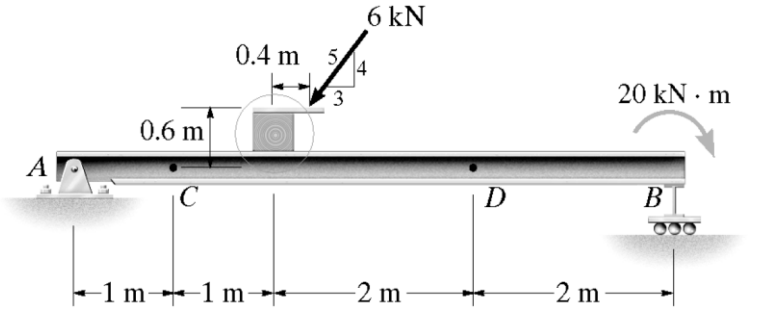



۱۲-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ و $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





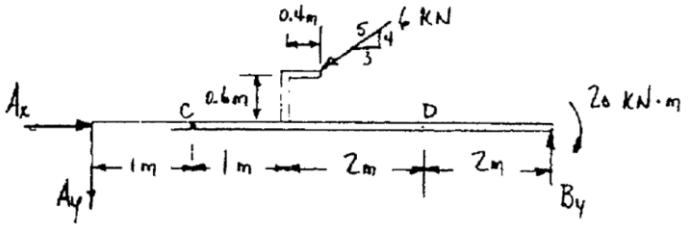

شکل مسئله ٤-١٢

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل تیر داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.4\left(\frac{4}{5}\right)\times 6 - 0.6\left(\frac{3}{5}\right)\times 6 + 20 - 6B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 4.89kN$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x - \left(\frac{3}{5}\right)\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 3.6kN$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_y - \left(\frac{4}{5}\right)\times 6 + 4.89 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 0.0933kN$$

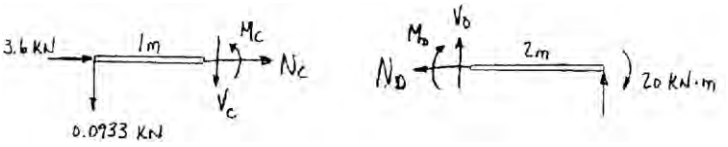



برای مقطع $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.6 + N_C = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = -3.6kN$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -0.0933 - V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = -0.0933\,kN$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C + 1\times 0.0933 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = -0.0933\,kN.m$$




مقطع $D$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D + 4.89 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = -4.89kN$$

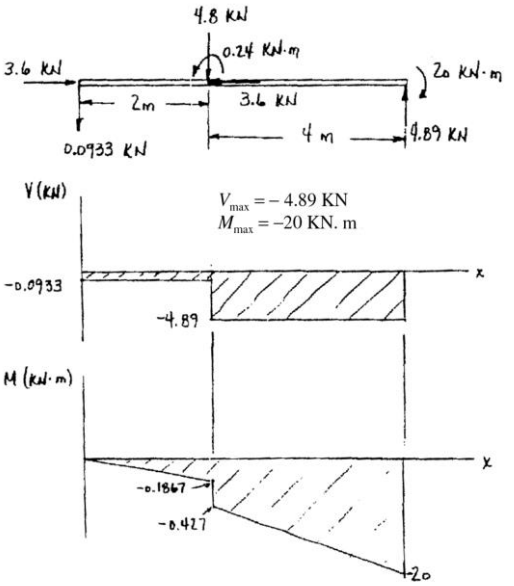
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

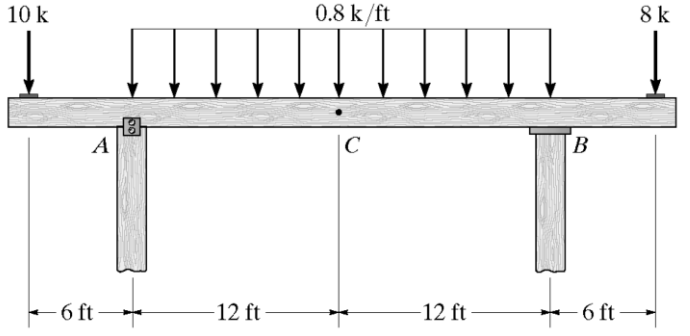


$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D - 2\times 4.89 + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = -10.2kN.m$

۴-۱۳) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله ۴-۱۲ را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.




۴-۱۴) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ۴-۱۴*

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای کل تیر داریم:

$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 24A_y - 30\times 10 - 12\times 19.2 + 6\times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 20.1k$

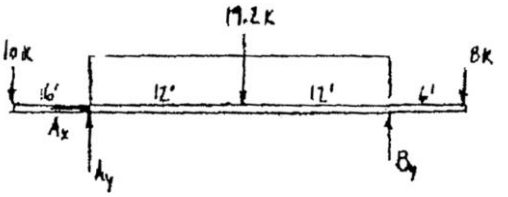
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\downarrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 20.1-10-19.2-8+B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 17.1k$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

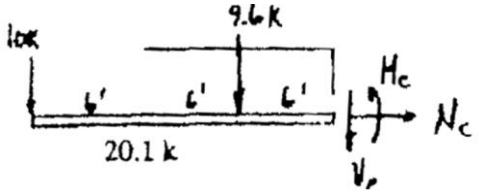



برای مقطع $C$ داریم:

$$\downarrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C+9.6-20.1+10 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 0.5k$$

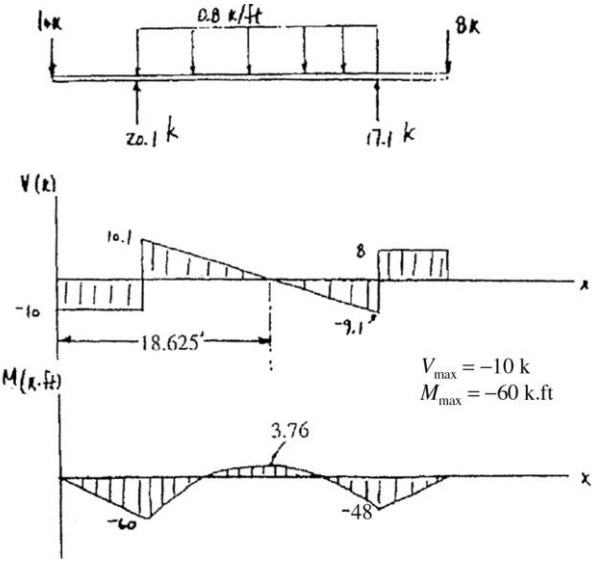
$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_C-6\times 9.6+12\times 20.1-18\times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 3.6k.ft$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$




۱۵-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله قبل را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.

حل)

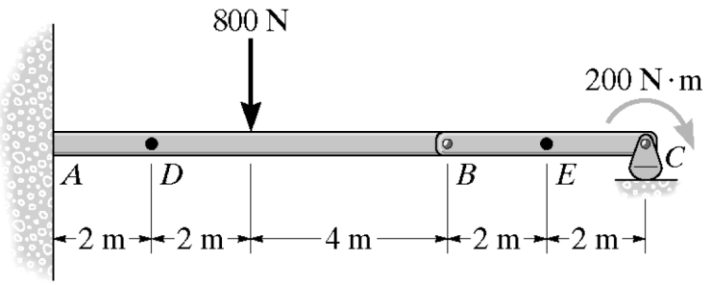



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۴-۱۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $E$ و $D$ را تعیین نمایید.



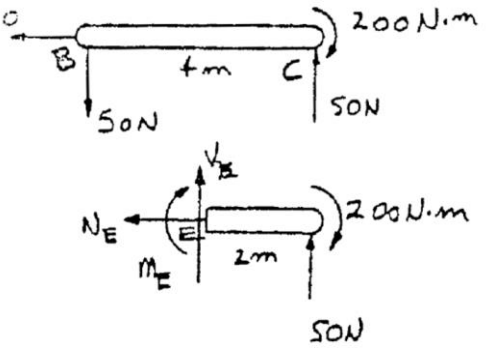

شکل مسئله ۴-۱۶

حل) برای قطعه $BC$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_E = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E = -50N$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -200 + 50\times 2 + M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E = -100\,N.m$$




برای قطعه $DB$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D - 800 + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 750\,N$$

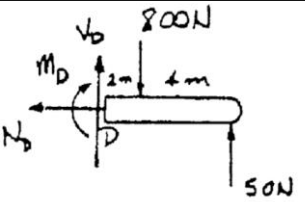
$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -800\times 2 + 6\times 50 - M_D = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_D = -1300\,N.m = -1.3kN.m$$

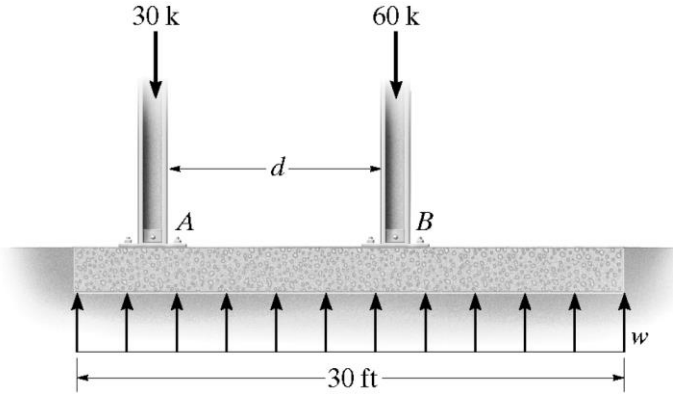
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





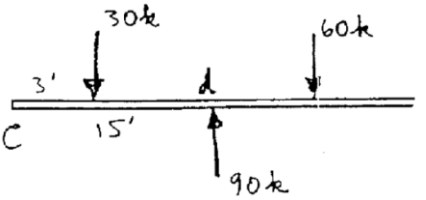

٤–١٧) شکل زیر یک پی را نشان می‌دهد که تحت دو ستون بر روی آن قرار گرفته‌اند که هر یک بارهای محوری را بر پی منتقل می‌کنند. در صورتی که تنش ایجاد شده در زیر پی را به صورت یکنواخت در نظر بگیریم، مقدار شدت فشار $w$ و مقدار $d$ را تعیین نمایید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. فاصله نقطه $A$ تا لبه پی برابر ٣ فوت می‌باشد.




شکل مسئله ٤–١٧

حل) با نوشتن معادله تعادل داریم:

$$w = \frac{60+30}{30} = 3.00\frac{k}{ft}$$

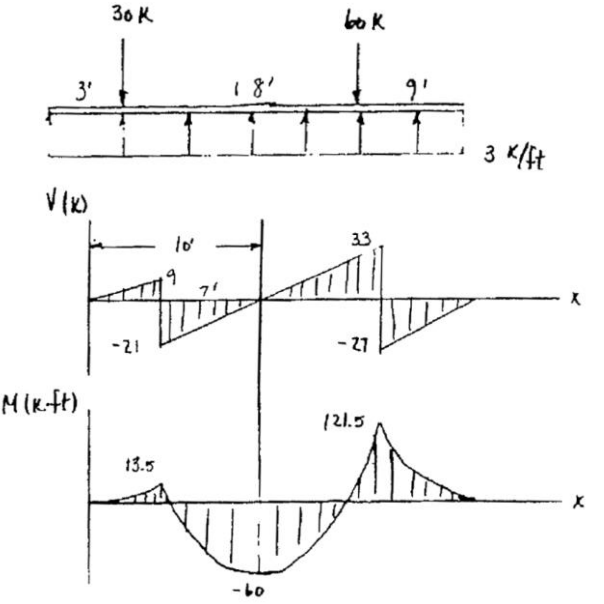



$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 90\times 15 - 30\times 3 - 60\times(3+d) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 18\ ft$$

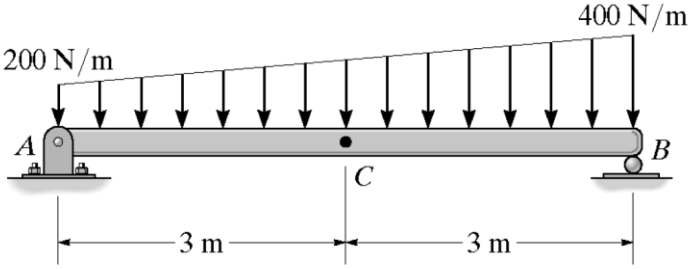
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۸-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۱۸-٤

حل) برای کل تیر داریم:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 600\times 2 + 1200\times 3 - A_y \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 800\,N$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

برای قطعه $AC$ داریم:

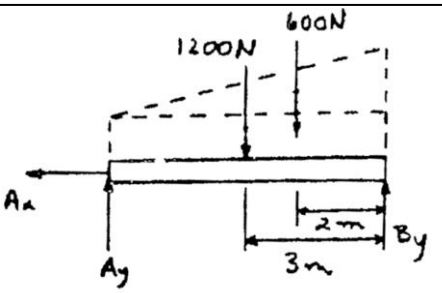
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 800 - 600 - 150 - V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 50\,N$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

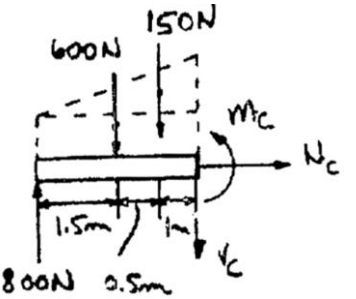
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



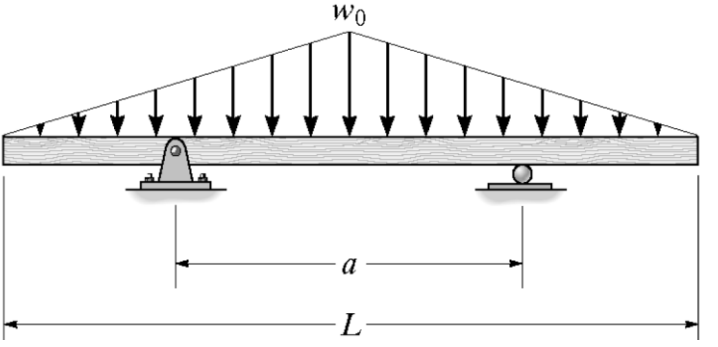



$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -800\times 3 + 600\times 1.5 + 150\times 1 + M_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_C = 1350\,N.m = 1.35\,kN.m$$




٤-١٩) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار $a$ را طوری تعیین نمایید که مقدار لنگر خمشی ایجاد شده در وسط تیر برابر صفر شود. حداکثر شدت بار گسترده خطی برابر $w_0$ می‌باشد.




شکل مسئله ٤-١٩

حل) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی تیر به سبب تقارن برابر $\frac{w_0 L}{4}$ است.

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + \frac{1}{2}(w_0)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{4}\times w_0 \times L\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

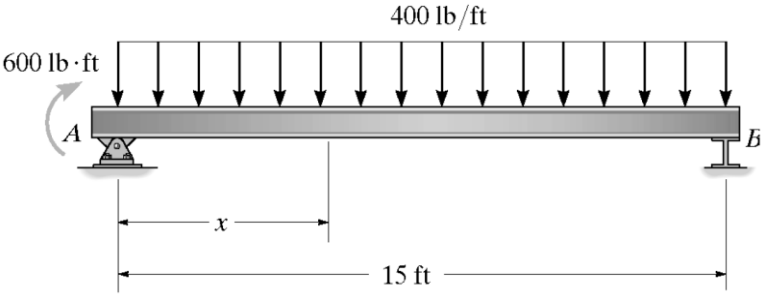
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

۴-۲۰) معادله لنگر خمشی، نیروی برشی در تیر شکل زیر را بر حسب تابعی از $x$ تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی باشد.

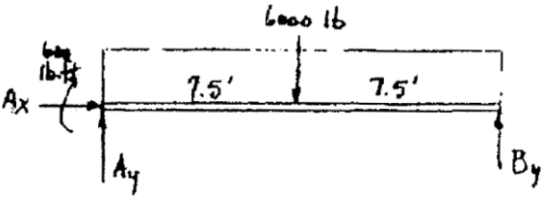



شکل مسئله ۴-۲۰

حل) برای کل تیر داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 7.5\times 6000 - 15\times B_y + 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 3040\,lb$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 3040 - 6000 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2960\,lb$$




برای مقطع زده شده داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2960 - V - 400\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 2960 - 400\,x$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \frac{x}{2}(400x) - x(2960) - 600 = 0$$

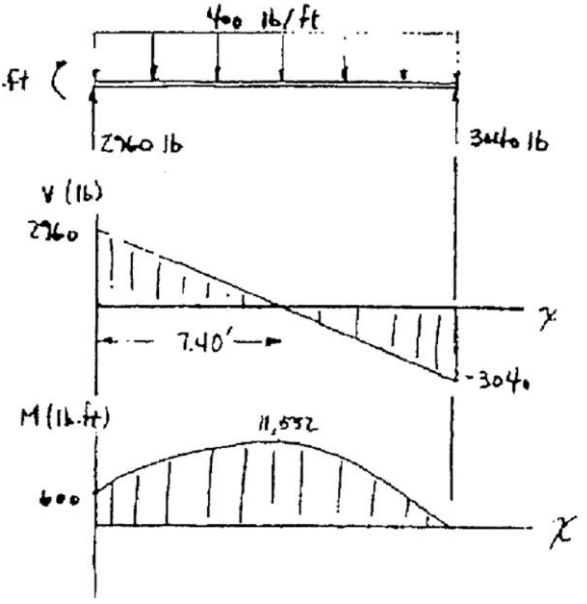
$$\Rightarrow \quad M = -200\,x^2 + 2960\,x + 600$$

۴-۲۱) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله قبل را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.

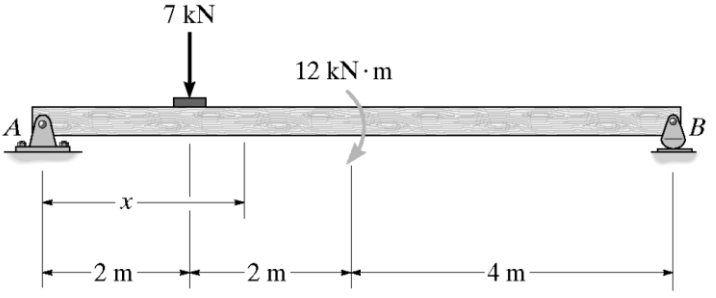
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤-٢٢) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگر خمشی و نیروی برشی را در مقطع $x$ از شکل را تعیین نمایید که در آن $2 < x < 4$ می‌باشد.

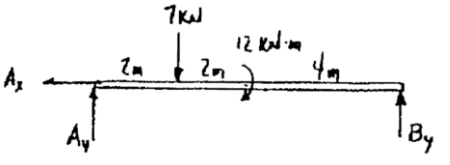



شکل مسئله ٤-٢٢

حل) برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه $A$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y \times 8 - 7 \times 6 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 3.75kN$$




در مقطع زده شده از تیر داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

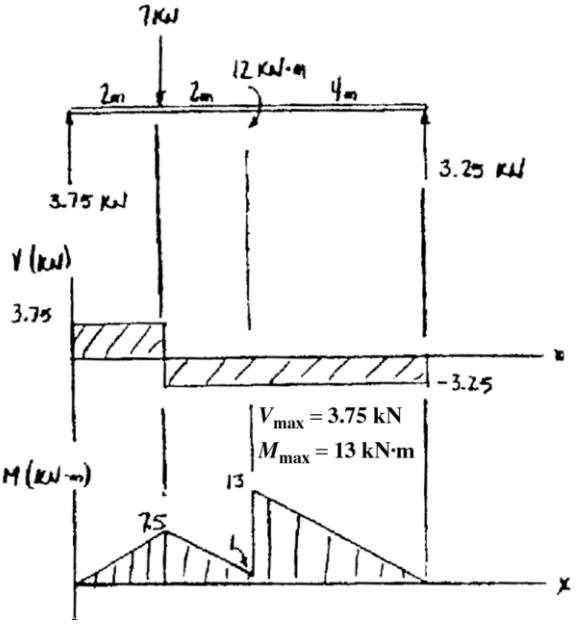
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



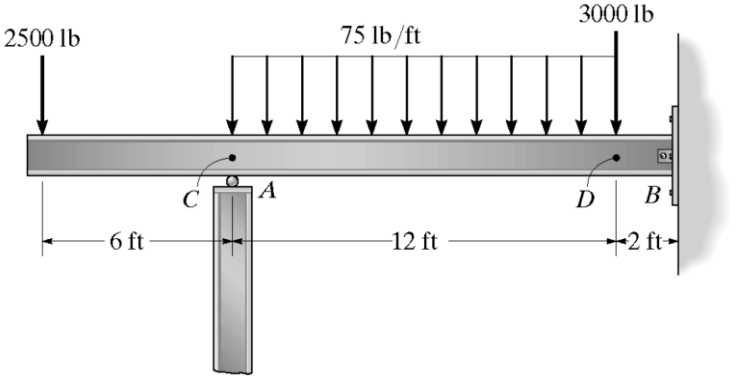
$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V + 3.75 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -3.25$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad -M + 3.75 \times x - 7(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -3.25x + 14$$

۴-۲۳) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله ۴-۲۲ را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.




۴-۲۴) در تیر نشان داده شده در شکل زیر مقدار نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ و $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به مفصلی می‌باشد.




*شکل مسئله ۴-۲۴*

حل) برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2500\times 20 - A_y \times 14 + 900\times 8 + 3000\times 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = 4514.29 lb$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2500 + 900 + 3000 - 4514.29 - B_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y = 1885.71$$

در مقطع $C$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2500 - V_C + 4514.29 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 2014.3 lb = 2.01 k$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C + 2500\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = -15000\, lb.ft = -15 k.ft$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = 0$$

در مقطع $D$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2500 - 900 - V_D + 4514.29 = 0$$

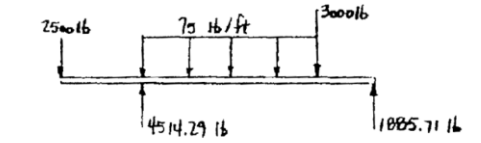
$$\Rightarrow \quad V_D = 1114.3 lb = 1.11 k$$

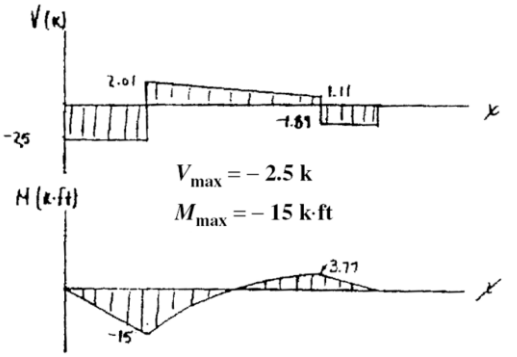
$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 900\times 6 + 2500\times 18 - 4514.29\times 12 + M_D = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_D = 3771.4 lb.ft = 3.77 k.ft$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D = 0$$

۲۵-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله قبل را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی می‌باشد.



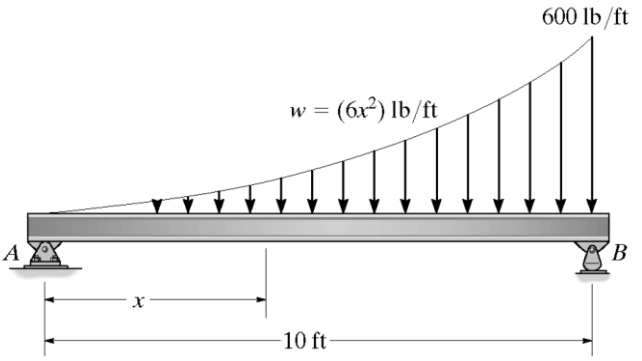




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



٤-٢٦) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگر خمشی و نیروی برشی را در مقطع $x$ از شکل را تعیین نمایید.




شکل مسئله ٤-٢٦

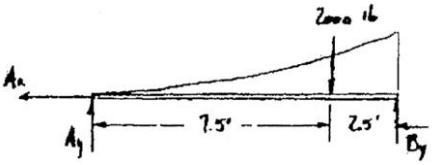
حل) برآیند بارهای گسترده به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$F_R = \int_0^{10} 6x^2 dx = 2x^3\Big|_0^{10} = 2000lb$$

با توجه به اینکه مرکز سطح سهمی در $\frac{1}{4}(10\,ft) = 2.5\,ft$ قرار دارد، بنابراین:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.5\times 2000 - 10A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 500lb$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

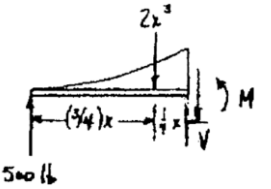



برای مقطع زده شده داریم:

$$F_R = \int_0^x 6x^2 dx = 2x^3$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 500 - 2x^3 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 500 \times 2x^3$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M + 2x^3\left(\frac{x}{4}\right) - 500x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 500x - 0.5x^4$$

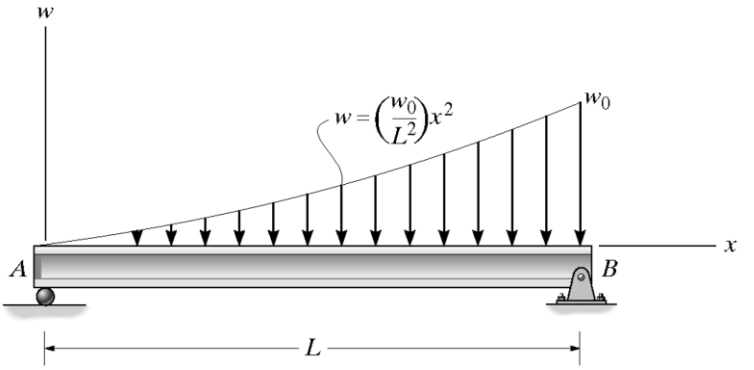



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



٤-۲۷) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل زیر را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ٤-۲۷

حل) برآیند بارهای گسترده به صورت زیر می‌باشد:

$$F_R=\int_A dA=\int_0^L w dx=\frac{w_0}{L^2}\int_0^L x^2 dx=\frac{w_0 L}{3}$$

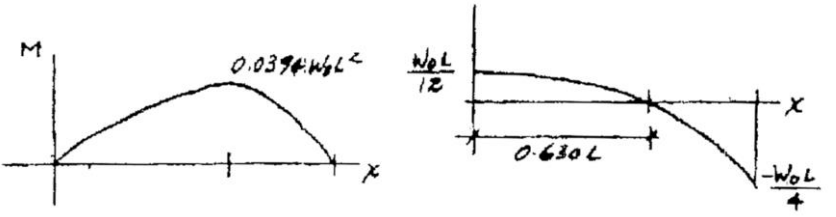
$$\bar{x}=\frac{\int_A x dA}{\int_A dA}==\frac{\frac{w_0}{L^3}\int_0^L x^3 dx}{\frac{w_0 L}{3}}=\frac{3L}{4}$$

$$\uparrow^+\sum F_y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{w_0 L}{12}-\frac{w_0 x^3}{3L^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}L=0.63L$$

$$\sum M=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{w_0 L}{12}(x)-\frac{w_0 x^3}{3L^2}\left(\frac{1}{4}x\right)-M=0 \quad\Rightarrow\quad M=\frac{w_0 L x}{12}-\frac{w_0 x^4}{12L^2}$$

با جانشانی $x=0.630L$ و $M=0.0394\,w_0L^2$ خواهد شد.

$$\Rightarrow V_{\max}=-\frac{w_0 L}{4} \quad , \quad M_{\max}=0.0394 w_0 L^2$$

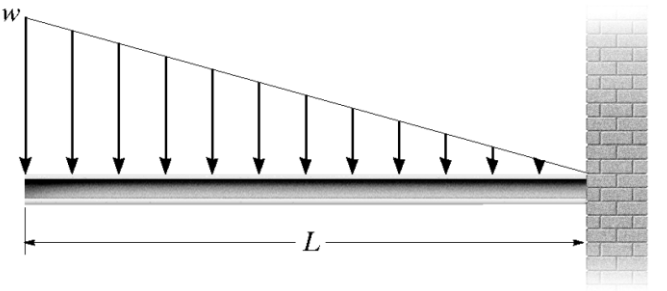



٤-۲۸) معادله نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل زیر را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





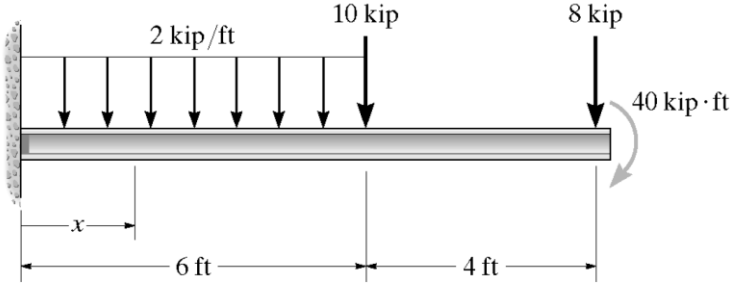

شکل مسئله ٤-٢٨

حل) با زدن یک مقطع از تیر داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V - \frac{1}{2}\left(\frac{w}{30}x\right)x - P = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{wx^2}{60} - P$$

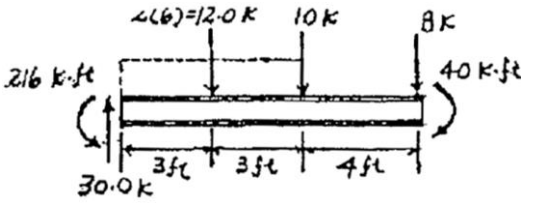
$$\sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{30}x\right)x\left(\frac{x}{3}\right) + Px = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{wx^3}{180} - Px$$

٤-٢٩) معادله نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل زیر را تعیین و همچنین، دیاگرام‌های نیروی برشی و لنگر خمشی را برای آن ترسیم نمایید.




شکل مسئله ٤-٢٩

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تیر مطابق با دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده در شکل زیر است.




برای $0 \le x \le 6$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 30.0 - 2x - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = (30.0 - 2x)k$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



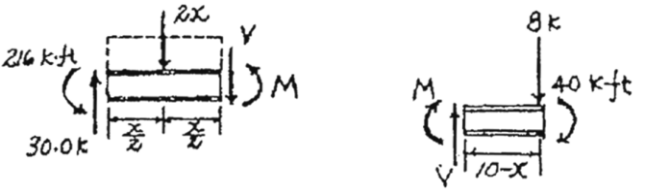
$$\sum M_{NA}=0 \quad \Rightarrow \quad M+216+2x\left(\frac{x}{2}\right)-30.0x=0$$

$$\Rightarrow \quad M=\left\{-x^2+30.0x-216\right\}k.ft$$

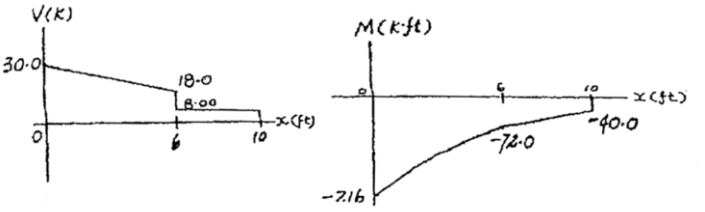
برای $6\le x\le 10$ داریم:

$$\uparrow^{+}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad V-8=0 \quad \Rightarrow \quad V=8.0k$$

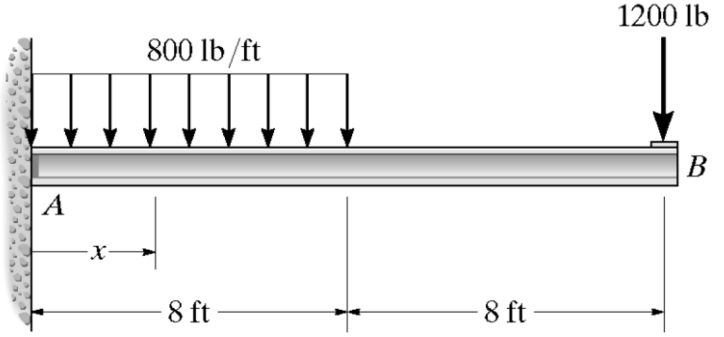
$$\sum M_{NA}=0 \quad \Rightarrow \quad -M-8(10-x)-40=0 \quad \Rightarrow \quad M=\left\{8.0x-120\right\}k.ft$$




با مقدار دهی به $x$ و ترسیم نمودار برش و لنگر داریم:




٤-۳۰) معادله نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل زیر را تعیین و همچنین، دیاگرام‌های نیروی برشی و لنگر خمشی را برای آن ترسیم نمایید.



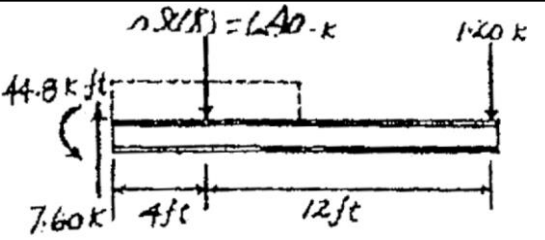

*شکل مسئله ٤-۳۰*

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تیر مطابق با دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده در شکل زیر است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






برای $0 \le x \le 8$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 7.60 - 0.8x - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = (7.60 - 0.8x)k$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + 44.8 + 0.80x\left(\frac{x}{2}\right) - 7.6x = 0$$

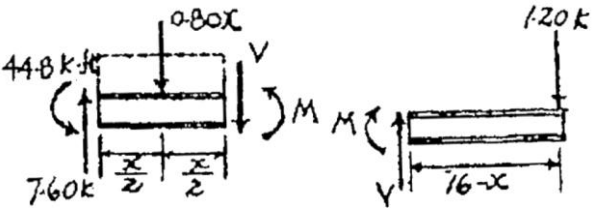
$$\Rightarrow \quad M = \{-0.40x^2 + 7.60x - 44.8\}k.ft$$

برای $8 \le x \le 16$ داریم:

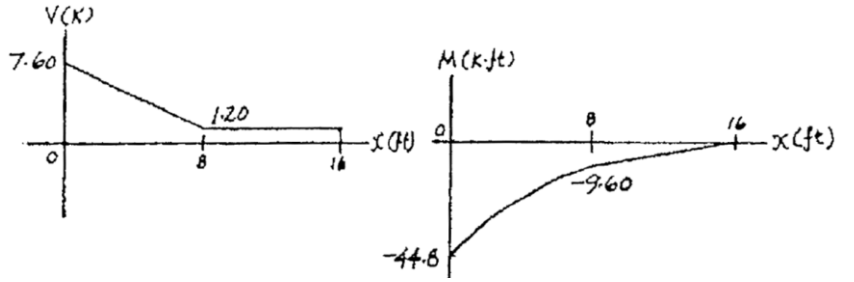
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V - 1.20 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 1.20k$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M - 1.20(16 - x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \{1.20x - 19.2\}k.ft$$




با مقدار دهی به $x$ و ترسیم نمودار برش و لنگر داریم:

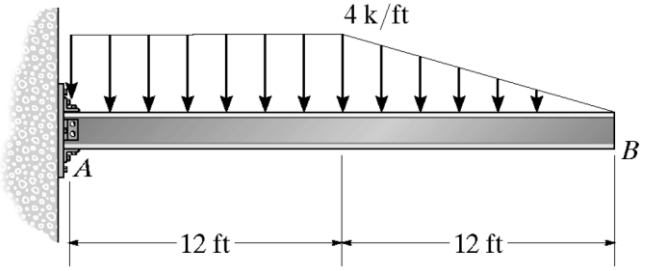



۳۱-٤) دیاگرام‌های نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل زیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٤-٣١

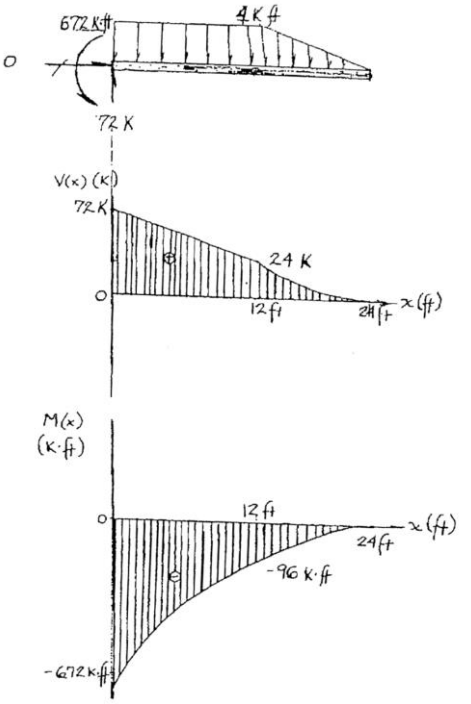
حل)

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - 48 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 72k \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -48\times 6 - 24\times 16 + M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 672\,k.ft$$

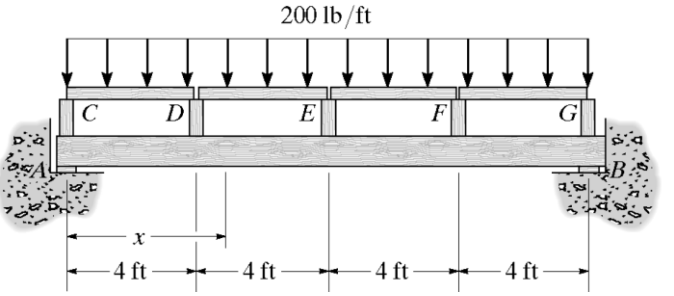



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۳۲-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگر خمشی و نیروی برشی را در مقطع $x$ از شکل را تعیین نمایید که در آن $4<x<8$ می‌باشد. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.

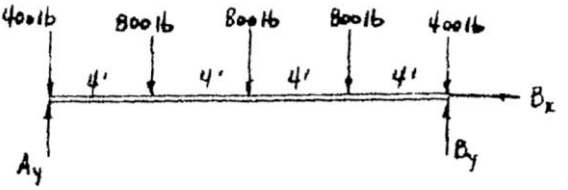



شکل مسئله ۳۲-٤

حل) برای تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ داریم:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_y \times 16 + 800 \times (12+8+4) + 400 \times 16 = 0$$

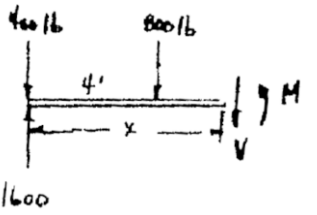
$$\Rightarrow \quad A_y = 1600\,lb$$




در مقطع زده شده از تیر داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1600 - 800 - 400 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 400\,lb$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M - 800 \times 4 - 400\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = (400\,x + 3200)\,lb.ft$$

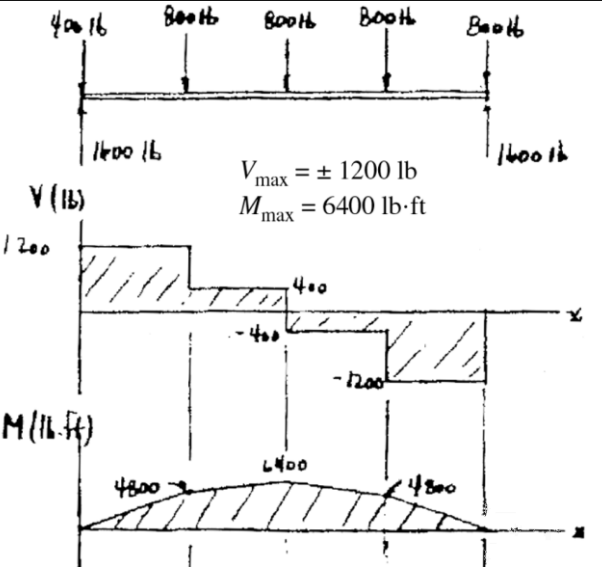



۳۳-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله قبل را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.

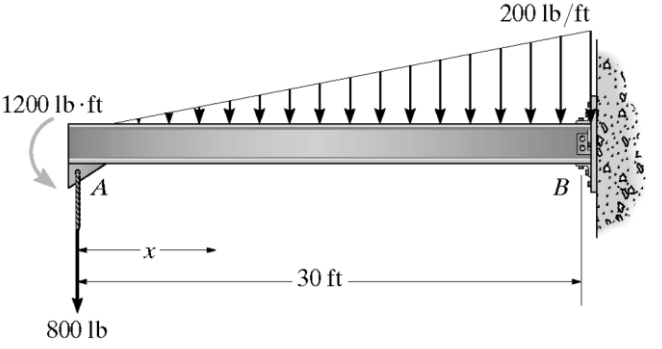
**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۴-۳۴) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر شکل زیر را به صورت تابعی از $x$ تعیین نمایید.




شکل مسئله ۴-۳۴

حل) با زدن یک مقطع به فاصله $x$ از ابتدای تیر داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V - 800 - \frac{200}{60}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \left(-3.33x^2 - 800\right) lb$$

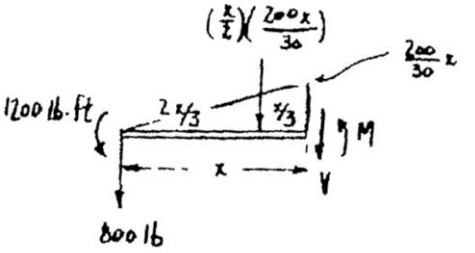
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \frac{x}{3}\left(\frac{200}{60}x^2\right) + 800x + 1200 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \left(-1.11x^3 - 800x - 1200\right) lb.ft$$

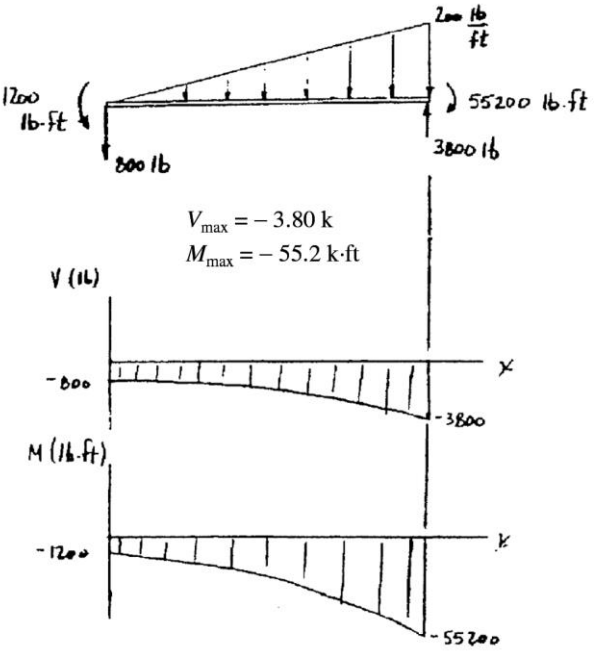
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۳۵-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله ٤-۳٤ را ترسیم نمایید.

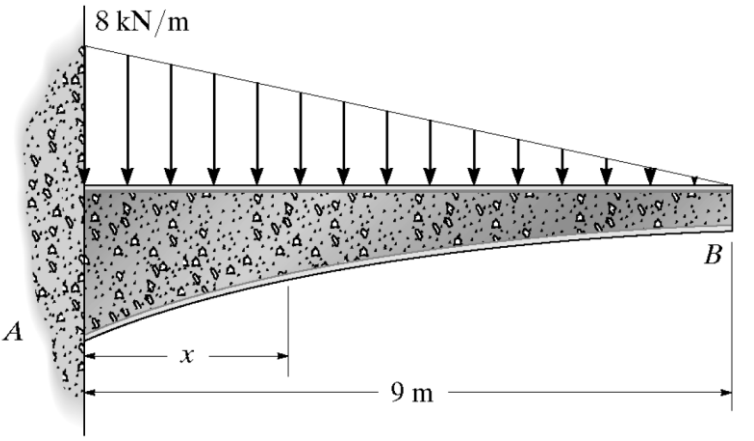



۳٦-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر شکل زیر را به صورت تابعی از $x$ تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٤-٣٦

حل) با نوشتن معادله تعادل برای مقطع زده شده داریم:

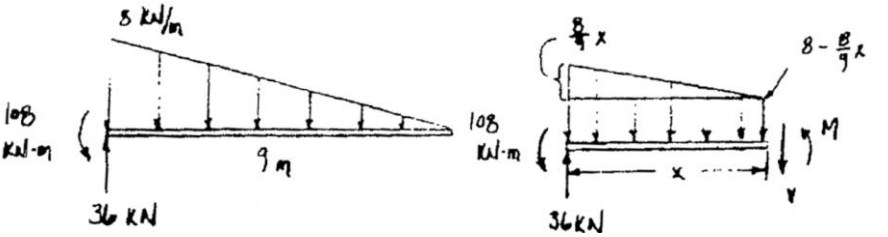
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 36 - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}x\right)(x) - \frac{8}{9}(9-x)x - V = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = 36 - \frac{4}{9}x^2 - 8x + \frac{8}{9}x^2 = 0.444x^2 - 8x + 36$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 108 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}x\right)(x)\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{8}{9}(9-x)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - 36x + M = 0$$

$$M = -108 - \frac{8}{27}x^3 - 4x^2 + \frac{8}{18}x^3 + 36x$$

$$M = 0.148x^3 - 4x^2 + 36x - 108$$

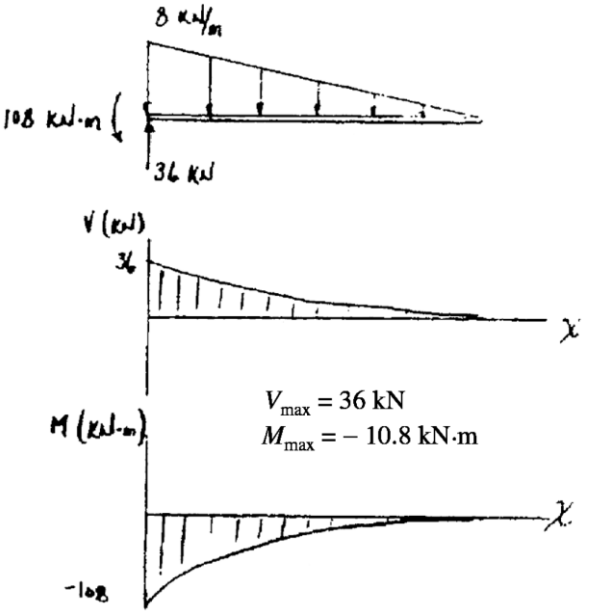



٤-٣٧) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسئله ٤-٣٦ را ترسیم نمایید.

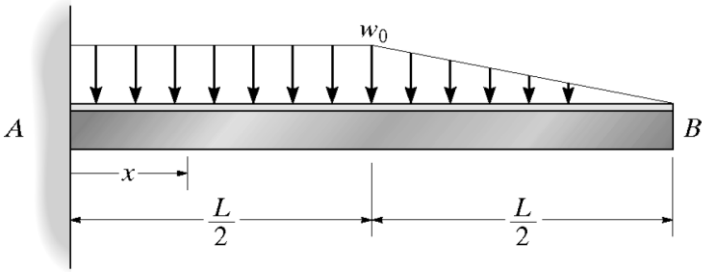
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤–۳۸) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر شکل زیر را به صورت تابعی از $x$ تعیین نمایید.



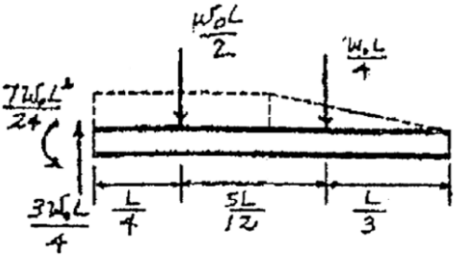

*شکل مسئله ٤–۳۸*

حل) مقدار عکس‌العمل‌های تیر مطابق با دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده در شکل زیر است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






برای $0 \le x \le L/2$ داریم:

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3w_0L}{4} - w_0x - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{w_0}{4}(3L - 4x)$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7w_0L^2}{24} - \frac{3w_0L}{4}x + w_0x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

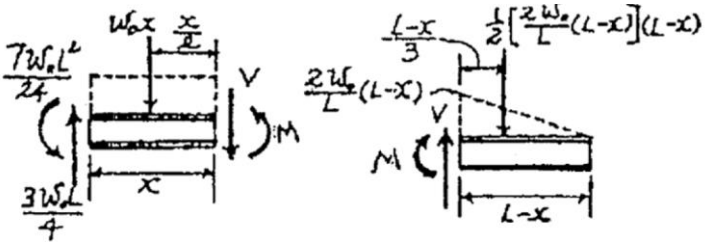
$$\Rightarrow \quad M = \frac{w_0}{24}\left(-12x^2 + 18Lx - 7L^2\right)$$

برای $L/2 \le x \le L$ داریم:

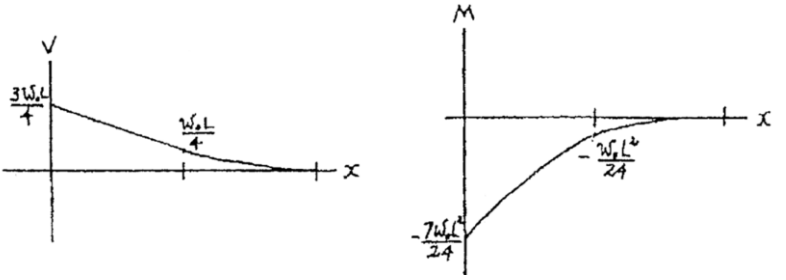
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V - \frac{1}{2}\left(\frac{2w_0}{L}(L-x)\right)(L-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{w_0}{L}(L-x)^2$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M - \frac{1}{2}\left(\frac{2w_0}{L}(L-x)\right)(L-x)\left(\frac{L-x}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{w_0}{3L}(L-x)^3$$




با مقدار دهی به $x$ و ترسیم نمودار برش و لنگر داریم:

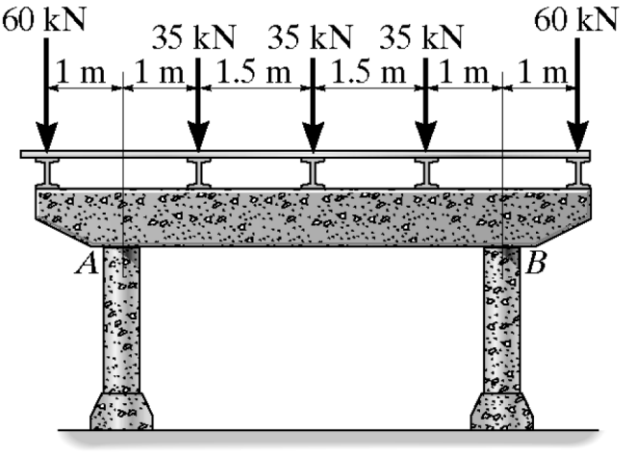



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

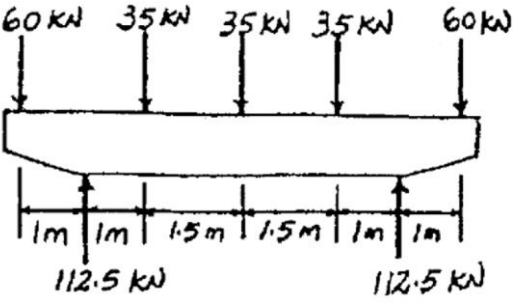


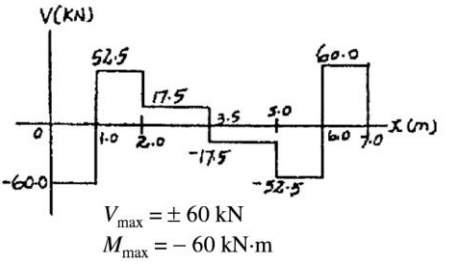
٤-۳۹) پل نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای عرشه پل را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ تنها قادر به تحمل عکس‌العمل تکیه‌گاهی قائم می‌باشند.




شکل مسئله ٤-۳۹

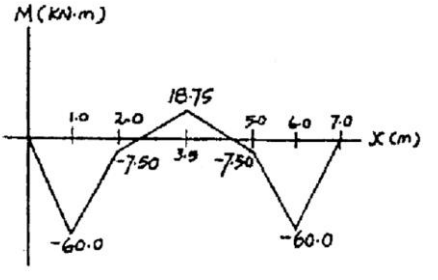
حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای پل داریم:




$V_{max} = \pm 60$ kN

$M_{max} = -60$ kN·m

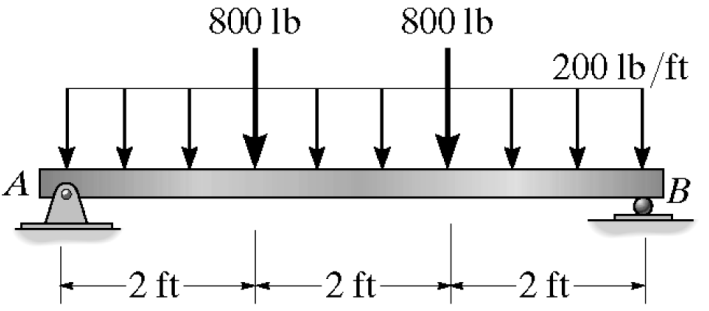



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

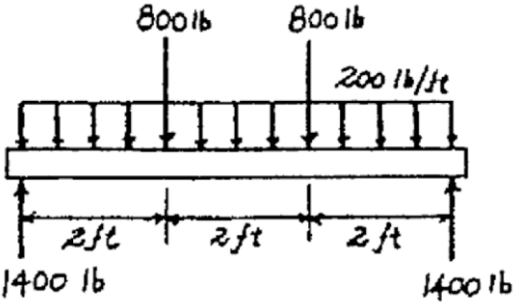


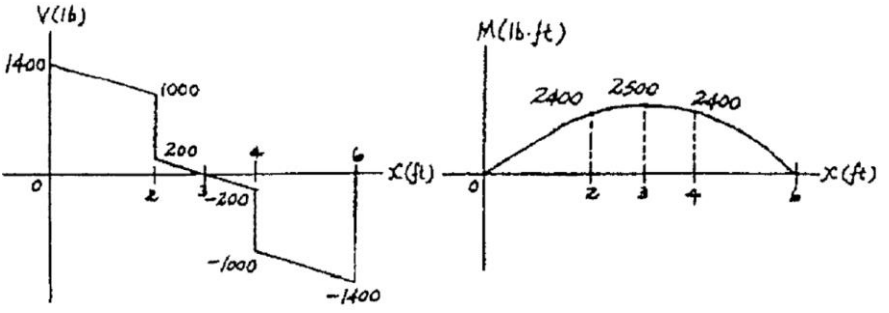
٤-٤٠) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ تنها قادر به تحمل عکس‌العمل تکیه‌گاهی قائم می‌باشند.




*شکل مسئله ٤-٤٠*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:



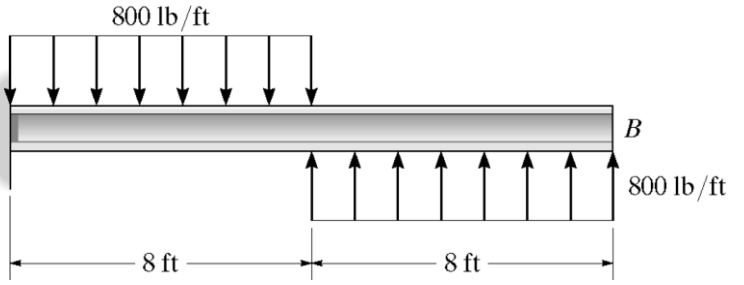




٤-٤١) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

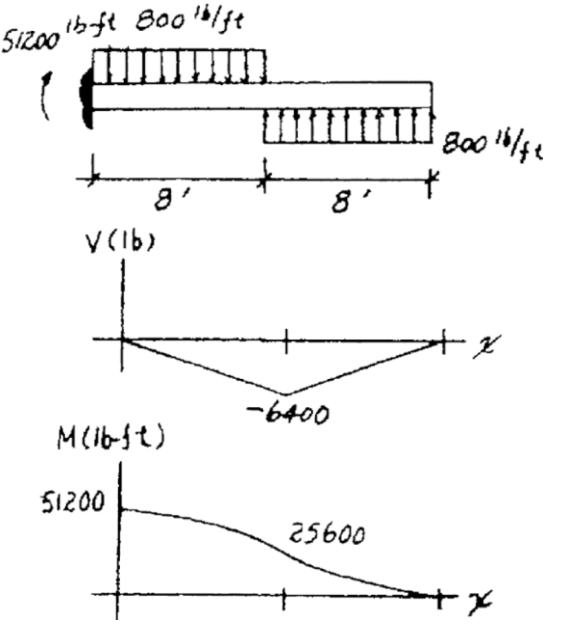
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





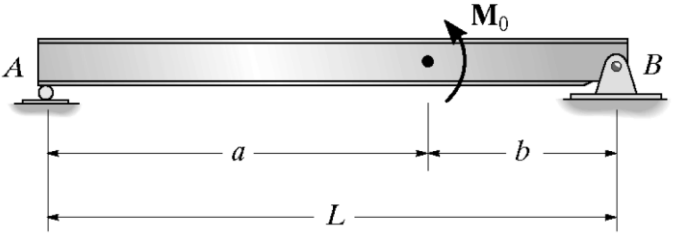

شکل مسئله ٤-٤١

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:




$V_{\max} = -6.40k \quad , \quad M_{\max} = 51.2k.ft$

٤-٤٢) معادله لنگر خمشی، نیروی برشی در تیر شکل زیر را بر حسب تابعی از $x$ تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی باشد.




شکل مسئله ٤-٤٢

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

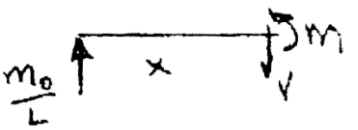
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

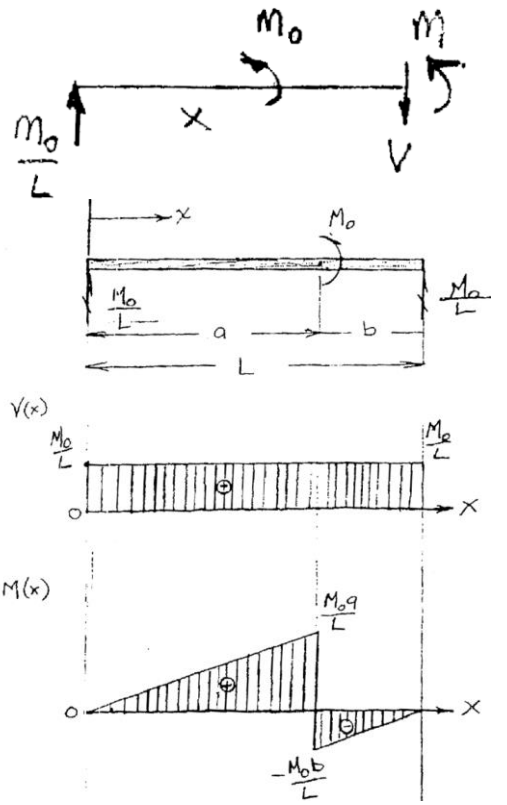
برای $0 \le x < a$ داریم:

$$M = \frac{M_0}{L} x$$




برای $a < x \le L$ داریم:

$$M = \frac{M_0}{L} x - M_0$$

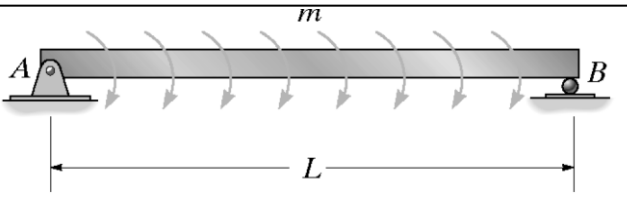



٤-٤٣) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت یک لنگر گسترده قرار دارد. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

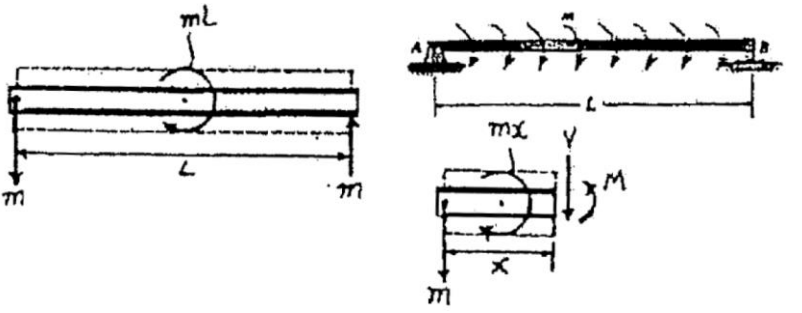
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





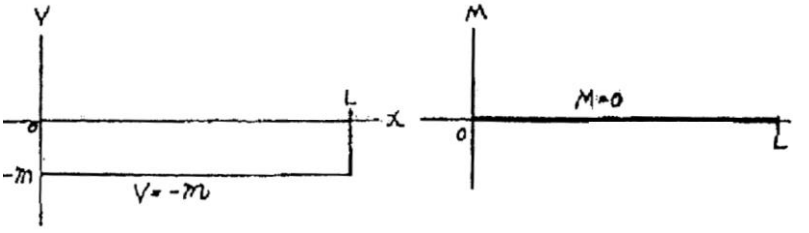

شکل مسئله ٤-٤٣

حل) کل لنگر گسترده را می‌توان در مرکز سطح بار متمرکز نمود:

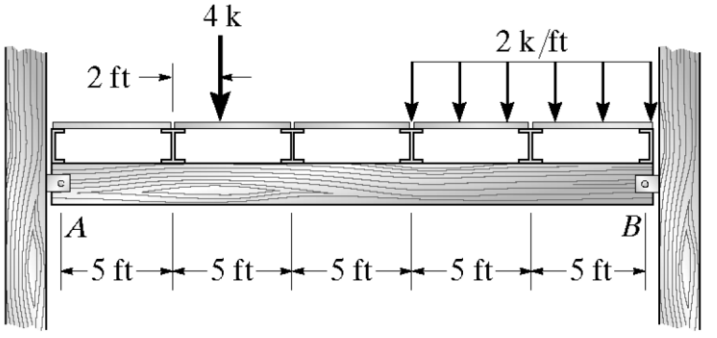



$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -m - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -m$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + m(x) - mx = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$$




٤-٤٤) در تیر شکل زیر نیروهای اعمال شده بر یک تیر از طرف کف یک سازه نشان داده شده است. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.



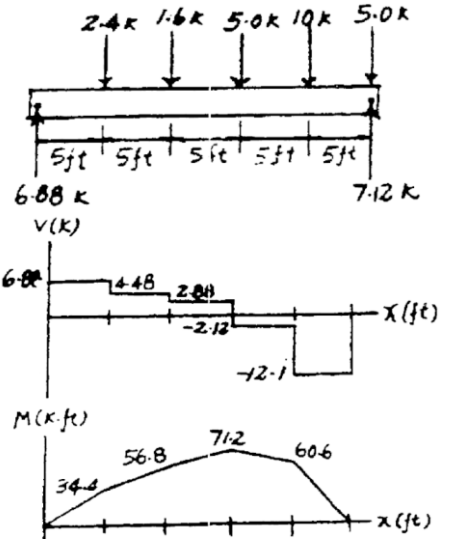

شکل مسئله ٤-٤٤

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

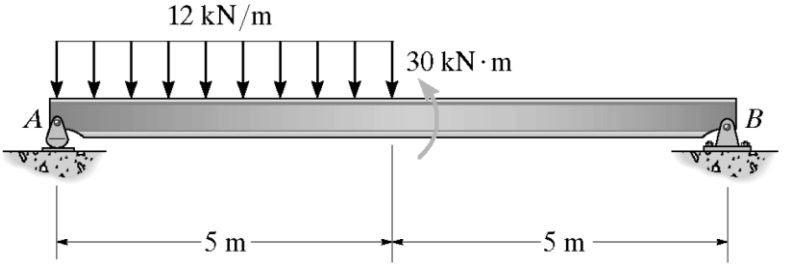
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:




٤-٤٥) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.



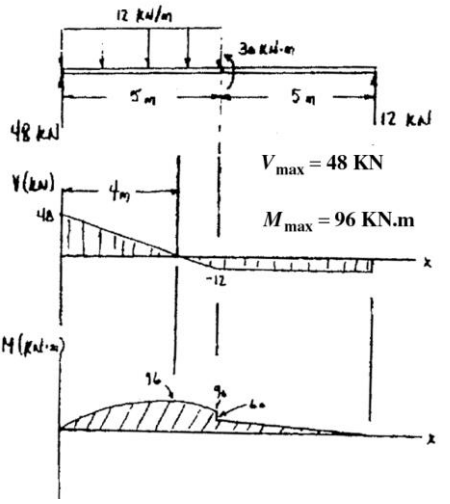

*شکل مسئله ٤-٤٥*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

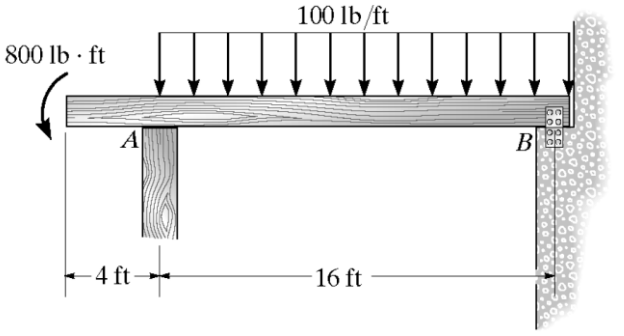
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



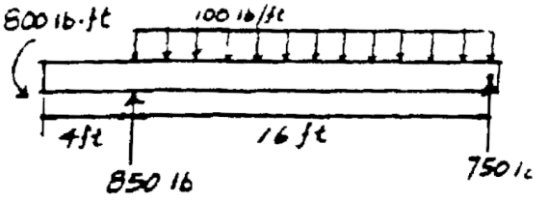



٤-٤٦) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$، غلتکی و $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.




*شکل مسئله ٤-٤٦*

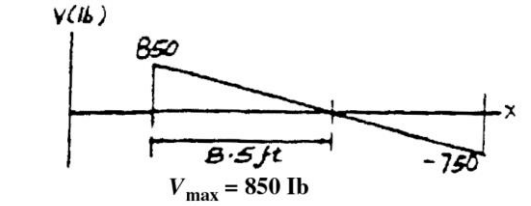
حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:



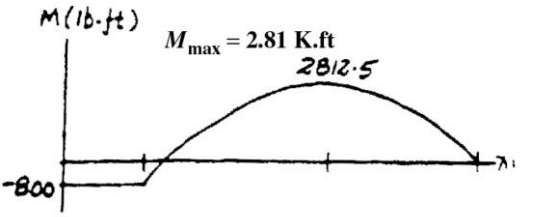

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



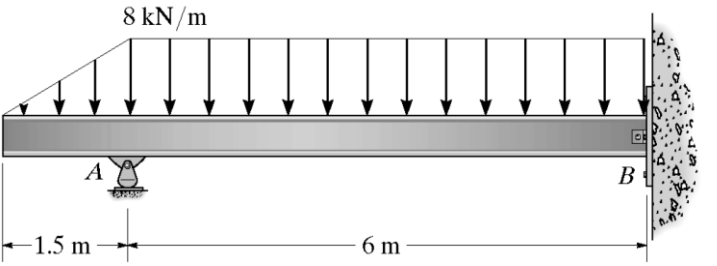



$V_{max} = 850$ lb




$M_{max} = 2.81$ K.ft

٤-٤٧) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$، غلتکی و $B$ به صورت مفصلی می‌باشد.



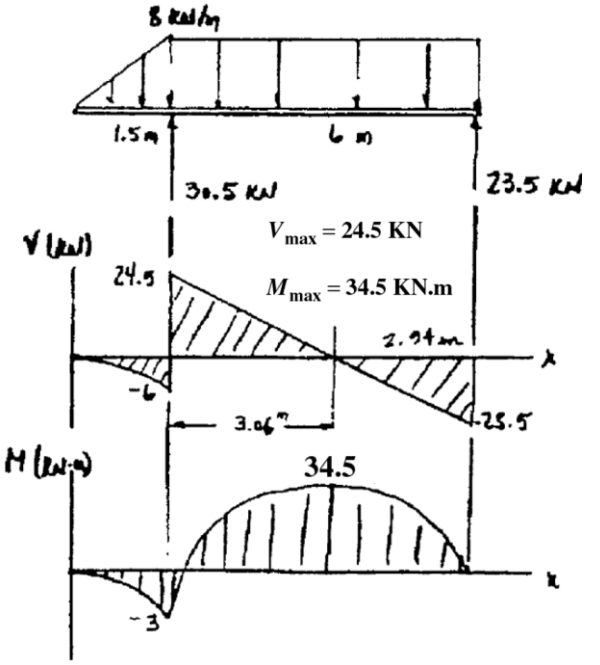

*شکل مسئله ٤-٤٧*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

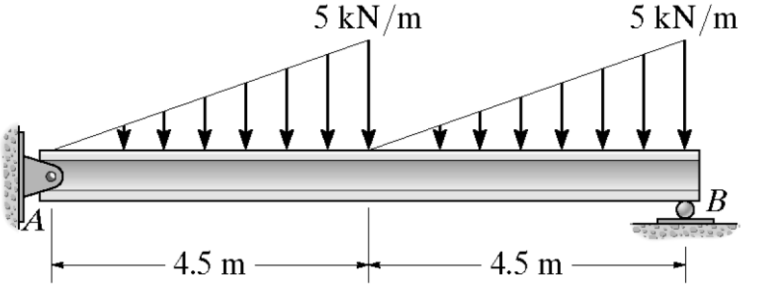
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤-٤٨) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$، مفصلی و $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.



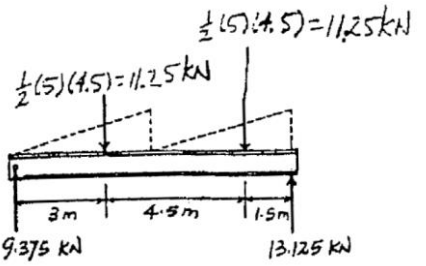

*شکل مسئله ٤-٤٨*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با توجه به دیاگرام جسم آزاد (الف) داریم:

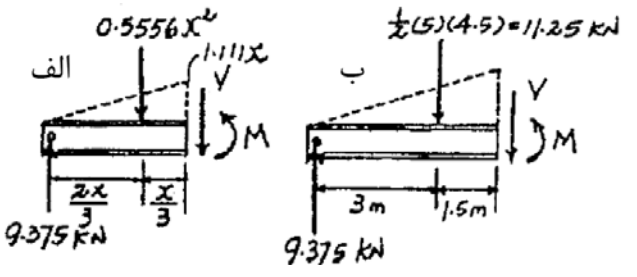
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 9.375 - 0.5556\,x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4.108\,m$$

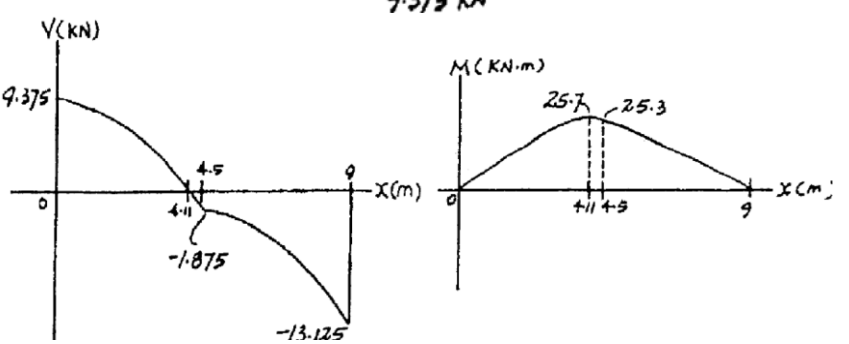
$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + (0.5556)(4.108^2)\left(\frac{4.108}{3}\right) - 9.375(4.108) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = 25.67\,kN.m$$

با توجه به دیاگرام جسم آزاد (ب) داریم:

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + 11.25 \times 1.5 - 9.375 \times 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 25.31 kN.m$$



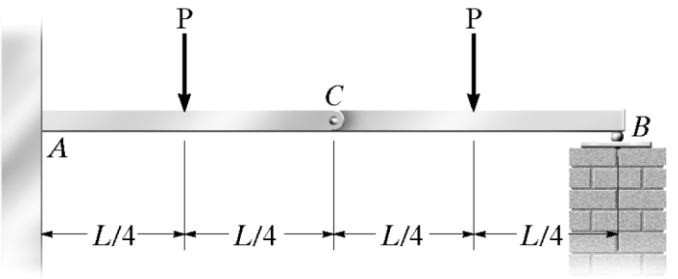




۴۹-٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$، گیردار و $B$ به صورت غلتکی می‌باشد. تیر در نقطه $C$ دارای مفصل داخلی است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

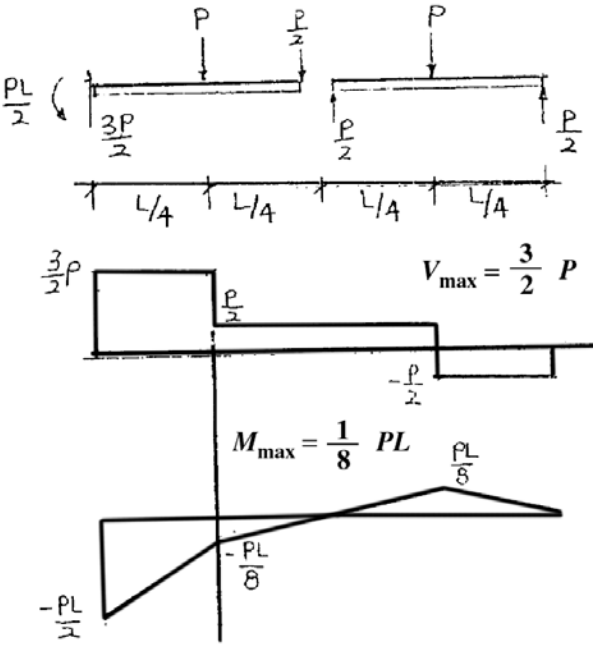
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٤-٤٩

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

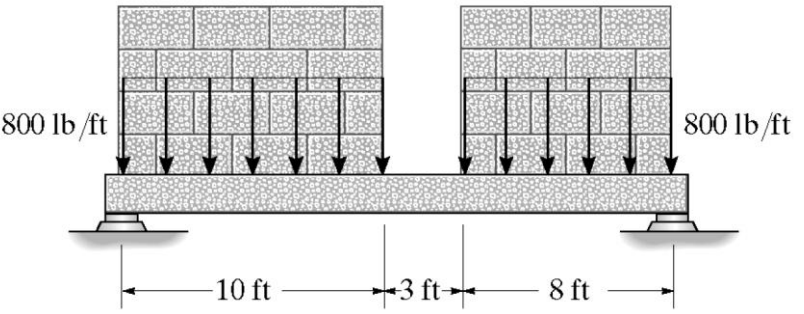



٤-٥٠) تیر بتنی شکل زیر را در نظر بگیرید که وزن یک دیوار را بر روی خود تحمل می‌نماید. مقطع تیر به صورت ۱۲×۲٦ اینچ می‌باشد. وزن مخصوص بتن تیر برابر $\gamma = 150 lb/ft^3$ می‌باشد. در صورتی که بتوان از وزن فولادهای مسلح کننده تیر صرف نظر نمود، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



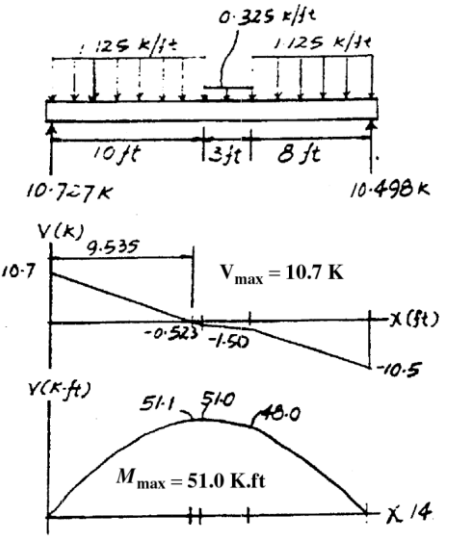



شکل مسئله ٤-٥٠

حل) وزن تیر به صورت زیر برابر است با:

$$A = \frac{12 \times 26}{144} = 2.1667\, ft^2$$

$$w_{conc} = 150(2.1667) = 325\, lb/\, ft$$

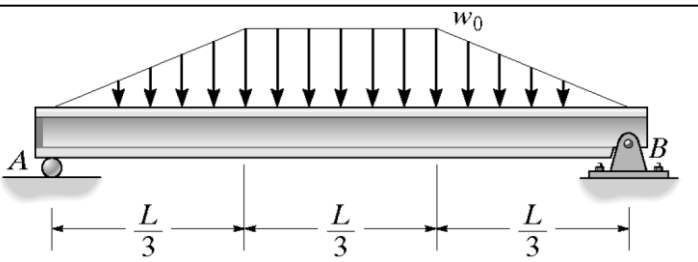



٤-٥١) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

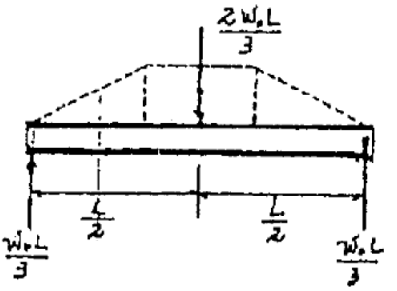
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ٤-٥١*

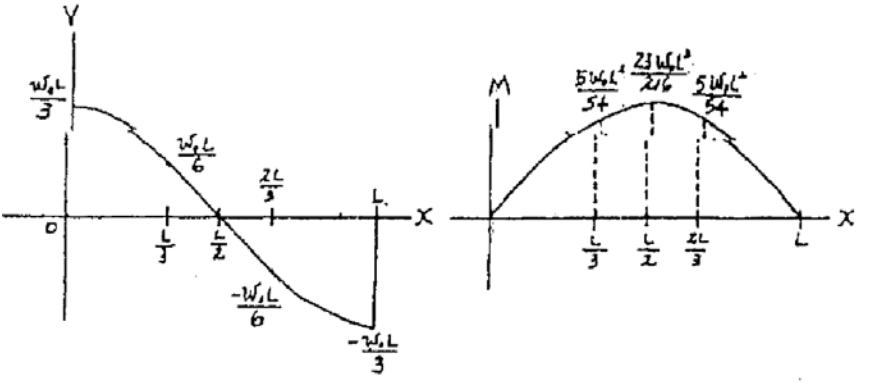
حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:




با زدن یک برش در فاصله $x=L/3$ داریم:

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 L}{6} - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{w_0 L}{6}$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad M + \frac{w_0 L}{6}\left(\frac{L}{9}\right) - \frac{w_0 L}{3}\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{5 w_0 L^2}{54}$$



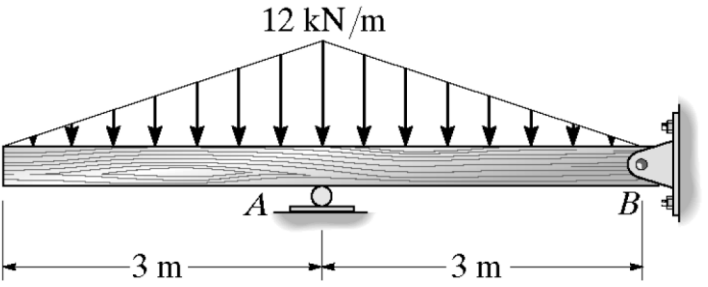

$$V_{\max} = \frac{w_0 L}{3} \quad , \quad M_{\max} = \frac{23 w_0 L^2}{216}$$

٤-٥٢) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

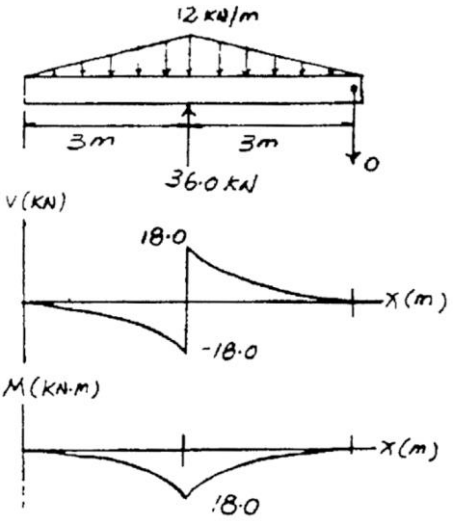
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



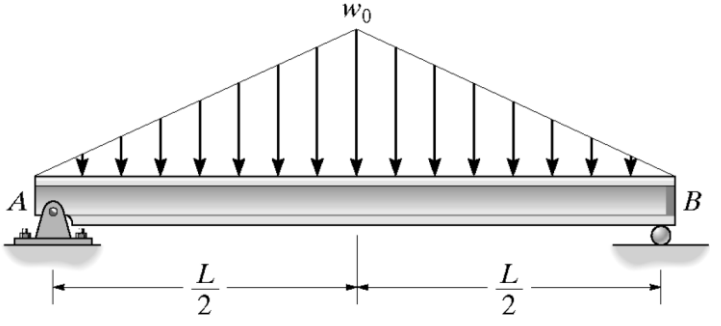



شکل مسئله ٤-٥٢

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:




٤-٥٣) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ٤-٥٣

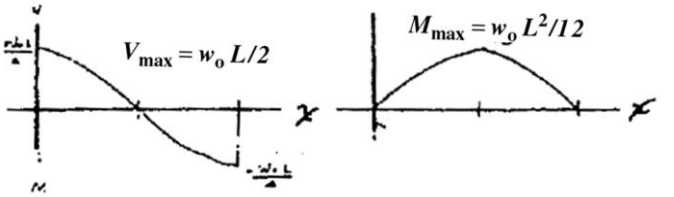
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

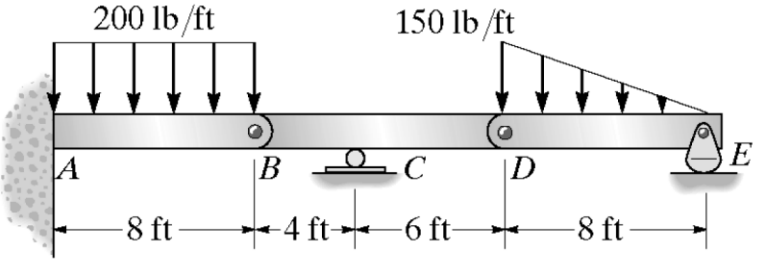


حل) با زدن یک مقطع در وسط تیر و نوشتن معادله تعادل لنگر برای آن داریم:

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M - \frac{w_0 L}{4}\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{w_0 L^2}{12}$$

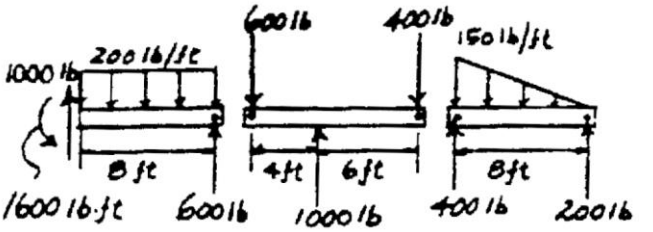



٤-٥٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ٤-٥٤*

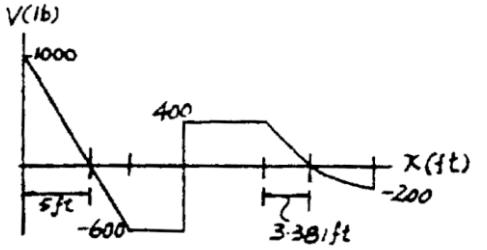
حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

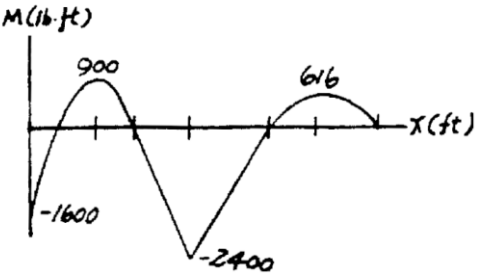



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

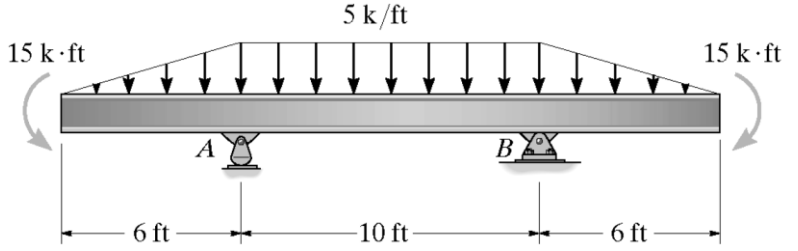
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤–٥٥) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید.



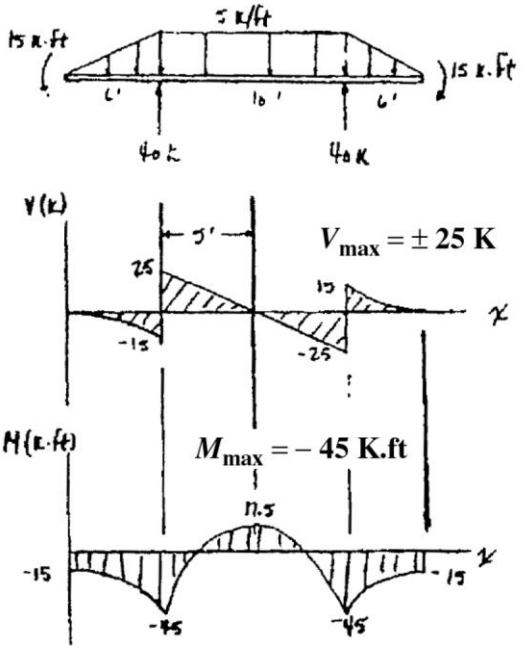

*شکل مسئله ٤–٥٥*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای تیر داریم:

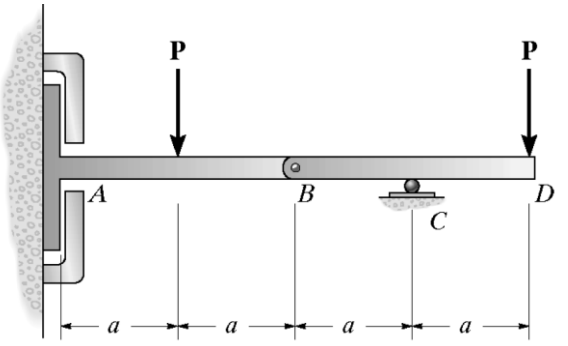
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۵۶-٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تیر در نقطه $A$ دارای تکیه‌گاه هدایت شونده می‌باشد.




*شکل مسئله ٤-٥٦*

حل) با توجه دیاگرام جسم آزاد برای قطعه $BD$ داریم:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y(a) - P(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = P$$

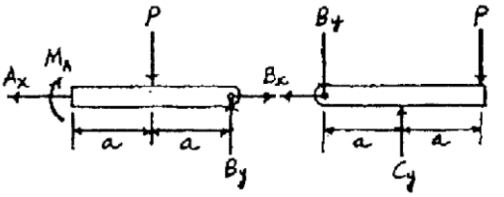
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y - P - P = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 2P$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

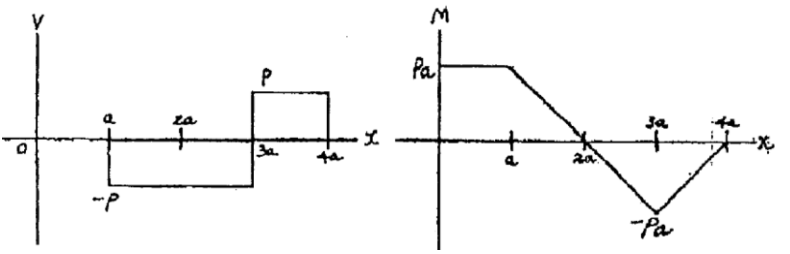




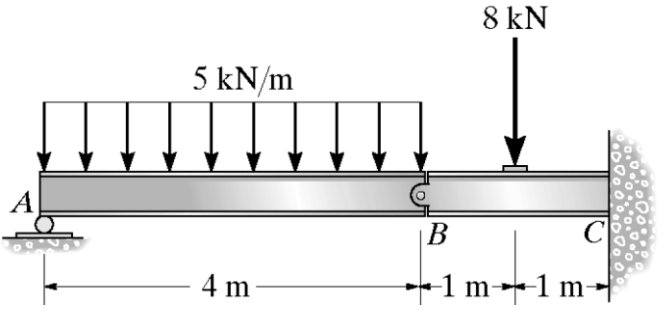

با استفاده از دیاگرام جسم آزاد برای قطعه $AB$ داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad P(2a) - P(a) - M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = Pa$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P - P = 0 \quad \text{تعادل برقرار است}$$




۵۷-٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر را ترسیم نمایید. تیر در نقطه $B$ دارای مفصل داخلی می‌باشد.



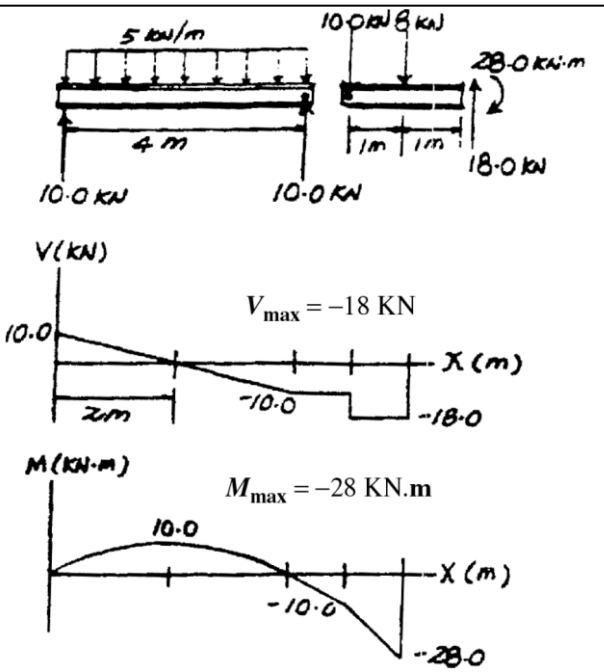

شکل مسئله ٤-۵۷

حل) با توجه دیاگرام جسم آزاد داریم:

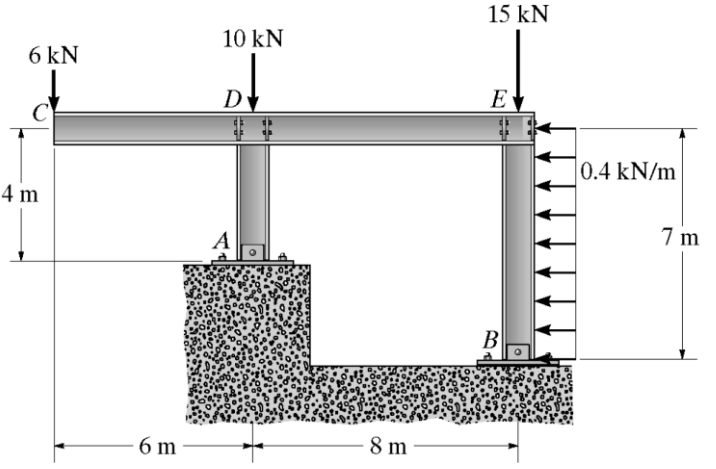
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۵۸-٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر $CDE$ را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$ غلتکی و $B$ مفصلی باشد. بقیه اتصالات به صورت گیردار هستند.



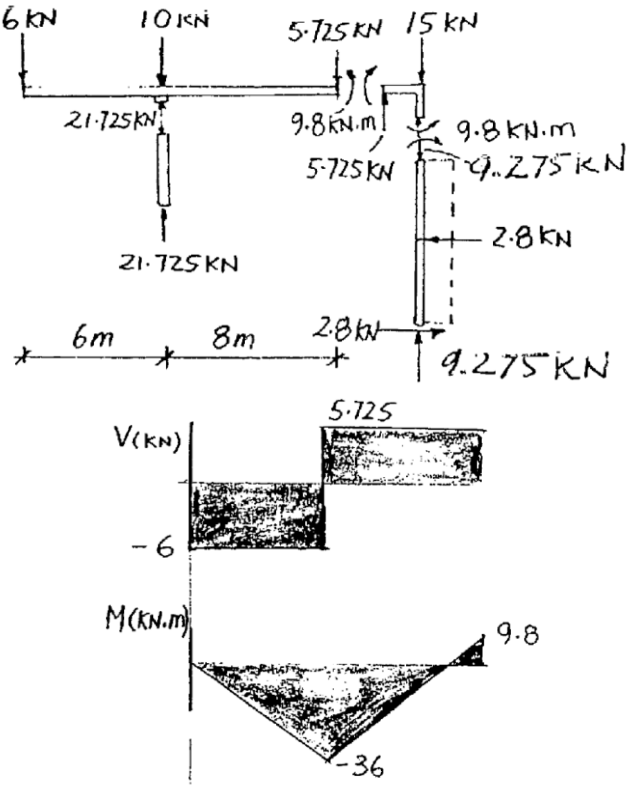

شکل مسئله ٤-۵۸

حل) با توجه دیاگرام جسم آزاد داریم:

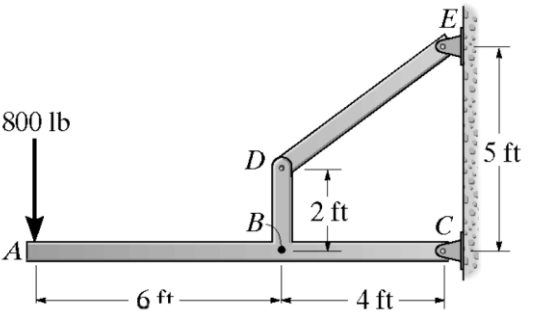
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۵۹-٤) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر $ABC$ را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ٤-۵۹*

حل) برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 800\times 10 - \frac{3}{5}F_{DE}\times 4 - \frac{4}{5}F_{DE}\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 2000lb$$

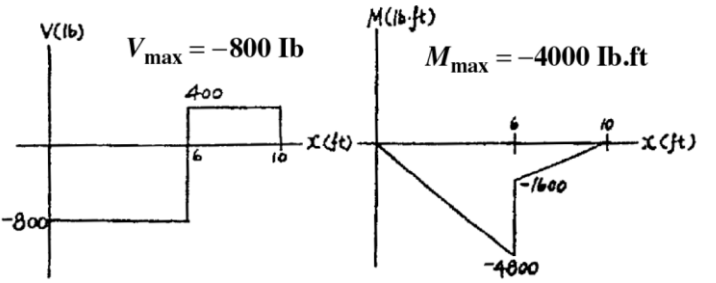
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

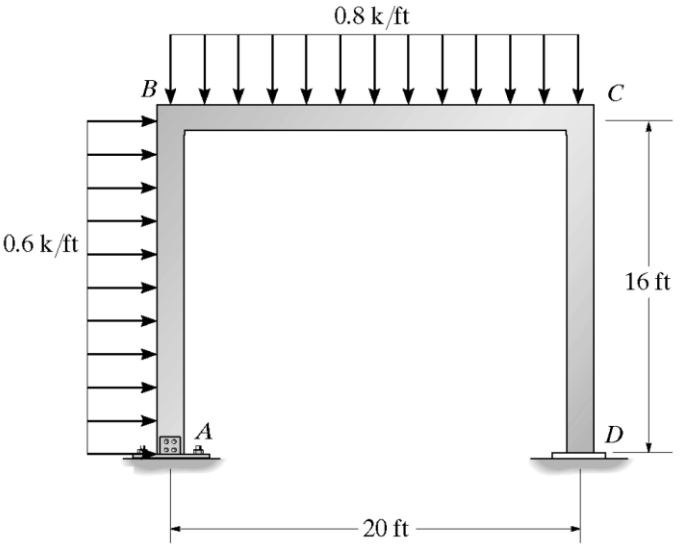


$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -800+\frac{3}{5}(2000)-C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 400lb$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -C_x+\frac{4}{5}(2000) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 1600lb$$




٤-٦٠) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $B$ غلتکی می‌باشد.



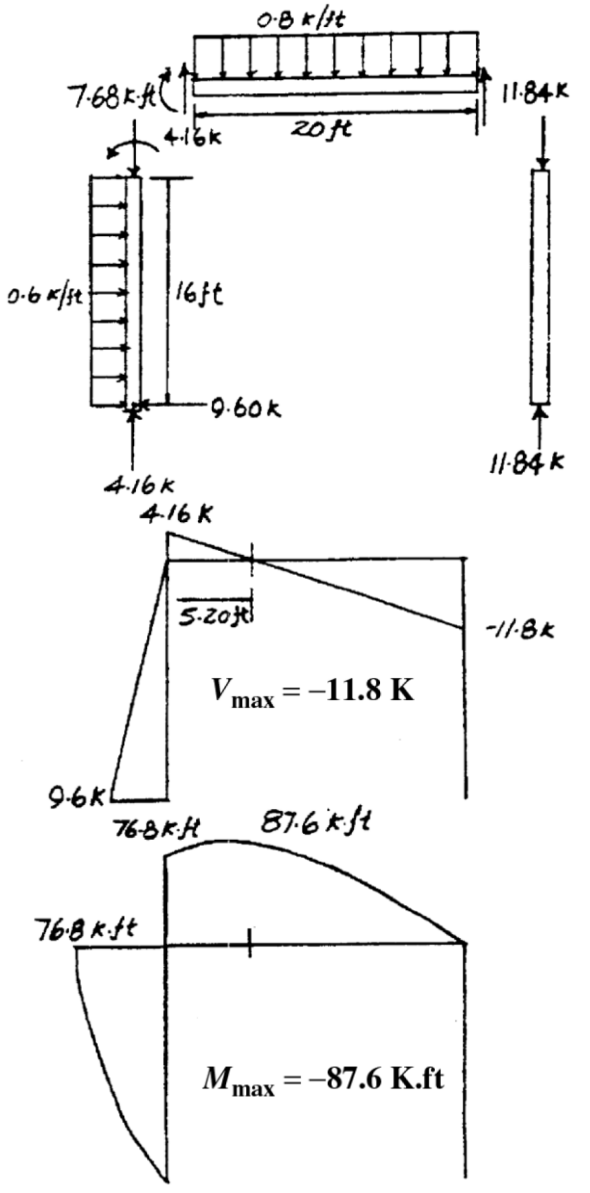

*شکل مسئله ٤-٦٠*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای سازه فوق داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



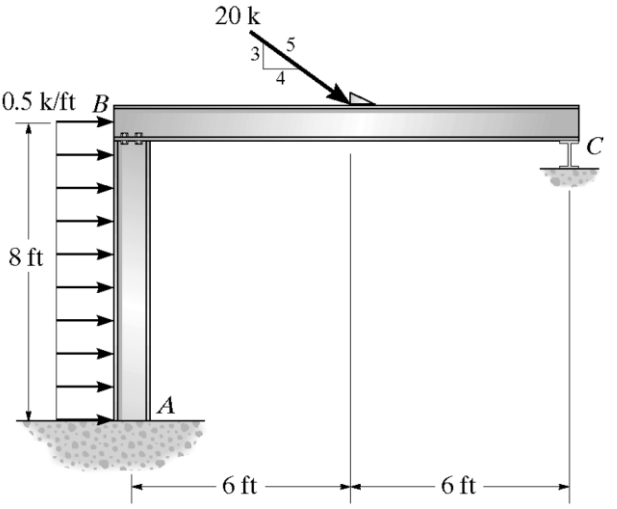



٤-٦١) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ گیردار و $C$ غلتکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

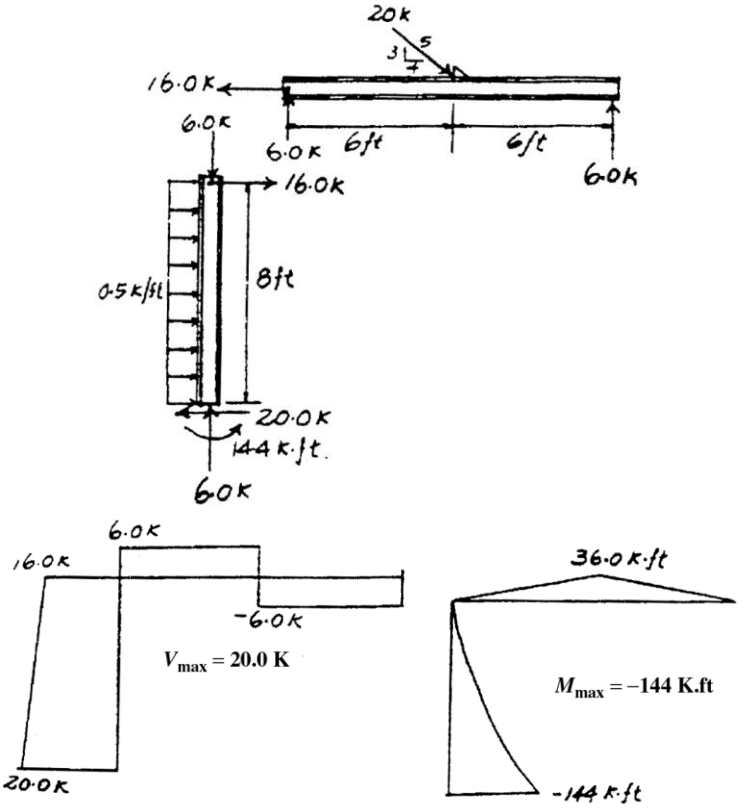
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٤-٦١

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای سازه فوق داریم:

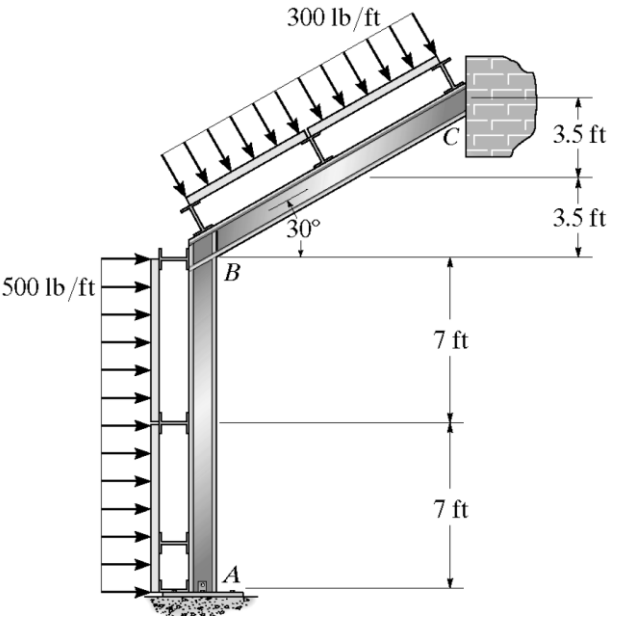



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



٤-٦٢) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $C$ غلتکی می‌باشد. نیروی باد اعمال شده بر سقف توسط لاپه‌های تعبیه شده بر روی تیرها بر آنها اعمال می‌شود. اتصال در نقطه $B$ به صورت گیردار است.




شکل مسئله ٤-٦٢

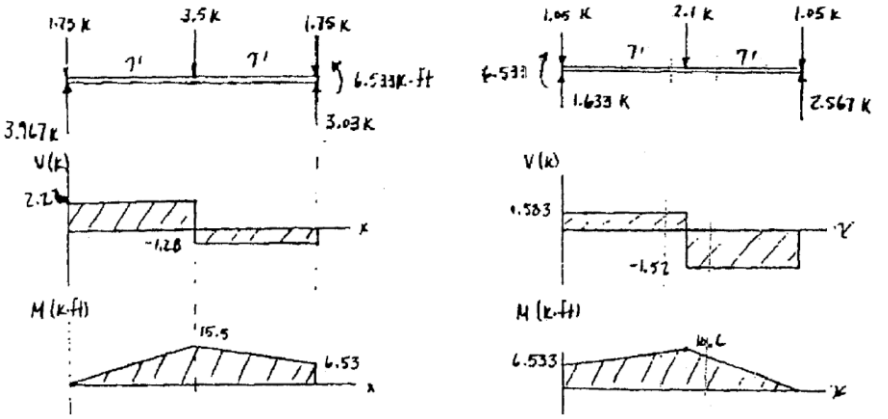
حل) برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -3.5\times 7 - 1.75\times 14 - \left(4.2\times\cos 30^\circ\right)\times\left(7\times\cos 30^\circ\right)$$
$$-4.2\times\sin 30^\circ\times\left(14+3.5\right)+C_x\times 21=0$$
$$C_x = 5.133\,kN$$
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.75+3.5+1.75+4.2\sin 30^\circ - 5.133 - A_x = 0$$
$$\Rightarrow \quad A_x = 3.967\,kN$$
$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - 4.2\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 3.64\,kN$$

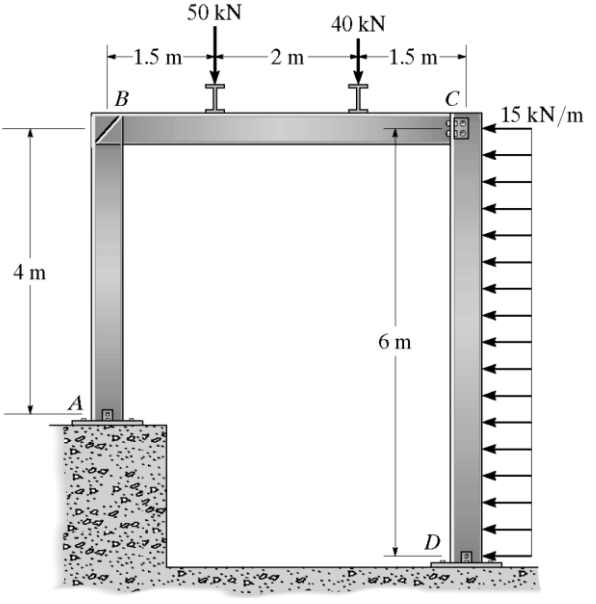
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤–٦٣) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه را ترسیم نمایید. فرض کنید که اتصالات تیر در نقاط $A$ ، $C$ و $D$ به صورت مفصلی می‌باشد.



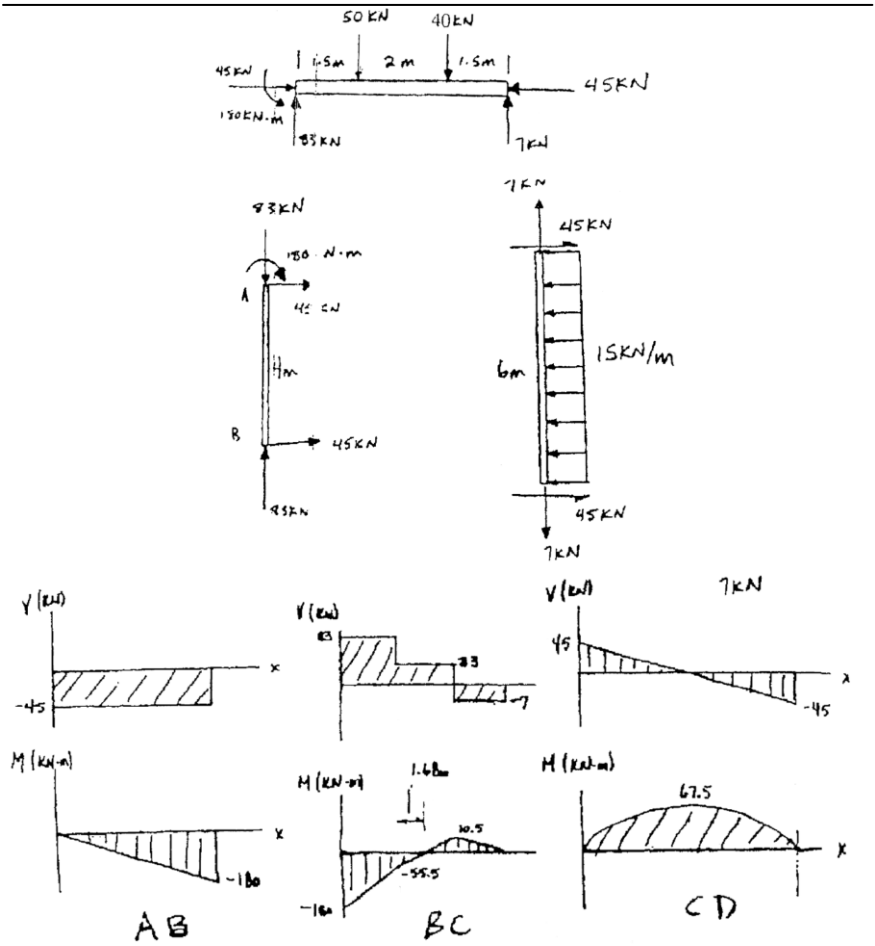

*شکل مسئله ٤–٦٣*

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد برای سازه فوق داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



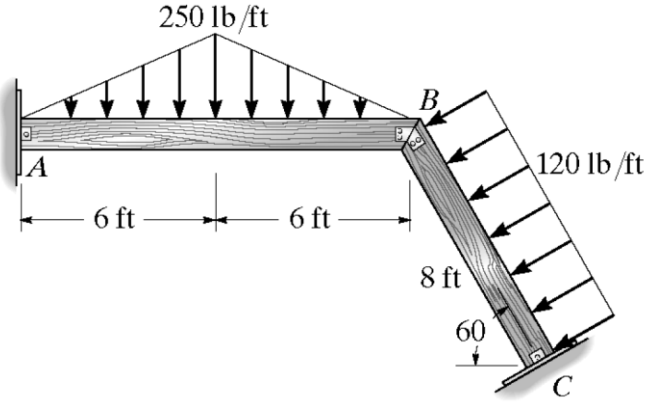



٤-٦٤) سازه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه را ترسیم نمایید. فرض کنید که اتصالات تیر در نقاط $A$ ، $B$ و $C$ به صورت مفصلی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

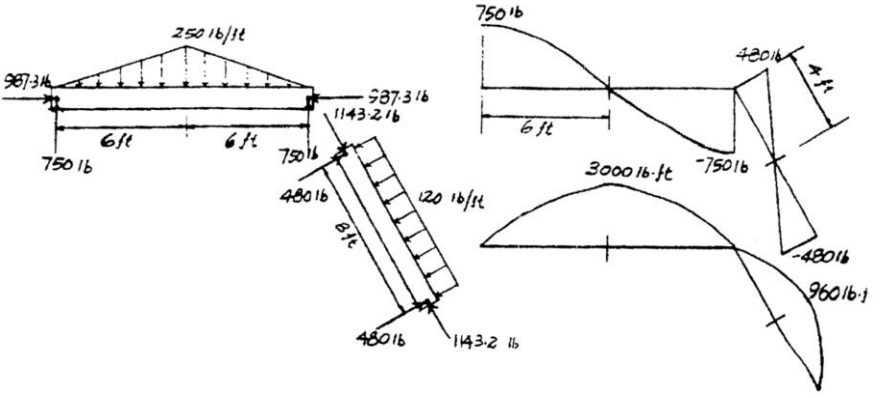
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



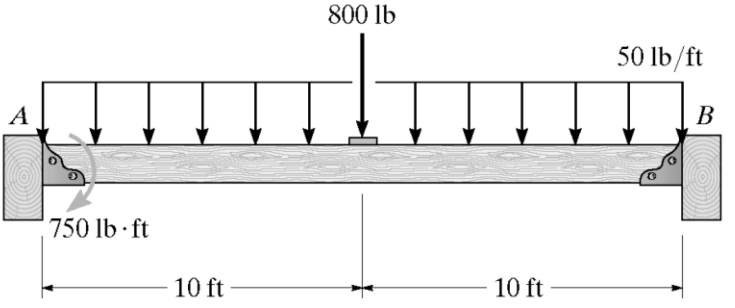



شکل مسئله ٤-٦٤

حل)




٤-٦٥) با استفاده از اصل جمع آثار قوا، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه زیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $B$ غلتکی می‌باشد.



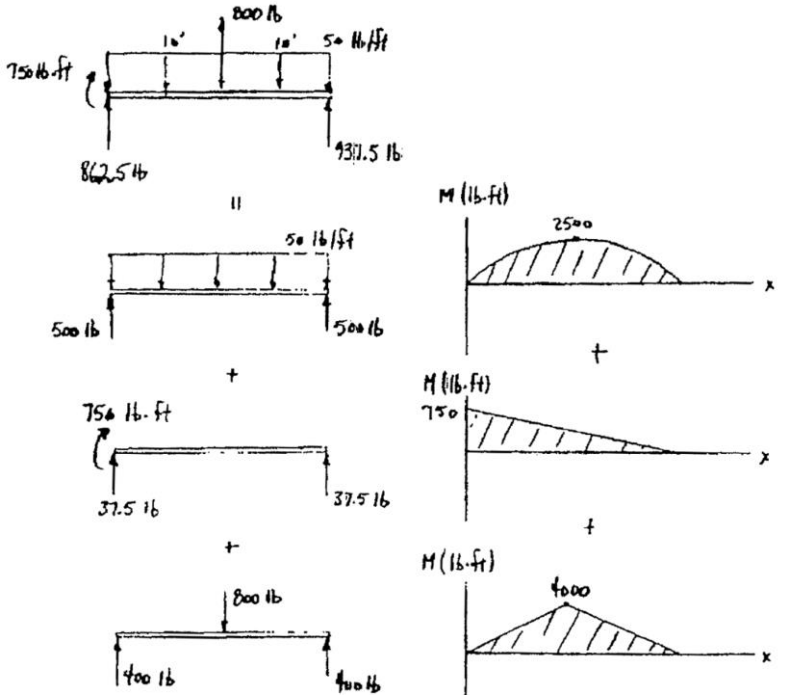

شکل مسئله ٤-٦٥

حل) بارهای اعمال شده بر روی تیر را می‌توان به صورت زیر تفکیک نمود:

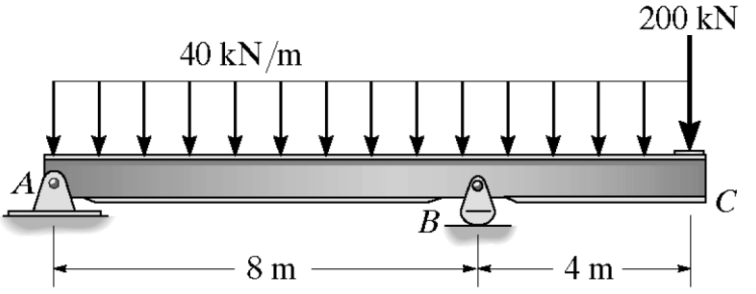
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٤–٦٦) با استفاده از اصل جمع آثار قوا، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه زیر را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $B$ غلتکی می‌باشد.



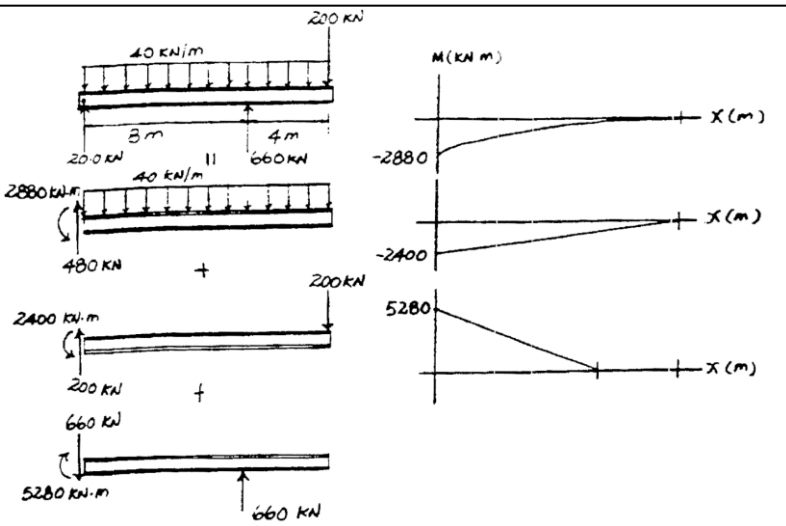

*شکل مسئله ٤–٦٦*

حل)

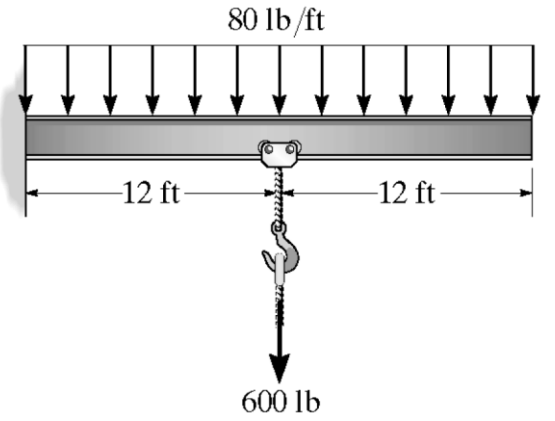
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






٦٧-٤) با استفاده از اصل جمع آثار قوا، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای سازه زیر را ترسیم نمایید.



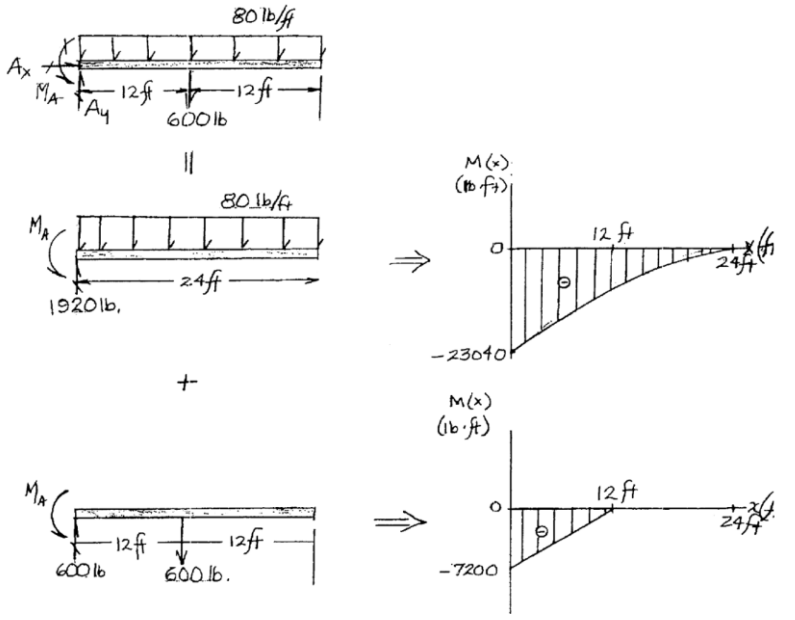

شکل مسئله ٤-٦٧

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل پنجم
# تحلیل سیستم‌های کابلی و قوسی

## ۵-۱ کلیات

کابل‌های انعطاف پذیر چندین دهه است که در سازه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. عنصر اصلی باربر در یک پل معلق، کابل است. کاربرد مهم دیگر کابل‌ها به عنوان مهارکننده سازه‌های بلند و لاغر نظیر جرثقیل‌ها، دودکش‌ها و دکل‌های مخابراتی است. کابل‌های یک پل معلق[1] وظیفه تحمل بارهای ناشی از بارهای روی عرشه پل را دارند. کاربرد دیگر کابل‌ها در تیرهای پیش تنیده است. سازه‌های کابلی دارای کارایی زیادی هستند و نیروهای وارده را توسط کشش منتقل می‌کنند. در اعضای با لاغری زیاد تحت بار فشاری امکان کمانش وجود دارد، ولی در کابل‌ها تمام نیروها به صورت کششی می‌باشند و لذا مشکل فوق وجود ندارد.

## ۵-۲ کابل‌های سبک[2] تحت نیروهای متمرکز

در این حالت برای روند تحلیل ما فرض می‌کنیم که وزن خود کابل در مقایسه با بارهای اعمال شده بر آن بسیار کم می‌باشد و می‌توان از وزن کابل صرف نظر کرد و کابل نیز تنها قادر به تحمل بارهای کششی خواهد بود.

## ۵-۳ کابل‌های سنگین[3]

در این قسمت به بررسی تحلیل کابل‌هایی پرداخته می‌شود که وزنشان قابل توجه است.

### معادلات حاکم در تغییر شکل

کابل نشان داده شده در شکل ۵-۱ وزن خودش را به میزان $w_s$ که در واحد طول آن گسترده شده است را نشان می‌دهد. یک المان از این کابل در شکل ۵-۱ب نشان داده شده است که دارای طول $\delta z$ می‌باشد. از آنجا که طول $\delta z$ بسیار کوچک می‌باشد می‌توان بار

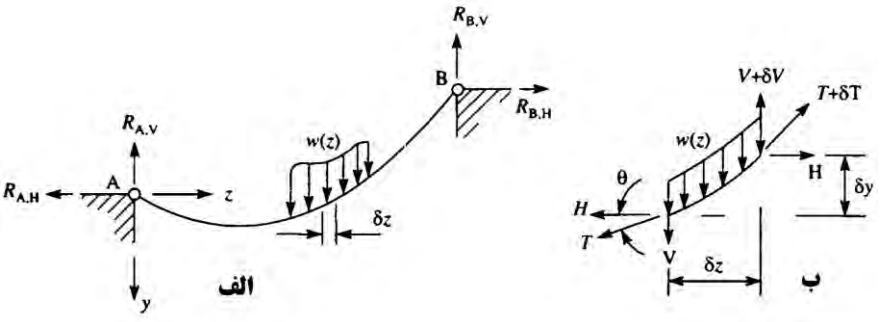
[1] Suspension bridge
[2] Lightweight
[3] Heavy cables

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



روی آن را به صورت یک بار گسترده ثابت در نظر گرفت. کشش در کابل و در نقطه $z$ برابر با $T$ می‌باشد و همچنین کشش در کابل در نقطه $z+\delta z$ برابر $T+\delta T$ می‌باشد. مولفه‌های افقی و قائم کشش $T$ برابر $H$ و $V$ می‌باشند که در شکل نشان داده شده است. به سادگی می‌توان اثبات کرد که برای هر نوع بارگذاری خارجی مقدار $H$ ثابت است.




*شکل ۵-۱ کابل در معرض بار گسترده خطی*

با استفاده از معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$V+\delta V-w(z)\delta z-V=0$$

وقتی که $\delta z\to 0$ میل کند:

$$\frac{dV}{dz}=w(z) \qquad (۱-۵)$$

از شکل ۵-۱ب داریم:

$$\frac{V}{H}=\tan\theta=-\frac{dy}{dz}$$

که در آن $y$ مقدار خیز در طول محور $z$ می‌باشد.

$$V=-H\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dV}{dz}=-H\frac{d^2y}{dz^2} \qquad (۲-۵)$$

با قرار دادن $dy/dz$ از معادله ۵-۱ در معادله۵-۲، رابطه حاکم بر تغییر مکان کابل حاصل می‌شود.

$$H\frac{d^2y}{dz^2}=-w(z) \qquad (۳-۵)$$

**کابل تحت وزن خودش**

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در این حالت کابلی را در نظر بگیرید که تحت وزن خودش است. شکل۵-۲ جزئی از یک کابل را نشان می‌دهد و وزن واقعی آن را به صورت بار گسترده $w_s$ در نظر گرفته شده است.

$$w(z)\delta z = w_s \delta s \qquad (٤-٥)$$

حال حد $\delta s \to 0$ برابر $ds = \left(dz^2 + dy^2\right)^{1/2}$ می‌شود

$$w(z) = w_s \left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (٥-٥)$$

با قرار دادن $w(z)$ از معادله ۵-۵ در معادله ۵-۳ داریم:

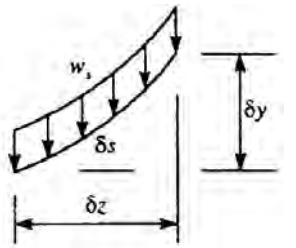
$$H\frac{d^2y}{dz^2} = -w_s\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (٦-٥)$$

که $dy/dz = p$ و معادله ۵-٦ را می‌توان به این صورت بازنویسی نمود:

$$H\frac{dp}{dz} = -w_s\left[1 + p^2\right]^{1/2}$$

با ساده سازی و انتگرال گیری از معادله فوق داریم:

$$\int \frac{dp}{\left(1+p^2\right)^{1/2}} = -\int \frac{w_s}{H} dz \qquad (٧-٥)$$




*شکل۵-۲ کابل در معرض وزن خودش*

سمت چپ معادله یک انتگرال استاندارد است:

$$\sinh^{-1} p = -\frac{w_s}{H} z + C_1$$

که $C_1$ ثابت انتگرال‌گیری است. برای مقدار $dy/dz = p$

$$\frac{dy}{dz} = \sinh\left(-\frac{w_s}{H} z + C_1\right)$$

با انتگرال‌گیری داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

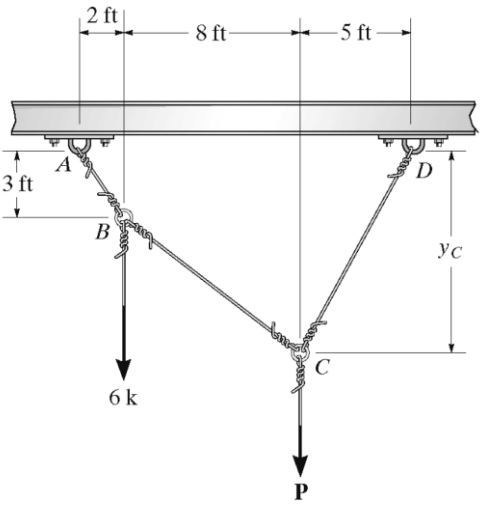


$$y = -\frac{H}{w_s}\cosh\left(-\frac{w_s}{H}z + C_1\right) + C_2 \qquad (۸-۵)$$

که $C_2$ ثابت دوم انتگرال‌گیری است. مقادیر ثابت‌های انتگرال‌گیری از شرایط مرزی مسئله حاصل می‌شوند.[1]

**۵-٤ مسائل:**

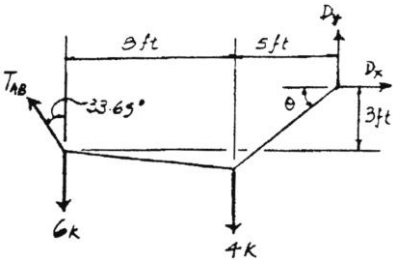
۵-۱) در شکل زیر سیستم کابل تحت بارهای نشان داده شده در شکل می‌باشد. مقدار فاصله $y_C$ را تعیین نمایید. مقدار $P=4k$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۵-۱*

حل)

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_{AB}\times\cos 33.69^\circ \times 13 - T_{AB}\sin 33.69^\circ \times 3 + 6\times 13 + 4\times 5 = 0$$
$$\Rightarrow \quad T_{AB} = 7.8521\,k$$
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -4-6+7.8521\cos 33.69^\circ + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 3.4667\,k$$




[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در گره $D$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_{DC}\cos\theta + 4.3556 = 0$$

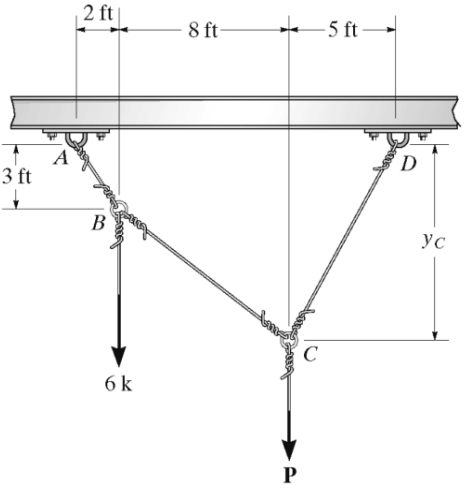
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.4667 - T_{DC}\sin\theta = 0$$

با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$\theta = 38.52^{\circ} \qquad T_{DC} = 5.567\,k$$

$$y_C = 5\tan 38.52^{\circ} = 3.98\ ft$$

۲-۵) در شکل زیر سیستم کابل تحت بارهای نشان داده شده در شکل می‌باشد. مقدار فاصله نیروی $P$ را طوری تعیین نمایید که $y_C$=6ft شود.




شکل مسئله ۲-۵

حل)

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{DC}\times\cos 39.81^{\circ}\times 10 + T_{DC}\sin 39.81^{\circ}\times 6 - 6\times 2 - P\times 10$$

$$+11.523\times T_{DC} - 10\times P = 12 \qquad (1)$$

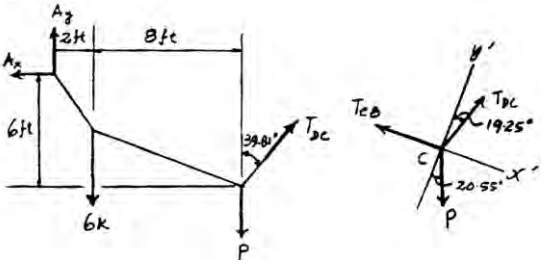
در گره $C$ داریم:

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{DC}\cos 19.25^{\circ} - P\cos 20.55^{\circ} = 0 \qquad (2)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

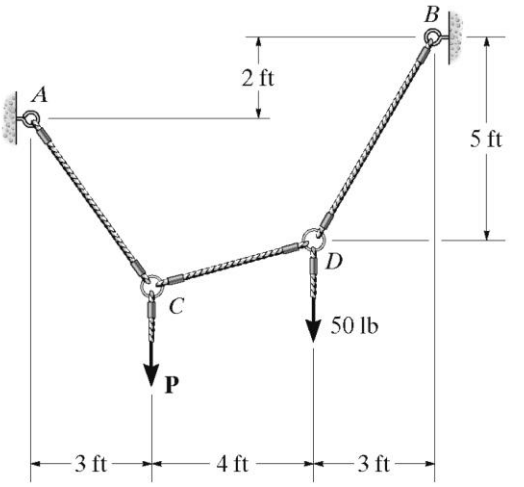





با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$P = 8.4k \qquad T_{DC} = 8.321k$

۵-۳) در شکل زیر سیستم کابل تحت بارهای نشان داده شده در شکل می‌باشد. مقدار نیروی کششی ایجاد شده در هر یک از کابل‌ها را تعیین نمایید. مقدار $P=80lb$ می‌باشد.




شکل مسئله ۵-۳

حل) با توجه کل سیستم داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BD} \times \cos 59.04^\circ \times 3 + T_{BD} \sin 59.04^\circ \times 7 - 50 \times 7 - 80 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{BD} = 78.188\,lb = 78.2lb$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 78.188 \cos 59.04^\circ - A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 40.227lb$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 78.188 \sin 59.04^\circ - 80 - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 62.955\,lb$$

در گره $A$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AC} \cos\phi - 40.227 = 0 \qquad (1)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_{AC}\sin\phi + 62.955 = 0 \qquad (2)$$

با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$\phi = 57.42^\circ \qquad T_{AC} = 74.7lb$$

در گره $D$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 78.188\cos 59.04^\circ - T_{CD}\cos\theta = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 78.188\sin 59.04^\circ - T_{CD}\sin\theta - 50 = 0$$

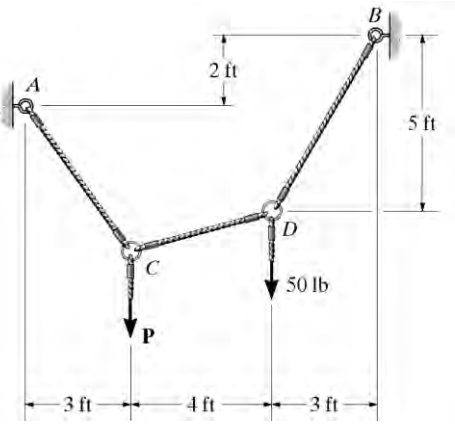
با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$\theta = 22.96^\circ \qquad T_{CD} = 43.7lb$$

طول کل کابل برابر است با:

$$L = \frac{5}{\cos 59.04^\circ} + \frac{4}{\cos 22.96^\circ} + \frac{3}{\cos 57.42^\circ} = 15.7\,ft$$

۵-٤) در صورتی که هر یک از کابل‌ها قادر به تحمل نیروی کششی ۷۵ پوندی باشند، حداکثر نیروی $P$ را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۵-٤*

حل) با توجه دیاگرام جسم آزاد برای کل سیستم داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BD}\times\cos 59.04^\circ \times 3 + T_{BD}\sin 59.04^\circ \times 7 - 50\times 7 - P\times 3 = 0$$

$$\Rightarrow T_{BD} = 0.39756\,P + 46.383$$

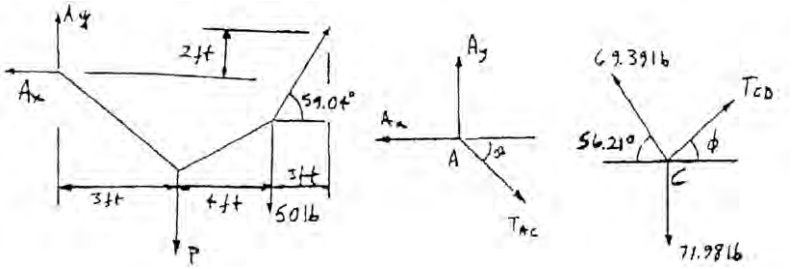
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_x + T_{BD}\cos 59.04^\circ = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - P - 50 + T_{BD}\sin 59.04^\circ = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






فرض می‌نمایید که حداکثر نیروی کششی در کابل $BD$ ایجاد می‌شود.

$$\Rightarrow T_{BD} = 75lb$$

$$\Rightarrow P = 71.98lb$$

$$\Rightarrow A_x = 38.59lb$$

$$\Rightarrow A_y = 57.670lb$$

در گره $A$ داریم:

$$T_{AC} = \sqrt{(38.59)^2 + (57.670)^2} = 69.39lb < 75lb \qquad OK$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{57.670}{38.59} = 56.21^\circ$$

در گره $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{CD}\cos\phi - 69.39\cos 56.21^\circ = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{CD}\sin\phi + 69.39\sin 56.21^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{CD} = 41.2lb < 75lb$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 20.3^\circ$$

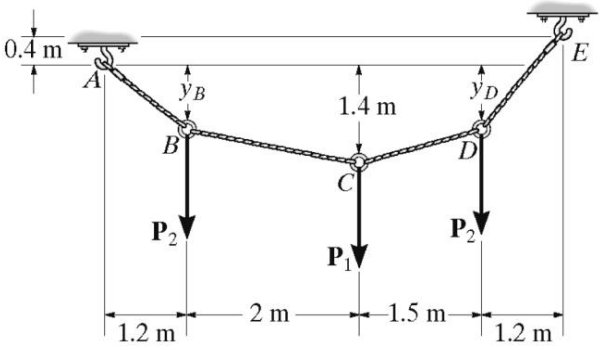
$$\Rightarrow \quad P = 72.0lb$$

**۵-۵)** در کابل نشان داده شده در شکل زیر که تحت سه بار متمرکز قرار دارد، مقدار خیز ایجاد شده در گره‌های $B$ و $D$ را تعیین نمایید. مقدار $P_1=4kN$ و $P_2=2.5kN$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





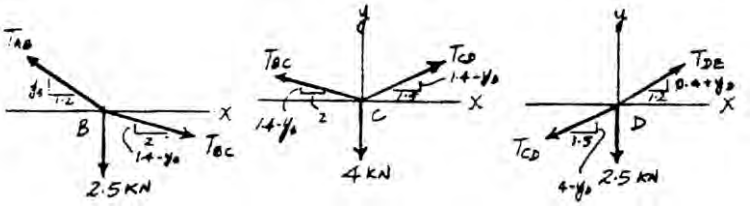

شکل مسئله ۵-۵

حل) در گره $B$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} - \frac{1.2}{\sqrt{y_B^2+1.44}}T_{AB} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1.4-y_B}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} + \frac{y_B}{\sqrt{y_B^2+1.44}}T_{AB} - 2.5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3.2y_B - 1.68}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} = 3 \qquad (1)$$




در گره $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1.5}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} - \frac{2}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1.4-y_D}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} + \frac{1.4-y_B}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2y_D + 4.9 - 1.5y_B}{\sqrt{(1.4-y_B)^2+4}}T_{BC} = 6 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2y_D + 4.9 - 1.5y_B}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} = 8 \qquad (3)$$

در گره $D$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1.2}{\sqrt{(0.4+y_D)^2+1.44}}T_{DE} - \frac{1.5}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.4+y_D}{\sqrt{(0.4+y_D)^2+1.44}}T_{DE} - \frac{1.4-y_D}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} - 2.5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1.08+2.7y_D}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD} = 3 \qquad (4)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$7.9y_B + 2y_D = 8.26$$

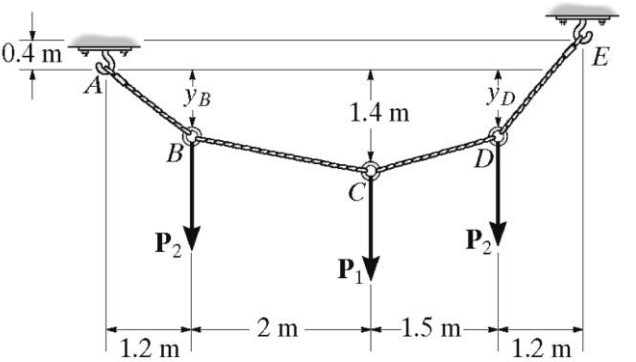
با ترکیب روابط (۳) و (٤) داریم:

$$4.5y_B + 27.6y_D = 23.34$$

$$\Rightarrow y_B = 0.867\,m$$

$$\Rightarrow y_D = 0.704\,m$$

۵-٦) در کابل نشان داده شده در شکل زیر که تحت سه بار متمرکز قرار دارد، مقدار خیز ایجاد شده در $D$ ($y_D$) و همچنین مقدار بزرگی نیروی $P_1$ را تعیین نمایید. نیروی $P_2$=3kN و $y_B$=0.8m می‌باشد.




شکل مسئله ۵-٦

حل) در گره $B$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{4.36}}T_{BC} - \frac{1.2}{\sqrt{2.08}}T_{AB} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{0.6}{\sqrt{4.36}}T_{BC} + \frac{0.8}{\sqrt{2.08}}T_{AB} - 3 = 0$$

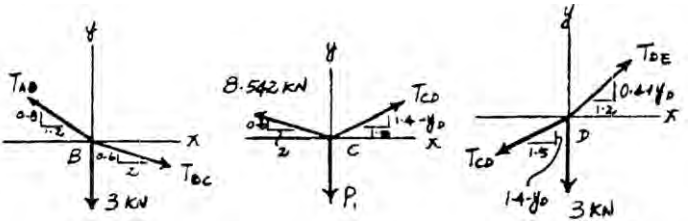
$$\Rightarrow \quad T_{AB} = 9.833\,kN$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Rightarrow \quad T_{BC} = 8.542\,kN$$




در گره $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{4.36}}(8.542)+\frac{1.5}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD}=0 \qquad (1)$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.6}{\sqrt{4.36}}(8.542)+\frac{1.4-y_D}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD}-P_1=0 \qquad (2)$$

در گره $D$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1.2}{\sqrt{(0.4-y_D)^2+1.44}}T_{DE}-\frac{1.5}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD}=0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.4+y_D}{\sqrt{(0.4+y_D)^2+1.44}}T_{DE}-\frac{1.4-y_D}{\sqrt{(1.4-y_D)^2+2.25}}T_{CD}-3=0$$

$$\Rightarrow \quad T_{CD}=\frac{3.6\sqrt{2.25+(1.4-y_D)^2}}{2.7y_D-1.08}$$

با جایگذاری در رابطه (۱) فوق داریم:

$$y_D = 0.644\,m$$

$$T_{CD} = 9.16kN$$

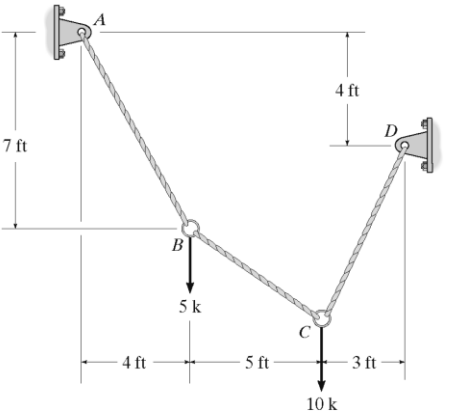
$$P_1 = 6.58kN \qquad \text{با توجه به رابطه (۲)}$$

۵-۷) در کابل نشان داده شده در شکل زیر که تحت دو بار متمرکز قرار دارد، مقدار نیروی کششی ایجاد شده در هر یک از کابل‌ها را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۵-۷

حل) در گره $B$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - \frac{4}{\sqrt{65}}T_{AB} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{y}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} + \frac{7}{\sqrt{65}}T_{AB} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{35}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - \frac{4y}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - 20 = 0 \qquad (1)$$

در گره $C$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{(y+3)^2+9}}T_{CD} - \frac{5}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y+3}{\sqrt{(y+3)^2+9}}T_{CD} + \frac{y}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3y}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - \frac{5(y+3)}{\sqrt{y^2+25}}T_{BC} - 30 = 0 \qquad (2)$$

با حل همزمان دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{35-4y}{15+8y} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = 2.679\ ft$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 4.67k$$

بنابراین:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

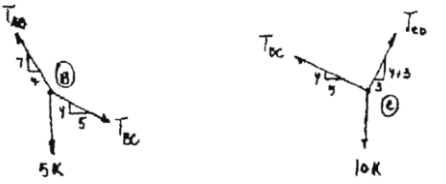
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



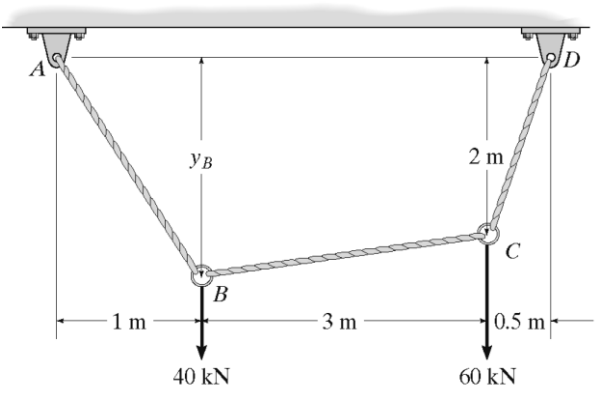
$T_{AB} = 8.3k$ $T_{CD} = 8.81k$

طول کابل برابر است با:

$$\Rightarrow L = \sqrt{65} + \sqrt{y^2 + 25} + \sqrt{(y+3)^2 + 9} = 20.2\,ft$$




۵–۸) در کابل نشان داده شده در شکل زیر که تحت دو بار متمرکز قرار دارد، مقدار نیروی کششی حداکثر ایجاد شده در هر یک از کابل‌ها و همچنین مقدار خیز ایجاد شده در گره $B$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۵–۸

حل) در گره $B$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}} T_{BC} - \frac{1}{\sqrt{y_B^2+1}} T_{AB} = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B-2}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}} T_{BC} + \frac{y_B}{\sqrt{y_B^2+1}} T_{AB} - 40 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3y_B}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}} T_{BC} + \frac{y_B-2}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}} T_{BC} - 40 = 0 \qquad (1)$$

در گره $C$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.5}{\sqrt{4.25}} T_{CD} - \frac{3}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}} T_{BC} = 0$$

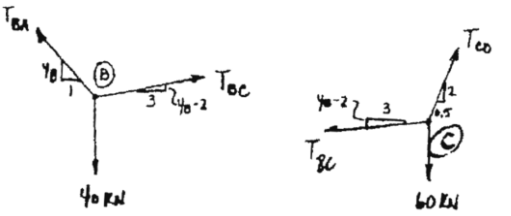
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{4.25}}T_{CD} + \frac{y_B - 2}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}}T_{BC} - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{12}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}}T_{BC} - \frac{y_B - 2}{\sqrt{(y_B-2)^2+9}}T_{BC} - 60 = 0 \qquad (2)$$



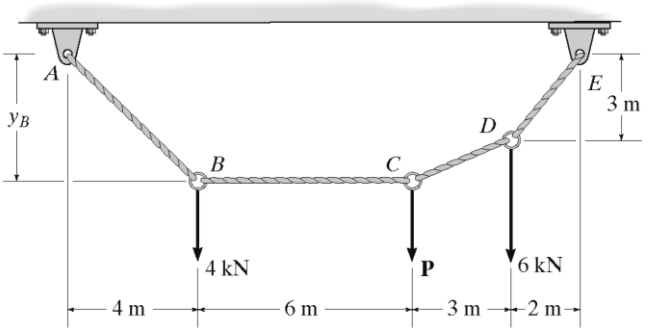

با حل همزمان دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{4y_B - 2}{14 - y_B} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y_B = 2.429\,m = 2.43m$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 15.7kN \quad \Rightarrow \quad T_{AB} = 40.9kN \quad \Rightarrow \quad T_{CD} = T_{\max} = 64.1kN$$

۵-۹) در شکل نشان داده شده در زیر، مقدار نیروی $P$ که برای نگهداشتن کابل‌ها به صورت زیر مورد نیاز است را تعیین نمایید. کابل $BC$ افقی می‌باشد. همچنین مقدار حداکثر کشش ایجاد شده در کابل‌ها و خیز $y_B$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۵-۹

حل) در گره $B$ داریم:

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC} - \frac{4}{\sqrt{y_B^2+16}}T_{AB} = 0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B}{\sqrt{(y_B)^2+16}}T_{AB} - 4 = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Rightarrow \quad y_B T_{BC} = 16 \qquad (1)$$

در گره $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} - T_{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_B}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y_B-3) T_{BC} = 3P \qquad (2)$$

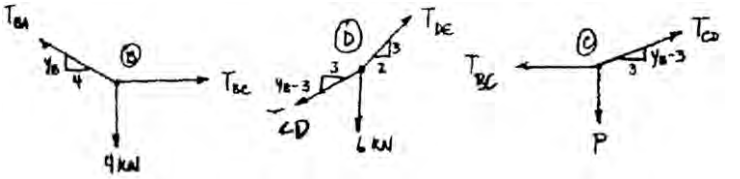
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} = \frac{16}{y_B} \qquad (3)$$

در گره $D$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{13}} T_{DE} - \frac{3}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{13}} T_{DE} - \frac{y_B-3}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{15-2y_B}{\sqrt{(y_B-3)^2+9}} T_{CD} = 12 \qquad (4)$$




با حل همزمان دو رابطه (۱) و(۲) داریم:

$$3y_B P - 16y_B + 48 = 0$$

با حل همزمان دو رابطه (۳) و(٤) داریم:

$$y_B = 3.53m$$

$$P = 0.800\,kN$$

$$T_{BC} = 4.5333\,kN$$

$$T_{CD} = 4.603\,kN$$

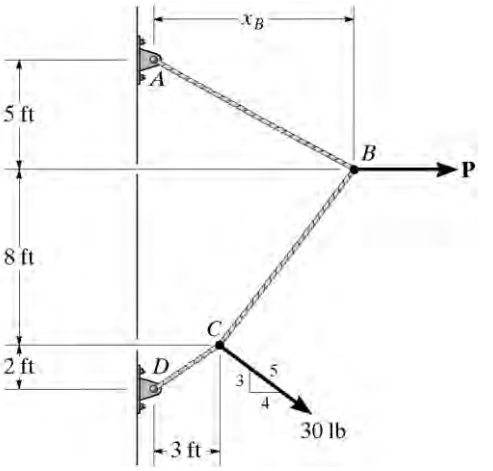
$$T_{DE} = 8.17\,kN$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۵-۱۰) کابل نشان داده شده در شکل زیر، تحت بارهایی مطابق شکل قرار دارد. مقدار فاصله $x_B$ را تعیین نمایید. فرض کنید که $P40lb$ باشد.




شکل مسئله ۵-۱۰

حل) در گره $B$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad 40-\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+25}}T_{AB}-\frac{x_B-3}{\sqrt{(x_B+3)^2+64}}T_{BC}=0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{x_B^2+25}}T_{AB}-\frac{8}{\sqrt{(x_B-3)+64}}T_{BC}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{13x_B-15}{\sqrt{(x_B-3)^2+64}}T_{BC}=200 \qquad (1)$$

در گره $C$ داریم:

$$\xrightarrow[+]{}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}(30)+\frac{x_B-3}{\sqrt{(x_B-3)^2+64}}T_{BC}-\frac{3}{\sqrt{13}}T_{CD}=0$$

$$\uparrow^{+}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{\sqrt{(x_B-3)^2+64}}T_{BC}-\frac{2}{\sqrt{13}}T_{CD}-\frac{3}{5}(30)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{30-20x_B}{\sqrt{(x_B-3)^2+64}}T_{BC}=102 \qquad (2)$$

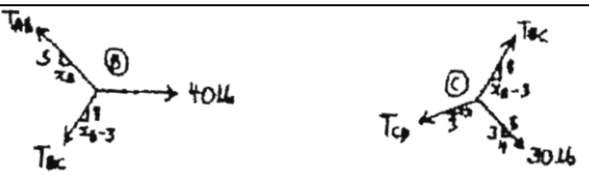
با حل همزمان دو رابطه (۱) و(۲) داریم:

$$\Rightarrow \quad \frac{13x_B-15}{30-x_B}=\frac{200}{102} \qquad \Rightarrow \quad x_B=4.36\,ft$$

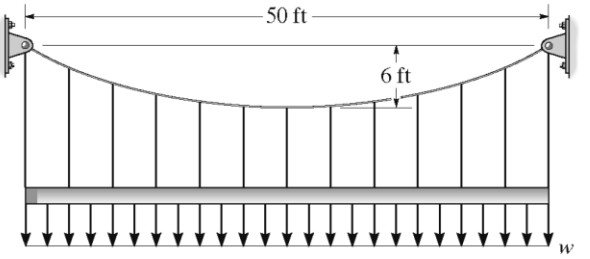
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۱-٤) کابل نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار گسترده خطی به شدت $w=250lb/ft$ قرار دارد. مقدار حداکثر و حداقل کشش ایجاد شده در کابل را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۵-۱۱

حل)

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{8h} = \frac{250\times 50^2}{8\times 6} = 13021lb$$

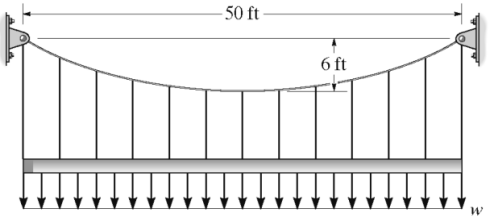
$$\theta_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{w_0 L}{2F_H}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{250\times 50}{2\times 13021}\right) = 25.64^\circ$$

$$T_{\max} = \frac{F_H}{\cos\theta_{\max}} = \frac{13021}{\cos 25.64^\circ} = 14.4kip$$

حداقل کشش ایجاد شده در حالتی که $\theta = 0^\circ$ باشد، رخ می‌دهد.

$$T_{\min} = F_H = 13.0kip$$

۱۲-۵) در سیستم کابل نشان داده شده در شکل زیر، مقدار حداکثر شدت بار گسترده یکنواخت $w$ را تعیین نمایید به طوری که حداکثر تنش کشش ایجاد شده در کابل‌ها برابر ۳۰۰۰ پوند گردد.




شکل مسئله ۵-۱۲

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

$$y=\frac{1}{F_H}\int\left(\int wdx\right)dx=\frac{1}{F_H}\left(\frac{wx^2}{2}+C_1x+C_2\right)$$

در $x=0$، $y=0$ و $\frac{dy}{dx}=0$ داریم:

$$C_1=C_2=0$$

$$y=\frac{w}{2F_H}x^2$$

در $x=25ft$، $y=6ft$ داریم:

$$F_H=52.08w$$

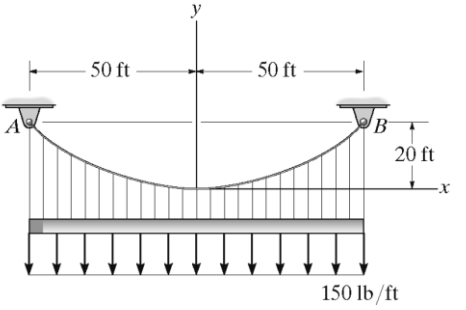
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\max}=\tan(\theta_{\max})=\left.\frac{w}{F_H}x\right|_{x=25\,ft}$$

$$T_{\max}=\frac{F_H}{\cos(\theta_{\max})}=3000\quad \theta_{\max}=\tan^{-1}(0.48)=25.64^\circ$$

$$F_H=2705\,lb$$

$$w=51.9\frac{lb}{ft}$$

۵-۱۳) سیستم کابل نشان داده شده در زیر تحت بار گسترده یکنواخت قرار دارد. مقدار تابع $y=f(x)$ را تعیین نمایید که حداکثر کشش در کابل $AB$ ایجاد می‌شود.




شکل مسئله ۵-۱۳

حل)

$$y=\frac{h}{L^2}x^2=\frac{20}{(50)^2}x^2\quad\Rightarrow\quad y=0.008x^2$$

$$T_{\max}=w_0L\sqrt{1+\left(\frac{L}{2h}\right)^2}=150\times50\sqrt{1+\left(\frac{50}{2\times20}\right)^2}=12.0kip$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل ششم
# خط تاثیر برای سازه‌های معین

## ٦-١ کلیات

در بسیاری از موقعیت‌های عملی، بارهای وارد بر سازه‌ها را ه به صورت ممتد تغییر می‌کند، به عنوان مثال یک ساختمان سیستمی از بارهای ثابت را تحمل می‌کند که شامل وزن خود سازه، وزن وسایل درون آن (مثل پارتیشن ها، ماشین آلات و غیره) و همینطور یک سیستم بارهای زنده می‌شود که سیستم بارهای زنده شامل بارهای برف، بارهای باد یا هر بار متحرکی می‌شود. بنابراین المان‌های سازه‌ای ساختمان باید به گونه‌ای طراحی شوند که بدترین ترکیب این بارهای ثابت و متحرک را تحمل کنند. شکل دیگری از بار متحرک شامل وسایل نقلیه و قطارهایی می‌شود که از پل‌های اتومبیل و پل‌های راه آهن روی دره‌ها می‌گذرند. در این حالت نیز این سازه‌ها باید به گونه‌ای طراحی شوند که وزن خودشان، وزن هرگونه تجهیزات سازه‌ای مانند کف راه یا مسیر راه آهن و همینطور نیروهای ناشی از عبور وسایل نقلیه و قطارها را تحمل کنند. بنابراین لازم است تا شرایط بحرانی وسایل نقلیه را یا قطارها را نسبت به پل یا پل روگذر تعیین کرد. هر چند این بارها، بارهای متحرک هستند، لیکن فرض می‌شود که آنها با چنان نسبتی حرکت می‌کنند که اثرات دینامیکی (مانند تنش های لرزشی و نوسانی) بوجود نمی‌آورند. اثر بارهایی که موقعیت‌های مختلفی بر روی یک سازه دارند را می‌توان به وسیله خطوط تاثیر مطالعه کرد. خطوط تاثیر مقدار توابعی مانند نیروی برشی، ممان خمشی و جابجایی را برای تمام موقعیت‌های یک بار واحد حرکت کننده برای یک نقطه خاص از سازه را می‌دهند. این خطوط ممکن است برای نمایش تغییرات عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با موقعیت بار واحد به کار روند. با استفاده از خطوط تاثیر مقدار تابع در یک نقطه برای سیستمی از بارهای طی کننده سازه، قابل محاسبه است. بدین منظور از اصل جمع آثار قوا استفاده می‌کنیم بنابراین سیستم‌های سازه‌ای که ما بررسی می‌کنیم باید الاستیک خطی باشند.[1]

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

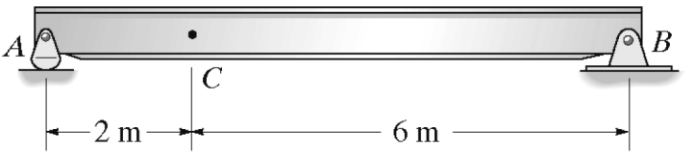
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



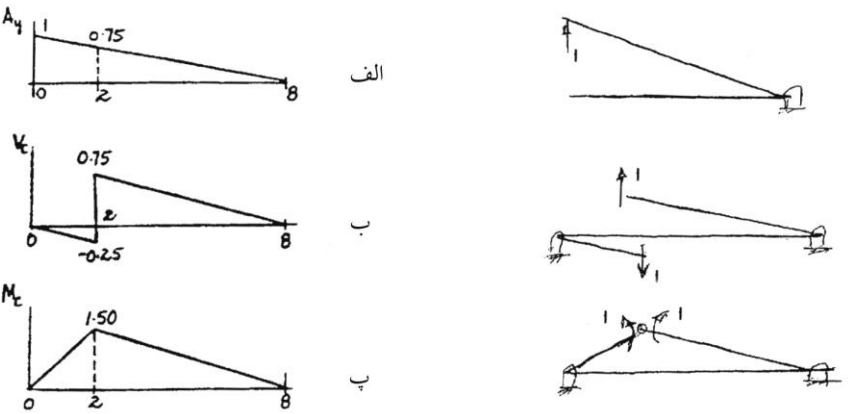
**۶-۲ مسائل:**

۶-۱) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم در تکیه‌گاه $A$، ب) برش در $C$، پ) لنگر خمشی در $C$ را ترسیم نمایید.

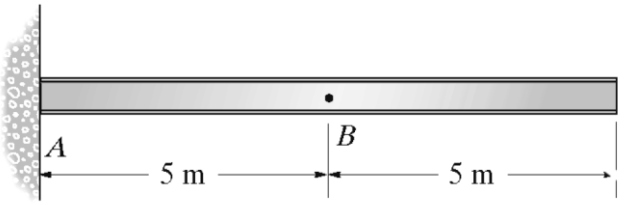



*شکل مسئله ۶-۱*

حل)




۶-۲) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم در تکیه‌گاه $A$، ب) لنگر خمشی در $A$، پ) برش در $B$ را ترسیم نمایید.



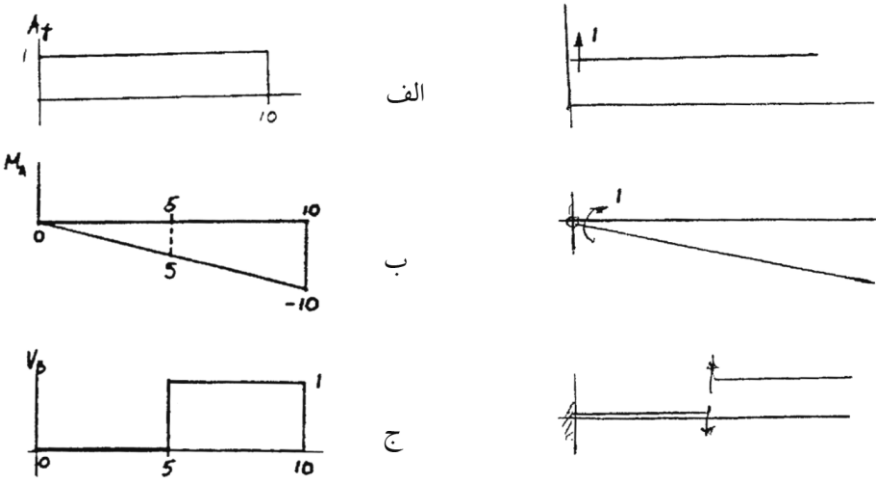

*شکل مسئله ۶-۲*

حل)

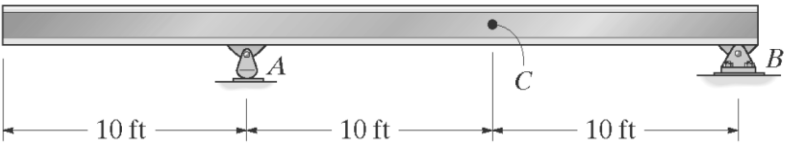
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



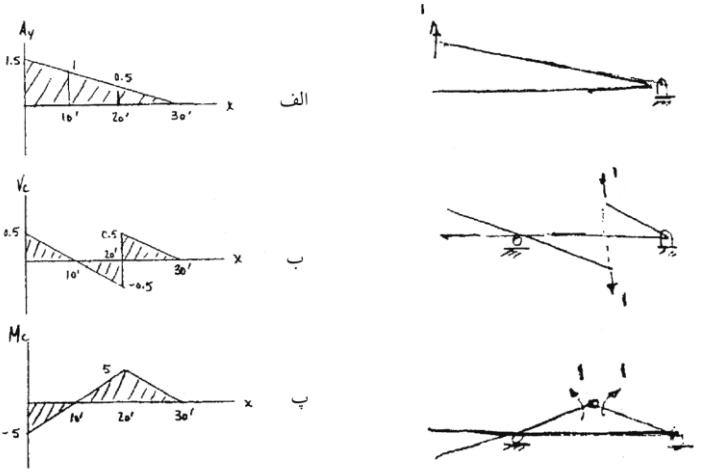



۶-۳) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم در تکیه‌گاه $A$، ب) برش در $C$، پ) لنگر در $C$ را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ۶-۳*

حل)

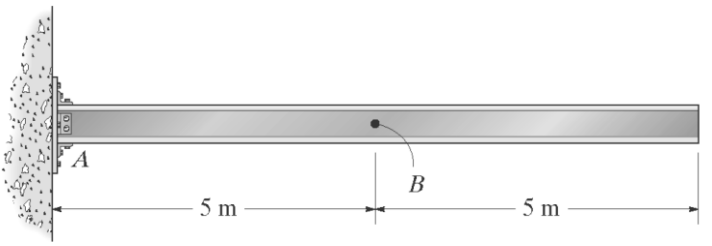



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

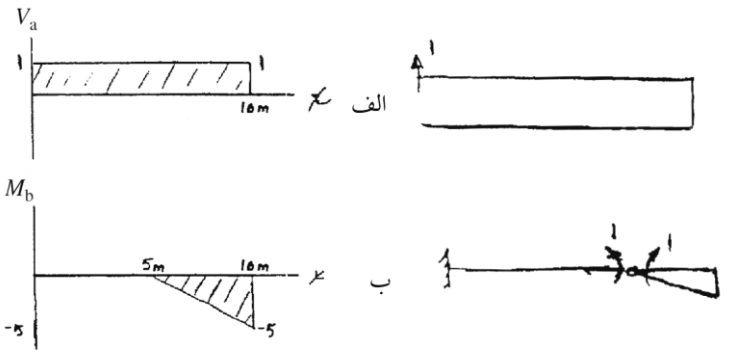


٦-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم برش در تکیه‌گاه $A$، ب) لنگر خمشی در $B$ را ترسیم نمایید.

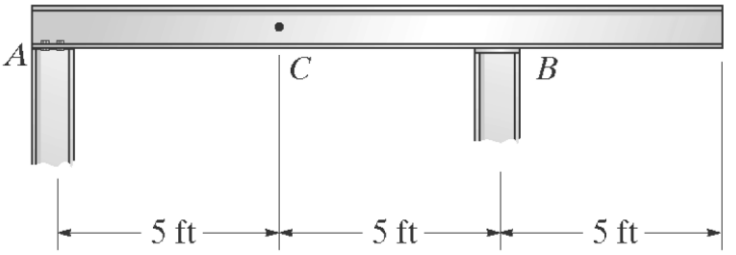



شکل مسئله ٦-٤

حل)




٦-٥) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم در تکیه‌گاه $B$، ب) لنگر خمشی در $C$ پ) برش در $C$ را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و $B$ به صورت غلتکی می‌باشد.



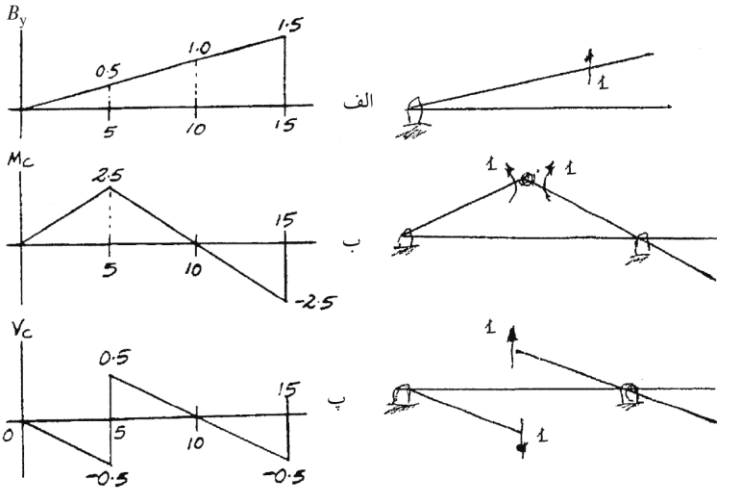

شکل مسئله ٦-٥

حل)

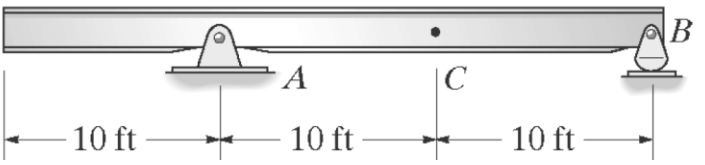
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



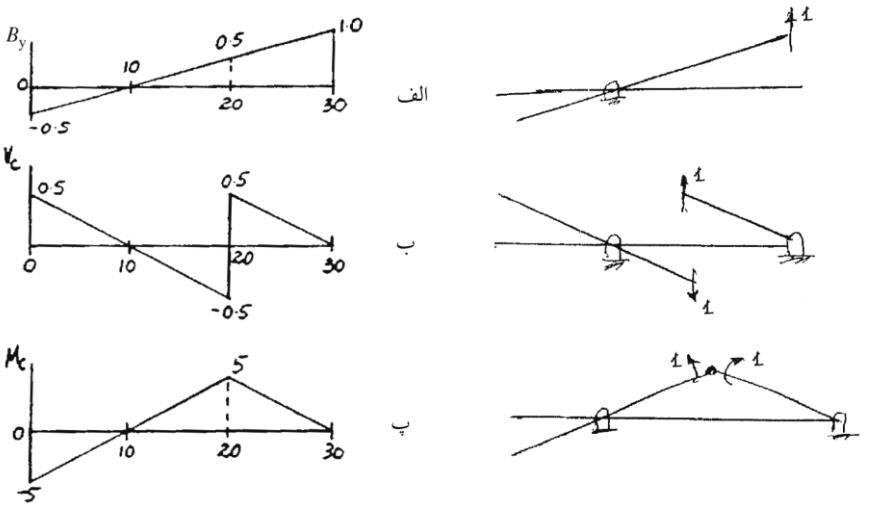



۶-۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) مولفه قائم در تکیه‌گاه $B$، ب) برش در $C$ پ) لنگر خمشی در $C$ را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ۶-۶*

حل)

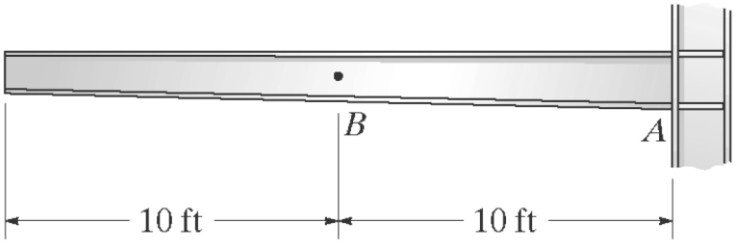



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

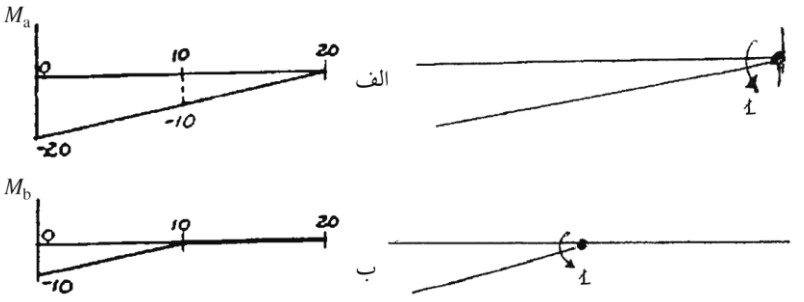


۶–۷) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) لنگر خمشی در $A$، ب) لنگر خمشی در $B$، را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$ گیردار باشد.

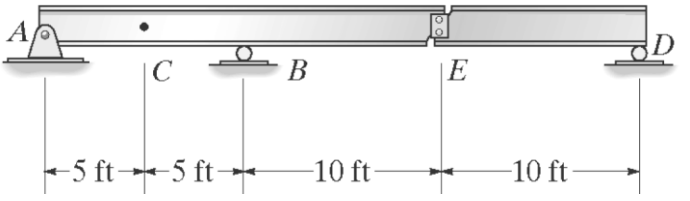



*شکل مسئله ۶–۷*

حل)




۶–۸) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) لنگر خمشی در $C$، ب) عکس‌العمل قائم در $A$، پ) عکس‌العمل قائم در $B$ را ترسیم نمایید. فرض کنید که تیر در $E$ مفصلی می‌باشد.



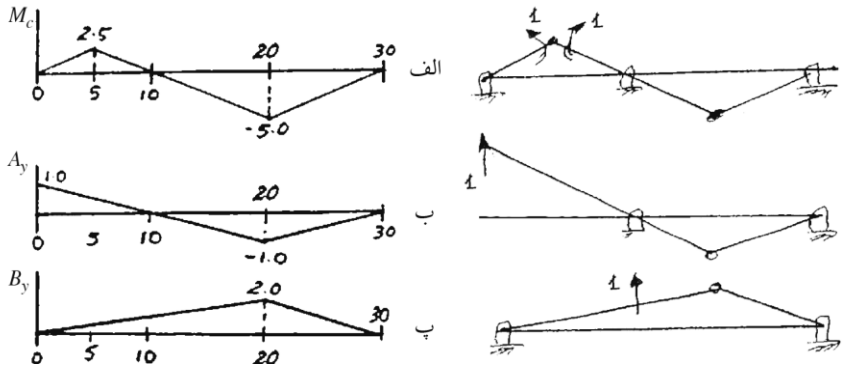

*شکل مسئله ۶–۸*

حل)

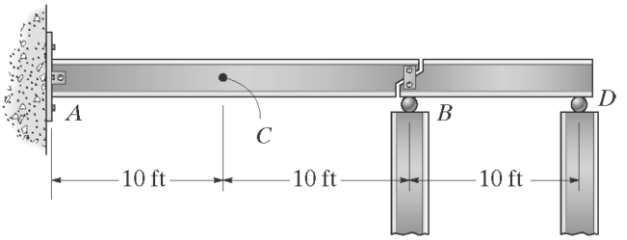
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



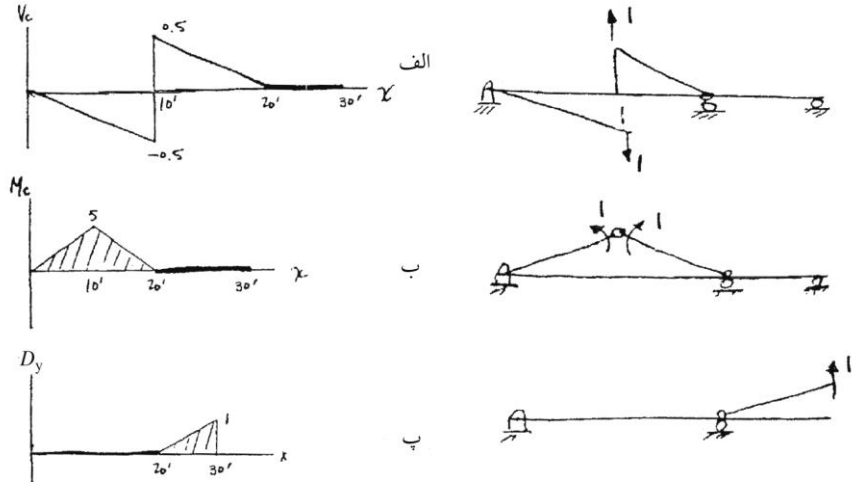



۶-۹) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر الف) برش در $C$، ب) لنگر خمشی در $C$ پ) عکس‌العمل قائم در $D$ را ترسیم نمایید. فرض کنید که تیر در $A$ مفصلی و در $B$ دارای مفصل داخلی است.




*شکل مسئله ۶-۹*

حل)

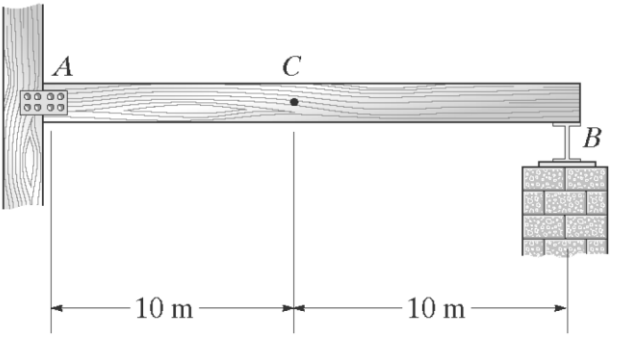



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

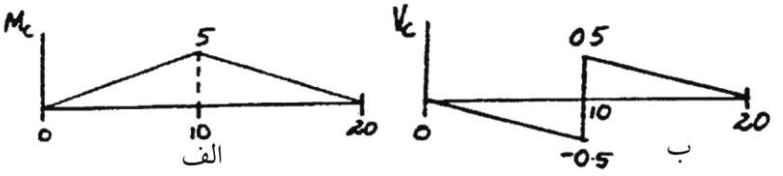


۶-۱۰) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار گسترده مرده به شدت $500N/m$ و یک بارمتمرکز زنده به میزان $3000N$ قرار دارد. الف) مقدار حداکثر لنگر مثبت در $C$ و ب) مقدار حداکثر برش مثبت در $C$ را تعیین نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $B$ غلتکی است.




*شکل مسئله ۶-۱۰*

حل) با توجه خط تاثیر ترسیم شده داریم:




$$(M_C)_{\max} = 500\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 5\times 20 + 3000\times 5 = 40000N.m = 40kN.m$$

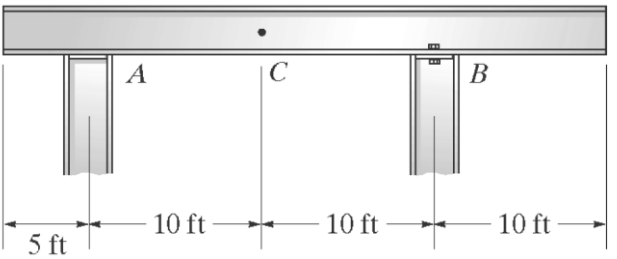
$$(V_C)_{\max} = 500\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.5\times 10 + 3000\times 0.5 - 500\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.5\times 10 = 1500N = 1.5kN$$

۶-۱۱) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار زنده گسترده یکنواخت با شدت $0.7k/ft$ و یک بار متمرکز زنده به میزان $10k$ قرار دارد. الف) مقدار حداکثر عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه $A$ ب) حداکثر برش مثبت در $C$ و پ) حداکثر میزان لنگر خمشی در $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه در $A$ غلتکی و در $B$ مفصلی اجرا شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

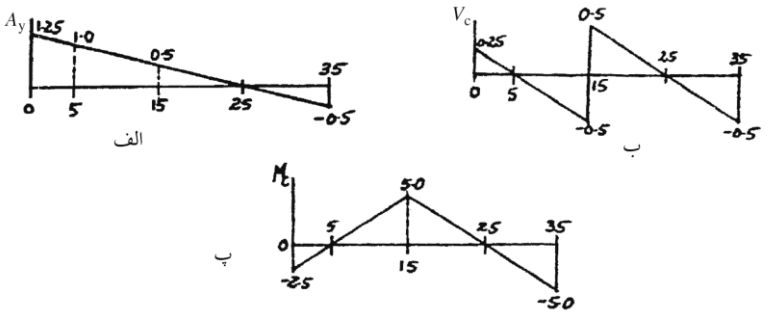
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٦-١١

حل)

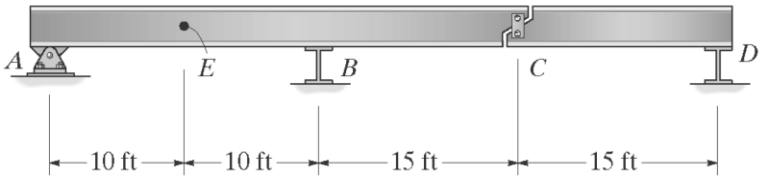



$$(A_y)_{\max} = 0.7\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 1.25\times 25 + 10\times 1.25 = 23.4k$$

$$(V_C)_{\max} = 0.7\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.25\times 5 + 0.7\times\frac{1}{2}\times 0.5\times 10 + 10\times\frac{1}{2} = 7.19k$$

$$(M_C)_{\max} = 0.7\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 5\times 20 + 10\times 5 = 85.0k.ft$$

٦-١٢) تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر الف) عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه در $B$ و ب) لنگر خمشی در $E$، را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $B$ و $D$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ مفصلی می‌باشد.



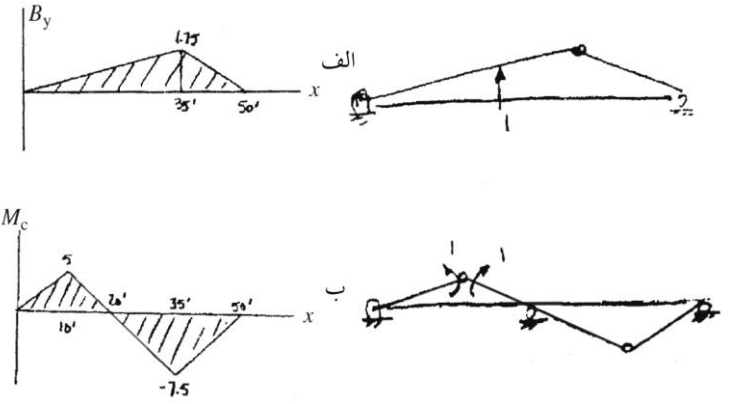

شکل مسئله ٦-١٢

حل)

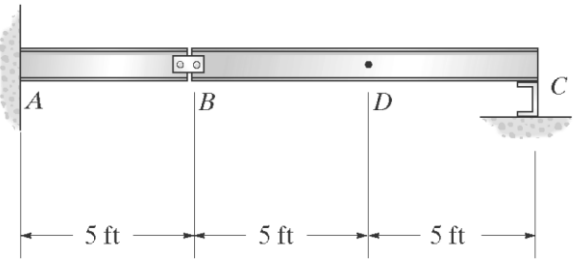
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



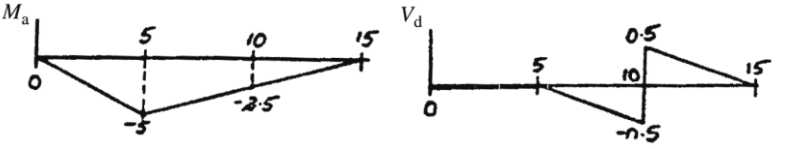



٦-١٣) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار مرده گسترده یکنواخت با شدت*200lb/ft* و یک بار گسترده یکنواخت زنده به شدت *150lb/ft* قرار دارد. الف) حداکثر لنگر منفی در $A$ وب) حداکثر برش مثبت در $D$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تیر در $B$ مفصل و در $C$ غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله* ٦-١٣

حل)




$$(M_a)_{\max(-)} = (200+150)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times(-5)\times 15 = -13125 lb.ft$$

$$(V_d)_{\max(+)} = (200)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times(5)\times(-0.5)+(200+150)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 5\times 0.5 = 188 lb$$

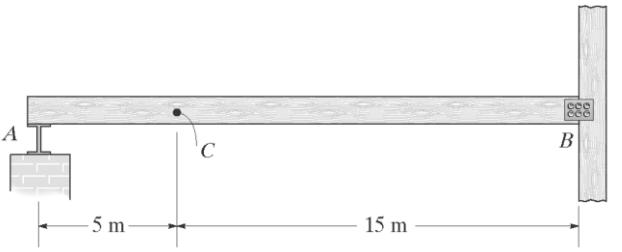
٦-١٤) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار مرده گسترده یکنواخت با شدت *500N/m* و یک بار متمرکز زنده به به میزان *3000N* قرار دارد. الف) حداکثر لنگر مثبت

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

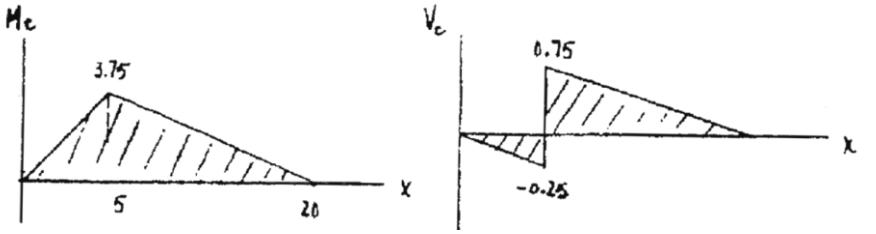


ایجاد شده در $C$، ب) حداکثر برش مثبت ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ غلتکی و $B$ مفصلی می‌باشد.




شکل مسئله ٦-١٤

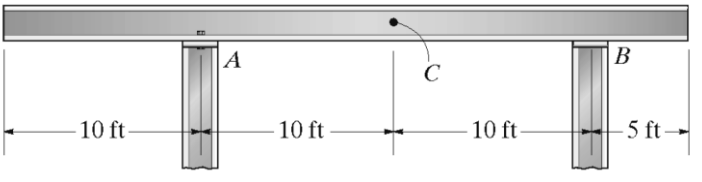
حل)




$$(M_C)_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)\times 20\times 3.75\times 0.5 + 3.75\times 3 = 30kN.m$$

$$(V_C)_{\max} = 500\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 5\times(-0.25)+\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.75\times 15\times 500 + 0.75\times 3000 = 4750N$$

٦-١٥) یک بار زنده گسترده به شدت $0.5k/ft$ و یک بار متمرکز به میزان $20k$ بر روی تیر زیر اثر می‌کند. الف) حداکثر عکس‌العمل قائم مثبت در تکیه‌گاه $B$ ، ب) حداکثر برش مثبت در $C$ و پ) حداکثر لنگر مثبت در $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $B$ غلتکی می‌باشد.



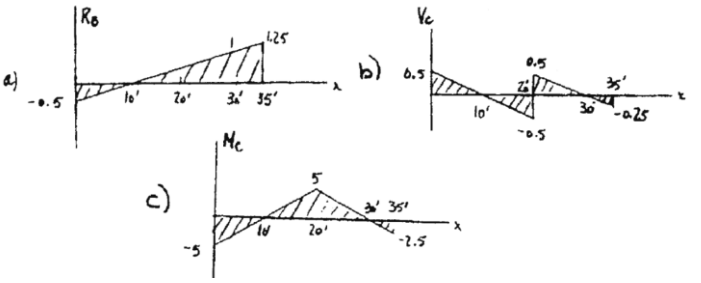

شکل مسئله ٦-١٥

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



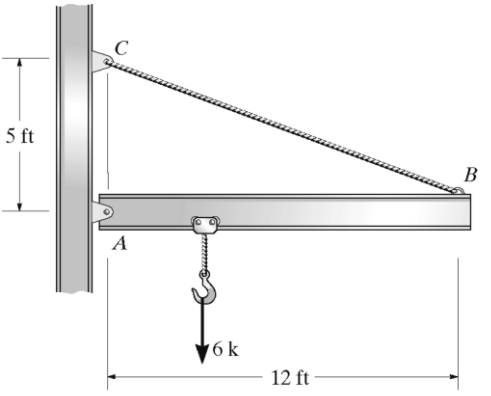



$$(R_B)_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)\times 25\times 1.25\times 0.5 + 20\times 1.25 = 32.8k$$

$$(V_C)_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)\times 0.5\times 10\times 0.5 + \left(\frac{1}{2}\right)\times 0.5\times 10\times 0.5 + 0.5\times 20 = 12.5k$$

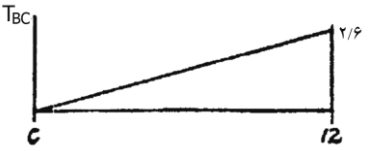
$$(M_C)_{\max} = 20\times 5 + 0.5\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 20\times 5 = 125k.ft$$

۶-۱۶) برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی کششی در کابل $BC$ را ترسیم نمایید. مقدار حداکثر نیروی کششی ایجاد شده در کابل در اثر نیروی متمرکز $6k$ چقدر خواهد بود.




شکل مسئله ۶-۱۶

حل)



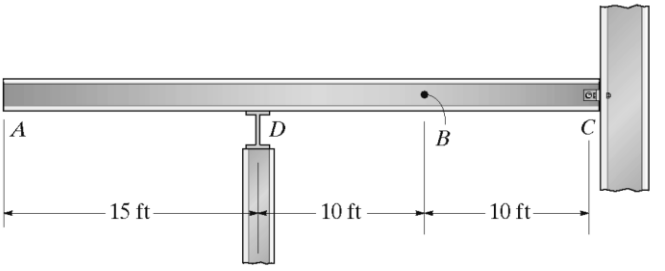

$$(T_{BC})_{\max} = 6\times 2.6 = 15.6k$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

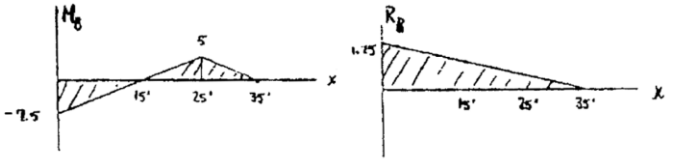


۶-۱۷) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار زنده گسترده یکنواخت به شدت *60lb/ft* و یک بار متمرکز به میزان *200lb* قرار دارد. الف) حداکثر لنگر مثبت ایجاد شده در *B*، ب) حداکثر عکس‌العمل قائم ایجاد شده در *D* را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه *C* مفصلی و *D* غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ۶-۱۷*

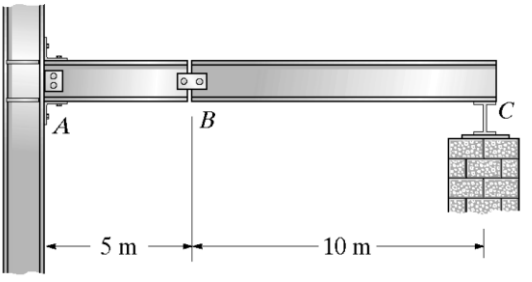
حل)




$$(M_B)_{\max} = 5\times 200 + 60\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 20\times 5 = 4000 lb.ft$$

$$(R_D)_{\max} = 0.5\times 35\times 1.75\times 60 + 1.75\times 200 = 2187.5 lb = 2.19 k$$

۶-۱۸) تیر نشان داده شده در شکل زیر تحت یک بار مرده گسترده یکنواخت به شدت *1.5kN/m* و یک بار متمرکز زنده به میزان *10kN* قرار دارد. الف) حداکثر لنگر منفی ایجاد شده در *A*، ب)حداکثر برش مثبت ایجاد شده در *B* را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه *A* گیردار، *B* مفصلی و *C* غلتکی می‌باشد.



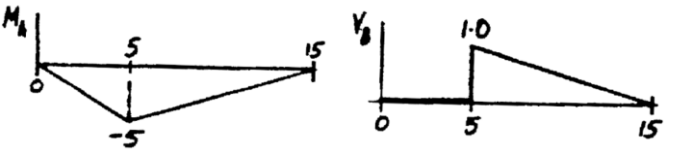

*شکل مسئله ۶-۱۸*

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



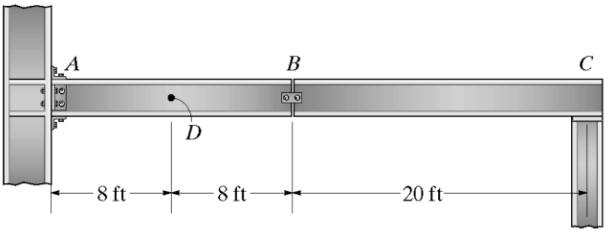
حل)




$$(M_A)_{\max} = 1.5\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 15\times(-5)+10\times(-5) = -106kN.m$$

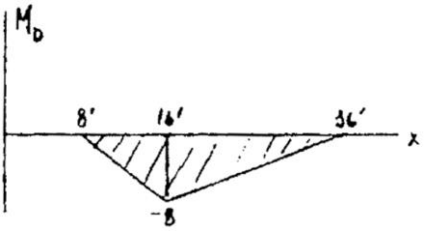
$$(V_B)_{\max} = 1.5\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 10\times 1+10\times 1 = 17.5kN$$

۶-۱۹) در کجای تیر نشان داده شده در شکل زیر نیروی $500lb$ ناشی از بار زنده قرار گیرد تا حداکثر لنگر خمشی، در $D$ ایجاد شود. فرض نمایید که تکیه‌گاه $A$ گیردار، $B$ مفصلی و $C$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۶-۱۹

حل)



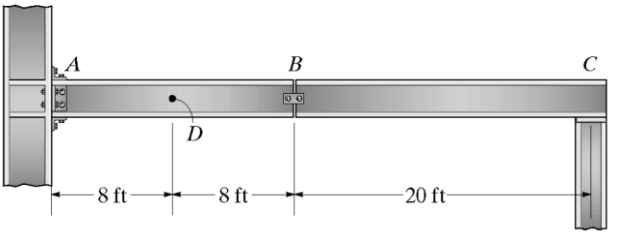

$$(M_D)_{\max} = 500\times(-8) = -4000\,lb.ft = -4k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

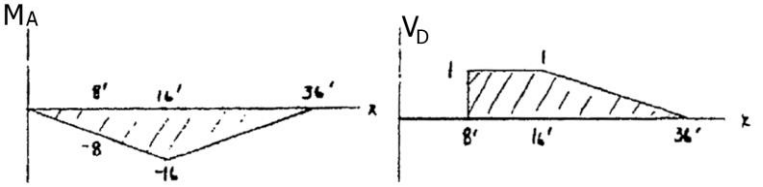


۶-۲۰) در کجای تیر نشان داده شده در شکل زیر بار گسترده یکنواخت به شدت *300lb/ft* ناشی از بار زنده قرار گیرد تا الف) حداکثر لنگر خمشی در *A* ب) بیشترین نیروی برشی در *D* ایجاد گردد. فرض نمایید که تکیه‌گاه *A* گیردار، *B* مفصلی و *C* غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۶-۲۰

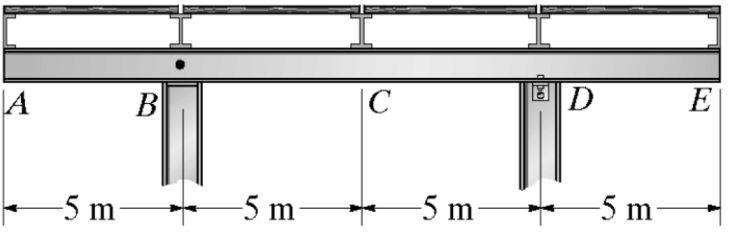
حل)




$$(M_A)_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)\times 36\times(-16)\times 0.3 = -86.4k.ft$$

$$(V_D)_{\max} = \left[1\times 8+\frac{1}{2}\times 1\times 20\right]\times 0.3 = 5.4k$$

۶-۲۱) در تیر نشان داده شده در شکل زیر الف) مقدار برش در پانل *BC*، ب) لنگر خمشی در *B* را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه *B* غلتکی و *D* مفصلی می‌باشد.



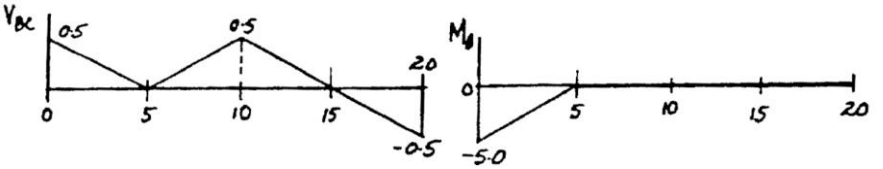

شکل مسئله ۶-۲۱

حل)

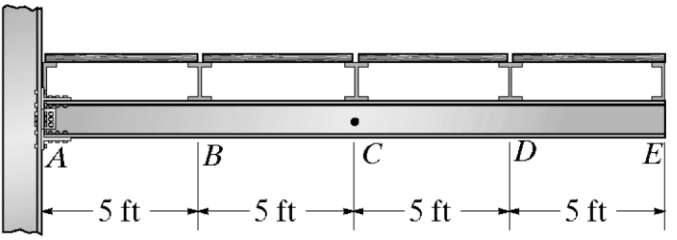
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



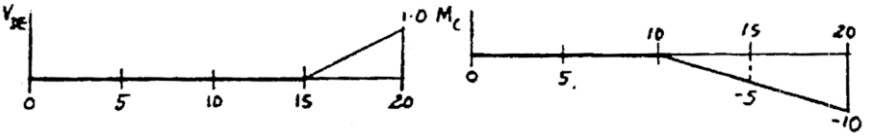



٦-٢٢) در تیر نشان داده شده در شکل زیر یک بار زنده گسترده یکنواخت به شدت $0.5k/ft$ و یک بار متمرکز زنده به میزان $2k$ بر روی تیر وجود دارد. مقدار الف) مقدار حداکثر برش مثبت در پانل $DE$، ب) حداکثر لنگر خمشی منفی در $C$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ٦-٢٢

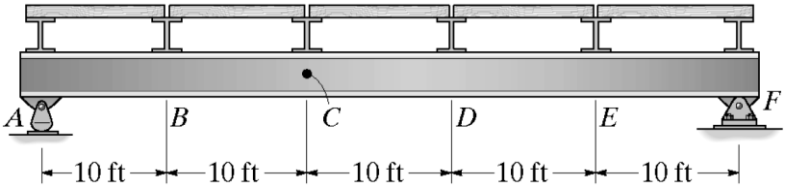
حل)




$$(V_{DE})_{\max(+)} = 0.5\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 1\times 5 + 2\times 1 = 3.25k$$

$$(M_C)_{\max(-)} = 0.5\times\left(\frac{1}{2}\right)\times(-10)\times 10 + 2\times(-10) = -45.0k.ft$$

٦-٢٣) در تیر نشان داده شده در شکل زیر الف) مقدار برش در پانل $DE$، ب) لنگر خمشی در $C$ را ترسیم نمایید.



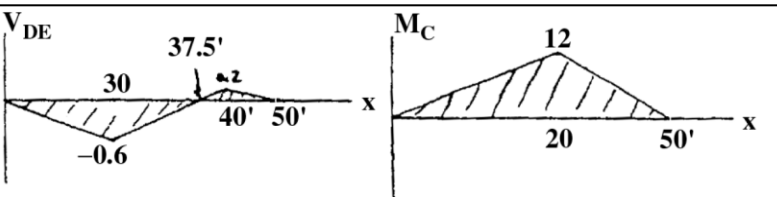

شکل مسئله ٦-٢٣

حل)

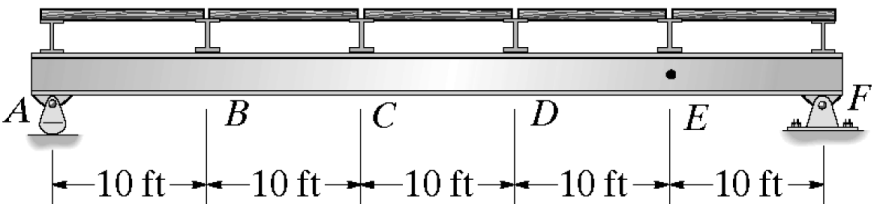
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



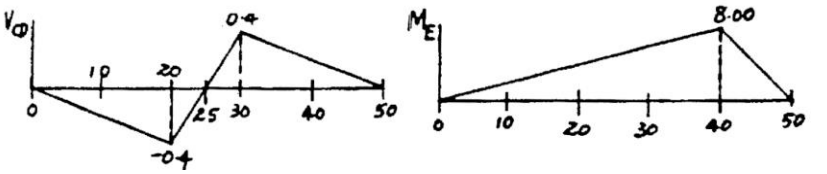



۶-۲٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر الف) مقدار برش در پانل *CD*، ب) لنگر خمشی در *E* را ترسیم نمایید.

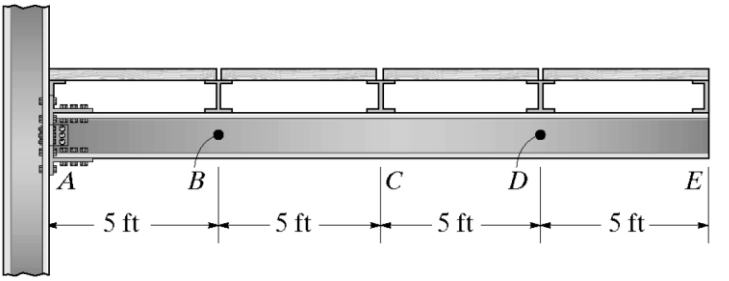



*شکل مسئله ۶-۲٤*

حل)

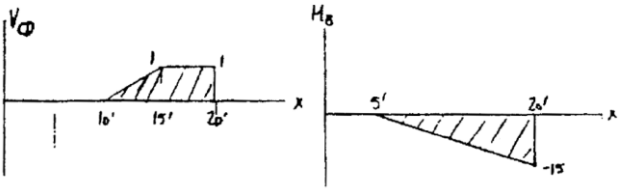



۶-۲۵) در تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر الف) مقدار برش در پانل *CD*، ب) لنگر خمشی در *B* را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ۶-۲۵*

حل)

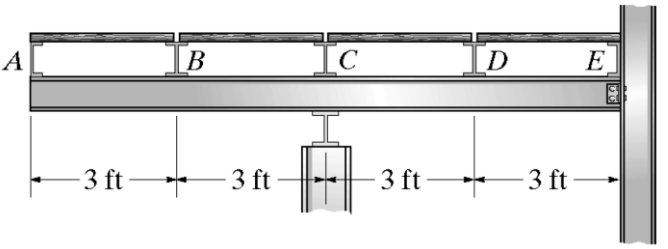



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۶-۲۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیر یک بار زنده گسترده یکنواخت به شدت *1.8k/ft* و یک بار متمرکز زنده به میزان *12k* بر روی تیر وجود دارد. در صورتی که یک بار گسترده یکنواخت مرده به شدت *350lb/ft* بر تیر اثر کند، مقدار الف) حداکثر برش در پانل *BC*، ب) حداکثر لنگر خمشی در *C* را تعیین نمایید.



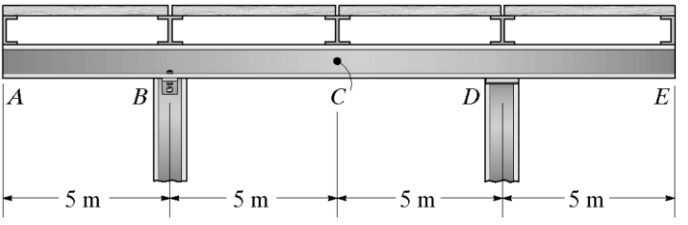

*شکل مسئله ۶-۲۶*

حل)

$$(V_{BC})_{\max} = 12\times(-1)+(1.8+0.35)\left[(-1)(3)+\frac{1}{2}(-1)\times(6-3)\right] = -21.7k$$

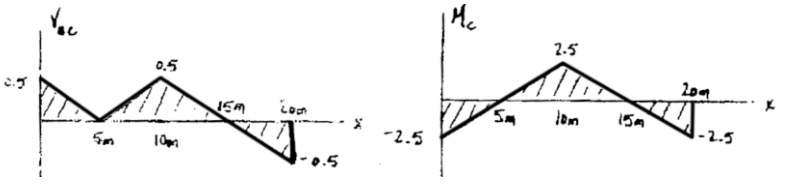
$$(M_C)_{\max} = 12\times(-6)+(1.8+0.35)\left[\left(\frac{1}{2}\right)(-6)\times 6\right] = -111k.ft$$

۶-۲۷) در تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر الف) مقدار برش در پانل *BC*، ب) لنگر خمشی در *C* را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه *B* مفصلی و *D* غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ۶-۲۷*

حل)

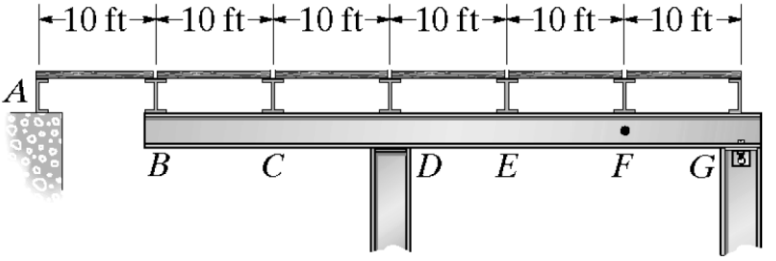



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

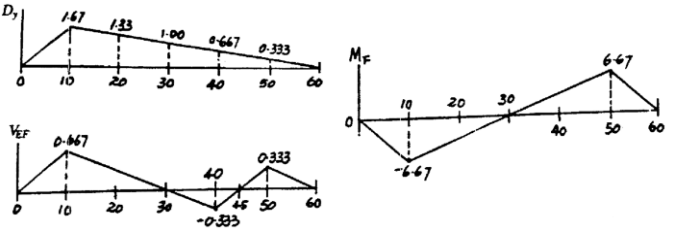


۶–۲۸) در تیر نشان داده شده در شکل زیر یک بار زنده گسترده یکنواخت به شدت *0.25k/ft* و یک بار متمرکز زنده به میزان *3k* بر روی تیر وجود دارد. مقدار الف) حداکثر عکس‌العمل قائم مثبت در *D*، ب) حداکثر برش مثبت در پانل *EF*، پ) حداکثر لنگر خمشی در *F* را تعیین نمایید. فرض کنید که *G* مفصلی و *D* غلتکی است.




شکل مسئله ۶–۲۸

حل)

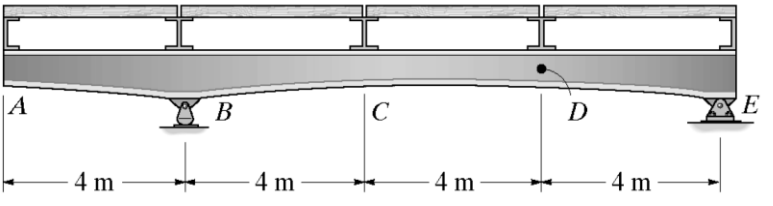



$$\left(D_y\right)_{\max(+)} = 0.25\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 1.667\times 60 + 3\times 1.667 = 17.5k$$

$$\left(V_{EF}\right)_{\max(+)} = 0.25\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.667\times 30 + 0.25\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 0.333\times 15 + 3\times 0.667 = 5.12k$$

$$\left(M_F\right)_{\max(+)} = 0.25\times\left(\frac{1}{2}\right)\times 6.667\times 30 + 3\times 6.667 = 45k.ft$$

۶–۲۹) در تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر الف) لنگر خمشی در *D*، ب) برش در پانل *BC* را ترسیم نمایید.



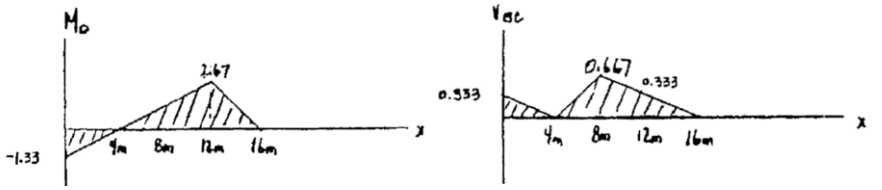

شکل مسئله ۶–۲۹

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

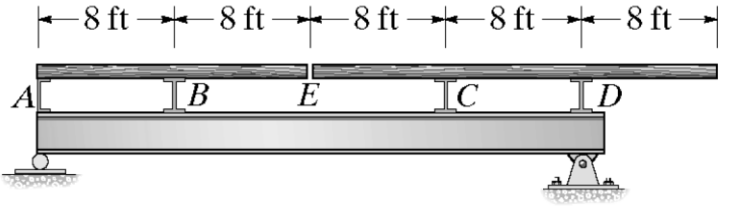
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

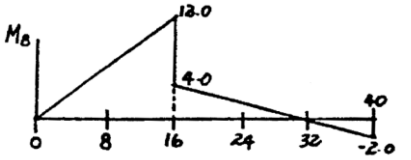



۶-۳۰) در تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر لنگر خمشی در $B$ را تعیین نمایید. یک بار متمرکز زنده به میزان $10k$ در قسمت بالایی تیر حرکت می‌نماید.



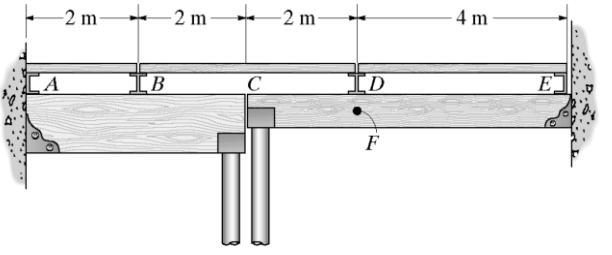

شکل مسئله ۶-۳۰

حل)




$$(M_B)_{\max(+)} = 10 \times 12 = 120\,k.ft$$

۶-۳۱) در تیر نشان داده شده در شکل زیر خط تاثیر لنگر خمشی در $F$ را تعیین نمایید. یک بار متمرکز زنده به میزان $8kN$ در قسمت بالایی تیر حرکت می‌نماید. فرض کنید تمام تکیه‌گاه‌ها تنها می‌توانند در جهت قائم دارای عکس‌العمل داشته باشند.



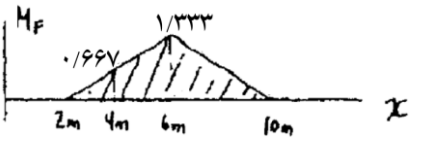

شکل مسئله ۶-۳۱

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

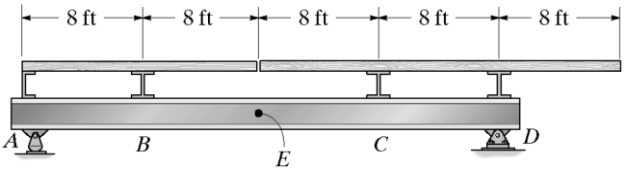
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$$(M_F)_{\max} = 1.333 \times 8 = 10.7kN.m$$

۳۲-۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیرخط تاثیر برش پانل $CD$ تیر را ترسیم نمایید. مقدار حداکثر برش منفی در پانل $CD$ را تحت یک بار گسترده $500lb/ft$ را تعیین نمایید.

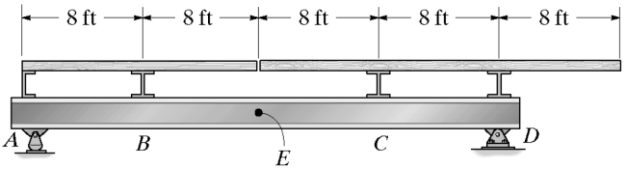



شکل مسئله ۶-۳۲

حل)

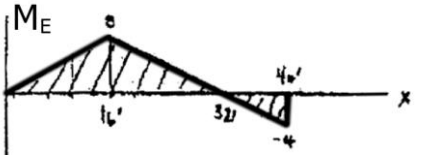
$$(V_{CD})_{\max} = 500 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times 32 \times (-0.75) = -6k$$

۳۳-۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیرخط تاثیر لنگر در نقطه $E$ را ترسیم نمایید. مقدار حداکثر لنگر مثبت در اثر یک بار متمرکز زنده به میزان $8kips$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۶-۳۳

حل)



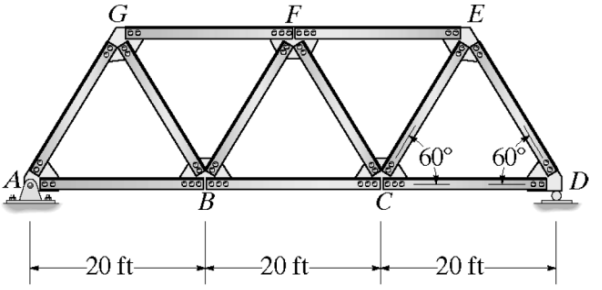

$$(M_E)_{\max} = 8 \times 8 = 64k.ft$$

۳۴-۶) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو $GF$ را ترسیم نمایید. تمام اعضا دارای طول‌های یکسانی هستند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

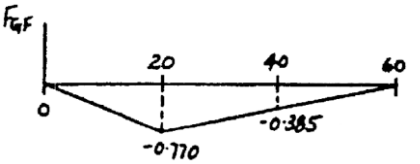
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



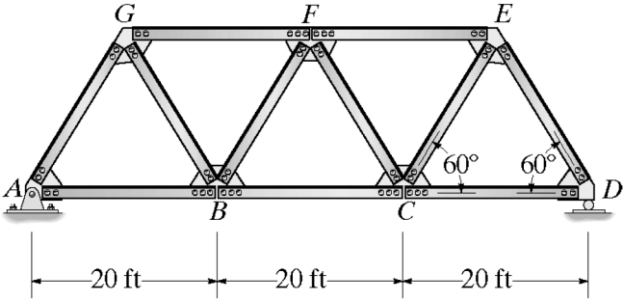



شکل مسئله ٦-٣٤

حل)

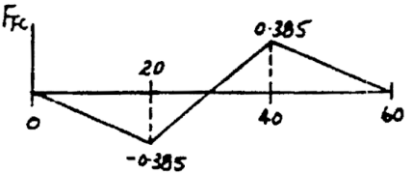



٦-٣٥) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو $FC$ را ترسیم نمایید. تمام اعضا دارای طول‌های یکسانی هستند.




شکل مسئله ٦-٣٥

حل)

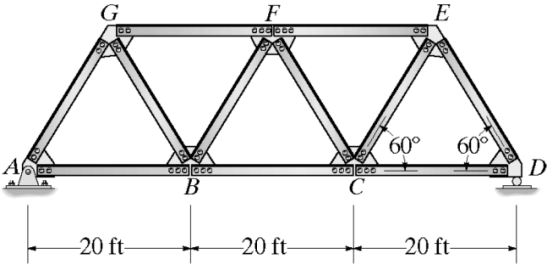



٦-٣٦) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو $DE$ را ترسیم نمایید. تمام اعضا دارای طول‌های یکسانی هستند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

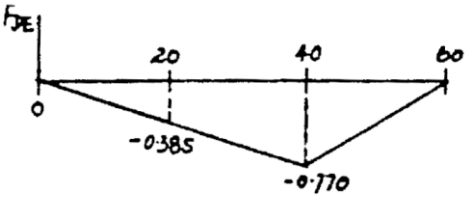
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



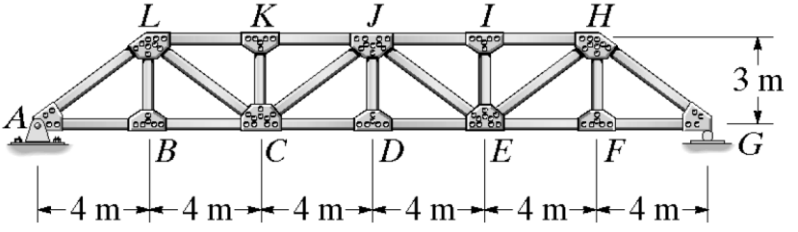



شکل مسئله ٦-٣٦

حل)

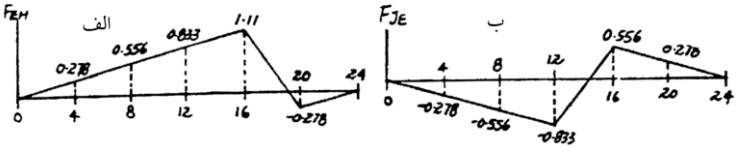



٦-٣٧) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی اعضای الف) *EH* و *JE* را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ٦-٣٧

حل)

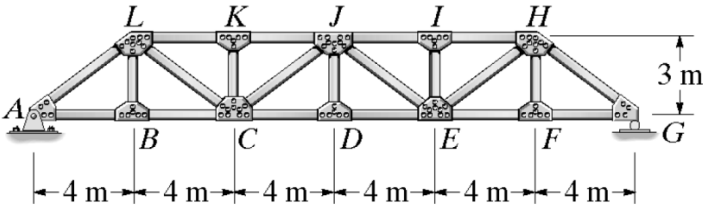



٦-٣٨) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو *JI* را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

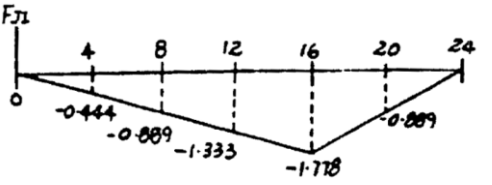
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



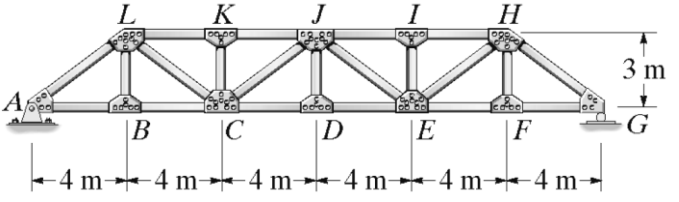



شکل مسئله ٦-۳۸

حل)

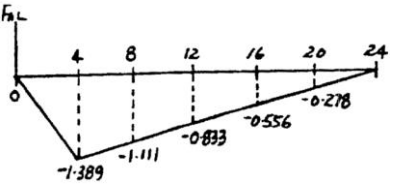



٦-۳۹) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو *AL* را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ٦-۳۹

حل)

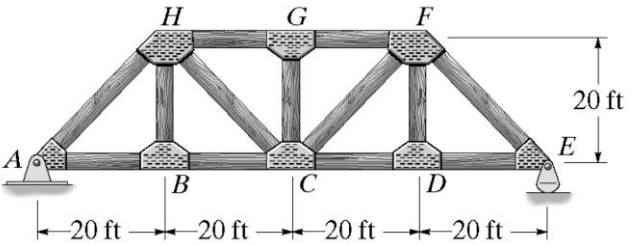



٦-٤۰) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو *HG* را ترسیم نمایید. همچنین مقدار حداکثر نیروی (کششی و فشاری) ایجاد شده در این میله در اثر یک بار گسترده یکنواخت زنده به شدت *800lb/ft* که بر روی عرشه پایینی حرکت می‌کند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

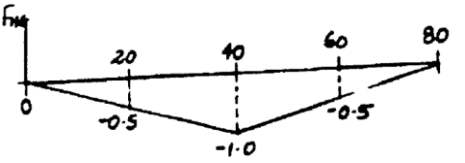
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ٦-٤٠

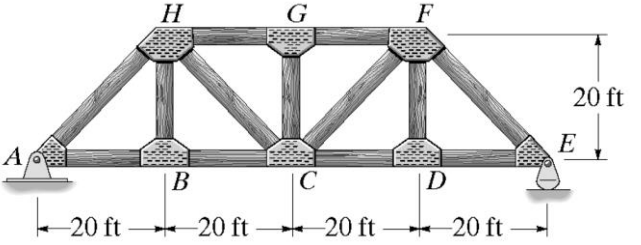
حل)




$$(F_{HG})_{\max(C)} = 0.8\times 0.5\times(-1)\times 80 = -32.0k = 32.0(C)$$

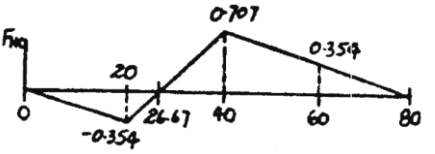
$$(F_{HG})_{\max(T)} = 0$$

٦-٤١) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو $HC$ را ترسیم نمایید. همچنین مقدار حداکثر نیروی (کششی و فشاری) ایجاد شده در این میله در اثر یک بار گسترده یکنواخت زنده به شدت $800lb/ft$ که بر روی عرشه پایینی حرکت می‌کند.




شکل مسئله ٦-٤١

حل)




$$(F_{HC})_{\max(T)} = 0.8\times 0.5\times 0.7071\times 53.33 = 15.1k(T)$$

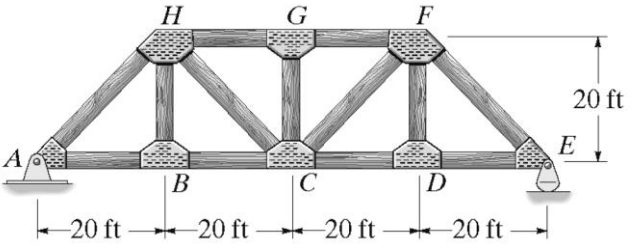
$$(F_{HC})_{\max(C)} = 0.8\times 0.5\times -0.3536\times 26.67 = -3.77k = 3.77(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

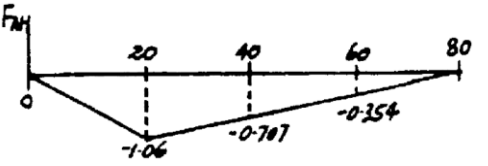


۶-۴۲) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو *AH* را ترسیم نمایید. همچنین مقدار حداکثر نیروی (کششی و فشاری) ایجاد شده در این میله در اثر یک بار گسترده یکنواخت زنده به شدت *800lb/ft* که بر روی عرشه پایینی حرکت می‌کند.




شکل مسئله ۶-۴۲

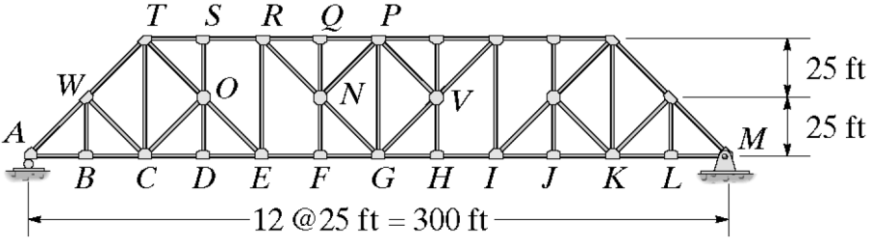
حل)




$$(F_{AH})_{\max(C)} = 0.8\times 0.5\times(-1.061)\times 80 = -33.9k = 33.9k(C)$$

$$(F_{AH})_{\max(T)} = 0$$

۶-۴۳) در خرپای بالتیومور نشان داده شده در شکل زیر، خط تاثیر نیروی عضو *RN* را ترسیم نمایید.



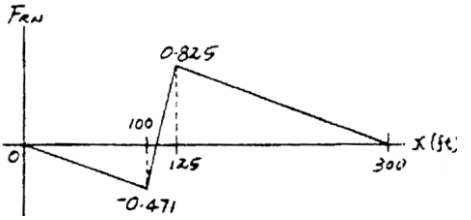

شکل مسئله ۶-۴۳

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

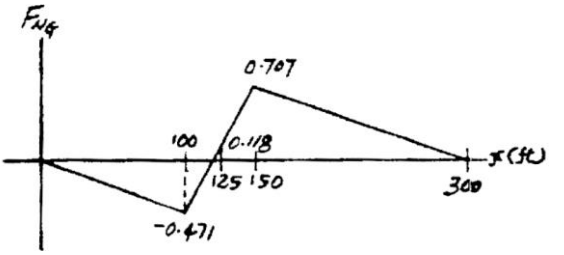
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



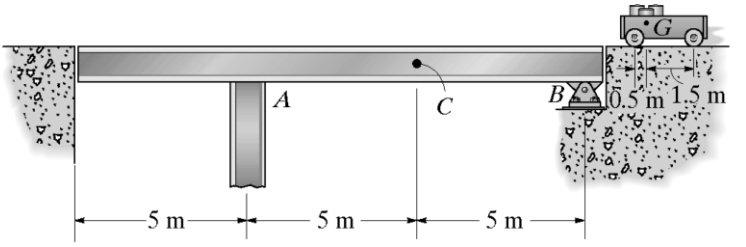



٦-٤٤) در خرپای بالتیومور نشان داده شده در مسئله ٦-٤٣ ، خط تاثیر نیروی عضو $NG$ را ترسیم نمایید.

حل)

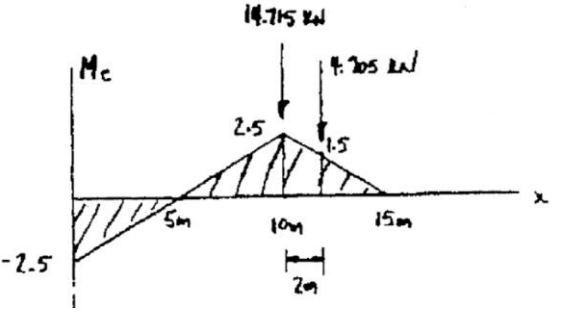



٦-٤٥) در پل نشان داده شده در شکل زیر که یک ارابه از روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در صورتی که مرکز ثقل ارابه در نقطه$G$ باشد و تکیه‌گاه $A$ غلتکی باشد، مقدار حداکثر لنگر خمشی ایجاد شده در نقطه $C$ را تعیین نمایید. جرم ارابه $2Mg$ می‌باشد.




شکل مسئله ٦-٤٥

حل)



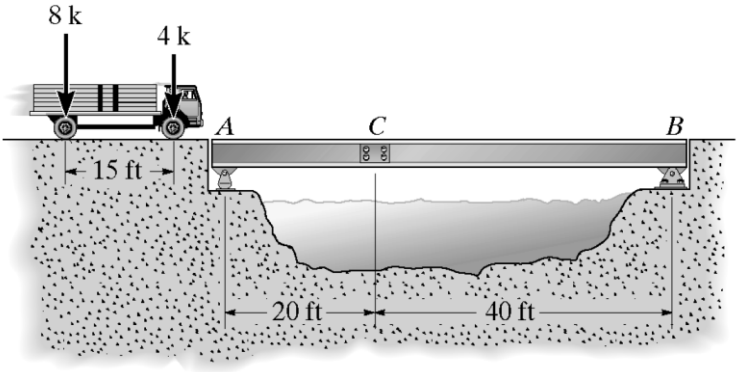

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



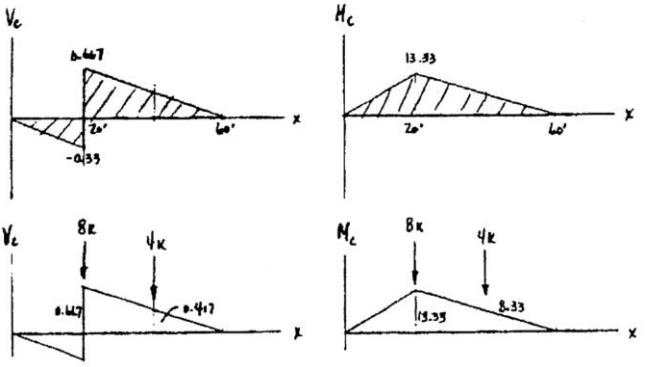
$(M_C)_{\max} = 14.715 \times 2.5 + 4.905 \times 1.5 = 44.1 kN.m$

۶-۴۶) در پل نشان داده شده در شکل زیر که یک کامیون به وزن $12k$ از روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. الف) مقدار حداکثر برش ایجاد شده در محل وصله $C$ ب) مقدار حداکثر لنگر خمشی ایجاد شده در محل وصله $C$ را تعیین نمایید. فرض کنید که محل وصله به صورت گیردار متصل شده است.




شکل مسئله ۶-۴۶

حل)




$$(V_C)_{\max} = \frac{8 \times 0.667 + 4 \times 0.417}{2} = 3.5k$$

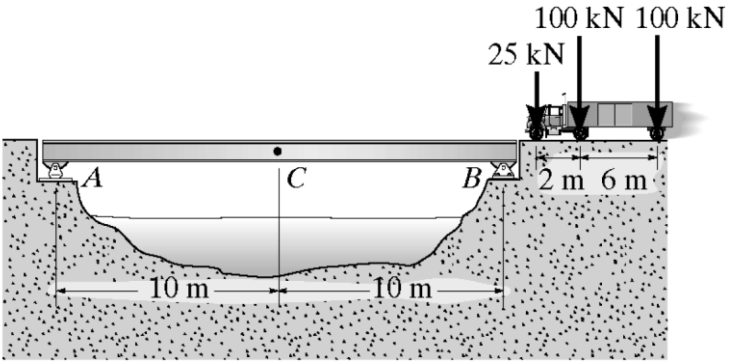
$$(M_C)_{\max} = \frac{8 \times 13.33 + 4 \times 8.33}{2} = 70k$$

۶-۴۷) در پل نشان داده شده در شکل زیر که یک کامیون بر روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. مقدار حداکثر لنگر خمشی ایجاد شده در محل $C$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

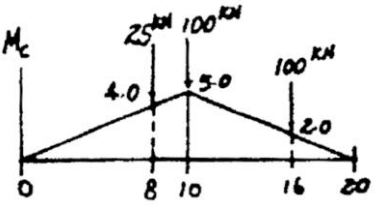
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





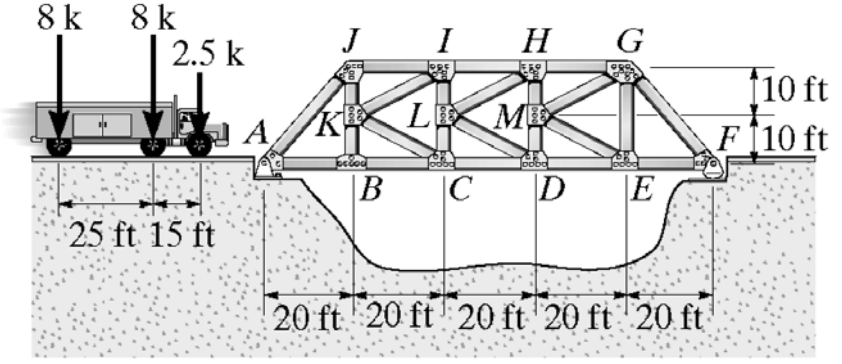

شکل مسئله ٦-٤٧

حل)




$$(M_C)_{\max} = 25\times 4 + 100\times 5 + 100\times 2 = 800\,kN.m$$

٦-٤٨) در پل نشان داده شده در شکل زیر که یک کامیون به وزن *18.5k* از روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. خط تاثیر نیروی عضو *IH* را ترسیم نمایید و همچنین مقدار حداکثر نیروی کششی یا فشاری ایجاد شده در آن را تعیین نمایید.



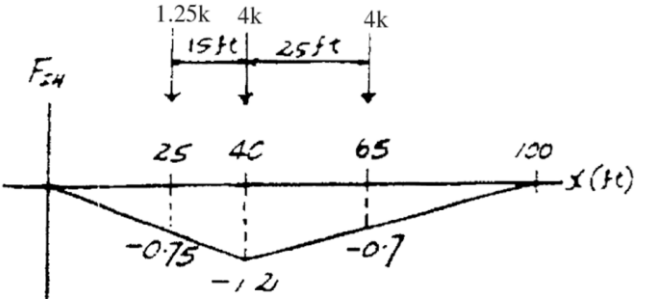

شکل مسئله ٦-٤٨

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

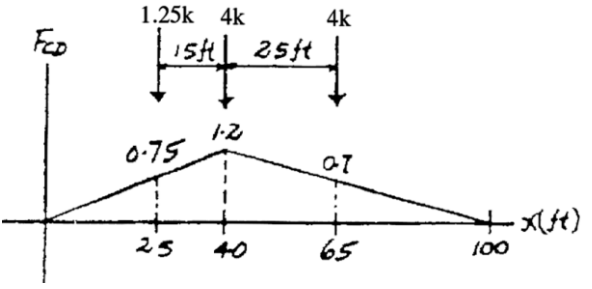





$$(F_{IH})_{\max} = 2.5\times(-0.75)+8\times(-1.2)+8\times(-0.7) = -17.1k = 17.1k(C)$$

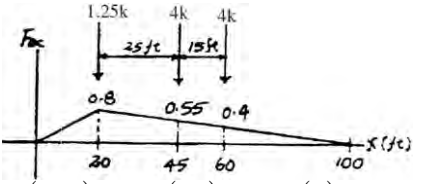
۶-۴۹) پل نشان داده شده در شکل مسئله ۶-۴۸، که یک کامیون به وزن *18.5k* از روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. خط تاثیر نیروی عضو *CD* را ترسیم نمایید و همچنین مقدار حداکثر نیروی کششی یا فشاری ایجاد شده در آن را تعیین نمایید.

حل)




$$(F_{CD})_{\max} = 2.5\times(0.75)+8\times(1.2)+8\times(0.7) = 17.1k(T)$$

۶-۵۰) پل نشان داده شده در شکل مسئله ۶-۴۸، که یک کامیون به وزن *18.5k* از روی آن حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. خط تاثیر نیروی عضو *BC* را ترسیم نمایید و همچنین مقدار حداکثر نیروی کششی یا فشاری ایجاد شده در آن را تعیین نمایید.



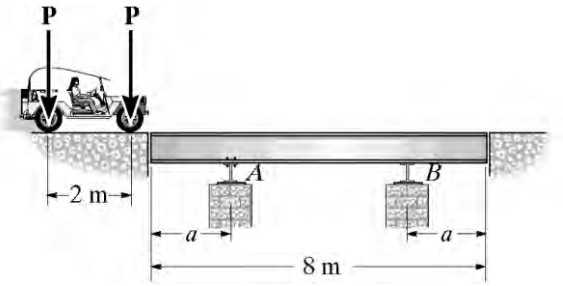

$$(F_{BC})_{\max} = 8\times(0.8)+8\times(0.55)+2.5\times(0.4) = 11.8k(T)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



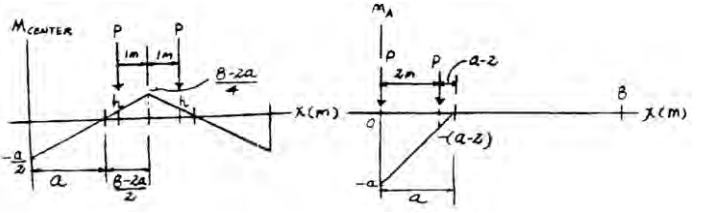
۶-۵۱) در پل نشان داده شده در شکل زیر، مقدار فاصله $a$ را طوری تعیین نمایید که مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده در وسط دهانه و تکیه‌گاه‌ها برابر گردد. تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۶-۵۱

حل) برای تکیه‌گاه $A$ داریم:

$$M_{\max} = P\times a + P\times(a-2) = 2P\times(a-1)$$




برای وسط دهانه داریم:

$$\frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{h}{\frac{8-2a}{2}-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{h}{3-a} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3-a}{2} \quad \Rightarrow \quad M_{\max} = P(3-a)$$

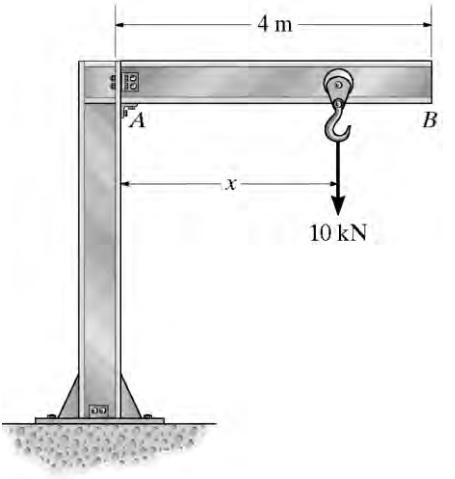
$$2P(a-1) = P(3-a) \quad \Rightarrow \quad 2a-2 = 3-a \quad \Rightarrow \quad 3a = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 1.67m$$

۶-۵۲) در تیر کنسولی نشان داده شده در شکل زیر، مقدار حداکثر مطلق برش و حداکثر لنگر مثبت در تیر $AB$، در اثر بار $10kN$ را تعیین نمایید. $0.1m \le x \le 3.9m$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۶-۵۲*

حل) حداکثر مطلق برش هنگامی رخ می‌دهد که $0.1m \le x \le 3.9m$

$$V_{\max} = 10kN$$

حداکثر مطلق لنگر هنگامی رخ می‌دهد که $x = 3.9m$

$$M_{\max} = -10 \times 3.9 = -39kN.m$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



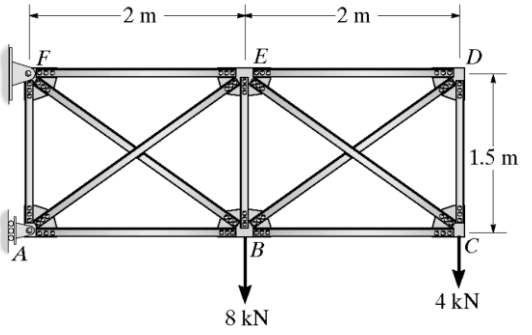
# فصل هفتم
# تحلیل تقریبی سازه‌های نامعین استاتیکی

## ۷-۱ کلیات

در عمل، سازه‌های نامعین استاتیکی بیش از سازه‌های معین استاتیکی وجود دارند و به خاطر اینکه سخت‌تر و قوی‌تر هستند اقتصادی‌تر نیز می‌باشند. به عنوان مثال، تغییر مکان یک تیر دو سر گیردار که یک بار متمرکز را در وسط دهانه خود حمل می‌کند، دارای تغییرمکانی معادل یک چهارم تغییر مکان تیری است که دارای اتکای ساده است و همان بار متمرکز را در وسط همان دهانه حمل می‌کند. این در حالی است که گشتاور خمشی به نصف کاهش می‌یابد. این بدان معناست که مقطع تیر کوچک‌تری برای تیر دو سرگیردار نیاز است و بدین ترتیب در مصالح صرفه جویی می‌شود. لیکن تحلیل این نوع سازه‌ها به صورت دستی معمولاً بسیار وقت‌گیر می‌باشد. روش‌های تحلیل تقریبی زیادی برای تحلیل این گونه سازه‌ها وجود دارد که می‌توان با استفاده از آنها سازه‌های با درجات نامعینی بالا را با دقت‌های نسبتاً خوبی تحلیل نمود. در مسائل زیر نمونه‌هایی از این روش‌ها بکار گرفته شده‌اند.

## ۷-۲ مسائل:

۷-۱) در خرپای نامعین شکل زیر، مقدار تقریبی نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید که اعضا قادر به تحمل کشش و فشار هستند.




*شکل مسئله ۷-۱*

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) فرض نمایید که $F_{BD} = F_{EC}$ باشد.

$$\uparrow_{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_{EC}\left(\frac{1.5}{2.5}\right) - 4 = 0$$

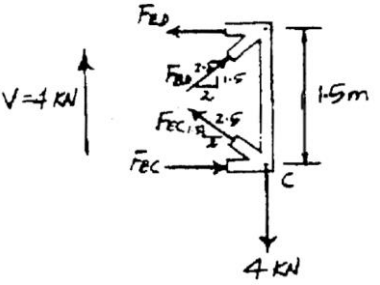
$$\Rightarrow F_{EC} = 3.333\,kN = 3.33kN(T)$$

$$\Rightarrow F_{BD} = 3.333\,kN = 3.33kN(C)$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EC} \times 1.5 - \left(\frac{2}{2.5}\right) \times 3.333 \times 1.5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{ED} = 2.67kN(T)$$

$$\rightarrow_{+} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 2.67kN(C)$$




در مفصل $C$ داریم:

$$\uparrow_{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} + 3.333\left(\frac{1.5}{2.5}\right) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = 2.0kN(T)$$

فرض نمایید که $F_{FB} = F_{AE}$ باشد.

$$\uparrow_{+} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_{FB}\left(\frac{1.5}{2.5}\right) - 8 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_{FB} = 10.0kN(T)$$

$$\Rightarrow F_{AE} = 10.0kN(C)$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE} \times 1.5 - 10.0\left(\frac{2}{2.5}\right) \times 1.5 - 4 \times 2 = 0$$

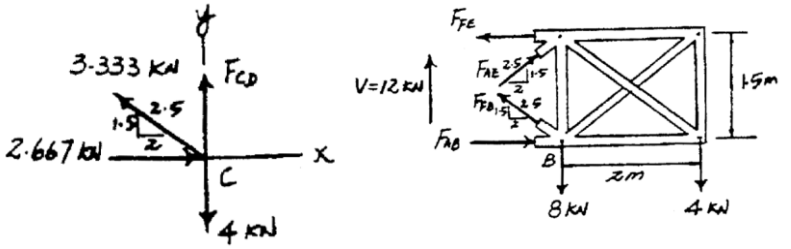
$$\Rightarrow F_{FE} = 13.3kN(T)$$

$$\rightarrow_{+} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = 13.3kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $B$ داریم:

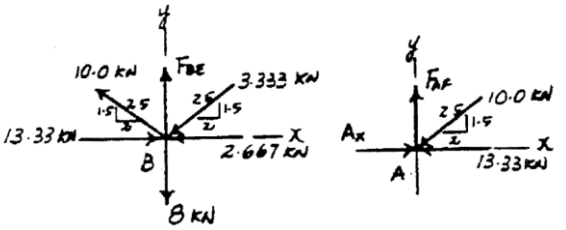
$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} + 10.0\left(\frac{1.5}{2.5}\right) - 3.333\left(\frac{1.5}{2.5}\right) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BE} = 4.0kN(T)$$

در مفصل $A$ داریم:

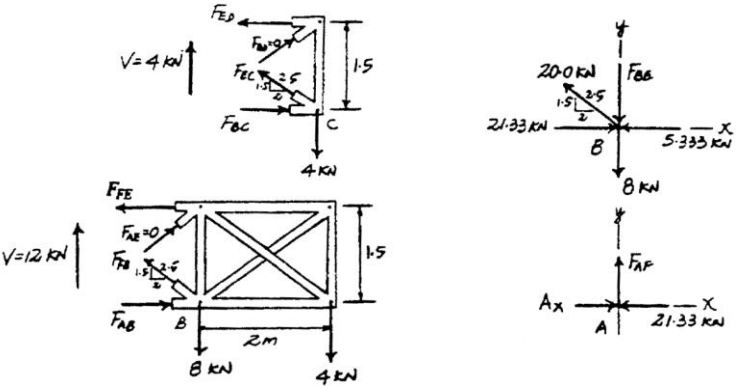
$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF} - 10.0\left(\frac{1.5}{2.5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F_{AF} = 6.0kN(T)$$




۷–۲) در خرپای نامعین مسئله ۷–۱، مقدار تقریبی نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید که اعضای قطری فقط قادر به تحمل کشش هستند.

حل)




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



فرض نمایید که $F_{BD}=0$ باشد.

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{EC}\left(\frac{1.5}{2.5}\right)-4=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{EC}=6.667\,kN=6.67kN(T)$$

$$\sum M_C=0 \quad \Rightarrow \quad F_{ED}=0$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC}-6.667\left(\frac{2}{2.5}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BC}=5.33kN(C)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$F_{CD}=0$$

فرض نمایید که $F_{AE}=0$ باشد.

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FB}\left(\frac{1.5}{2.5}\right)-8-4=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FB}=20.0kN(T)$$

$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE}\times 1.5-4\times 2=0 \quad \Rightarrow \quad F_{FE}=5.333\,kN=5.33kN(T)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB}-5.33-20.0\left(\frac{2}{2.5}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB}=21.3kN(C)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad -F_{BE}-8+20.0\left(\frac{1.5}{2.5}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE}=4.0kN(T)$$

در مفصل $A$ داریم:

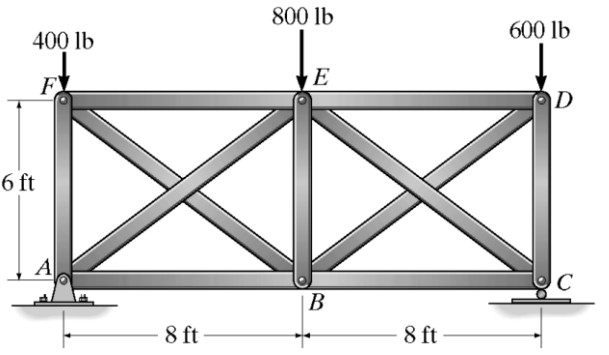
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF}=0$$

۷-۳) در خرپای نامعین شکل زیر، مقدار تقریبی نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید که اعضای قطری قادر به تحمل کشش و فشار هستند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۷-۳

حل) فرض نمایید که $F_{BF} = F_{EA}$ باشد.

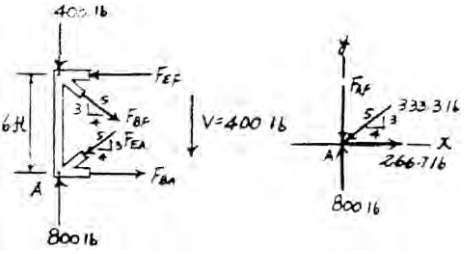
$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2F_{BF}\left(\frac{3}{5}\right) - 400 + 800 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BF} = 333.3lb = 333lb(T)$$

$$\Rightarrow \quad F_{EA} = 333.3lb = 333lb(C)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} \times 6 - 333.3 \times \left(\frac{4}{5}\right) \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 267lb(C)$$

$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA} = 267lb(T)$$




در مفصل $A$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{AF} - 333.3 \times \left(\frac{3}{5}\right) + 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AF} = 600lb(C)$$

فرض نمایید که $F_{BD} = F_{EC}$ باشد.

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2F_{BD} \times \left(\frac{3}{5}\right) - 600 + 1000 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{BD} = 333.3lb = 333lb(T)$$

$$\Rightarrow \quad F_{EC} = 333.3lb = 333lb(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

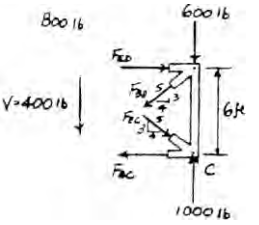
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{ED}\times 6 + 333.3\times\left(\frac{4}{5}\right)\times 6 = 0$$

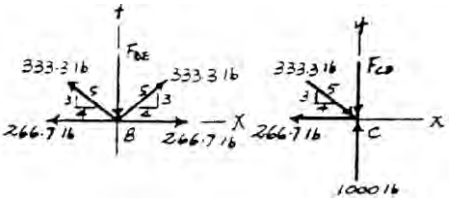
$$\Rightarrow \quad F_{ED} = 267\,lb(C)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 267lb(T)$$




در مفصل $B$ داریم:

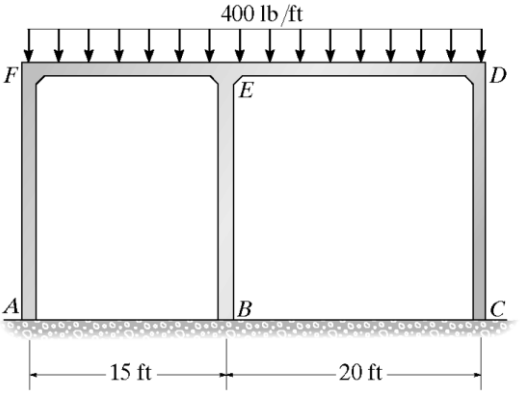
$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{BE} + 2\times 333.3\times\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE} = 400lb(C)$$




در مفصل $C$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{CD} - 333.3\times\left(\frac{3}{5}\right) + 1000 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = 800lb(C)$$

۷-٤) با استفاده از روش یک دهم دهانه، مقدار تقریبی لنگر داخلی ایجاد شده در گره‌های $F$ و $D$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۷-٤

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

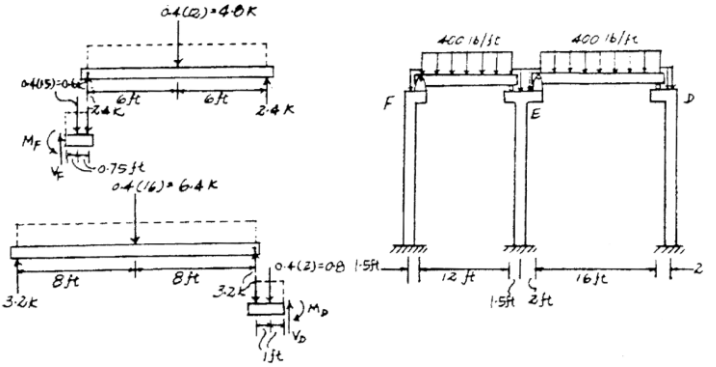
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



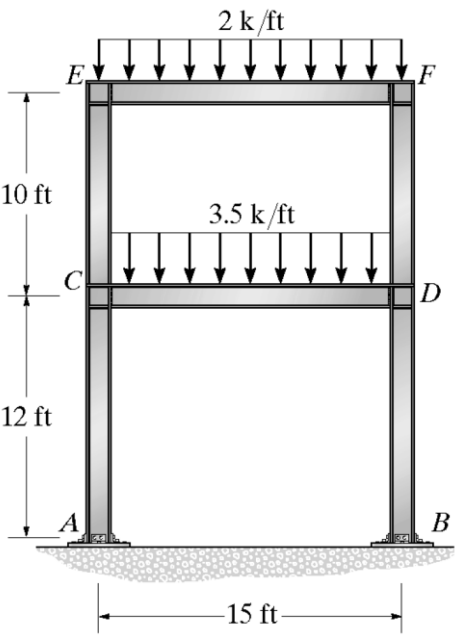
حل)

$$\sum M_F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_F - 0.6\times 0.75 - 2.4\times 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_F = 4.05k.ft$$

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_D + 0.8\times 1 + 3.2\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 7.2k.ft$$




۷–۵) با استفاده از روش یک دهم دهانه، مقدار تقریبی لنگر داخلی ایجاد شده در گره‌های $C$ و $E$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۷–۵

حل)

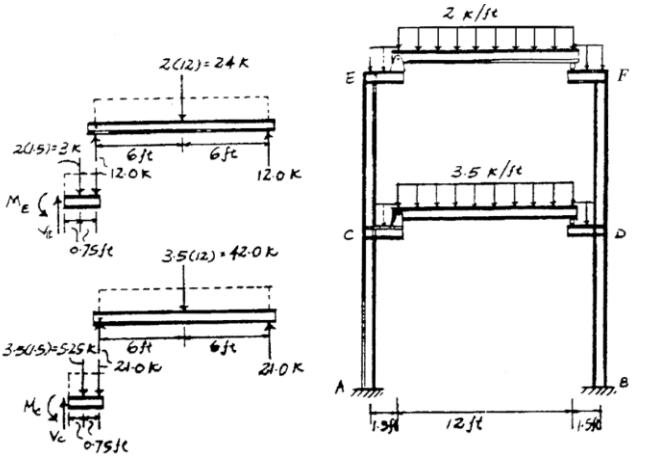
$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E - 3\times 0.75 - 12\times 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E = 20.25k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

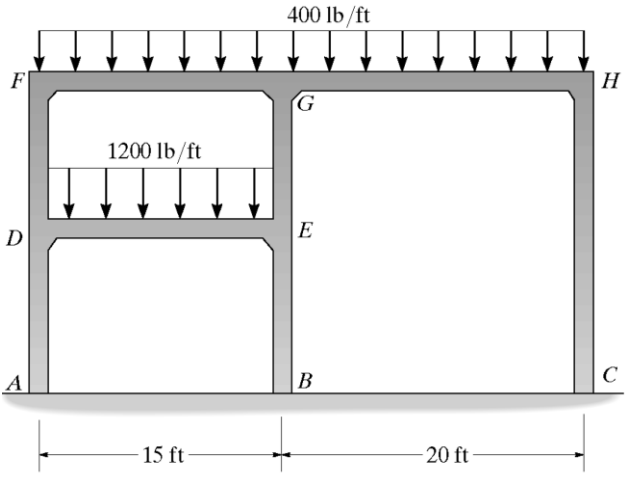
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C - 5.25\times 0.75 - 21\times 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 35.4k.ft$$

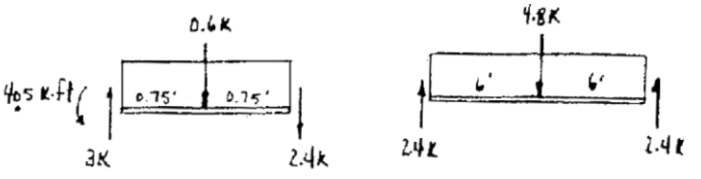



۷-۶) با استفاده از روش یک دهم دهانه، مقدار تقریبی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $A$، $B$ و $C$ را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۷-۶*

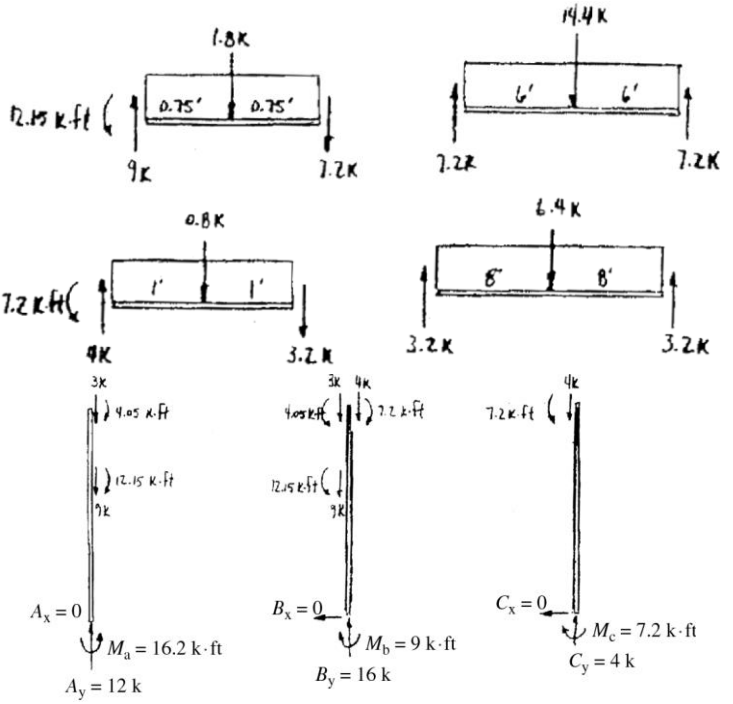
حل)




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$A_x = 0 \qquad B_x = 0 \qquad C_x = 0$

$A_y = 12k \qquad B_y = 16k \qquad C_y = 4k$

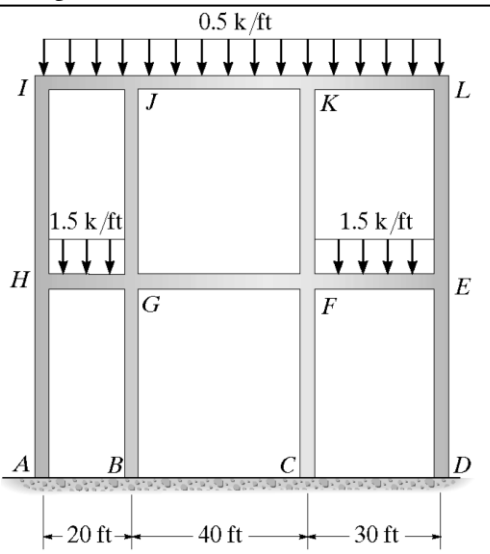
$M_A = 16.2k.ft \qquad M_B = 9k.ft \qquad M_C = 7.2k.ft$

۷–۷) با استفاده از روش یک دهم دهانه، مقدار تقریبی لنگر داخلی ایجاد شده در گره‌های $I$ و $L$ و $H$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





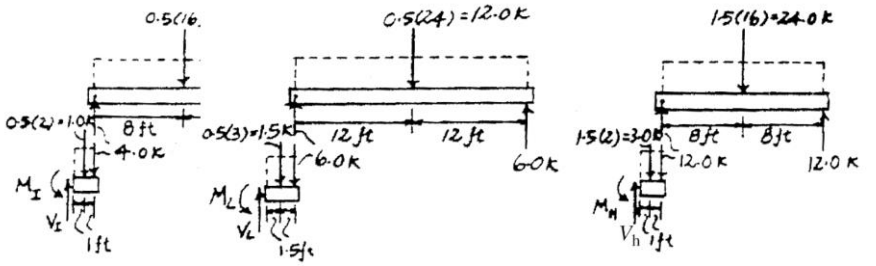

شکل مسئله ۷-۷

حل) در گره $I$ داریم:

$$\sum M_I = 0 \quad \Rightarrow \quad M_I - 1\times 1 - 4\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_I = 9.0k.ft$$

$$\sum M_L = 0 \quad \Rightarrow \quad M_L - 6\times 3 - 1.5\times 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_L = 20.25k.ft$$

$$\sum M_H = 0 \quad \Rightarrow \quad M_H - 3\times 1 - 12\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_H = 27.0k.ft$$

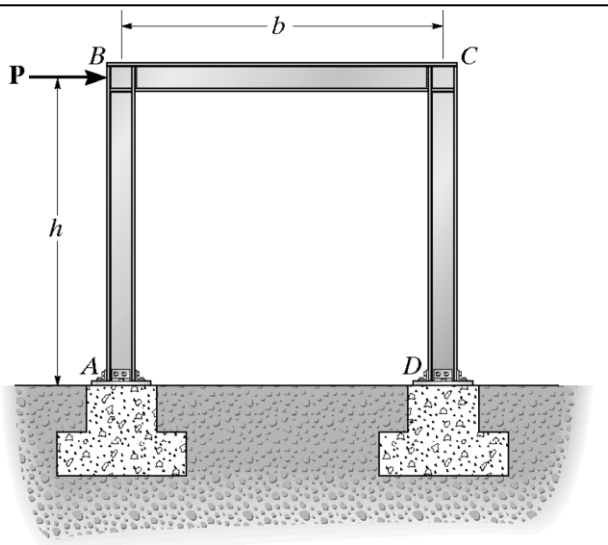



۷-۸) در قاب پرتال نشان داده شده در شکل زیر لنگر خمشی و برش ایجاد شده در هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $D$ نیمه گیردار می‌باشند و نقطه خمش در فاصله یک سوم از پایین ستون‌های ایجاد می‌شود. (تقریبی)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۷-۸

$$\sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; G_y \times b - P \times \left(\frac{2h}{3}\right) = 0 \;\Rightarrow\; G_y = P\left(\frac{2h}{3b}\right)$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; E_y - \frac{2Ph}{3b} = 0 \;\Rightarrow\; E_y = \frac{2Ph}{3b}$$

$$M_A = M_D = \frac{P}{2}\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{Ph}{6}$$

$$M_B = M_C = \frac{P}{2}\left(\frac{2h}{3}\right) = \frac{Ph}{3}$$

برای عضو $BC$ داریم:

$$V_B = V_C = \frac{2Ph}{3b}$$

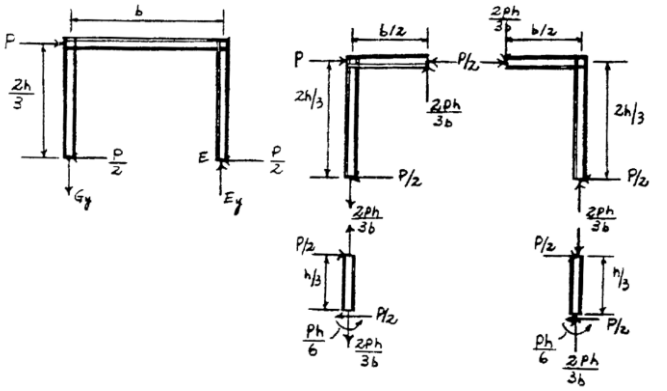
برای عضو $AB$ و $CD$ داریم:

$$V_A = V_B = V_C = V_D = \frac{P}{2}$$

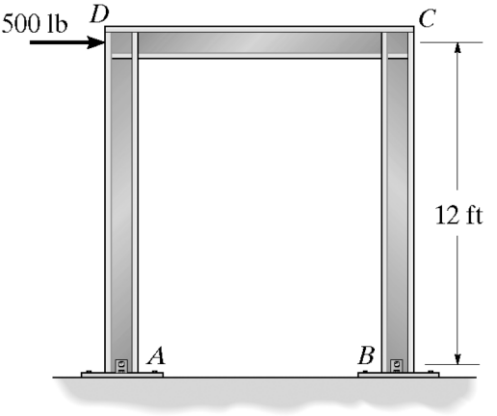
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۷-۹) در قاب نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگرهای داخلی در گره‌های $D$ و $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ به صورت مفصلی هستند. (تقریبی)




*شکل مسئله ۷-۹*

حل) با گشتاورگیری در کل قاب (۱) داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 \times B_y - 12 \times 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 600\,lb$$

$$\underset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 600lb$$

با توجه به دیاگرام جسم آزاد (۲) داریم:

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \times 600 - 12 \times A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 250\,lb$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 250lb$$

با توجه به دیاگرام جسم آزاد (۳) داریم:

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D - 12 \times 250 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 3.00k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

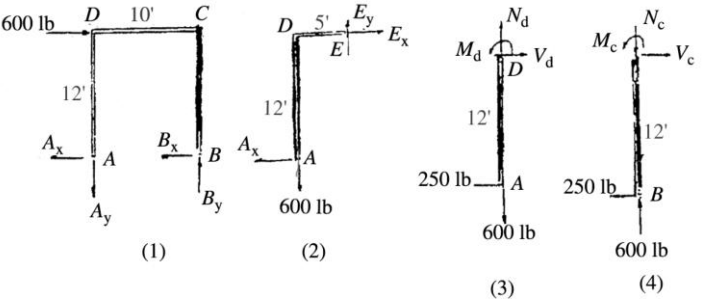


$\Rightarrow N_D = 600lb \qquad V_D = 250lb$

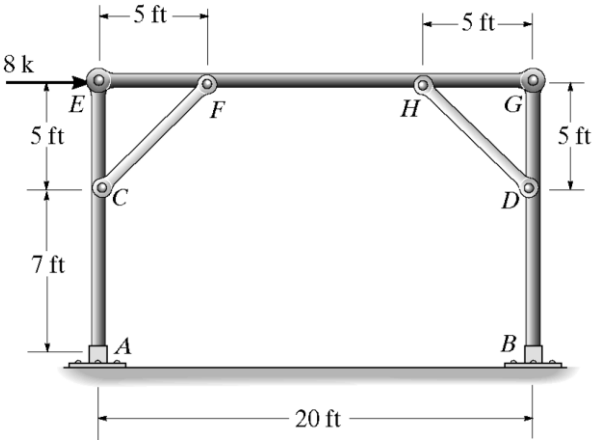
با توجه به دیاگرام جسم آزاد (٤) داریم:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C - 12 \times 250 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = 3.00k.ft$$

$\Rightarrow N_C = 600lb \qquad V_C = 250lb$




۷–۱۰) در سازه نشان داده شده در شکل زیر، دیاگرام لنگر خمشی برای ستون $ACE$ را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تمام اتصالات مفصلی هستند. مقدارنیروی ایجاد شده در عضو $CF$ را تعیین نمایید. (تقریبی)




شکل مسئله ۷–۱۰

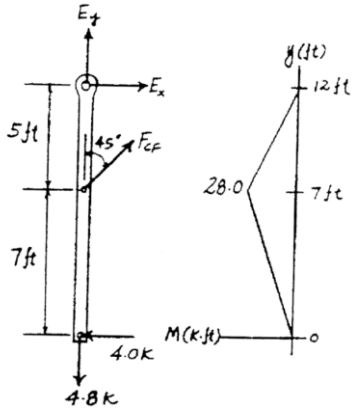
حل)

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} \times \sin 45^\circ \times 5 - 4 \times 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = 13.6k$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

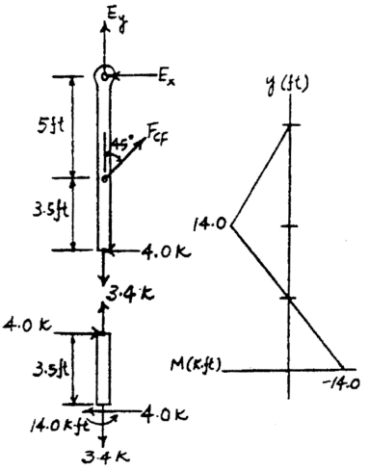
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۷–۱۱) مسئله ۷–۱۰ را در شرایطی که تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار باشند، حل نمایید.

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} \times \sin 45^\circ \times 5 - 4 \times 8.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = 9.62k$$

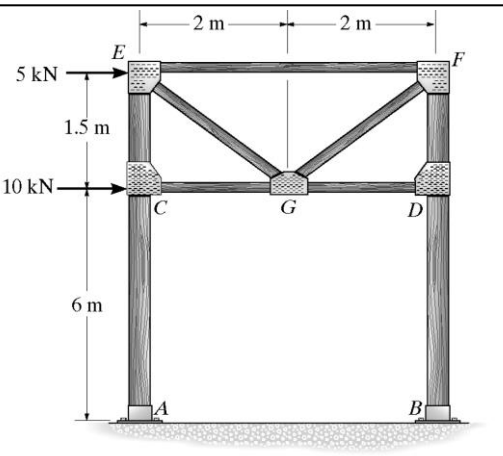



۷–۱۲) در سازه نشان داده شده در شکل زیر، دیاگرام لنگر خمشی برای ستون $ACE$ را ترسیم نمایید. فرض نمایید که تمام اتصالات مفصلی هستند. مقدار نیروی ایجاد شده در اعضای $CG$، $EG$ و $EF$ را تعیین نمایید. (تقریبی)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۷-۱۲

حل)

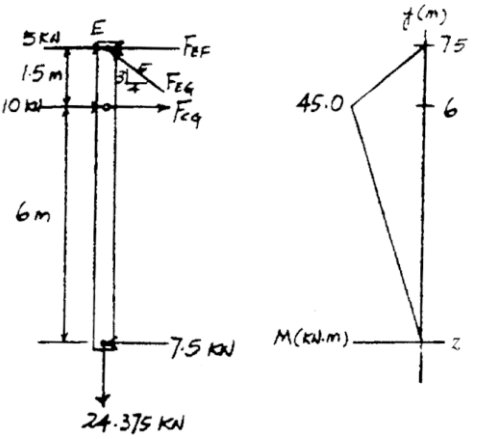
$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}\times F_{EG} - 24.375 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{EG} = 40.625\,kN = 40.6kN(C)$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CG}\times 1.5 + 10\times 1.5 - 7.5\times 7.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CG} = 27.5kN(T)$$

$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{EF} - 7.5 - \frac{4}{5}(40.625) + 15 + 27.5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{EF} = 2.5kN(C)$$




۷-۱۳) مسئله ۷-۱۲ را در شرایطی که تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار باشند، حل نمایید.

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}\times F_{EG} - 13.125 = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



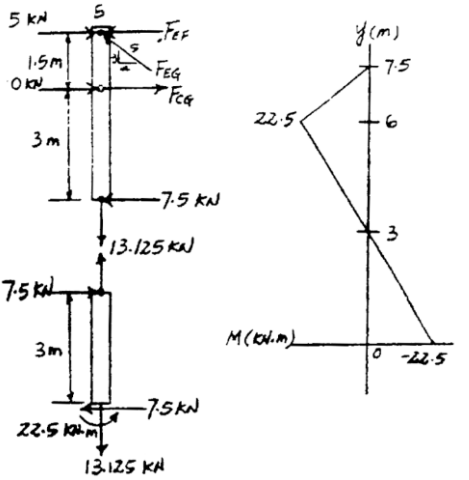
$$\Rightarrow \quad F_{EG} = 21.875\,kN = 21.9kN(C)$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CG} \times 1.5 + 10 \times 1.5 - 7.5 \times 7.5 = 0$$

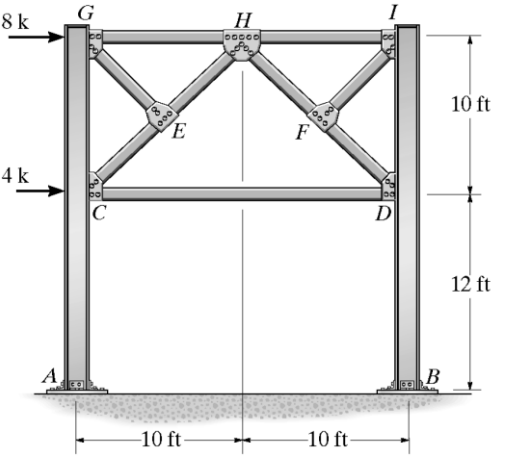
$$\Rightarrow \quad F_{CG} = 12.5kN(T)$$

$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{EF} - \frac{4}{5}(21.875) - 7.5 + 15 + 12.5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{EF} = 2.5kN(C)$$




۷-۱٤) در قاب نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار هستند. فرض کنید اتصال تمام اعضای خرپا به صورت مفصلی هستند. (تقریبی)




شکل مسئله ۷-۱٤

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با بازبینی مفصل‌های $E$ و $F$ داریم:

$$F_{EG} = F_{FI} = 0$$

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE}\times\cos 45^\circ - 7.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CE} = 10.748k - 10.7k(T)$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH}\times 10 - 8\times 10 - 6\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH} = 11.6k(C)$$

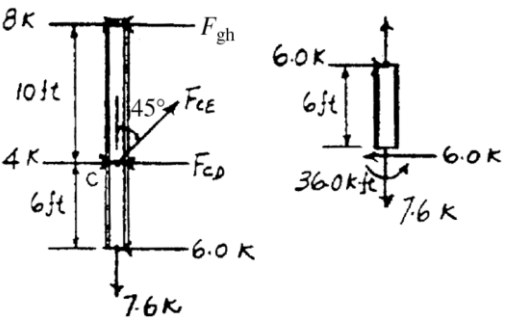
$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{CD} - 6 - 11.6 + 8 + 4 + 10.748(\sin 45^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 2.0k(C)$$

$$M_A = M_B = 36.0k.ft$$

$$A_x = B_x = 6.0k$$

$$A_y = B_y = 7.6k$$




در مفصل $E$ داریم:

$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EH} = 10.7k(T)$$

در مفصل $H$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HF}\times\sin 45^\circ - 10.748\times\sin 45^\circ = 0$$

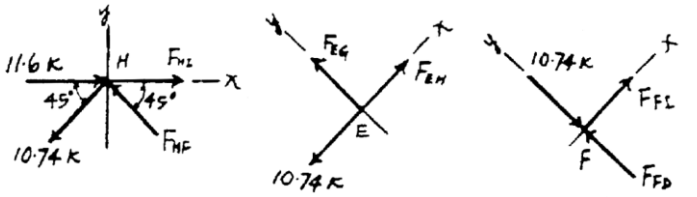
$$\Rightarrow \quad F_{HF} = 10.748 = 10.7k(C)$$

$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HI} + 11.6 - 2\times 10.748\times\cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{HI} = 3.6k(T)$$

در مفصل $F$ داریم:

$$\uparrow_{+}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FD} = 10.7k(C)$$

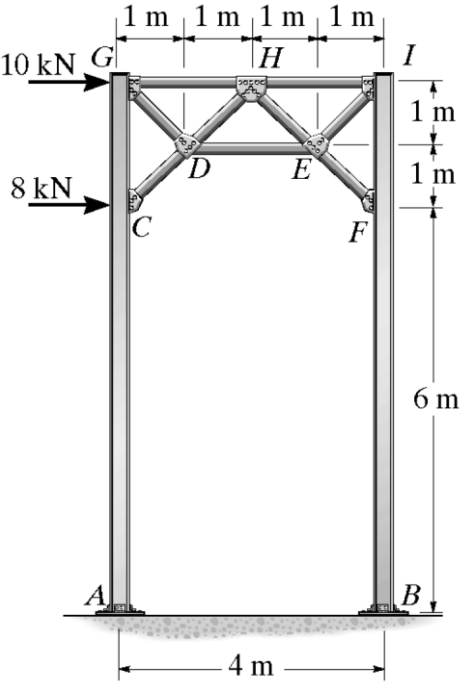



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۷-۱۵) در قاب پرتال نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا و را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار هستند. فرض کنید تمام اعضای خرپا به صورت مفصلی هستند. (تقریبی)




شکل مسئله ۷-۱۵

حل) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر می‌باشد:

$$M_A = M_B = 27.0kN.m$$
$$A_x = B_x = 9.0kN$$
$$A_y = B_y = 18.5kN$$

$$\sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} \times \sin 45^\circ \times 2 + 8 \times 2 - 9 \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 20.51kN = 20.5kN(T)$$

$$\underset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GD} \times \cos 45^\circ + 20.51 \times \cos 45^\circ - 18.5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GD} = 5.657\,kN = 5.66kN(C)$$

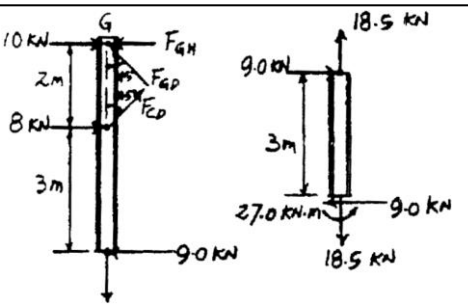
$$\underset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{GH} - 5.657 \times \sin 45^\circ - 9 + 20.51 \times \sin 45^\circ + 8 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{GH} = 19.5kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در مفصل $D$ داریم:

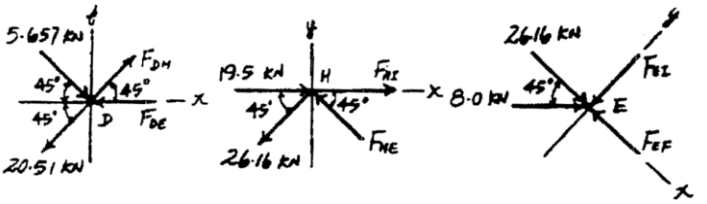
$$\uparrow\sum_{+}F_y=0 \quad\Rightarrow\quad F_{DH}\times\sin 45^\circ-5.657\times\sin 45^\circ-20.51\times\sin 45^\circ=0$$
$$\Rightarrow\quad F_{DH}=26.16kN=26.2kN(T)$$
$$\rightarrow\sum_{+}F_x=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{DE}-20.51\times\cos 45^\circ+5.663\times\cos 45^\circ+26.16\times\cos 45^\circ=0$$
$$\Rightarrow\quad F_{DE}=8.0kN(C)$$

در مفصل $H$ داریم:

$$\uparrow\sum_{+}F_y=0 \quad\Rightarrow\quad F_{HE}\times\sin 45^\circ-26.16\times\sin 45^\circ=0$$
$$\Rightarrow\quad F_{HE}=26.16kN=26.2kN(C)$$
$$\rightarrow\sum_{+}F_x=0 \quad\Rightarrow\quad F_{HI}+19.5-2\times 26.16\times\cos 45^\circ=0$$
$$\Rightarrow\quad F_{HI}=17.5kN(T)$$

در مفصل $E$ داریم:

$$\rightarrow\sum_{+}F_x=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{EF}+8.0\times\cos 45^\circ+26.16=0$$
$$\Rightarrow\quad F_{EF}=31.8kN(C)$$
$$\uparrow\sum_{+}F_y=0 \quad\Rightarrow\quad -F_{EI}+8\times\sin 45^\circ=0 \quad\Rightarrow\quad F_{EI}=5.66kN(C)$$

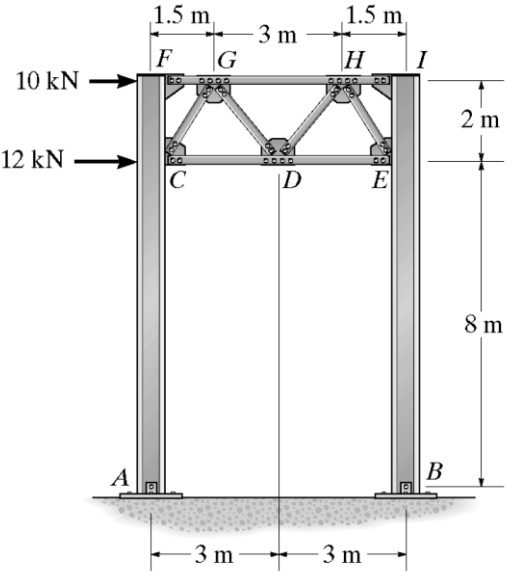



۷-۱۶) در قاب پرتال نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا و را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ مفصلی هستند. فرض کنید تمام اعضای خرپا به صورت مفصلی هستند. (تقریبی)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۷-۱۶

حل) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر می‌باشد:

$$A_x = B_x = 11.0kN$$
$$A_y = B_y = 32.7kN$$

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}F_{CG} - 32.67 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CG} = 40.83kN = 40.8kN(T)$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} \times 2 - 10 \times 2 - 11 \times 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{FG} = 54.0kN(C)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} + 10 + 12 + \frac{3}{5} \times 40.83 - 54 - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 18.5kN(T)$$

در مفصل $G$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}F_{GD} - \frac{4}{5} \times 40.83 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GD} = 40.83kN = 40.8kN(C)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{GH} - 2 \times \frac{3}{5} \times 40.83 + 54 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GH} = 5.0kN(C)$$

در مفصل $D$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}F_{DH} - \frac{4}{5} \times 40.83 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DH} = 40.83kN = 40.8kN(T)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{DE} - 18.5 + 2 \times \frac{3}{5} \times 40.83 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 30.5kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

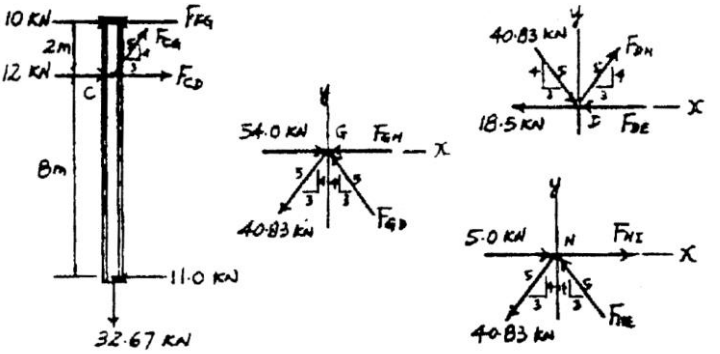
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



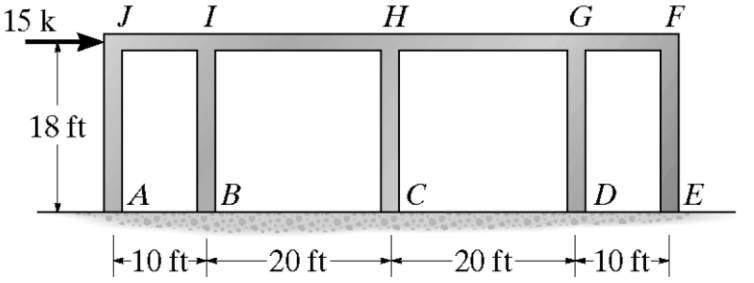
در مفصل $H$ داریم:

$$\underset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}F_{HE} - \frac{4}{5}\times 40.83 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HE} = 40.83kN = 40.8kN(C)$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HI} + 5 - 2\times\frac{3}{5}\times 40.83 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HI} = 44kN(T)$$




۷–۱۷) با استفاده از روش تقریبی پرتال، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $A$، $B$، $C$، $D$ و $E$ را تعیین نمایید.




*شکل مسئله ۷–۱۷*

حل)

$$\underset{+}{\leftarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 8V - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 1.875k$$

$$A_y = 3.375k \qquad B_y = 1.69k$$

$$A_x = 1.875k \qquad B_x = 3.75k$$

$$M_A = 16.9k.ft \qquad M_B = 33.75k.ft$$

$$C_y = 0 \qquad C_x = 3.75k \qquad D_x = 3.75k \qquad D_y = 1.69k$$

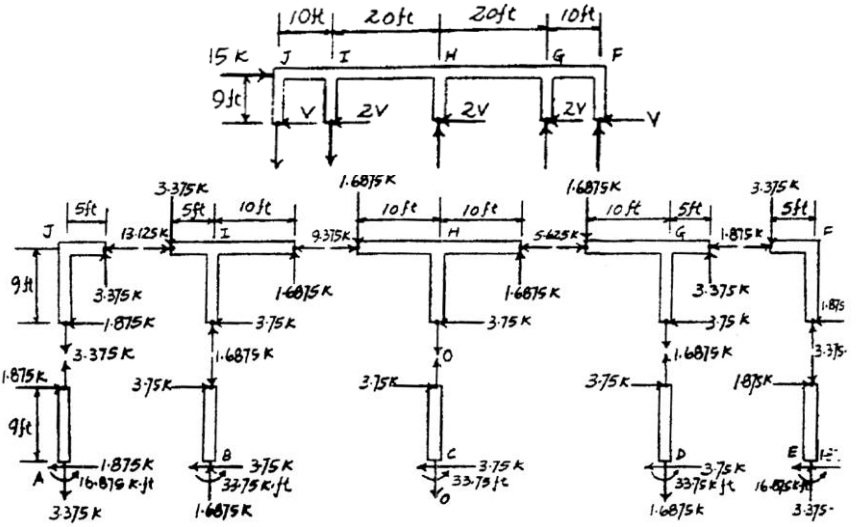
$$M_C = 33.75k.ft \qquad M_D = 33.75k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

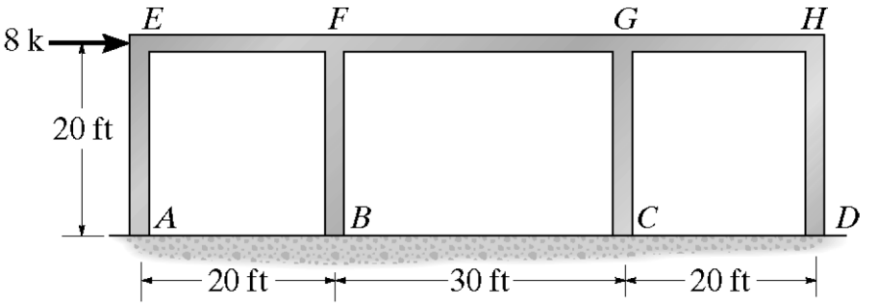
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$E_y = 3.375k$ $E_x = 1.875k$ $M_E = 16.9k.ft$




۷–۱۸) با استفاده از روش تقریبی پرتال، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $A$، $B$، $C$ و $D$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۷–۱۸

حل)

$$\rightarrow_{+} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -6V + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 1.33k$$

$A_y = 1.33k$ $A_x = 1.33k$ $M_A = 13.3k.ft$

$B_y = 0.444k$ $B_x = 2.67k$ $M_B = 26.7k.ft$

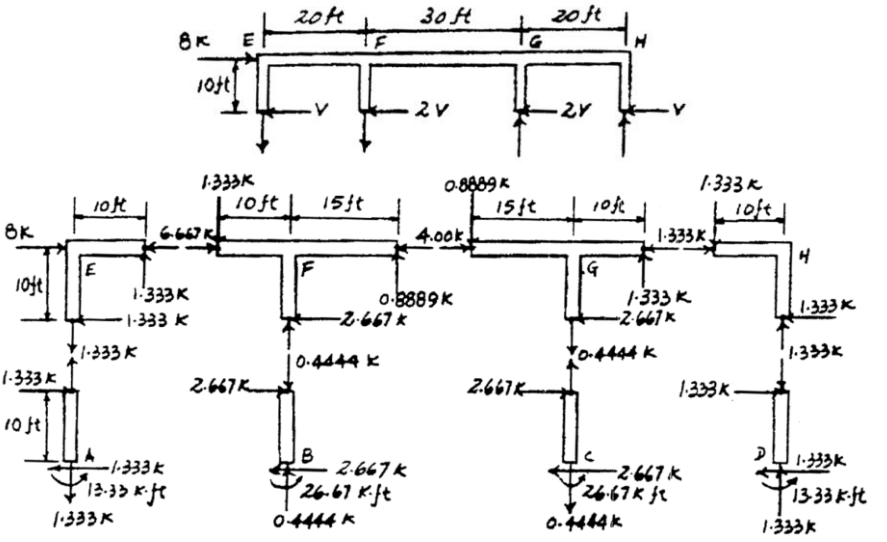
$C_y = 0.444k$ $C_x = 2.67k$ $M_C = 26.7k.ft$

$D_y = 1.33k$ $D_x = 1.33k$ $M_D = 13.3k.ft$

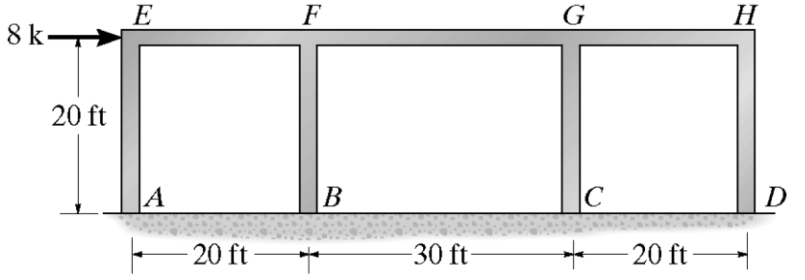
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





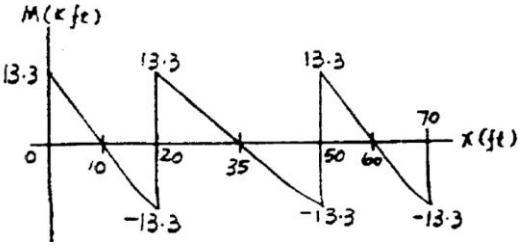

۷-۱۹) با استفاده از روش تقریبی پرتال، دیاگرام لنگر خمشی برای تیر $EFGH$ را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ۷-۱۹

حل)

$$M = \pm 13.3k.ft$$

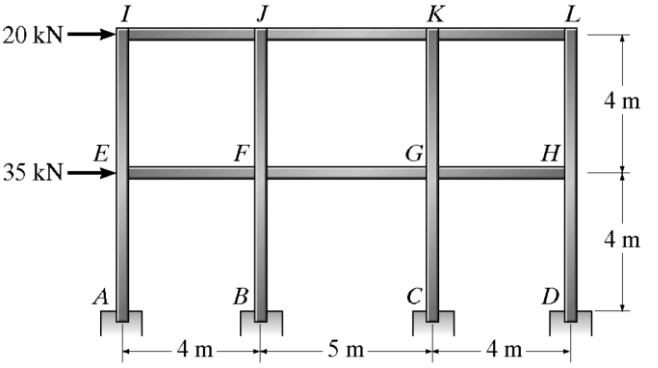



۷-۲۰) با استفاده از روش تقریبی پرتال، دیاگرام لنگر خمشی برای تیر $IJKL$ را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

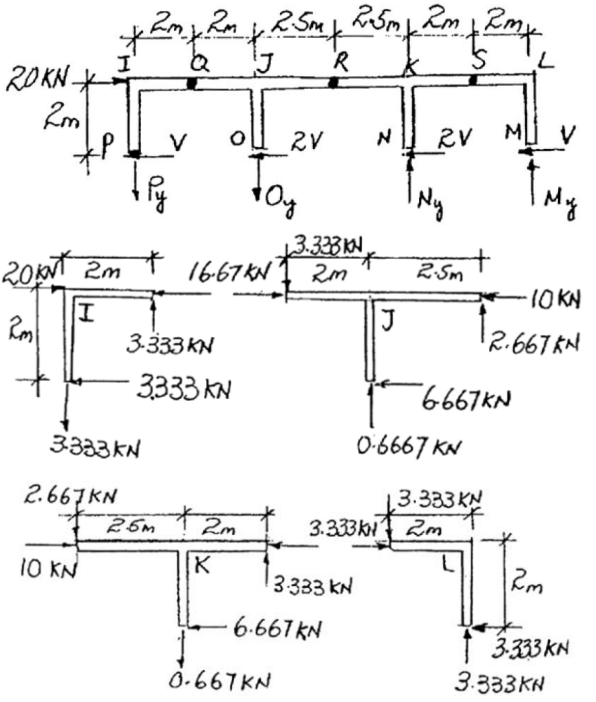





شکل مسئله ۷-۲۰

حل)

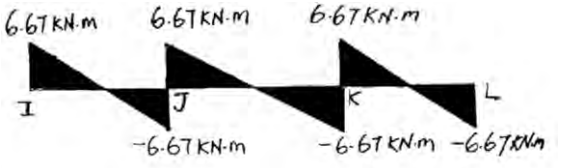
$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6V - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 3.333kN$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

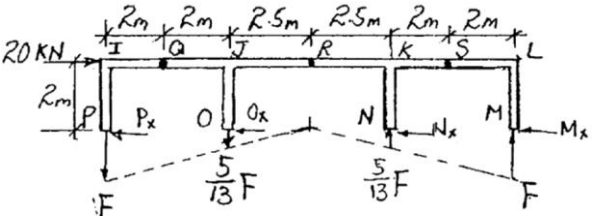




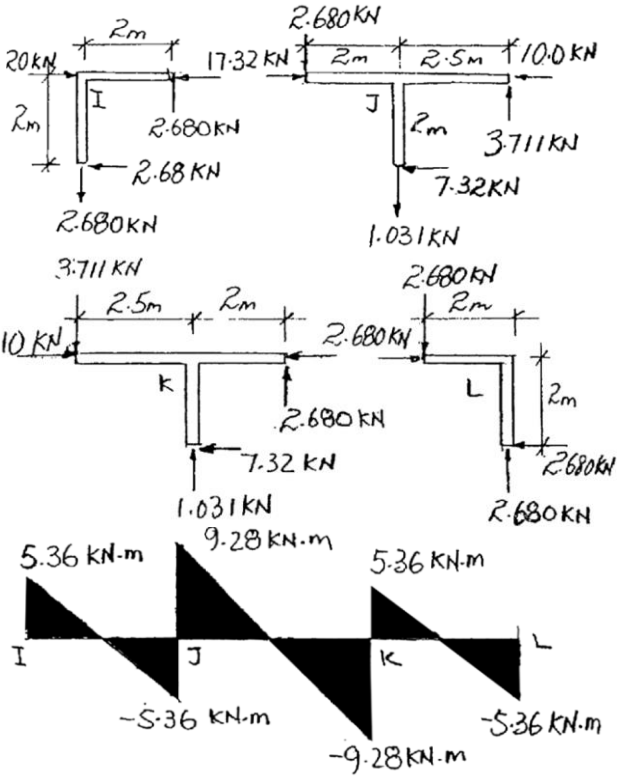

$M = \pm 6.67 kN.m$

۷-۲۱) مسئله ۷-۲۰ را با استفاده از روش تقریبی کانتیلور دوباره حل نمایید.

حل)




$$\sum M_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}F \times 9 + F \times 13 - \frac{5}{13}F \times 4 - 20 \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 2.68kN$$

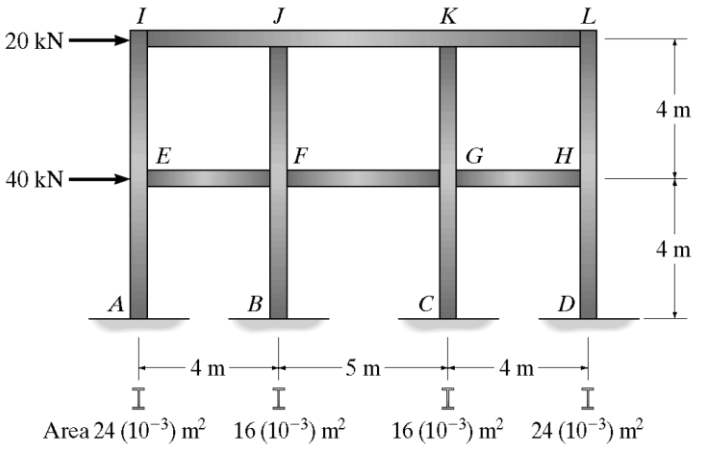



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



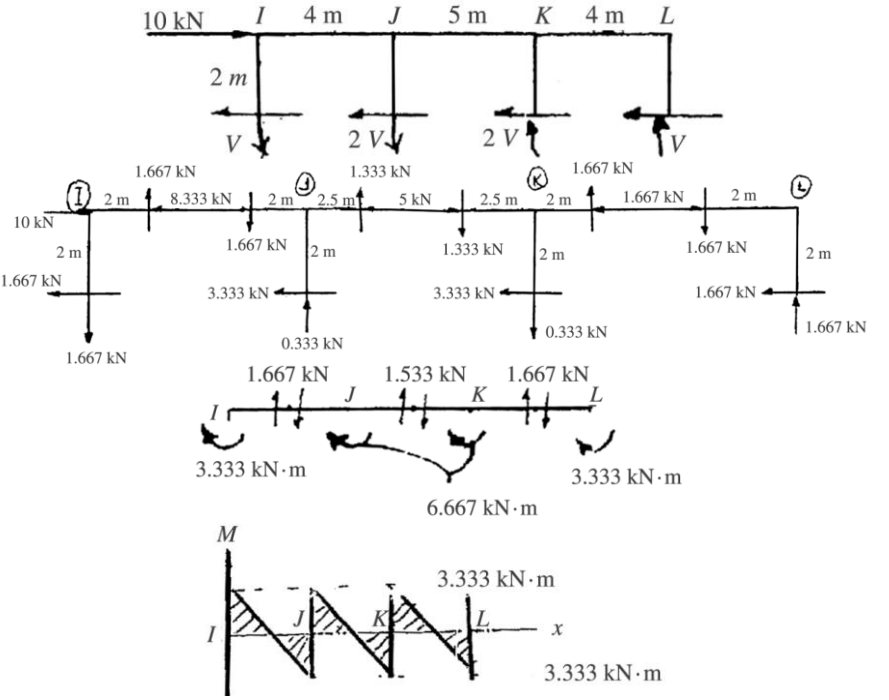
۷-۲۲) با استفاده از روش تقریبی پرتال، دیاگرام لنگر خمشی برای تیر *IJKL* را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ۷-۲۲

حل)

$$\rightarrow_{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 6V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 1.667kN$$



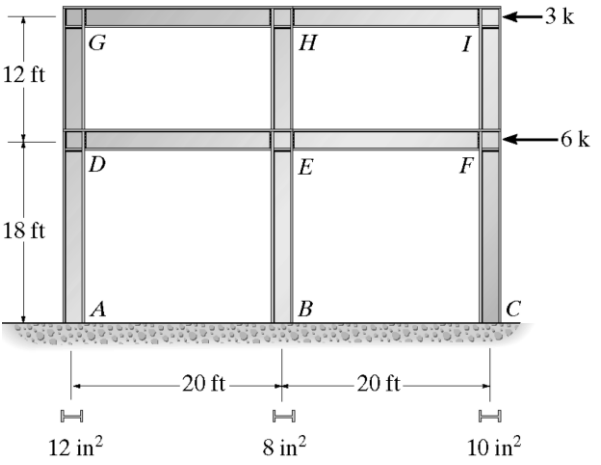

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



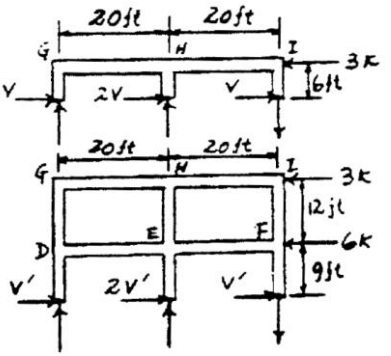
$M = \pm 3.33 kN.m$

۷-۲۳) با استفاده از روش تقریبی پرتال، نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۷-۲۳

حل)




$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4V - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0.75k$$

$$\underset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4V' - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad V' = 2.25k$$

$$A_y = 2.925k$$

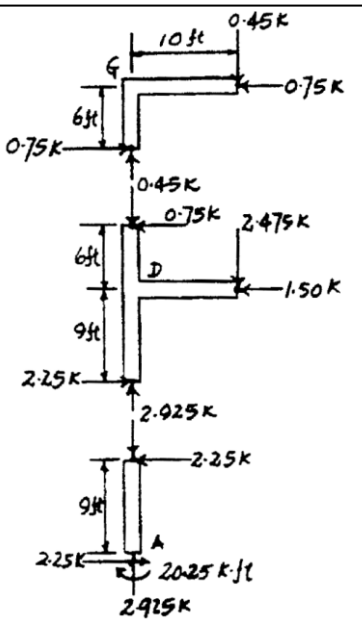
$$A_x = 2.25k$$

$$M_A = 20.25k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

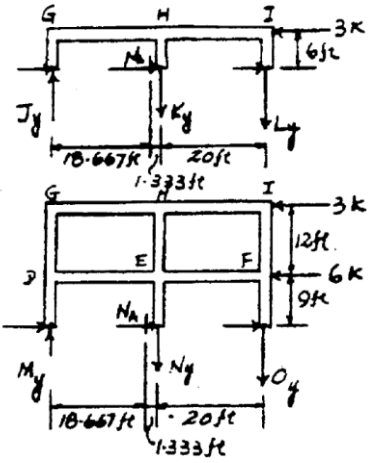
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۲۴-۷) مسئله ۷-۲۳ را با استفاده از روش تقریبی کانتیلور دوباره حل نمایید.

حل)




$$\bar{x} = \frac{80\times 20 + 10\times 40}{30} = 18.667\ ft$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -K_y \times 1.333 - L_y \times 21.333 - J_y \times 18.667 + 3\times 6 = 0$$

$$\sigma_K = \frac{1.333}{18.667}\sigma_J \quad \Rightarrow \quad \frac{K_y}{8} = \frac{1.333}{18.667}\left(\frac{J_y}{12}\right) \quad \Rightarrow \quad K_y = 0.04762 J_y$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sigma_L = \frac{21.333}{18.667}\sigma_J \quad \Rightarrow \quad \frac{L_y}{10} = \frac{21.333}{18.667}\left(\frac{J_y}{12}\right) \quad \Rightarrow \quad L_y = 0.9524 J_y$$

$$J_y = 0.461k \qquad L_y = 0.439k$$

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_y \times 18.667 - N_y \times 1.333 - O_y \times 21.333 + 6\times 9 + 3\times 21 = 0$$

$$N_y = 0.04762\, M_y \qquad O_y = 0.9524\, M_y$$

$$M_y = 2.9963\, k \qquad N_y = 0.1427\, k \qquad O_y = 2.8537\, k$$

$$A_y = 3.0k \qquad A_x = 2.3k \qquad M_A = 20.7k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل هشتم
# خیز و شیب

## ۸-۱ کلیات

اعضای سازه‌ای بخصوص تیرها که در معرض بارهایی عمود بر محور خود می‌باشند، باید دارای سختی کافی باشند تا در برابر بارهای اعمال شده خارجی دچار خیزهای بیش از اندازه نشوند. در آیین‌نامه‌های طراحی سازه، خیز در اعضای مختلف ساختمان محدود شده است. به عنوان مثال در مبحث دهم از مقررات ملی ایران که مربوط به طراحی سازه‌های فولادی می‌باشد، مقدار خیز تیرها و شاهتیرها ناشی از بارهای مرده و زنده به *1/240* طول دهانه محدود شده است. برای تامین این شرایط لازم است در طراحی اعضا، مقدار خیز آنها نیز کنترل گردد. روش‌های مختلفی برای تعیین مقدار خیز تیرها وجود دارد که بسته به شرایط مسئله می‌توان از هر یک از آنها استفاده نمود. به عنوان مثال با استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل می‌توان خیز تیر را در تمام نقاط آن بدست آورد در حالی با استفاده از روش گشتاور سطح[1] تنها می‌توان خیز تیر را در یک مقطع مشخص از آن تعیین نمود. روش دوم در تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی[2] بسیار مفید است. در تیرهایی که دارای عمق کمی در مقایسه با طول آنها (مثلاً عمق آنها یک دهم طول آنها است) می‌باشند، خیز ایجاد شده عمدتاً ناشی از خمش در آنهاست. لیکن در تیرهای عمیق یا تیرهایی که دارای ارتفاع زیادی نسبت به طولشان هستند، اثر برش در ایجاد خیز آنها قابل توجه بوده و بایستی آن را مورد توجه قرار داد.[3]

## ۸-۲ مسائل:

۸-۱) با استفاده از مختصات $x_1$ و $x_2$ معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

---

[1] Moment-area method

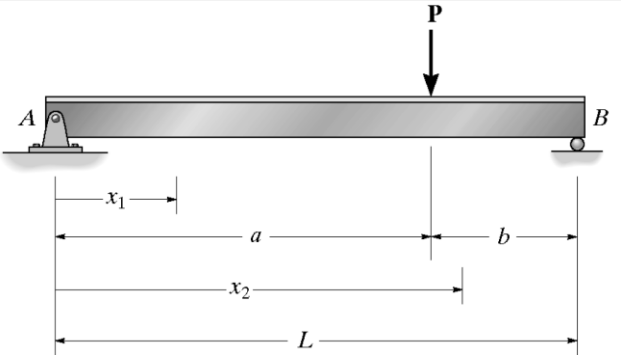
[2] Statically indeterminate

[3] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

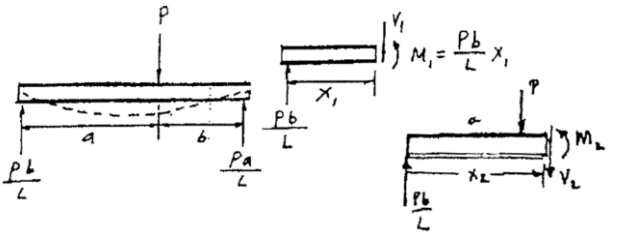





شکل مسئله ۸-۱

حل)

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x)$$




$$\text{برای } M_1(x_1)=\frac{Pb}{L}x_1 \therefore \qquad EI\frac{d^2\upsilon_1}{dx_1^2}=\frac{Pb}{L}x_1$$

$$EI\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=\frac{Pb}{2L}x_1^2+C_1 \qquad (1)$$

$$EI\upsilon_1=\frac{Pb}{6L}x_1^3+C_1x_1+C_2 \qquad (2)$$

$$\text{برای } M_2(x_2)=\frac{Pb}{L}x_2-P(x_2-a) \therefore$$

چون $b=L-a$ در نتیجه:

$$M_2(x_2)=Pa\left(1-\frac{x_2}{L}\right)$$

$$EI\frac{d^2\upsilon_2}{dx_2^2}=Pa\left(1-\frac{x_2}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_2}{dx_2}=Pa\left(x_2-\frac{x_2^2}{2L}\right)+C_3 \qquad (3)$$

$$EI\upsilon_2=Pa\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_2^3}{6L}\right)+C_3x_2+C_4 \qquad (4)$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در $x_1 = 0$ ، $\upsilon_1 = 0$ بنابراین $C_2 = 0$، همچنین در $x_2 = L$ ، $\upsilon_2 = 0$

$$0 = \frac{PaL^3}{3} + C_3 L + C_4 \qquad (5)$$

با اعمال شرایط پیوستگی داریم:

$$\upsilon_1\big|_{x_1=a} = \upsilon_2\big|_{x2=a}$$

$$\frac{Pb}{6L}a^3 + C_1 a = Pa\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6L}\right) + C_3 a + C_4 \qquad (6)$$

$$\left.\frac{d\upsilon_1}{dx_1}\right|_{x_1=a} = \left.\frac{d\upsilon_2}{dx_2}\right|_{x2=a}$$

$$\frac{Pb}{2L}a^2 + C_1 = Pa\left(a - \frac{a^2}{2L}\right) + C_3 \qquad (7)$$

با حل روابط (۵)، (٦) و (۷) داریم:

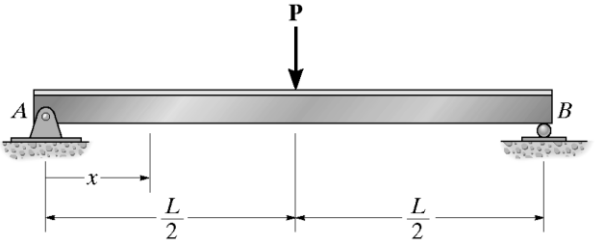
$$C_1 = -\frac{Pb}{6L}\left(L^2 - b^2\right) \qquad C_3 = -\frac{Pb}{6L}\left(2L^2 + a^2\right) \qquad C_4 = \frac{Pa^3}{6}$$

$$EI\upsilon_1 = \frac{Pb}{6L}x_1^3 - \frac{Pb}{6L}\left(L^2 - b^2\right)x_1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{Pb}{6EIL}\left(x_1^3 - \left(L^2 - b^2\right)x_1\right)$$

$$EI\upsilon_2 = Pa\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6L}\right) - \frac{Pa}{6L}\left(2L^2 + a^2\right)x_2 + \frac{Pa^3}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{Pa}{6EIL}\left(3x_2^2 L - x_2^3 - \left(2L^2 + a^2\right)x_2 + a^2 L\right)$$

۸-۲) معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید( $0 \le x \le L/2$). مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار شیب در $A$ و همچنین حداکثر خیز تیر را تعیین نمایید.



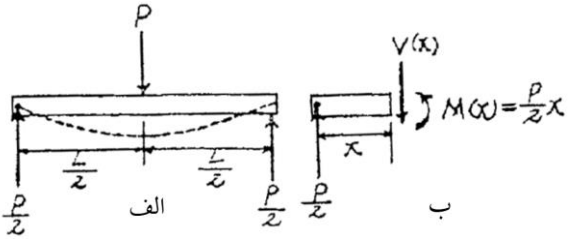

*شکل مسئله ۸-۲*

حل) در دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده در شکل زیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و همچنین معادله لنگر تیر نشان داده شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x) \quad \Rightarrow EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{P}{2}x$$

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{P}{4}x^2+C_1 \qquad (1)$$

$$EI\upsilon=\frac{P}{12}x^3+C_1x+C_2 \qquad (2)$$

به علت تقارن داریم: در $x=\frac{L}{2}$، $\frac{d\upsilon}{dx}=0$ | همچنین در $\frac{d\upsilon}{dx}=0$، $x=\frac{L}{2}$

از رابطه (۱) $0=\frac{P}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=-\frac{PL^2}{16}$

از رابطه (۲) $0=0+0+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=0$

با جایگذاری $C_1$ در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{P}{16EI}\left(4x^2-L^2\right) \quad \Rightarrow \quad \theta_A=\left.\frac{d\upsilon}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{PL^2}{16EI}$$

علامت منفی در رابطه فوق نشان دهنده چرخش آن به صورت پاد ساعتگرد است. با جایگذاری $C_1$ و $C_2$ در رابطه (۲) داریم:

$$\upsilon=\frac{Px}{48EI}\left(4x^2-3L^2\right)$$

حداکثر خیز $\upsilon_{\max}$ در $x=\frac{L}{2}$ خواهد بود.

$$\upsilon_{\max}=-\frac{PL^3}{48EI}$$

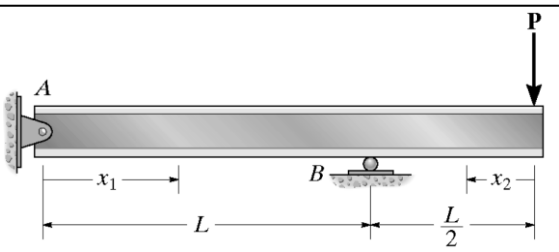
علامت منفی نشان دهنده خیز تیر به سمت پایین است.

۸-۳) با استفاده از مختصات $x_1$ و $x_2$ معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار حداکثر خیز ایجاد شده در تیر را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۸-۳

حل) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با توجه به دیاگرام جسم آزاد (الف) تعیین می‌شوند. شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x)$ بیان می‌شود. برای $M(x_1)=-\frac{P}{2}x_1$ داریم:

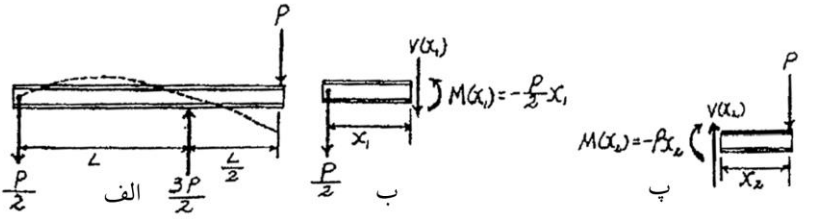
$$EI\frac{d^2\upsilon_1}{dx_1^2}=-\frac{P}{2}x_1 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=-\frac{P}{2}x_1^2+C_1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon_1=-\frac{P}{12}x_1^3+C_1x_1+C_2 \qquad (2)$$

برای $M(x_2)=-Px_2$ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon_2}{dx_2^2}=-Px_2 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_2}{dx_2}=-\frac{P}{2}x_2^2+C_3 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon_2=-\frac{P}{6}x_2^3+C_3x_2+C_4 \qquad (4)$$




با اعمال شرایط مرزی، در $x_1=0$، $\upsilon_1=0$ بوده و با توجه به رابطه (۲) $C_2=0$ و در $x_1=L$، $\upsilon_1=0$ می‌باشد. بنابراین از رابطه (۲) داریم:

$$0=-\frac{PL^3}{12}+C_1L \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{PL^2}{12}$$

در $x_2=L/2$، $\upsilon_2=0$ بوده و با توجه رابطه (٤) داریم:

$$0=-\frac{PL^3}{12}+\frac{L}{2}C_3+C_4$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



با استفاده از شرایط پیوستگی، در $x_1 = L$ و $x_2 = L/2$ ، $\frac{d\upsilon_1}{dx_1} = -\frac{d\upsilon_2}{dx_2}$ بوده، بنابراین با استفاده از روابط (۳) و (۱) داریم:

$$-\frac{PL^2}{4}+\frac{PL^2}{12}=-\left(-\frac{PL^2}{8}+C_3\right) \quad \Rightarrow \quad C_3=\frac{7PL^2}{24}$$

$$\text{با استفاده از رابطه (۵)} \Rightarrow C_4=-\frac{PL^3}{8}$$

شیب: با جایگذاری مقدار $C_1$ در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=\frac{P}{12EI}\left(L^2-3x_1^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

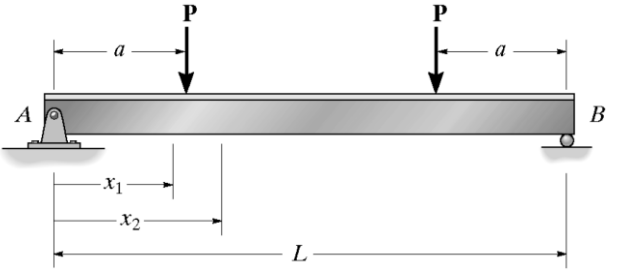
منحنی الاستیک تیر: با جایگذاری $C_1$، $C_2$، $C_3$ و $C_4$ بترتیب در رابطه (۲) و (٤) داریم:

$$\upsilon_1=\frac{Px_1}{12EI}\left(-x_1^2+L^2\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_D=\upsilon_1\big|_{x_1=\frac{L}{\sqrt{3}}}=\frac{P\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)}{12EI}\left(-\frac{L^2}{3}+L^2\right)=\frac{0.0321PL^3}{EI}$$

$$\upsilon_2=\frac{P}{24EI}\left(-4x_2^3+7L^2x_2-3L^3\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_C=\upsilon_2\big|_{x_2=0}=-\frac{PL^3}{8EI}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_{\max}=\upsilon_C=\frac{PL^3}{8EI}$$

۸-٤) با استفاده از مختصات $x_1$ و $x_2$ معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار حداکثر خیز ایجاد شده در تیر و همچنین مقدار شیب در $A$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۸-٤

حل) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با توجه به تقارن برابر با $P$ می‌باشد. شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x)$ بیان می‌شود. برای $M_1(x)=Px_1$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$EI\frac{d^2\upsilon_1}{dx_1^2}=Px_1 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=\frac{P}{2}x_1^2+C_1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon_1=\frac{Px_1^3}{6}+C_1x_1+C_2 \qquad (2)$$

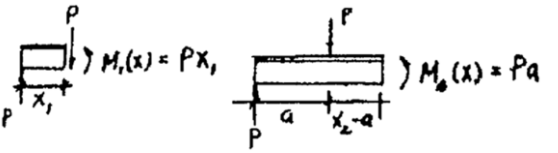
برای $M_2(x)=Pa$ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon_2}{dx_2^2}=Pa \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_2}{dx_2}=Pax_2+C_3 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon_2=\frac{Pax_2^2}{2}+C_3x_2+C_4 \qquad (4)$$

با اعمال شرایط مرزی، در $x_1=0$، $\upsilon_1=0$ بوده و با توجه به رابطه (۲) $C_2=0$ و به علت تقارن در $x_2=L/2$، $d\upsilon_2/dx_2=0$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$0=Pa\frac{L}{2}+C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3=\frac{PaL}{2}$$




با استفاده از شرایط پیوستگی، در $x_1=x_2=a$، و $\upsilon_1=\upsilon_2$ بوده، بنابراین:

$$\frac{Pa^3}{6}+C_1a=\frac{Pa^3}{2}-\frac{Pa^2L}{2}+C_4 \quad \Rightarrow \quad C_1a-C_4=\frac{Pa^3}{3}-\frac{Pa^2L}{2} \qquad (5)$$

در $x_1=x_2=a$، $d\upsilon_1/dx_1=d\upsilon_2/dx_2$ بوده، با جایگذاری در رابطه (۵) داریم:

$$C_4=\frac{Pa^3}{6}$$

$$\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=\frac{P}{2EI}\left(x_1^2+a^2-aL\right) \quad \Rightarrow \quad \theta_A=\left.\frac{d\upsilon_1}{dx_1}\right|_{x_1=0}=\frac{Pa(a-L)}{2EI}$$

$$\upsilon_1=\frac{Px_1}{6EI}\left(x_1^2+3a(a-L)\right)$$

$$\upsilon_2=\frac{Pa}{6EI}\left(3x(x-L)+a^2\right)$$

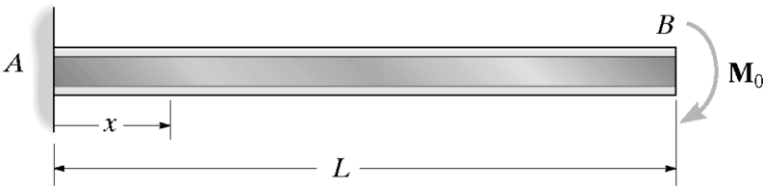
$$\upsilon_{\max}=\upsilon_2\big|_{x_2=\frac{L}{2}}=\frac{Pa}{24EI}\left(4a^2-3L^2\right)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۸-۵) معادله الاستیک خیز تیر شکل زیر را که تحت یک لنگر در انتها قرار دارد را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار حداکثر خیز و شیب ایجاد شده در تیر را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۸-۵

حل) شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\dfrac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x)$ بیان می‌شود. بنابراین:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=-M_0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon}{dx}=-M_0+C_1 \qquad (1)$$

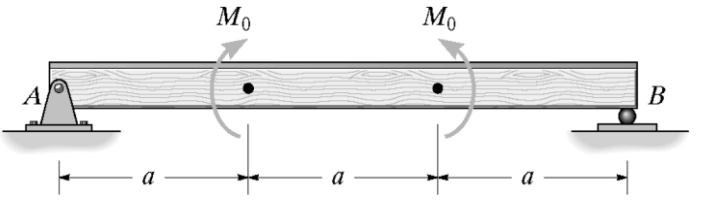
$$\Rightarrow \quad EI\upsilon=\frac{-M_0x^2}{2}+C_1x+C_2 \qquad (2)$$

با اعمال شرایط مرزی، در $x=0$، $d\upsilon/dx=0$ بوده و با استفاده از رابطه (۱) $C_1=0$، در $x=0$، $\upsilon=0$ بوده و براساس رابطه (۲)، $C_2=0$ خواهد بود.

$$\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{-M_0x}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\max}=\left.\frac{d\upsilon}{dx}\right|_{x=L}=\frac{-M_0L}{EI}$$ پادساعتگرد

$$\upsilon=\frac{-M_0x^2}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\max}=\upsilon|_{x=L}=-\frac{M_0x^2}{2EI}$$ به سمت پایین

۸-۶) با استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل، حداکثر خیز ایجاد شده در تیر زیر و همچنین مقدار شیب در $A$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۶

حل)

$$M_1=0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d^2\upsilon_1}{dx_1^2}=0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_1}{dx_1}=C_1 \quad \Rightarrow \quad EI\upsilon_1=C_1x+C_2$$

با اعمال شرایط مرزی، در $x_1=0$، $C_2=0$ می‌باشد.

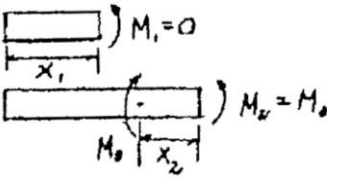
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$M_2 = M_0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d^2\upsilon_2}{dx_2^2} = M_0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon_2}{dx_2} = M_0 x_2 + C_3$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon_2 = \frac{1}{2}M_0 x_2^2 + C_3 x_2 + C_4$$




با اعمال شرایط مرزی، در $x_2 = a/2$، $d\upsilon_2/dx_2 = 0$ می‌باشد، بنابراین $C_3 = -M_0 a/2$

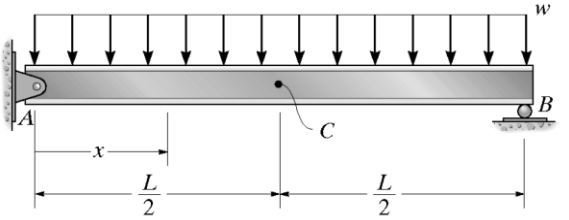
همچنین در $x_1 = a$، $x_2 = 0$ ، $\upsilon_1 = \upsilon_2$ و $d\upsilon_2/dx_2 = d\upsilon_1/dx_1$ می‌باشد، بنابراین

$$C_1 a = C_4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{M_0 a}{2} \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{M_0 a^2}{2}$$

در $x_1 = 0$، $EI\dfrac{d\upsilon_1}{dx_1} = -\dfrac{M_0 a}{2}$ بنابراین $\theta_A = -\dfrac{M_0 a}{2EI}$ خواهد بود. در $x_2 = a/2$ داریم:

$$EI\upsilon_{\max} = \frac{1}{2}M_0\left(\frac{a^2}{4}\right) - \frac{M_0}{2}\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{M_0 a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\max} = -\frac{5M_0 a^2}{8EI}$$

۸-۷) با استفاده از مختصات $x$ معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار خیز در $C$ و همچنین مقدار شیب در $A$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۸-۷

حل) شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\dfrac{d^2\upsilon}{dx^2} = M(x)$ بیان می‌شود. بنابراین:

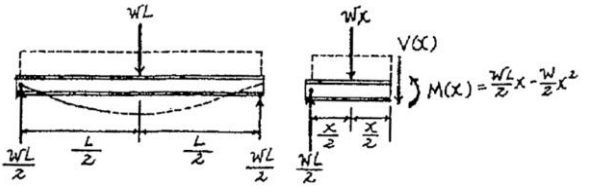
$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با اعمال شرایط مرزی، در $x = L/2$، $d\upsilon/dx = 0$ و $x = 0$، $\upsilon = 0$ بنابراین با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$0 = \frac{wL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{w}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

همچنین از رابطه (۲) داریم:

$$0 = 0 + 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

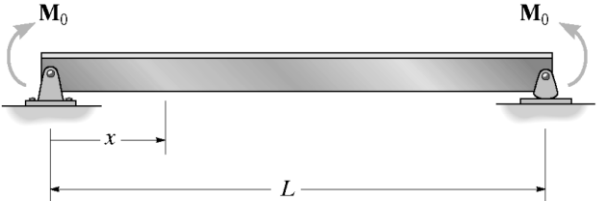
شیب در $A$: با جایگذاری $C_1$ در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{w}{24EI}\left(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3\right) \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \left.\frac{d\upsilon}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{wL^3}{24EI}$$ پادساعتگرد

منحنی الاستیک: با جایگذاری $C_1$ و $C_2$ در رابطه (۲) داریم:

$$\upsilon = \frac{wx}{24EI}\left(-x^3 + 2Lx^2 - L^3\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_C = \upsilon|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{-5wL^4}{374EI}$$ به سمت پایین

۸–۸) با استفاده از مختصات $x$ معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار خیز و شیب حداکثر را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۸–۸

حل) شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\dfrac{d^2\upsilon}{dx^2} = M(x)$ بیان می‌شود. بنابراین:

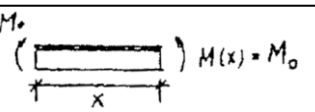
$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = M_0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon}{dx} = M_0 x + C_1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon = \frac{M_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با اعمال شرایط مرزی، در $x=0$، $\upsilon=0$ یا جایگذاری در رابطه (۲) $C_2=0$ در $x=L$، $\upsilon=0$ یا جایگذاری در رابطه (۲) $C_2=0$ داریم:

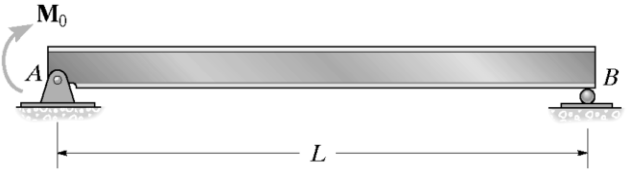
$$0=\frac{M_0L^2}{2}+C_1L \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{-M_0L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dx}=\frac{M_0}{2EI}(2x-L)$$

$$|\theta_{\max}|=|\theta_A|=|\theta_B|=\frac{M_0L}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \upsilon=\frac{M_0x}{2EI}(x-L)$$

به علت تقارن، حداکثر خیز در $x=L/2$ رخ می‌دهد.

$$\upsilon_{\max}=-\frac{M_0L^2}{8EI}$$ به سمت پایین

۸-۹) با استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل، معادله الاستیک خیز را برای تیر شکل زیر تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. مقدار خیز و شیب حداکثر را تعیین نمایید.

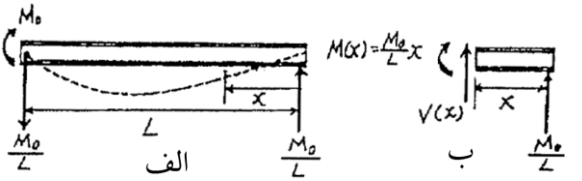



شکل مسئله ۸-۹

حل) در دیاگرام جسم آزاد (الف) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نشان داده شده است. همچنین در دیاگرام جسم آزاد (ب) معادله لنگر نشان داده شده است. شیب و منحنی الاستیک به صورت $EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M(x)$ بیان می‌شود. بنابراین:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M_0}{L}x \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{M_0}{2L}x^2+C_1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad EI\upsilon=\frac{M_0x^3}{6L}+C_1x+C_2 \qquad (2)$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



با اعمال شرایط مرزی، در $x=0$، $\upsilon=0$ لا جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$0=0+0+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=0$$

در $x=L$، $\upsilon=0$ لا جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$0=\frac{M_0L^3}{6L}+C_1L \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{-M_0L}{6}$$

شیب: با جایگذاری $C_1$ در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{M_0}{6LEI}\left(3x^2-L^2\right)$$

$$\frac{d\upsilon}{dx}=0=\frac{M_0}{6LEI}\left(3x^2-L^2\right) \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}L$$

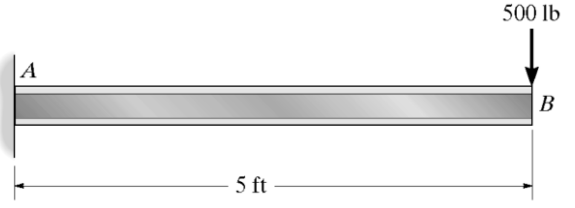
$$\theta_B=\left.\frac{d\upsilon}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{M_0}{6EI}$$

$$\theta_{\max}=\theta_A=\left.\frac{d\upsilon}{dx}\right|_{x=L}=\frac{M_0L}{3EI}$$ ساعتگرد

منحنی الاستیک: با جایگذاری $C_1$ و $C_2$ در رابطه (۲) داریم:

$$\upsilon=\frac{M_0L}{6LEI}\left(x^3-L^2x\right)\rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}L \text{ در } \Rightarrow \upsilon_{\max}=-\frac{\sqrt{3}M_0L^2}{27EI}$$ به سمت پایین

۸-۱۰) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار خیز و شیب در $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۱۰

حل)

$$\theta_{B/A}=\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)=\frac{-PL^2}{2EI}=\frac{PL^2}{2EI}$$

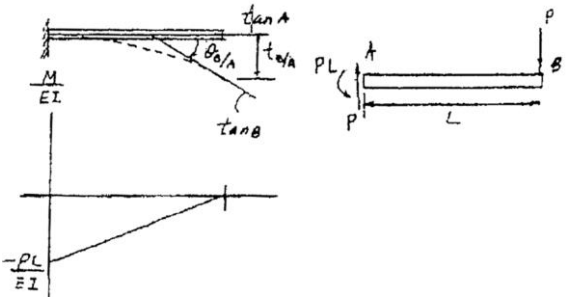
$$\theta_B=\theta_{B/A}+\theta_A \quad \Rightarrow \quad \theta_B=\frac{PL^2}{2EI}+0=\frac{-PL^2}{2EI}$$

$$\Delta_B=\left|t_{B/A}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right)=\frac{PL^3}{3EI}$$

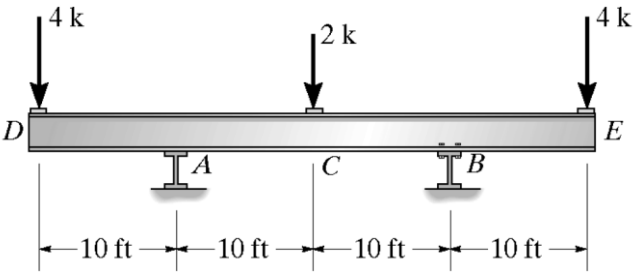
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۸-۱۱) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب در $B$ و حداکثر خیز تیر را تعیین نمایید. فرض نمایید که $A$ غلتکی و $B$ مفصلی است. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت، $E = 29\times10^3\, ksi$ و $I = 500\, in^4$ می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۱۱

حل)

$$\theta_B = \theta_{C/B} = \frac{1}{2}\left(\frac{-30}{EI}+\frac{-40}{EI}\right)\times10 = \frac{-350}{EI} = \frac{-350\times144}{29\times10^4\times500} = -0.00348 rad$$

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \quad \Rightarrow \quad t_{A/B} = 2\left(\frac{-40}{EI}+\frac{-30}{EI}\right)\times10\times\frac{1}{2}\times10 = -\frac{7000}{EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{-30}{EI}\right)\times10\times5+\left(\frac{-10}{EI}\right)\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{2}{3}\times10\right) = \frac{-1833.33}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{-1666.67}{EI}$$

$$\Delta' = \frac{3}{2}t_{A/B} \quad \Rightarrow \quad \Delta_D = \Delta' - t_{D/B}$$

$$t_{D/B} = 2\left(\frac{-40}{EI}+\frac{-30}{EI}\right)\times-10\times\frac{1}{2}\times20+\left(\frac{-40}{EI}\right)\times10\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times10\right) = \frac{-15333.33}{EI}$$

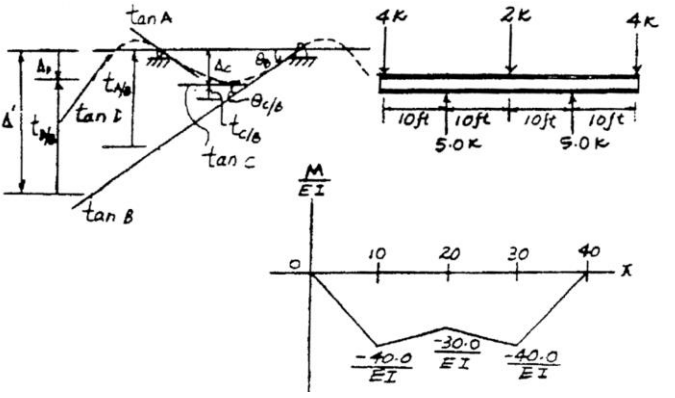
$$\Delta_D = \frac{3}{2}\left(\frac{-7000}{EI}\right)-\left(\frac{-15333.33}{EI}\right) = \frac{4833.33}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

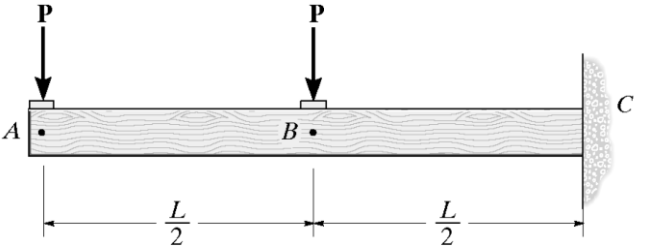
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_D = \Delta_{\max} = \frac{4833.33\times1728}{29\times10^3\times500} = -0.576in$$ به سمت پایین




۸–۱۲) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب و خیز در $A$ و $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸–۱۲

حل) شیب در $C$ برابر صفر است،

$$\theta_A = |\theta_{A/C}| = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)+\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5PL^2}{8EI}$$

$$\theta_B = |\theta_{B/C}| = \left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^2}{2EI}$$

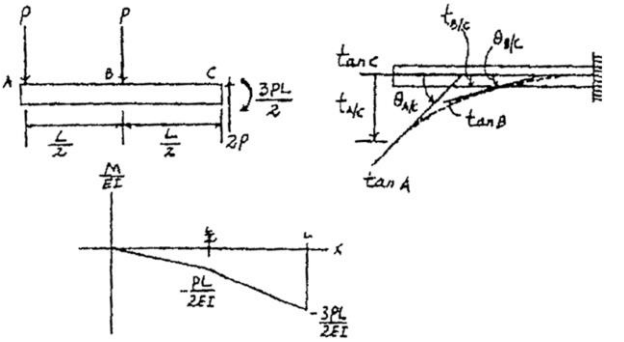
$$\Delta_A = |t_{A/C}| = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right)+\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{3}\right) = \frac{7PL^3}{16EI}\downarrow$$

$$\Delta_B = |t_{B/C}| = \left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{7PL^3}{48E}\downarrow$$

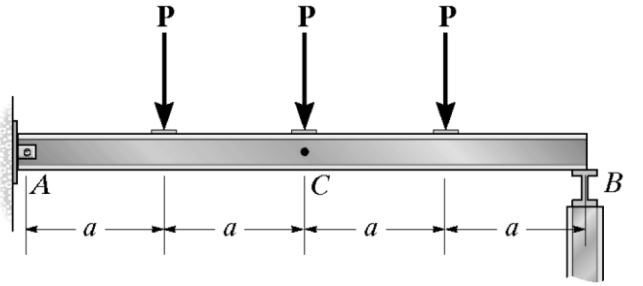
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۸-۱۳) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب در $A$ و خیز ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

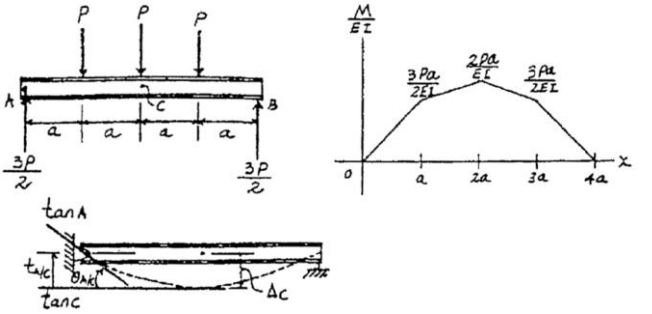



شکل مسئله ۸-۱۳

حل) به علت تقارن شیب در $C$ برابر صفر است. بنابراین:

$$\theta_A = \theta_{A/C} = \frac{1}{2}\left(\frac{3Pa}{2EI}\right)(a) + \left(\frac{3Pa}{2EI}\right)(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{2EI}\right)(a) = \frac{5Pa^2}{2EI}$$

$$\Delta_C = t_{A/C} = \frac{1}{2}\left(\frac{3Pa}{2EI}\right)(a)\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3Pa}{2EI}\right)\left(a + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{2EI}\right)(a)\left(a + \frac{2a}{3}\right) = \frac{19Pa^3}{6EI} \downarrow$$

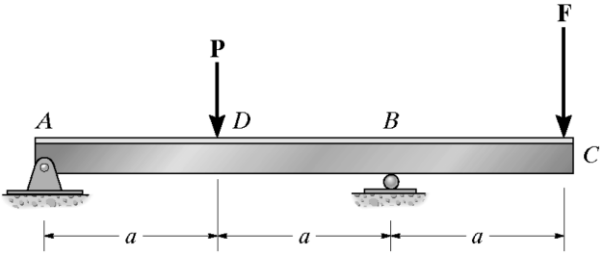



۸-۱٤) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار نیروی $F$ را طوری تعیین نمایید که مقدار خیز ایجاد شده در $C$ برابر صفر گردد. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۸-۱٤

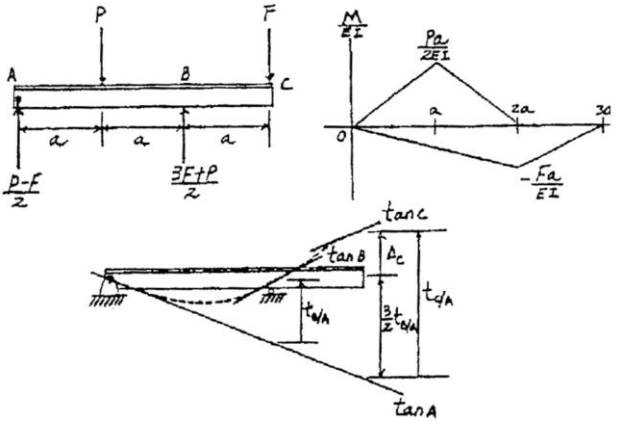
حل) با استفاده از تئوری لنگر سطح داریم:

$$t_{B/A}=\frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{2EI}\right)(2a)(a)+\frac{1}{2}\left(-\frac{Fa}{EI}\right)(2a)\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{a^3}{6EI}(3P-4F)$$

$$t_{C/A}=\frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{2EI}\right)(2a)(a+a)+\frac{1}{2}\left(-\frac{Fa}{EI}\right)(2a)\left(a+\frac{2}{3}a\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{Fa}{EI}\right)(a)\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{a^3}{EI}(P-2F)$$

بایستی $\Delta_C=0$، بنابراین:

$$\Delta_C=0=\left|t_{C/A}\right|-\left|\frac{3}{2}t_{B/A}\right|=\frac{a^3}{EI}(P-2F)-\frac{3}{2}\left[\frac{a^3}{6EI}(3P-4F)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad F=\frac{P}{4}$$




۸-۱۵) با توجه شکل مسئله ۸-۱٤، در صورتی که $F=P$ باشد، با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار خیز ایجاد شده در $D$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

حل) با استفاده از تئوری‌های لنگر سطح داریم:

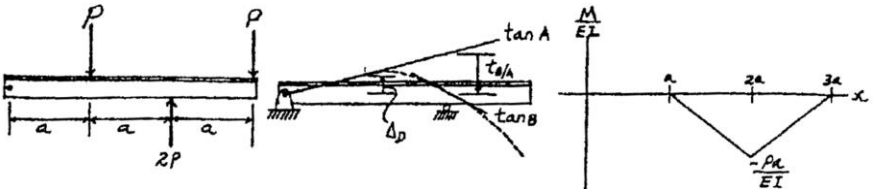
$$t_{D/A}=\frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{Pa^3}{6EI}=0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

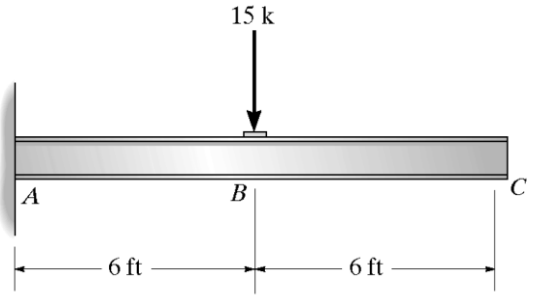
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$D$ جابجایی $\Delta_D = \frac{1}{2}|t_{B/A}| - |t_{D/A}| = \frac{1}{2}\left(\frac{Pa^3}{6EI}\right) - 0 = \left(\frac{Pa^3}{12EI}\right)\uparrow$




۸-۱۶) با استفاده از روش لنگر سطح مقدار شیب ایجاد شده در $B$ و حداکثر خیز ایجاد شده در تیر را تعیین نمایید. مقدار $E = 29(10^3)ksi$ و $I = 500\,in^4$ می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۱۶

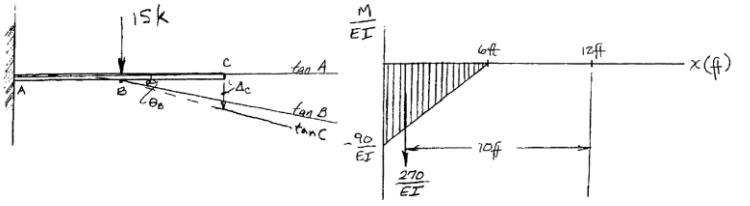
حل)

$$\theta_B = \frac{1}{2}\left(\frac{90}{EI}\right)(6) = \frac{270}{EI} = \frac{270\times12^2}{29\times10^3\times500} = 2.68\times10^{-3}\,rad$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2}\left(\frac{90}{EI}\right)(6)(10) = \frac{2700}{EI} = \frac{2700\times12^3}{29\times10^3\times500} = 0.322in$$

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{EI}\right)(a) + \frac{1}{2}\left[-\frac{3Pa}{EI} - \frac{2Pa}{EI}\right](a) = \frac{3Pa^2}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{-2Pa}{EI}\right)(a) + \frac{2}{3}(a)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\frac{-Pa}{EI}\right](a) = \frac{4Pa^3}{3EI}$$

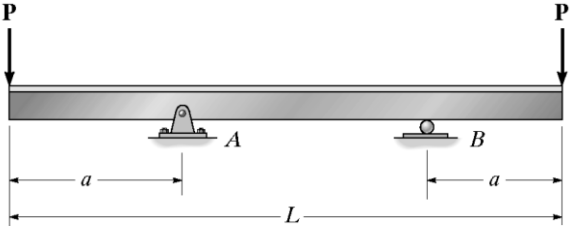



۸-۱۷) با استفاده از روش لنگر سطح مقدار طول $a$ را طوری تعیین کنید که مقدار خیز وسط تیر و انتهای آن برابر شود. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





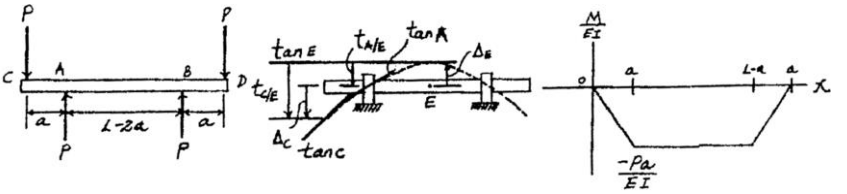

شکل مسئله ۸-۱۷

حل) به علت تقارن شیب در وسط دهانه (نقطه $E$) برابر صفر است.

$$\Delta_E = |t_{A/E}| = \left(-\frac{Pa}{EI}\right)\left(\frac{L-2a}{2}\right)\left(\frac{L-2a}{4}\right) = \frac{Pa}{8EI}(L-2a)^2$$

$$t_{C/E} = \left(-\frac{Pa}{EI}\right)\left(\frac{L-2a}{2}\right)\left(a+\frac{L-2a}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{Pa}{24EI}\left(3L^2-4a^2\right)$$

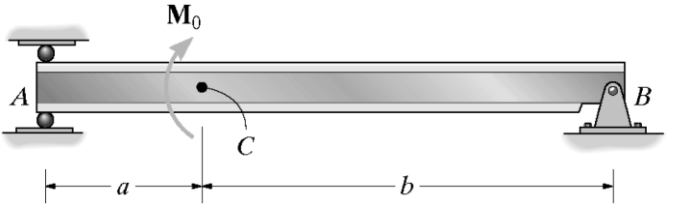
$$\Delta_C = |t_{C/E}| - |t_{A/E}| = \frac{Pa}{24EI}\left(3L^2-4a^2\right) - \frac{Pa}{8EI}(L-2a)^2 = \frac{Pa^2}{6EI}(3L-4a)$$




بایستی $\Delta_E = \Delta_C$ باشد، بنابراین:

$$\frac{Pa}{8EI}(L-2a)^2 = \frac{Pa^2}{6EI}(3L-4a) \quad \Rightarrow \quad 28a^2-24aL+3L^2=0 \quad \Rightarrow \quad a=0.152L$$

۸-۱۸) با استفاده از روش لنگر سطح مقدار خیز در $C$ و شیب ایجاد شده در $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۱۸

حل) برای تعیین شیب داریم:

$$t_{A/B} = \frac{1}{2}\left(\frac{-M_0 a}{EI(a+b)}\right)(a)\left(\frac{2}{3}a\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{M_0 b}{EI(a+b)}\right)(b)\left(a+\frac{b}{3}\right) = \frac{M_0\left(b^3+3ab^2-2a^3\right)}{6EI(a+b)}$$

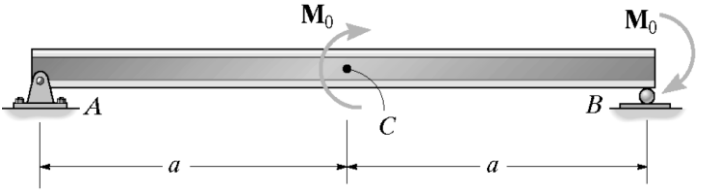
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\theta_B = \frac{t_{A/B}}{a+b} = \frac{M_0\left(b^3+3ab^2-2a^3\right)}{6EI(a+b)^2}$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0 b}{EI(a+b)}\right)(b)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{M_0 b^3}{6EI(a+b)} \quad \Rightarrow \quad \Delta_C = \left(\frac{b}{a+b}\right)t_{A/B} - t_{C/B}$$

$$\Delta_C = \frac{M_0 b\left(b^3+3ab^2-2a^3\right)}{6EI(a+b)^2} - \frac{M_0 b^3}{6EI(a+b)} = \frac{M_0 ab(b-a)}{3EI(a+b)}$$

۸-۱۹) در تیر شکل زیر در صورتی که تکیه‌گاه‌ها تنها قادر به ایجاد عکس‌العملی در جهت قائم باشند، با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ و خیز $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.



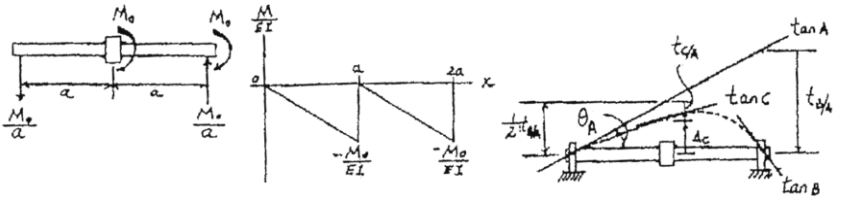

شکل مسئله ۸-۱۹

$$t_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(a)\left(a+\frac{a}{3}\right) = -\frac{5M_0 a^2}{6EI}$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{M_0 a^2}{6EI}$$

$A$ شیب در $\theta_A = \dfrac{|t_{B/A}|}{L} = \dfrac{-\dfrac{5M_0 a^2}{6EI}}{2a} = \dfrac{5M_0 a}{12EI}$

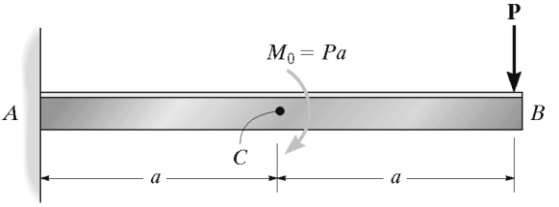
$C$ مقدار خیز در $\Delta_C = \left|\dfrac{1}{2}t_{B/A}\right| - |t_{C/A}| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5M_0 a^2}{6EI}\right) - \dfrac{M_0 a^2}{6EI} = \dfrac{M_0 a^2}{4EI} \uparrow$




۸-۲۰) در تیر شکل زیر با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $B$ و خیز $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



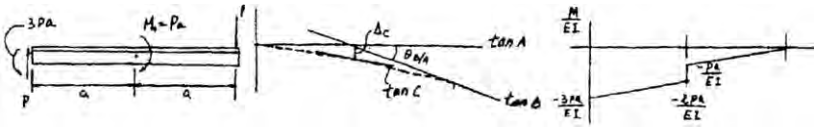



شکل مسئله ۸-۲۰

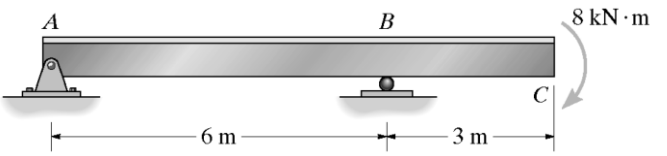
حل) با استفاده از روش لنگر سطح داریم:

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{EI}\right)(a) + \frac{1}{2}\left[-\frac{3Pa}{EI} - \frac{2Pa}{EI}\right](a) = \frac{3Pa^2}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{-2Pa}{EI}\right)(a) + \frac{2}{3}(a)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\frac{-Pa}{EI}\right](a) = \frac{4Pa^3}{3EI}$$



۸-۲۱) در تیر شکل زیر با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $A$، $B$ و $C$ و خیز در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۲۱

حل) با استفاده از روش لنگر سطح داریم:

$$t_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{EI}\right)\times 6\times 2 = \frac{-48}{EI}$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{EI}\right)\times 6\times (3+2) + \left(\frac{-8}{EI}\right)\times 3\times 1.5 = \frac{-156}{EI}$$

$$\Delta_C = |t_{C/A}| - \frac{9}{6}|t_{B/A}| = \frac{156}{EI} - \frac{9\times 48}{6EI} = \frac{84}{EI}\downarrow$$

$$\theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{6} = \frac{8}{EI}$$

$$\theta_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{EI}\right)\times 6 = \frac{-24}{EI} = \frac{24}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

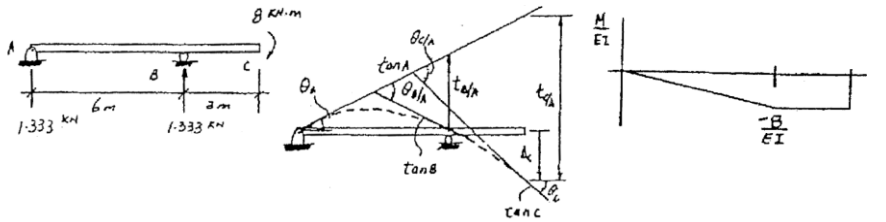
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



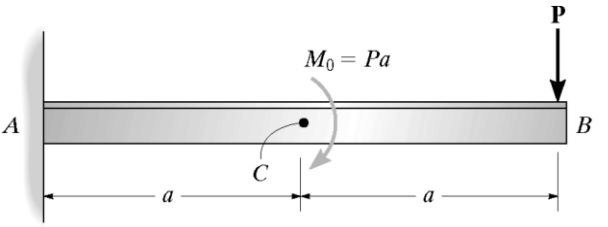
$$\theta_B = \theta_{B/A} + \theta_A \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{24}{EI} - \frac{8}{EI} = \frac{16}{EI}$$

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{EI}\right)\times 6 + \left(\frac{-8}{EI}\right)\times 3 = \frac{-48}{EI} = \frac{48}{EI}$$

$$\theta_C = \theta_{C/A} + \theta_A = \frac{48}{EI} - \frac{8}{EI} = \frac{40}{EI}$$




۸-۲۲) در تیر شکل زیر با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $C$ و خیز $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۲۲

حل) با استفاده از روش لنگر سطح داریم:

$$\theta_{C/A} = \left(-\frac{2Pa}{EI}\right)a + \frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{EI}\right)a = \left(-\frac{5Pa^2}{2EI}\right) = \left(\frac{5Pa^2}{2EI}\right)$$

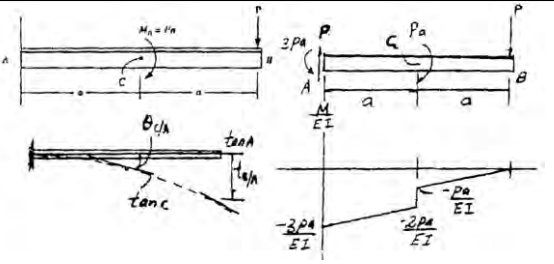
$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{5Pa^2}{2EI}$$

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(\frac{2a}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(a + \frac{2a}{3}\right)$$
$$+\left(-\frac{2Pa}{EI}\right)(a)\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{25Pa^3}{6EI} \downarrow$$

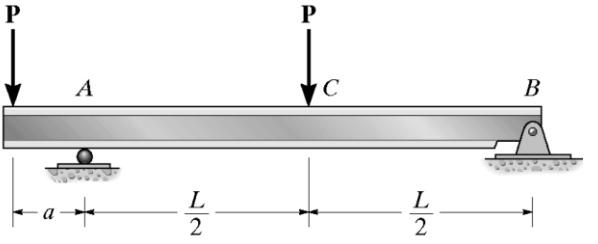
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





۸-۲۳) با استفاده از روش لنگر سطح، طول $a$ را طوری تعیین نمایید که مقدار شیب ایجاد شده در $A$ برابر صفر گردد. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۲۳

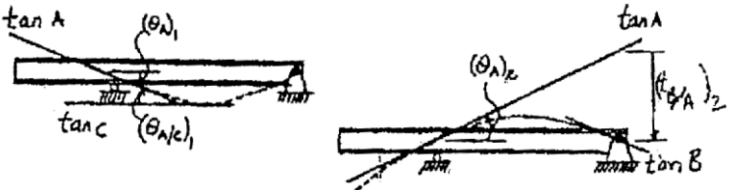
حل) با استفاده از قضیه لنگر سطح داریم:

$$(\theta_A)_1 = (\theta_{A/C})_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$(t_{B/A})_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)(L)\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{PaL^2}{3EI}$$

$$(\theta_A)_2 = \frac{|(t_{B/A})_2|}{L} = \frac{\frac{PaL^2}{3EI}}{L} = \frac{PaL}{3EI}$$

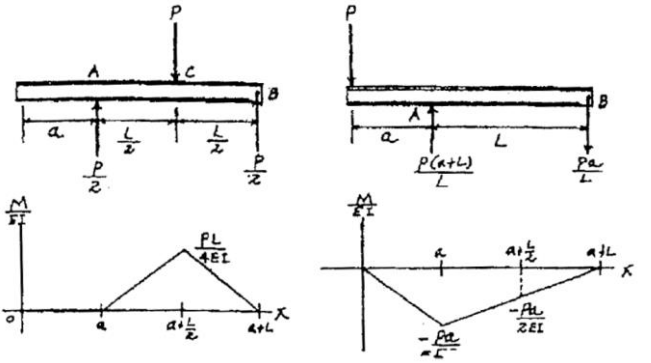
$$\theta_A = 0 = (\theta_A)_1 - (\theta_A)_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{PaL}{3EI} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{16}L$$



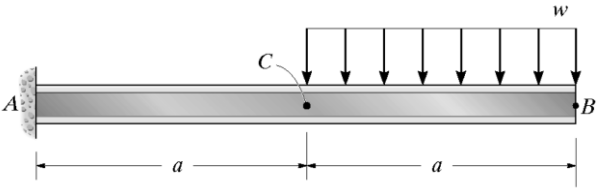

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





۸-۲٤) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $C$ و خیز $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

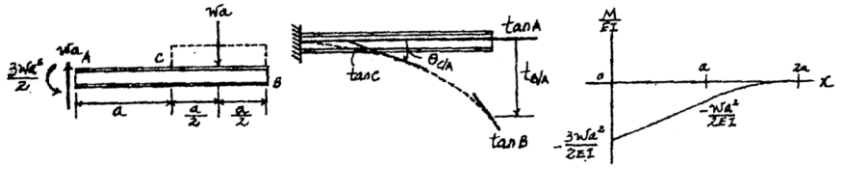


شکل مسئله ۸-۲٤

حل) مقدار شیب در $A$ برابر صفر می‌باشد. بنابراین:

$$\theta_C = |\theta_{C/A}| = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{EI}\right)(a)+\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = \frac{wa^2}{EI}$$

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{EI}\right)(a)\left(a+\frac{2}{3}a\right)+\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)(a)\left(a+\frac{a}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)(a)\left(\frac{3}{4}a\right) = \frac{41wa^4}{24EI}\downarrow$$

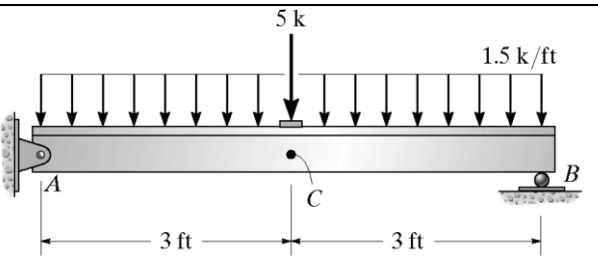


۸-۲۵) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $B$ و خیز $C$ را تعیین نمایید. مقدار $I=76.8in^4$ بوده و فولاد از نوع $A36$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





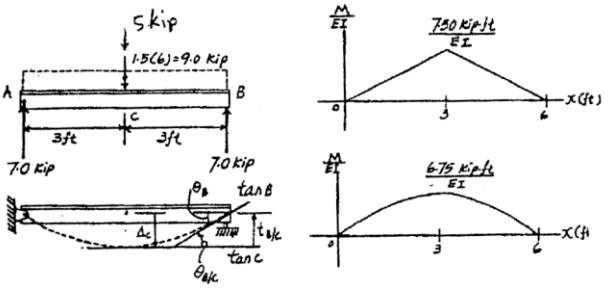

شکل مسئله ۸-۲۵

حل) به علت تقارن تیر، مقدار شیب در $C=0$ است. بنابراین:

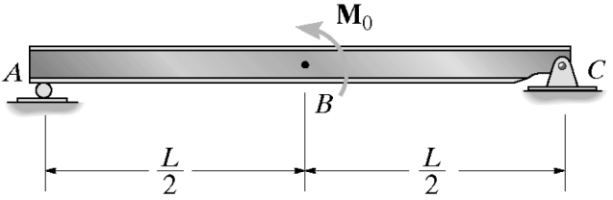
$$\theta_B = |\theta_{B/C}| = \frac{1}{2}\left(\frac{7.5}{EI}\right)(3)+\frac{2}{3}\left(\frac{6.75}{EI}\right)(3)=\frac{24.75}{EI}=\frac{24.75\times144}{29\times10^3\times76.8}=0.0016rad$$

$$\Delta_C = |t_{A/C}| = \frac{1}{2}\times\frac{7.5}{EI}\times3\times\frac{2}{3}\times3+\frac{2}{3}\times\frac{6.75}{EI}\times3\times\frac{5}{8}\times3$$

$$=\frac{47.8125}{EI}=\frac{47.812529\times1728}{29\times10^3\times76.8}=0.0371in\downarrow$$




۲۶-۶) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ و خیز $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۲۶

حل)

$$\Delta_C+\frac{t_{C/A}}{2}=t_{B/A}$$

$$\Delta_B=t_{B/A}-\frac{t_{C/A}}{2}$$

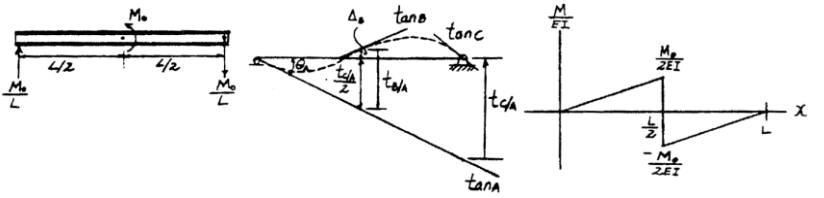
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

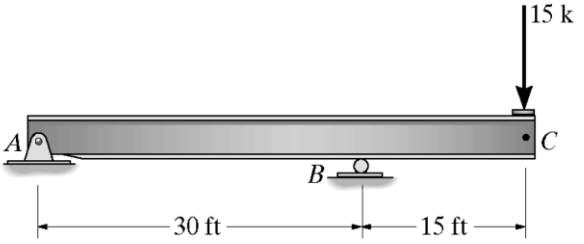


$$\Delta_B = \frac{1}{2}\times\frac{M_0}{2EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{6} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\times\frac{M_0}{2EI}\times\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{6}\right)\right] - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{M_0}{2EI}\right)\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{3} = 0$$

$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{M_0}{2EI}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{6}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{L}{2}\times\left(-\frac{M_0}{2EI}\right)\times\frac{L}{3}}{L} = \frac{M_0 L}{24EI}$$




۸–۲۷) با استفاده از روش لنگر سطح، مقدار تغییرمکان ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $E=29(10^3)ksi$ و $I=1200in^4$ در نظر بگیرید.



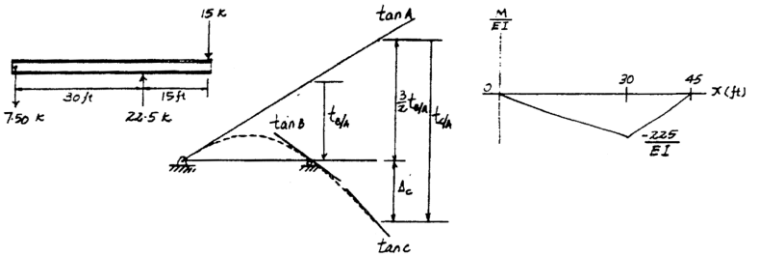

شکل مسئله ۸–۲۷

حل)

$$t_{B/A} = \frac{-1}{2}\left(\frac{225}{EI}\right)\times 30\left[\frac{1}{3}\times 30\right] = \frac{-33750}{EI}$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-225}{EI}\right)\times 30\left[\frac{1}{3}\times 30+15\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{-225}{EI}\right)\times 15\times\frac{2}{3} = \frac{-101250}{EI}$$

$$\Delta_C = t_{C/A} - \frac{3}{2}\left(t_{B/A}\right) = \frac{101250}{EI} + \frac{3}{2}\left(\frac{33750}{EI}\right) - \frac{50625}{EI} = \frac{50625\times 1728}{29\times 10^3\times 1200} = 2.51in$$

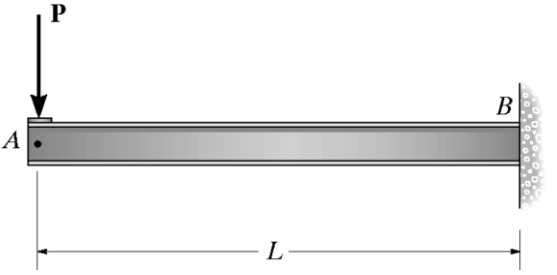



۸–۲۸) با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب و خیز ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





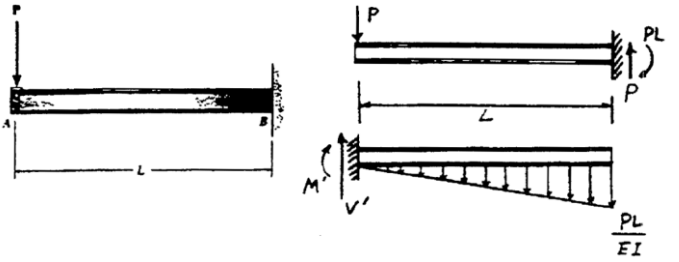

شکل مسئله ۸-۲۸

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

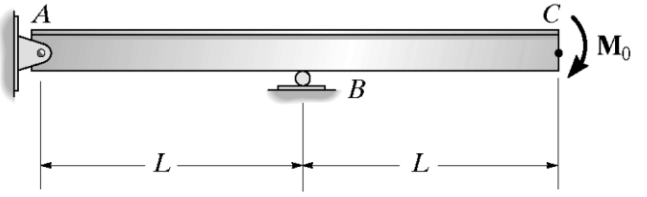
$$| \uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V' - \frac{1}{2} \times \frac{PL}{EI} \times L = 0$$

$$| \theta_A = V' = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M' + \frac{PL^2}{2EI} \times \left( \frac{2L}{3} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_A = M' = -\frac{PL^3}{3EI}$$




۸-۲۹) با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار خیز ایجاد شده در $C$ و شیب در $A$، $B$ و $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۲۹

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، برای قطعه $AB$ داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B'_y = L - \frac{1}{2} \times \frac{M_0}{EI} \times L \times \frac{2}{3} L = 0 \quad \Rightarrow \quad B'_y = \frac{M_0 L}{3EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

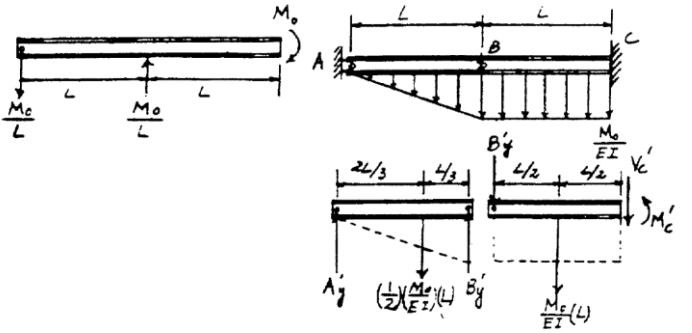
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



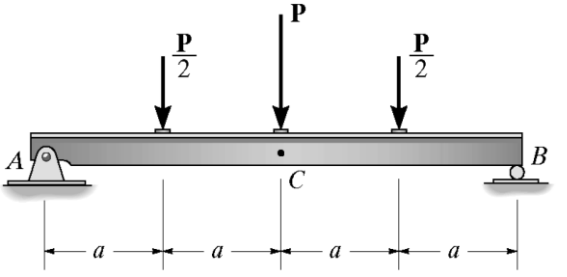
برای قطعه $BC$ داریم:

$$\uparrow +\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C'_y - \frac{M_0 L}{EI} - \frac{M_0 L}{3EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_C = C'_y = -\frac{4M_0 L}{3EI}$$

$$\sum M_{C'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_0 L}{EI} \times \frac{L}{2} + \frac{M_0 L}{3EI} \times L + M'_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_C = M'_C = -\frac{5M_0 L^2}{6EI}$$




۸-۳۰) با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار خیز ایجاد شده در $C$ و شیب در $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۳۰

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

$$\theta_B = V'_B = \frac{7Pa^2}{4EI}$$

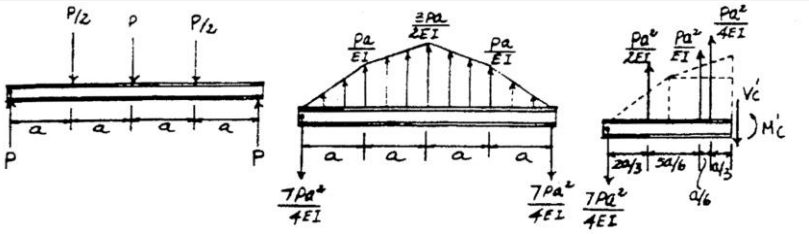
$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{Pa^2}{4EI}\left(\frac{a}{3}\right) - \frac{Pa^2}{EI}\left(\frac{a}{3}\right) - \frac{Pa^2}{2EI}\left(\frac{4a}{3}\right) + \frac{7Pa^2}{4EI}(2a) + M_{C'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = M_{C'} = -\frac{9Pa^3}{4EI}$$

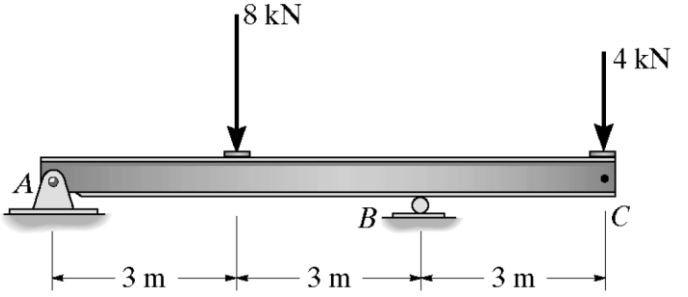
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۸-۳۱) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب و جابجایی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $E = 200GPa$ و $I = 70\times10^{6}\,mm^{4}$ می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۳۱

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

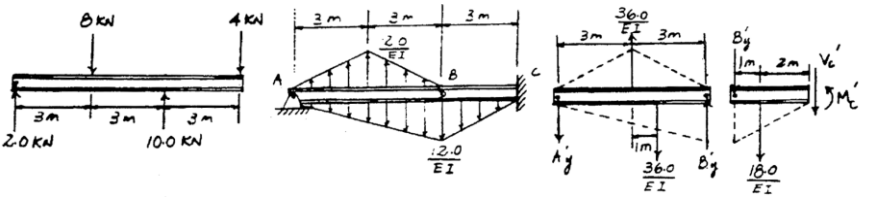
$$| \sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{EI}\times 1 - B'_y \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad B'_y = \frac{6.0}{EI}$$

$$| \uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{6}{EI} + \frac{18}{EI} - V'_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V'_C = -\frac{24}{EI}$$

$$| \theta_C = V'_C = \frac{24\times10^{3}}{200\times10^{9}\times70\times10^{-6}} = -0.00171 rad$$

$$| \sum M_{C'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{C'} + \frac{18\times2}{EI} + \frac{6.0}{EI}\times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{C'} = -\frac{54}{EI}$$

$$\Delta_C = M_{C'} = \frac{54\times10^{3}}{200\times10^{9}\times70\times10^{-6}} = -0.003857m = -3.86mm$$

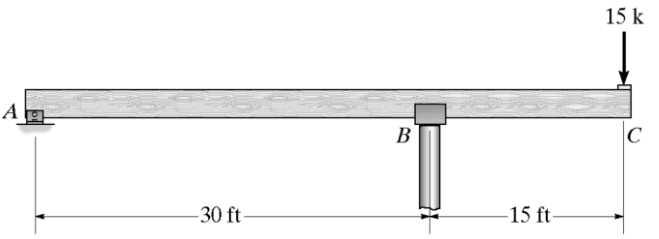



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۸-۳۲) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب و جابجایی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که $A$ مفصلی و $B$ غلتکی است. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.



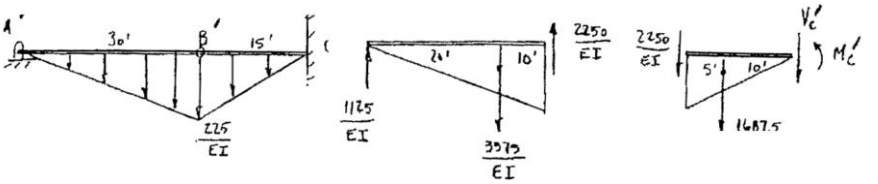

شکل مسئله ۸-۳۲

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

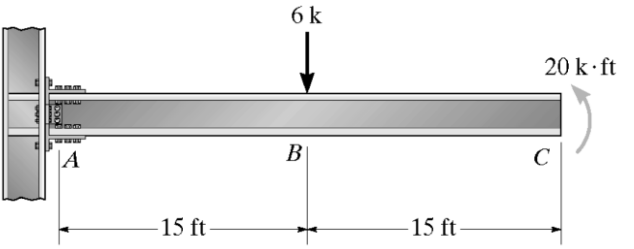
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2250}{EI} - \frac{1687.5}{EI} - V_C' = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C' = \theta_C = -\frac{3938}{EI}$$

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2250}{EI} \times 15 + \frac{1687.5}{EI} \times 10 + M_{C'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = M_{C'} = \frac{-50625}{EI} = \frac{50625}{EI} \downarrow$$




۸-۳۳) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب و جابجایی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $E = 29 \times 10^3\, ksi$ و $I = 800\, in^4$ می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۳۳

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

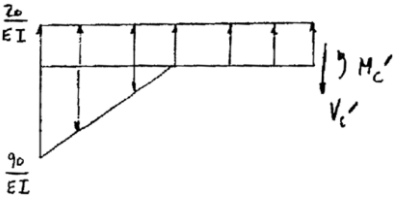
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



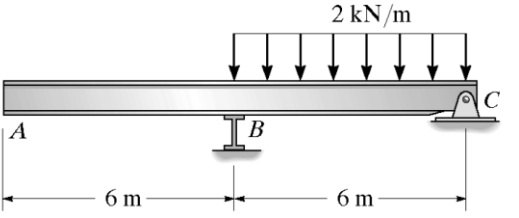
$$\theta_C = V'_C = \frac{20}{EI}\times 30 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{-90}{EI}\right)\times 15 = \frac{-75}{EI} = \frac{-75\times 144}{29\times 10^3\times 800} = -0.000466rad$$

$$\Delta_C = M_{C'} = \frac{20}{EI}\times 30\times 15 + \frac{1}{2}\times\frac{-90}{EI}\times 15\times 25$$

$$= \frac{-7875}{EI} = \frac{-7875\times 12^3}{29\times 10^3\times 800} = -0.587in = -0.587in\downarrow$$




۸-۳٤) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار جابجایی ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید. مقدار $E = 200GPa$ و $I = 80\times 10^6 mm^4$ می‌باشد.

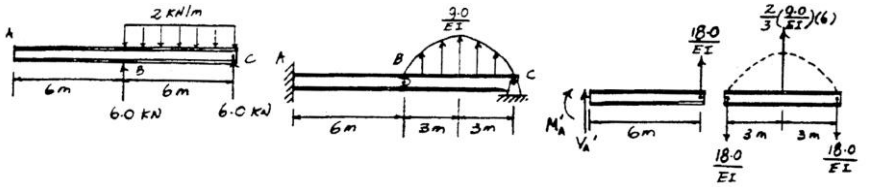



شکل مسئله ۸-۳٤

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{A'} + \frac{18}{EI}\times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_A = M_{A'} = \frac{108}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{108\times 10^3}{200\times 10^9\times 80\times 10^{-6}} = 0.00675m = 6.75mm$$

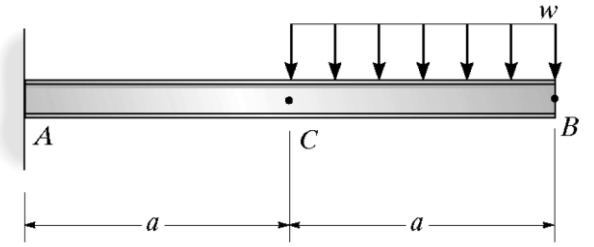



۸-۳۵) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب ایجاد شده در $C$ و خیز نقطه $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۸-۳۵

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

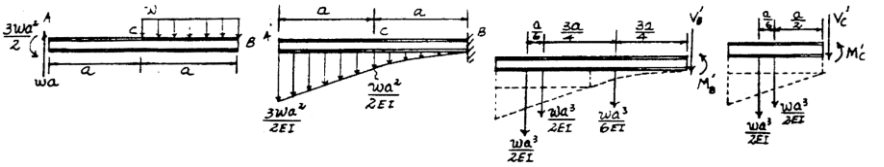
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V'_C - \frac{1}{2}\frac{wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{2EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad V'_C = -\frac{wa^3}{EI}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_B + \frac{wa^3}{6EI} \times \frac{3}{4}a + \frac{wa^3}{2EI} \times \frac{3}{2}a + \frac{wa^3}{2EI} \times \frac{5}{2}a = 0$$

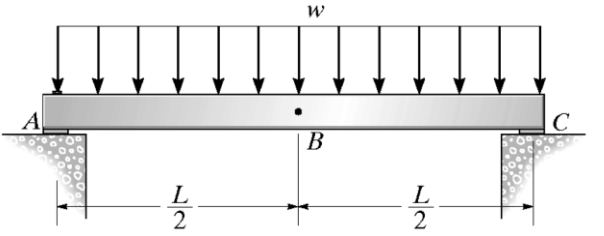
$$\Rightarrow \quad M'_B = \frac{-41wa^4}{24EI}$$

$$\theta_C = V'_C = -\frac{wa^3}{EI}$$

$$\Delta_B = M'_B = \frac{-41a^4}{24EI}$$



۸-۳۶) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ و خیز ایجاد شده در $B$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $C$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۸-۳۶

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

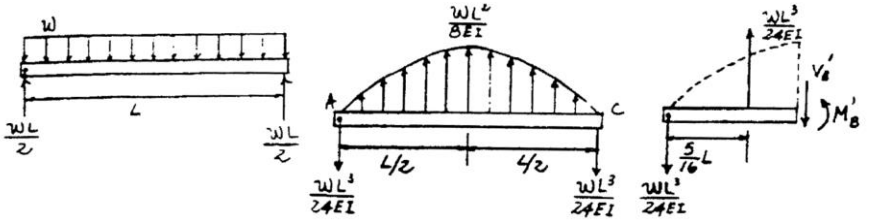
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

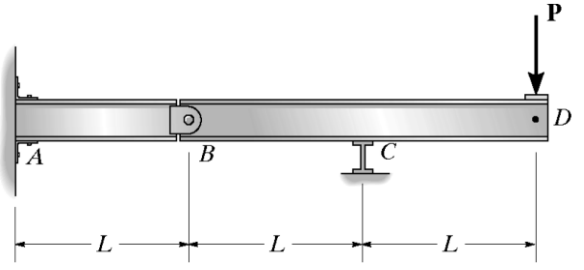


$$\theta_A = V'_A = -\frac{wL^3}{24EI}$$

$$\sum M_{B'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_B - \frac{wL^3}{24EI} \times \frac{5L}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_B = M'_B = -\frac{5wL^4}{384EI}$$




۸-۳۷) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب ایجاد شده در $C$ و خیز ایجاد شده در $D$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. تکیه‌گاه $A$ گیردار و $C$ غلتکی می‌باشد.



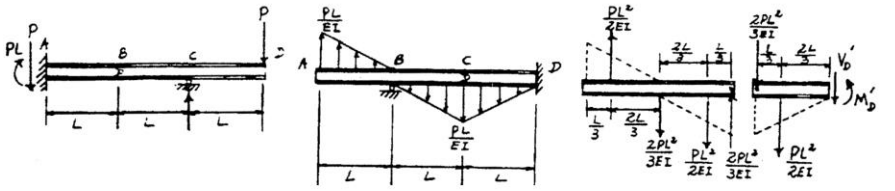

شکل مسئله ۸-۳۷

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

$$\theta_C = V'_C = -\frac{2PL^2}{3EI}$$

$$\sum M_{D'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_D + \frac{2PL^2}{3EI} \times L + \frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

$$\Delta_D = M'_D = -\frac{PL^3}{EI}$$

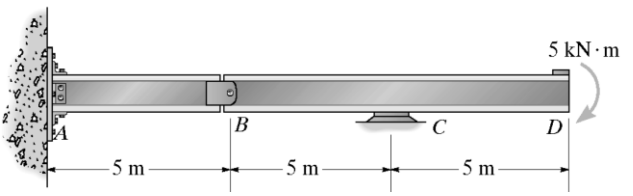



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۸–۳۸) در تیر شکل زیر با استفاده از روش تیر مزدوج، مقدار شیب ایجاد شده در سمت چپ و راست مفصل داخلی $B$ و همچنین مقدار خیز ایجاد شده در $D$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد. تکیه‌گاه $A$ گیردار و $C$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ۸–۳۸

حل) با ترسیم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر و تبدیل تیر، داریم:

$$| \sum M_{C'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12.5}{EI}\left(5+\frac{10}{3}\right) - \frac{12.5}{EI}\times\frac{5}{3} - 5\times B'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B'_y = \frac{50}{3EI}$$

$$| \uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12.5}{EI} - \frac{50}{3EI} - \frac{12.5}{EI} + C'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C'_y = \frac{50}{3EI}$$

$$| \sum M_{D'} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{D'} - \frac{25}{EI}\times 2.5 - \frac{50}{3EI}\times 5 = 0$$

$$| \quad \Rightarrow \quad \Delta_D = M_{D'} = \frac{437.5}{3EI} = \frac{146}{EI} \downarrow$$

$$| \uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12.5}{EI} - V_{BL'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{BL} = V_{BL'} = \frac{12.5}{EI}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12.5}{EI} - \frac{50}{3EI} - V_{BR'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{BR} = V_{BR'} = \frac{4.17}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل نهم
# روش‌های انرژی برای تحلیل سازه‌های معین ایستایی

## ۹-۱ کلیات

بیشتر مسائل سازه‌ای که تا اینجا ما با آنها رو در رو شده‌ایم شامل سازه‌هایی بودند که عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و سیستم نیروهای داخلی آنها از نظر استاتیکی معین بود. لیکن سازه‌هایی مانند تیرها، خرپاها، کابل‌ها و طاق‌های سه مفصلی و در مورد تیرها، ما تغییر مکان‌ها را محاسبه نمودیم. با این وجود، برای سازه‌های پیچیده‌تر روش‌های بهتر تحلیل نیاز است. این روش‌ها همچنین قادر خواهند بود تا راه حل‌های سریع را برای برخی مسایل معین استاتیکی، به ویژه آنهایی که شامل محاسبه جابجایی‌ها می‌شوند فراهم کنند. این روش‌ها به دو دسته تقسیم خواهند شد و بر مبنای دو مفهوم مهم بنا شده اند، اولی اصل کار مجازی است. اصل کار مجازی اساسی‌ترین و قوی ترین ابزار موجود برای تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی است و این مزیت را دارد که قابلیت رویارویی با شرایطی بیش از شرایط موجود در حدود الاستیک را دارد. مفهوم دوم، بر اساس انرژی کرنشی بنا شده است و این قابلیت را دارد که می‌تواند برای مسایل پیچیده که ممکن است جواب‌های دقیق برای آنها وجود نداشته باشد جواب‌هایی تقریبی تامین کند. در حقیقت دو روش در بعضی موارد هم ارز هستند، هر چند معادلات حاکم بر دو روش متفاوت هستند، اما در بعضی موارد معادله‌ها با هم یکسان هستند. در تحلیل سازه‌های مدرن به صورت فراوان از تکنیک‌های بر مبنای کامپیوتر استفاده می‌شود. این روش‌ها شامل روش های سختی و نرمی[1] هستند. از آنجا که فرمولاسیون ماتریس‌های سختی المان‌های یک سازه پیچیده بر اساس یکی از راهکارهای بالاست داشتن دانش و فهم کاربرد آنها دارای مزیت خواهد

## ۹-۳ مسائل:

[1] Flexibility

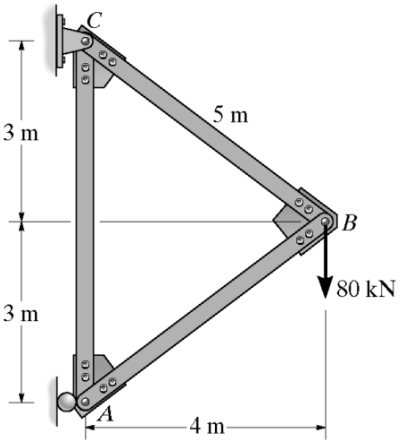
[2] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۱) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $300mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۱

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $B$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. در صورتی که در جدول زیر $n$، نیروی محوری ناشی از بار واحد، $N$، نیروی محوری ناشی از نیروی خارجی و $L$ طول هر یک از اعضا باشد، داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | -0.8333 | -66.67 | 5 | 277.78 |
| $\mathcal{BC}$ | 0.8333 | 66.67 | 5 | 277.78 |
| $\mathcal{AC}$ | 0.5 | 40 | 6 | 120.00 |
| | | | | $\Sigma = 675.56$ |

$$1\times\Delta_{B_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{675.56\times10^3}{300\times10^{-6}\times200\times10^9}=0.01126m=11.3mm$$

۹-۲) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=80kN)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | -0.8333P | -0.8333 | -66.67 | 5 | 277.78 |
| $\mathcal{BC}$ | 0.5P | 0.5 | 40 | 6 | 120.00 |
| $\mathcal{AC}$ | 0.8333P | 0.8333 | 66.67 | 5 | 277.78 |
| | | | | | $\Sigma = 675.56$ |

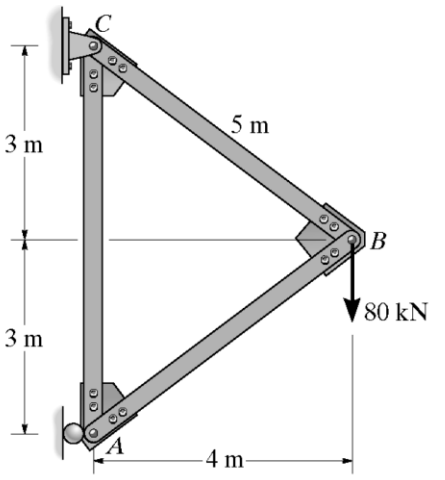
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_{B_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{675.56}{AE} = \frac{675.56\times10^{3}}{300\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.0113m = 11.3mm$$

۹-۳) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $300mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۳

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت افقی و به سمت راست در $B$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. در صورتی که در جدول زیر $n$، نیروی محوری ناشی از بار واحد، $N$، نیروی محوری ناشی از نیروی خارجی و $L$ طول هر یک از اعضا باشد، داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0.625 | -66.67 | 5 | -208.33 |
| $\mathcal{BC}$ | 0.625 | 66.67 | 5 | 208.33 |
| $\mathcal{AC}$ | -0.375 | 40 | 6 | -90.00 |
| | | | | $\Sigma = -90.0$ |

$$1\times\Delta_{B_h} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{-90\times10^{3}}{300\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = -1.5\times10^{-3}\,m = -1.5mm = 1.5mm \leftarrow$$

۹-٤) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=0)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|

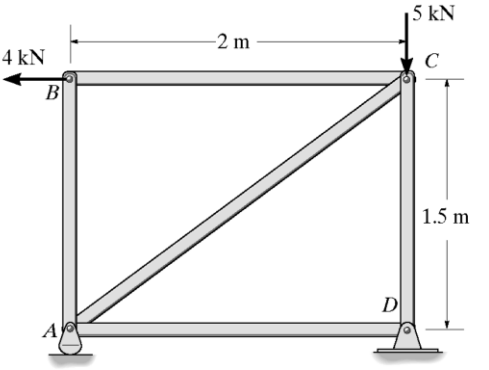
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | -(66.67-0.625P) | 0.625 | -66.67 | 5 | -208.33 |
| $\mathcal{BC}$ | 40-0.375P | -0.375 | 40 | 6 | -90.00 |
| $\mathcal{AC}$ | 66.67+0.625P | 0.625 | 66.67 | 5 | 208.33 |
| | | | | | $\Sigma = -90$ |

$$\Delta_{B_h} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{-90}{AE} = \frac{-90\times10^{3}}{300\times10^{-6}\times200\times10^{9}}$$

$$= -1.5\times10^{-3}\,m = -1.5mm = 1.5mm \leftarrow$$

۹-۵) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $400mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۵

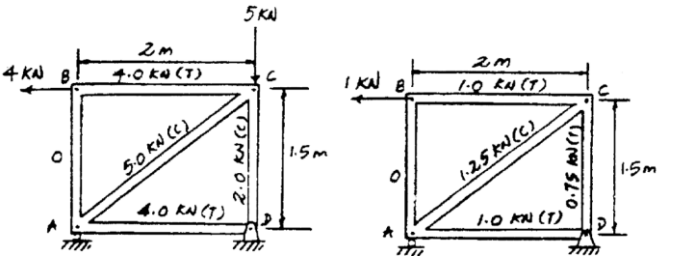
حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت افقی و به سمت راست در $B$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. در صورتی که در جدول زیر $n$، نیروی محوری ناشی از بار واحد، $N$، نیروی محوری ناشی از نیروی خارجی و $L$ طول هر یک از اعضا باشد، داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $\mathcal{AC}$ | -1.25 | -5.00 | 2.5 | 15.625 |
| $\mathcal{AD}$ | 1 | 4 | 2 | 8.00 |
| $\mathcal{BC}$ | 1 | 4 | 2 | 8.00 |
| $\mathcal{CD}$ | 0.75 | -2.00 | 1.5 | -2.25 |
| | | | | $\Sigma = 29.375$ |

$$1\times\Delta_{B_h} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{29.375\times10^{3}}{400\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.3672\times10^{-3}\,m = 0.367mm$$

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



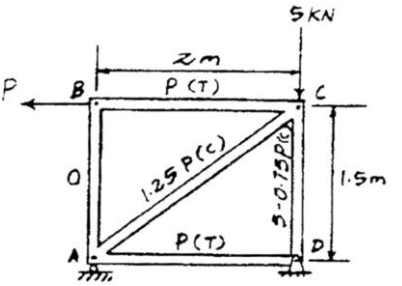



۹-۶) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=4)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 0 | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $AC$ | -1.25P | -1.25 | -5 | 2.5 | 15.625 |
| $AD$ | P | 1 | 4 | 2 | 8.00 |
| $BC$ | P | 1 | 4 | 2 | 8.00 |
| $CD$ | -(5-0.75P) | 0.75 | -2 | 1.5 | -2.25 |
| | | | | | $\Sigma = 29.375$ |

$$\Delta_{B_h} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{29.375\times10^{3}}{400\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.367\times10^{-3}\,m = 0.367mm$$

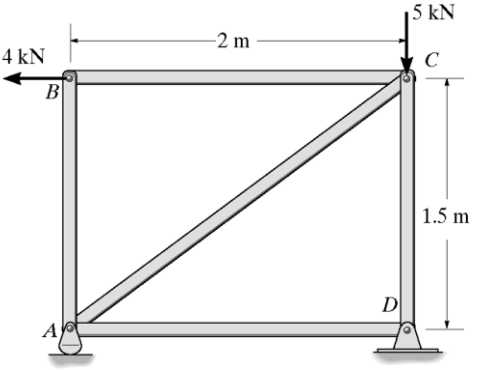



۹-۷) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $C$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $400mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



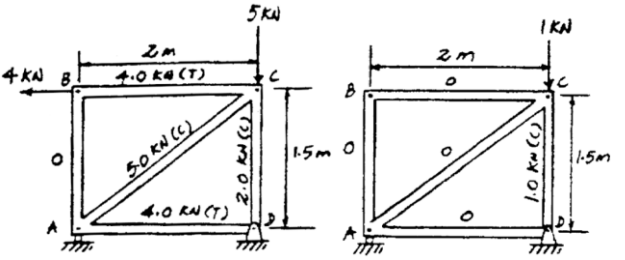



شکل مسئله ۹-۷

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $C$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. در صورتی که در جدول زیر $n$، نیروی محوری ناشی از بار واحد، $N$، نیروی محوری ناشی از نیروی خارجی و $L$ طول هر یک از اعضا باشد، داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $AC$ | 0 | -5.00 | 2.5 | 0 |
| $AD$ | 0 | 4 | 2 | 0 |
| $BC$ | 0 | 4 | 2 | 0 |
| $CD$ | -1.00 | -2.00 | 1.5 | 3 |
| | | | | $\Sigma = 3$ |

$$1\times\Delta_{C_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{3\times10^3}{400\times10^{-6}\times200\times10^9} = 37.5\times10^{-6}\,m = 0.0375mm$$




۹-۸) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=5)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 0 | 0 | 0 | 1.5 | 0 |

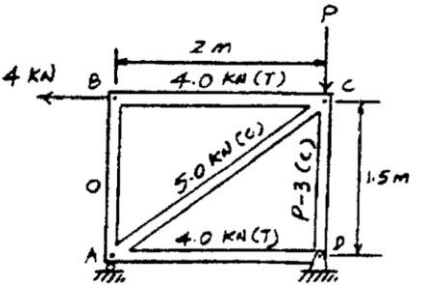
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

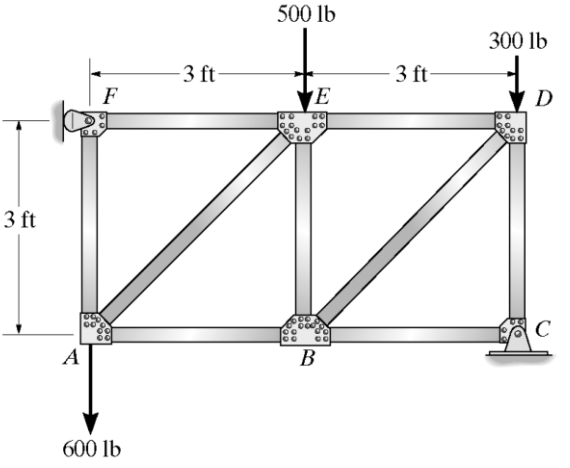


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AC}$ | -5 | 0 | -5 | 2.5 | 0 |
| $\mathcal{AD}$ | 4 | 0 | 4 | 2.5 | 0 |
| $\mathcal{BC}$ | 4 | 0 | 4 | 2.5 | 0 |
| $\mathcal{CD}$ | -(P-3) | -1 | -2 | 1.5 | 3 |
| | | | | | $\Sigma = 3$ |

$$\Delta_{B_h} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{3\times10^3}{400\times10^{-6}\times200\times10^9} = 37.5\times10^{-6}\,m = 0.0375mm$$




۹-۹) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $F$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. تمام اعضا به صورت مفصلی در نظر گرفته شوند. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $A=0.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۹-۹*

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $F$، نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. با توجه به شکل داریم:

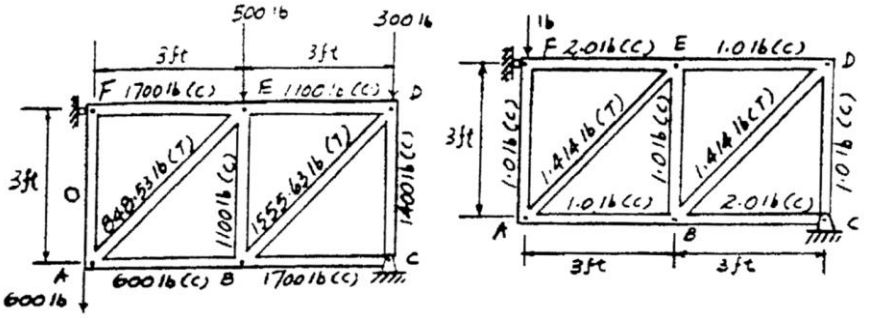
$$1\times\Delta_{F_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{1}{AE}\left[(-1)\times(-600)\times3 + 1.414\times848.5\times4.243\right.$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



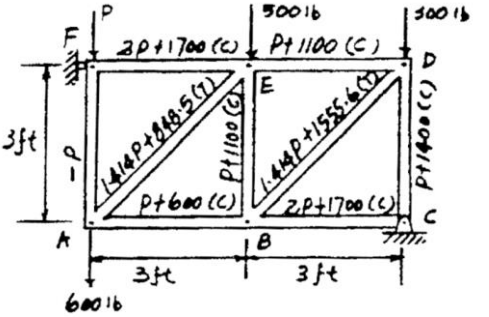
$$+(-1)\times 0\times 3+(-1)\times(-1100)\times 3+1.414\times 1555.6\times 4.243+(-2)\times(-1700)\times 3$$
$$+(-1)\times(-1400)\times 3+(-1)\times(-1100)\times 3+(-2)\times(-1700)\times 3]\times 12$$
$$=\frac{47425\times 12}{0.5\times 29\times 10^{6}}=0.0392in$$




۹–۱۰) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم و قرار دادن $P=0$ داریم:

$$\Delta_{F_v}=\Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{1}{AE}[(-(P+600)(-1)(3))+(1.414P+848.5)(1.414\times 4.243)$$
$$+(-P)(-1)\times 3+(-(P+1100))(-1)\times 3$$
$$+(1.414P+1555.6)(1.414)\times 4.243+(-(2P+1700))(-2)\times 3$$
$$+(-(P+1400)(-1)\times 3)+(-(P+1100))(-1)\times 3+(-(2P+1700))(-2)(3)](12)$$
$$=\frac{(55.97P+47.425)\times 12}{0.5\times 29\times 10^{6}}=0.0392in$$

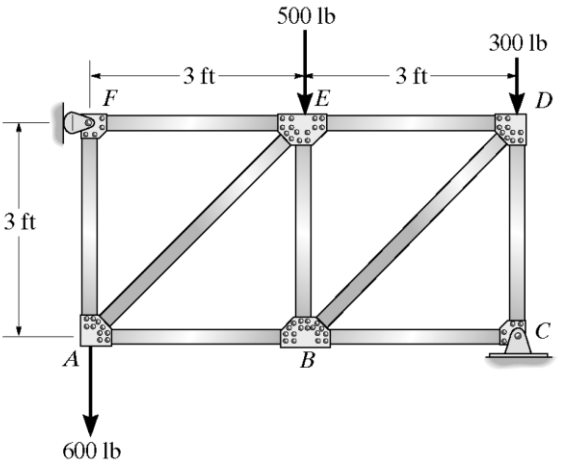



۹–۱۱) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. اتصال تمام اعضا به صورت مفصلی در نظر گرفته شوند. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $A=0.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



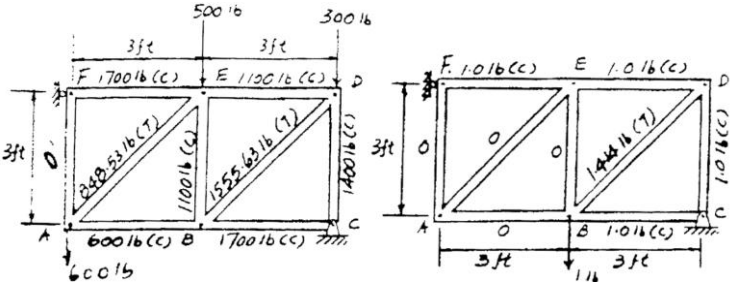



شکل مسئله ۹-۱۱

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $B$، نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. با توجه به شکل داریم:

$$1\times\Delta_{B_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{AE}\left[1.414\times1555.6\times4.243+(-1)\times(-1700)\times3+(-1)\times(-1400)\times3\right.$$

$$\left.+(-1)\times(-1100)\times3+(-1)\times(-1700)\times3\right]\times(12)=\frac{27034\times12}{0.5\times29\times10^{6}}=0.0224in$$




۹-۱۲) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta_{B_v}=\Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{1}{AE}\left[(-600)\times0\times3+848.5\times0\times4.243\right.$$

$$+(-1100)\times0\times3+(1.414P+1555.6)(1.414)(4.243)$$

$$\left.+(-(P+1700))(-1)(3)+(-(P+1400)(-1)(3))\right.$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

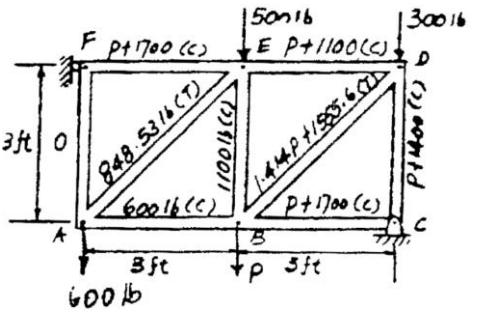
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



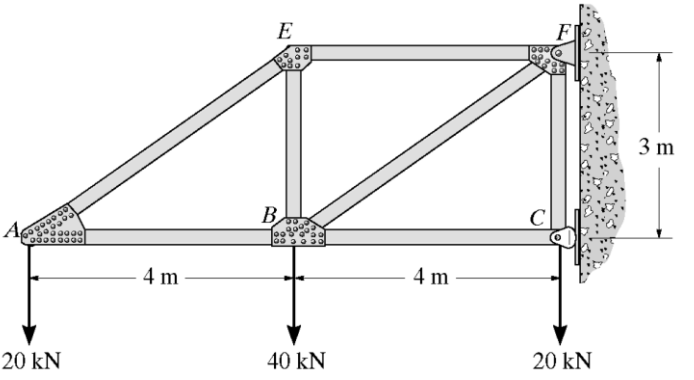
$$+(-(P+1100))(-1)(3)+(-(P+1700))(-1)(3)$$

با توجه به اینکه $P=0$ می‌باشد، داریم:

$$\Delta_{B_v}=\frac{27034\times 12}{0.5\times 29\times 10^6}=0.0224in$$




۹-۱۳) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $A$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $100mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۱۳

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $A$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

$$1\times\Delta_{A_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{33.33\times 1.667\times 5}{AE}+\frac{26.67\times 1.333\times 4}{AE}+\frac{(-20)\times(-1)\times 3}{AE}$$

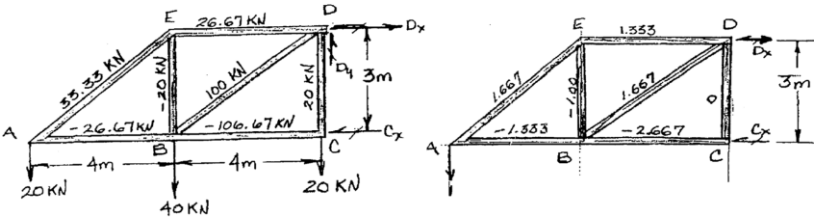
$$\frac{100\times 1.667\times 5}{AE}+\frac{-26.67\times(-1.333)\times 4}{AE}+\frac{(-2.667)\times(-106.67)\times 4}{AE}+\frac{200\times 0\times 3}{AE}$$

$$=\frac{2593.33}{AE}=\frac{2593.33\times 10^3}{100\times 10^{-6}\times 200\times 10^6}=0.13m=130mm$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





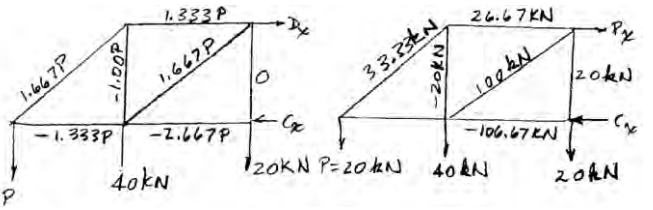

۹-۱٤) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

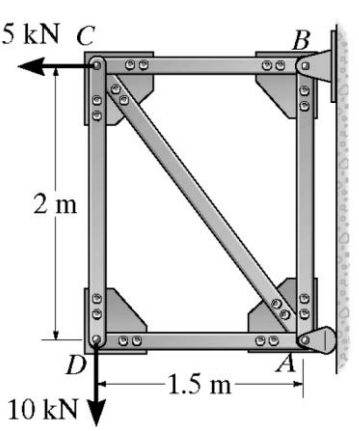
$$\Delta_{A_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{33.33\times1.667\times5}{AE} + \frac{26.67\times1.333\times4}{AE} + \frac{(-20)\times(-1)\times3}{AE}$$

$$+\frac{100\times1.667\times5}{AE} + \frac{-26.67\times(-1.333)\times4}{AE} + \frac{-2.667\times(-106.67)\times4}{AE} + \frac{20\times0\times3}{AE}$$

$$= \frac{2593.33}{AE} = \frac{2593.33\times10^{3}}{100\times10^{-6}\times200\times10^{6}} = 0.13m = 130mm$$




۹-۱۵) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $C$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $400mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۱۵

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

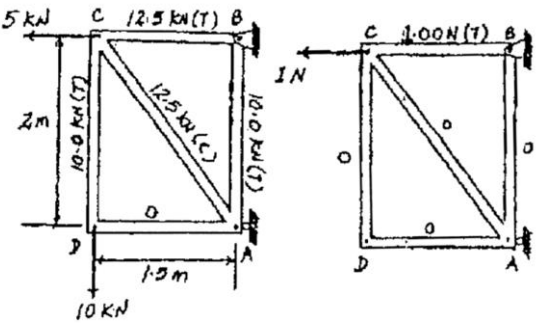
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت افقی و به سمت چپ در $C$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0 | $10(10^3)$ | 2 | 0 |
| $\mathcal{BC}$ | 1 | $12.5(10^3)$ | 1.5 | $18.75(10^3)$ |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | $10(10^3)$ | 2 | 0 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $\mathcal{AC}$ | 0 | $-12.5(10^3)$ | 2.5 | 0 |
| | | | | $\Sigma = 18.75\times10^3$ |

$$1\times\Delta_{C_h} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{18.75\times10^3}{AE} = \frac{18.75\times10^3}{0.4\times10^{-3}\left(200\times10^9\right)} = 0.2344\times10^{-3}\,m = 0.234mm \leftarrow$$




۹-۱۶) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=5)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 10 | 0 | 10.0 | 2 | 0 |
| $\mathcal{BC}$ | P+7.5 | 1 | 12.5 | 1.5 | 18.75 |
| $\mathcal{CD}$ | 10 | 0 | 10 | 2 | 0 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $\mathcal{AC}$ | -12.5 | 0 | -12.5 | 2.5 | 0 |
| | | | | | $\Sigma = 18.75$ |

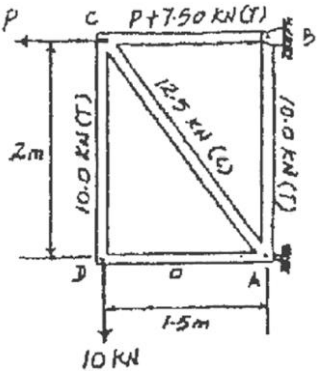
$$\Delta_{C_h} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{18.75\times10^3}{AE} = \frac{18.75\times10^3}{0.4\times10^{-3}\times200\times10^9}$$

$$= 0.2344\times10^{-3}\,m = 0.234\,mm \leftarrow$$

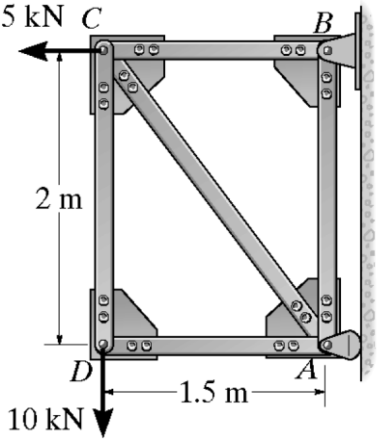
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۹–۱۷) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $D$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $400mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۹–۱۷*

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $D$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

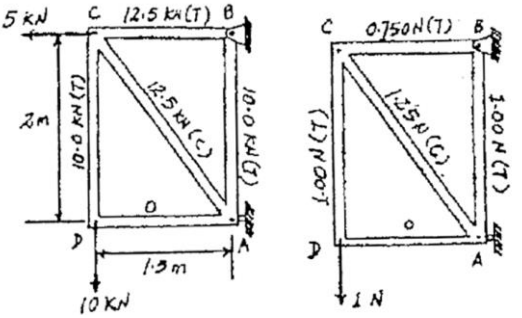
| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 1 | $10(10^3)$ | 2 | $20(10^3)$ |
| $BC$ | 0.75 | $12.5(10^3)$ | 1.5 | $14.0625(10^3)$ |
| $CD$ | 1 | $10(10^3)$ | 2 | $20(10^3)$ |
| $AD$ | 0 | 0 | 1.5 | 0 |
| $AC$ | -1.25 | $-12.5(10^3)$ | 2.5 | $39.0625(10^3)$ |
| | | | | $\Sigma = 93.125\times10^3$ |

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

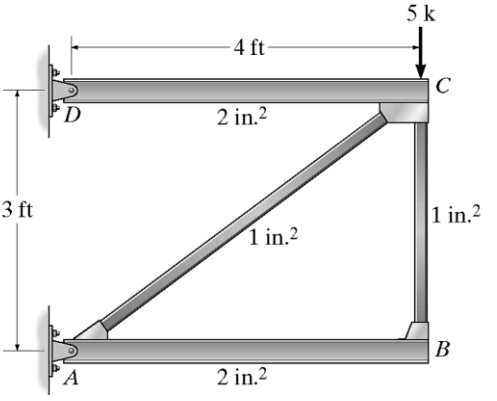
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$1\times\Delta_{D_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{93.125\times10^3}{AE}=\frac{93.125\times10^3}{0.4\times10^{-3}\left(200\times10^9\right)}=1.164\times10^{-3}m=1.16mm\downarrow$$




۹–۱۸) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹–۱۸

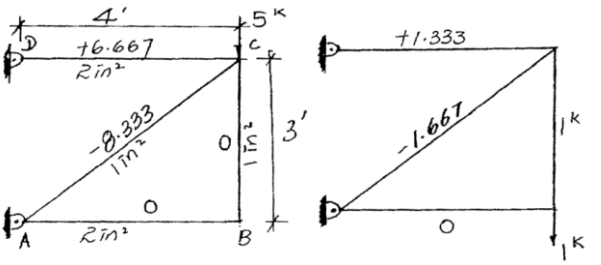
حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $B$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

$$\Delta_{B_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{1.333\times6.667\times4\times12}{2\times29\times10^3}=\frac{-1.667\times\left(-8.333\right)\times5\times12}{1\times29\times10^3}+0+0=0.0361$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



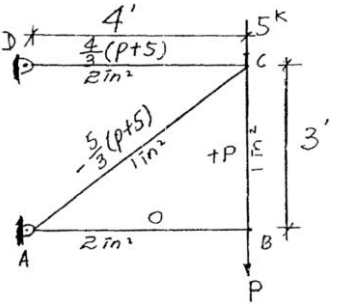



۹–۱۹) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

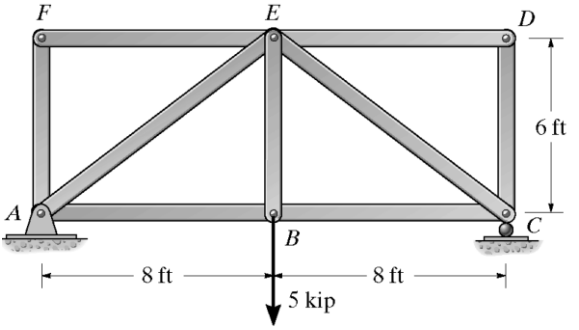
حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta_{B_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{4}{3}\times 5\times\frac{4}{3}\left(\frac{4\times 12}{2\times 29\times 10^3}\right)$$

$$+\left(-\frac{5}{3}\right)\times 5\times\left(-\frac{5}{4}\right)\times\frac{5\times 12}{1\times 29\times 10^3}+0+0=0.0361in$$




۹–۲۰) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $E$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $4.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹–۲۰

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

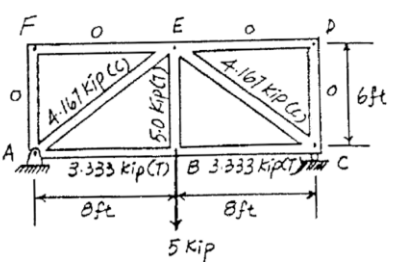
**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

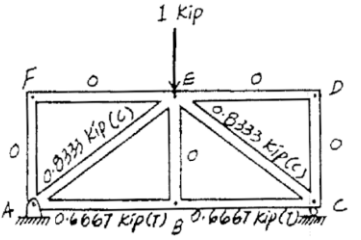


حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $E$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0.6667 | 3.333 | 96 | 213.33 |
| $\mathcal{BC}$ | 0.6667 | 3.333 | 96 | 213.33 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | 0 | 72 | 0 |
| $\mathcal{DE}$ | 0 | 0 | 96 | 0 |
| $\mathcal{EF}$ | 0 | 0 | 96 | 0 |
| $\mathcal{AF}$ | 0 | 0 | 72 | 0 |
| $\mathcal{AE}$ | -0.8333 | -4.167 | 120 | 416.67 |
| $\mathcal{CE}$ | -0.8333 | -4.167 | 120 | 416.67 |
| $\mathcal{BE}$ | 0 | 5 | 72 | 0 |
| | | | | $\Sigma = 1260$ |

$$1\times\Delta_{E_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{1260}{AE} = \frac{1260}{4.5\times29\times10^3} = 0.00966in\downarrow$$




۹-۲۱) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=0)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0.6667P+3.333 | 0.6667 | 3.33 | 96 | 213.33 |
| $\mathcal{BC}$ | 0.6667P+3.333 | 0.6667 | 3.33 | 96 | 213.33 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | 0 | 0 | 72 | 0 |
| $\mathcal{DE}$ | 0 | 0 | 0 | 96 | 0 |
| $\mathcal{EF}$ | 0 | 0 | 0 | 96 | 0 |
| $\mathcal{AF}$ | 0 | 0 | 0 | 72 | 0 |
| $\mathcal{AE}$ | -(0.8333P+4.167) | -0.8333 | -4.167 | 120 | 416.67 |
| $\mathcal{CE}$ | -(0.8333P+4.167) | -0.8333 | -4.167 | 120 | 416.67 |
| $\mathcal{BE}$ | 5 | 0 | 5 | 72 | 0 |
| | | | | | $\Sigma = 1260$ |

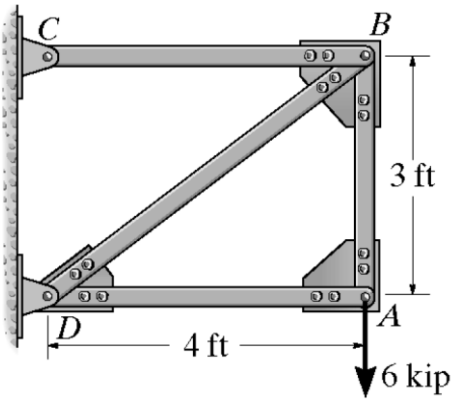
$$\Delta_{E_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{1260}{AE} = \frac{1260}{4.5\left(29\times10^3\right)} = 0.00966in\downarrow$$

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۲۲) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $A$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $3in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

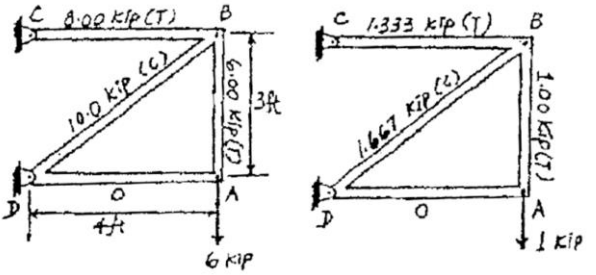



شکل مسئله ۹-۲۲

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $A$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 1 | 6 | 36 | 216 |
| $\mathcal{BC}$ | 1.33 | 8 | 48 | 512 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -1.667 | -10 | 60 | 1000 |
| | | | | $\Sigma = 1728$ |

$$1\times\Delta_{A_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{1728}{AE}=\frac{1728}{3\times29\times10^3}=0.0199in\downarrow$$




۹-۲۳) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

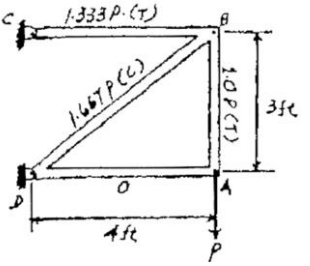
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

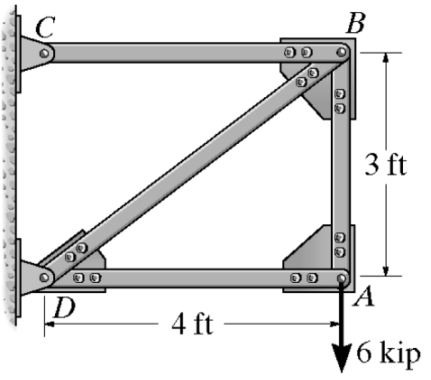


| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=6)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | P | 1 | 6 | 36 | 216 |
| $\mathcal{BC}$ | 1.333P | 1.333 | 8 | 48 | 512 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -1.667P | -1.667 | -10 | 60 | 1000 |
| | | | | | $\Sigma = 1728$ |

$$\Delta_{A_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{1728}{AE} = \frac{1728}{3\left[29\times10^3\right]} = 0.0199in\downarrow$$




۹-۲٤) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $3in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۹-۲٤*

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $B$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0 | 6 | 36 | 0 |
| $\mathcal{BC}$ | 1.33 | 8 | 48 | 512 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -1.667 | -10 | 60 | 1000 |

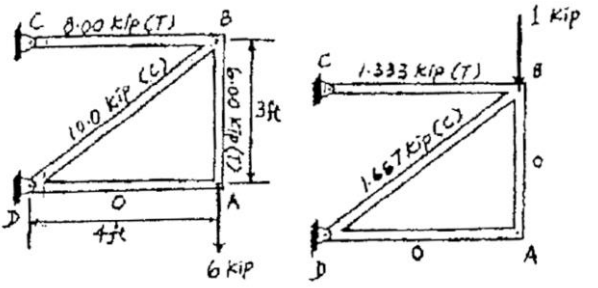
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $\Sigma = 1512$ |

$$1\times\Delta_{B_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{1512}{AE} = \frac{1512}{3\times 29\times 10^3} = 0.0174in\downarrow$$

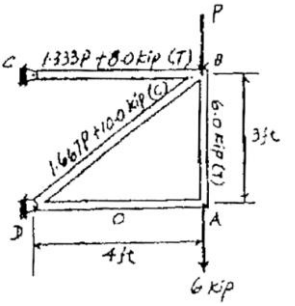



۹–۲۵) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=0)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 6 | 0 | 6 | 36 | 0 |
| $\mathcal{BC}$ | 1.333P+8 | 1.333 | 8 | 48 | 512 |
| $\mathcal{AD}$ | 0 | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -(1.66P+10) | -1.667 | -10 | 60 | 1000 |
| | | | | | $\Sigma = 1512$ |

$$\Delta_{B_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{1512}{AE} = \frac{1512}{3\left[29\times 10^3\right]} = 0.0174in\downarrow$$

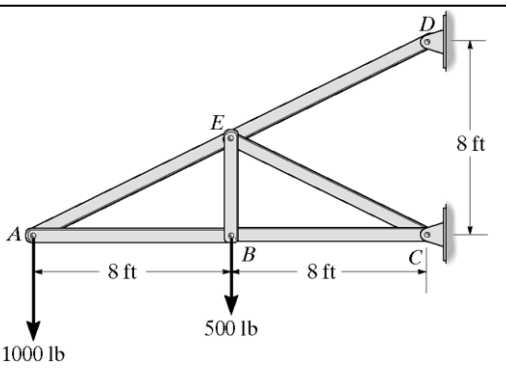



۹–۲۶) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $A$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی، سطح مقطع آنها برابر $2in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



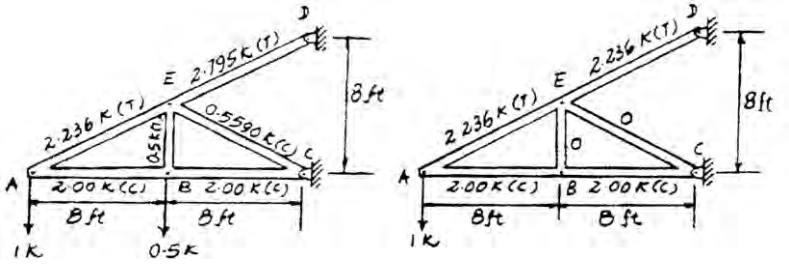



شکل مسئله ۹-۲۶

حل) با اعمال یک نیروی به اندازه واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $A$ نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار واحد و نیروی خارجی را تعیین می‌نماییم. بنابراین داریم:

$$1\times\Delta_{A_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{AE}\left(2(-2)(-2)8+(2.236)(2.236)(8.944)+(2.236)(2.795)(8.944)\right)$$

$$=\frac{164.62\times12}{2\times29\times10^3}=0.0341in$$




۹-۲۷) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta_{A_v}=\Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{1}{AE}\left[-2P(-2)(8)+(2.236P)(2.236)(8.944)+(-2P)(-2)(8)\right.$$

$$\left.+(2.236P+0.559)+(2.236P)(8.944)\right](12)$$

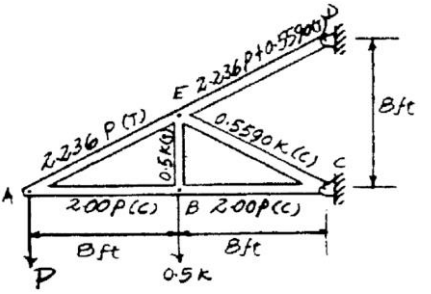
با در نظر گرفتن $P=1$، داریم:

$$\Delta_{A_v}=\Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{164.62\times12}{2\times29\times10^3}=0.0341in$$

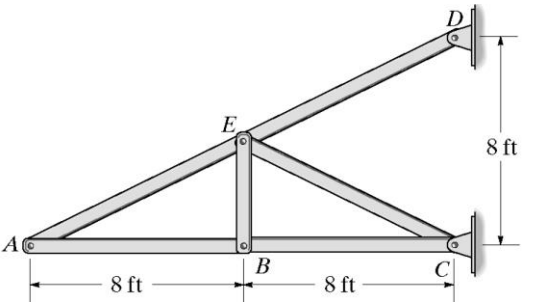
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۹–۲۸) در خرپای شکل زیر، تغییرمکان قائم مفصل $A$ را تعیین نمایید. اعضای $AB$ و $BC$ به اندازه $\Delta T = 200^\circ F$ افزایش می‌یابد. سطح مقطع اعضا برابر $A=2in^2$ و ضریب ارتجاعی $E=29(10^3)ksi$ در نظر بگیرید. همچنین ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 6.6\times10^{-6}/^\circ F$ می‌باشد.

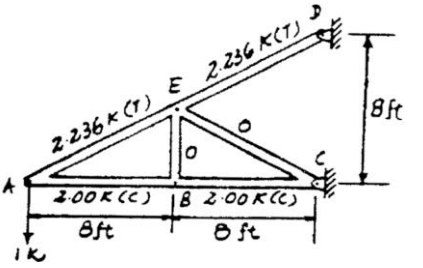



شکل مسئله ۹–۲۸

حل) با استفاده از مسئله ۹–۲۶ داریم:

$$\Delta_{A_v} = \sum n\alpha\Delta TL = (-2)\times6.6\times10^{-6}\times200\times8\times12 + (-2)\times6.6\times10^{-6}\times200\times8\times12$$

$$= -0.507\,in = 0.507\,in\uparrow$$




۹–۲۹) در خرپای مسئله قبل، تغییرمکان قائم مفصل $A$ را تعیین نمایید. عضو $AE$، به اندازه $0.5in$ کوتاه‌تر ساخته شده است.

حل) با توجه به مسئله ۹–۲۶ داریم:

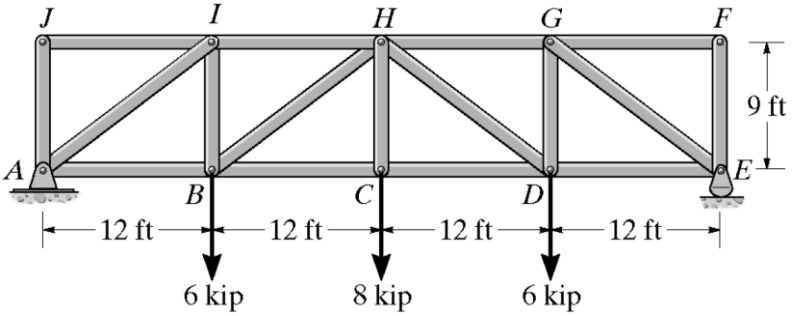
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_{A_v} = \sum n\Delta L = (2.236)\times(-0.5) = -1.12in = 1.12in \uparrow$$

۹-۳۰) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $C$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $4.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۳۰

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $C$ داریم:

$$\Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{21232}{4.5\times29\times10^3} = 0.163in$$

۹-۳۱) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=8)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0.6667P+8 | 0.6667 | 13.33 | 144 | 1280 |
| $\mathcal{DE}$ | 0.6667P+8 | 0.6667 | 13.33 | 144 | 1280 |
| $\mathcal{BC}$ | 1.333P+8 | 1.333 | 18.67 | 144 | 3584 |
| $\mathcal{CD}$ | 1.333P+8 | 1.333 | 18.67 | 144 | 3584 |
| $\mathcal{AJ}$ | 0 | 0 | 0 | 108 | 0 |
| $\mathcal{EF}$ | 0 | 0 | 0 | 108 | 0 |
| $\mathcal{IJ}$ | 0 | 0 | 0 | 144 | 0 |
| $\mathcal{FG}$ | 0 | 0 | 0 | 144 | 0 |
| $\mathcal{HI}$ | -(0.6667P+8) | -0.6667 | -13.33 | 144 | 1280 |
| $\mathcal{GH}$ | -(0.6667P+8) | -0.6667 | -13.33 | 144 | 1280 |
| $\mathcal{AI}$ | -(0.8333P+10) | -0.8333 | -16.67 | 180 | 2500 |
| $\mathcal{EG}$ | -(0.8333P+10) | -0.8333 | -16.67 | 180 | 2500 |
| $\mathcal{BI}$ | 0.5P+6 | 0.5 | 10 | 108 | 540 |
| $\mathcal{DG}$ | 0.5P+6 | 0.5 | 10 | 108 | 540 |
| $\mathcal{BH}$ | -0.8333P | -0.8333 | -6.667 | 180 | 1000 |
| $\mathcal{DH}$ | -0.8333P | -0.8333 | -6.667 | 180 | 1000 |
| $\mathcal{CH}$ | P | 1 | 8 | 108 | 864 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

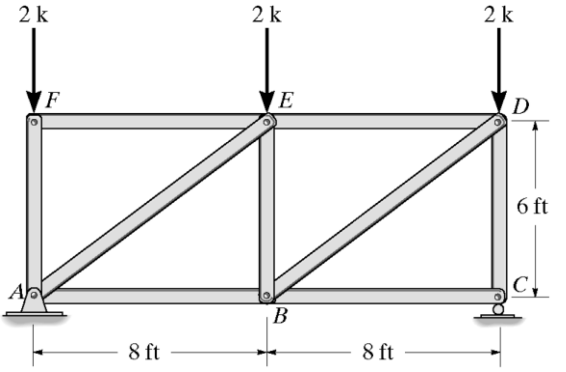
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\Sigma = 21232$ |

$$\Delta_{B_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{21232}{4.5\times 29\times 10^3} = 0.163in\downarrow$$

۹-۳۲) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $1.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

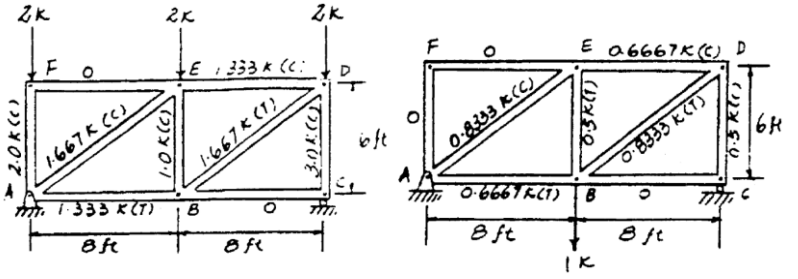



شکل مسئله ۹-۳۲

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $B$ داریم:

$$\Delta_{B_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{1}{AE}[(-1.667)(-0.8333)\times 10 + 1.667\times 0.8333\times 10 + 0.6667\times 1.333\times 8$$

$$+(0.6667)(-1.333)\times 8 + (-1)(0.5)\times 6 + (-0.5)(-3)\times 6]\times 12 = \frac{576}{1.5\times 29\times 10^3} = 0.0132in$$




۹-۳۳) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta_{B_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = [(-1.333)(-0.6667)\times 8 + 1.333\times 0.6667\times 8$$

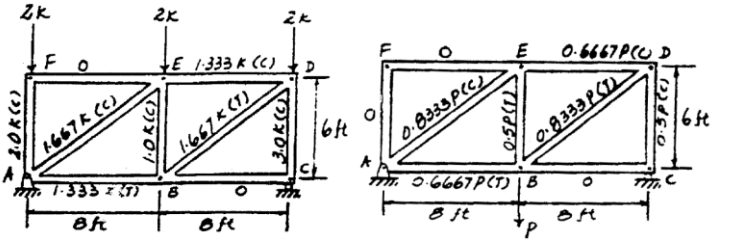
$$+(-1)\times 0.5\times 6 + (-1.667)(-0.8333)\times 10$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

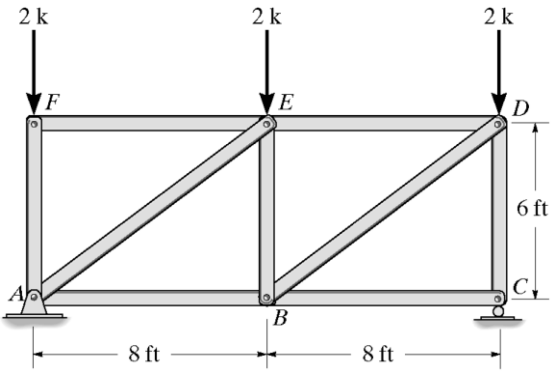
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$+1.667\times0.8333\times10+(-3)(-0.5)\times6]\frac{12}{AE}=\frac{576}{1.5\times29\times10^3}=0.0132in$$



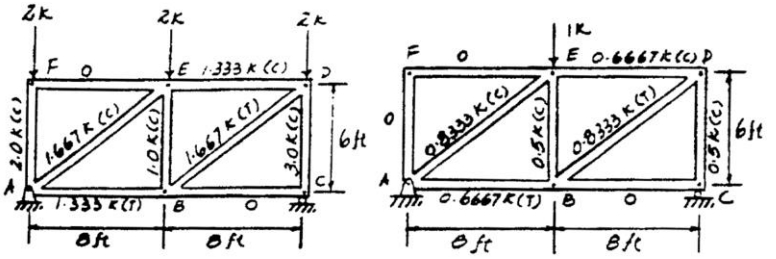

۹-۳٤) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $E$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $1.5in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۹-۳٤*

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $E$ داریم:

$$\Delta_{E_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{AE}[(-0.8333)(-1.667)\times10+0.8333\times1.6667\times10$$
$$+0.6667\times1.333\times8+(-0.6667)(-1.333)\times8+(-1)(-0.5)\times6$$
$$-0.5\times(-3)\times6]\times12=\frac{648}{1.5\times29\times10^3}=0.0149in$$




۹-۳۵) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

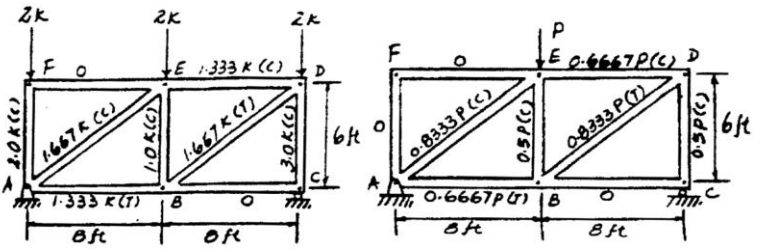


حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

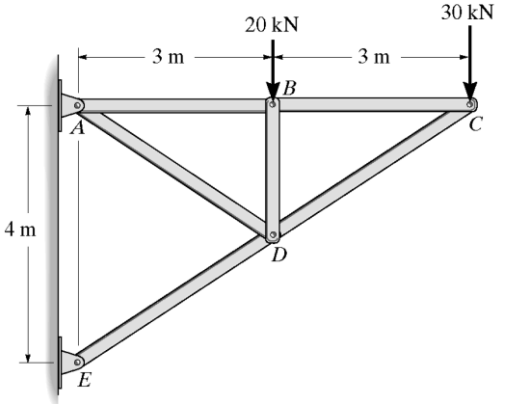
$$\Delta_{E_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = [(-1.667)(-0.8333)\times 10 + 1.667\times 0.8333\times 10$$

$$+(-1)(-0.5)\times 6 + (-0.5)(-3)\times 6 + (0.6667)\times 1.333\times 8$$

$$+(-0.6667)(-1.333)\times 8]\frac{12}{AE} = \frac{648}{1.5\times 29\times 10^3} = 0.0149in$$




۹-۳۶) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $D$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $300mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۳۶

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم و به سمت پایین در $D$ داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 0 | 45 | 3 | 0 |
| $\mathcal{AD}$ | 0.9014 | 18.03 | $\sqrt{13}$ | 58.59 |
| $\mathcal{BC}$ | 0 | 45 | 3 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | 0 | -20 | 2 | 0 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | -54.08 | $\sqrt{13}$ | 0 |

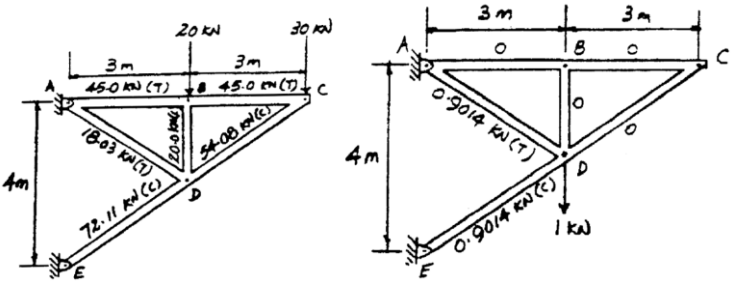
**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{DE}$ | -0.9014 | -72.11 | $\sqrt{13}$ | 234.36 |
| | | | | $\Sigma = 292.95$ |

$$\Delta_{D_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{282.95\times10^{3}}{300\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 4.88\times10^{-3}\,m = 4.88mm$$



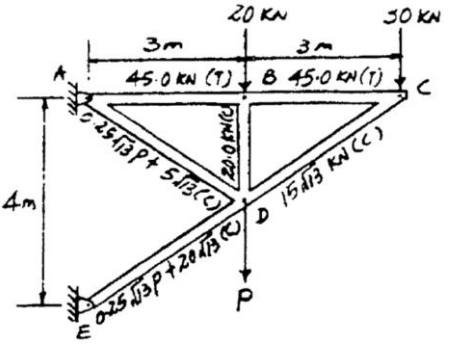

۹-۳۷) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=0)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 45 | 0 | 45 | 3 | 0 |
| $\mathcal{AD}$ | $0.25\sqrt{13}P + 5\sqrt{13}$ | $0.25\sqrt{13}$ | $5\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | 58.59 |
| $\mathcal{BC}$ | 45 | 0 | 45 | 3 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -20 | 0 | -20 | 2 | 0 |
| $\mathcal{CD}$ | $-15\sqrt{13}$ | 0 | $-15\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | 0 |
| $\mathcal{DE}$ | $-\left(0.25\sqrt{13}+20\sqrt{13}\right)$ | $-0.25\sqrt{13}$ | $-20\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | 234.36 |
| | | | | | $\Sigma = 292.95$ |

$$\Delta_{D_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{292.95}{AE}$$

$$= \frac{292.95\times10^{3}}{300\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 4.88\times10^{-3}\,m = 4.88mm$$

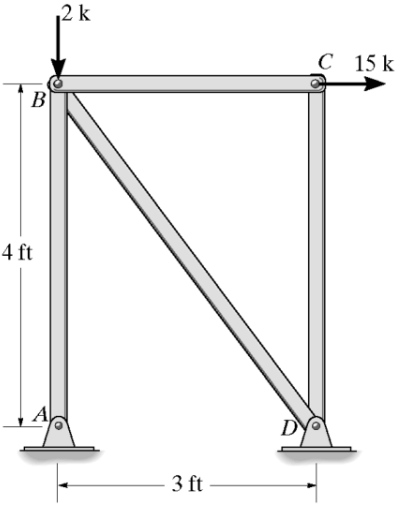



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹–۳۸) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $C$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $3in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

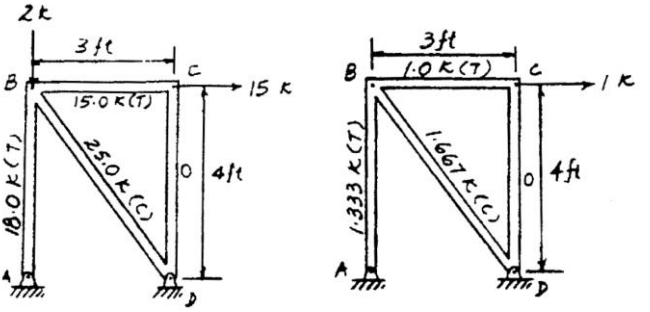



شکل مسئله ۹–۳۸

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت افقی و به سمت راست در $C$ داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 1.333 | 18 | 48 | 1152 |
| $BC$ | 1.00 | 15 | 36 | 540 |
| $BD$ | -1.667 | -25 | 60 | 2500 |
| $CD$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| | | | | $\Sigma = 4192$ |

$$\Delta_{C_h} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{4192}{3\times 29\times 10^3} = 0.0482in$$




۹–۳۹) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

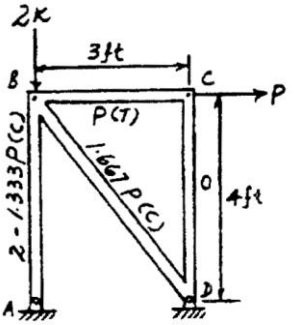
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



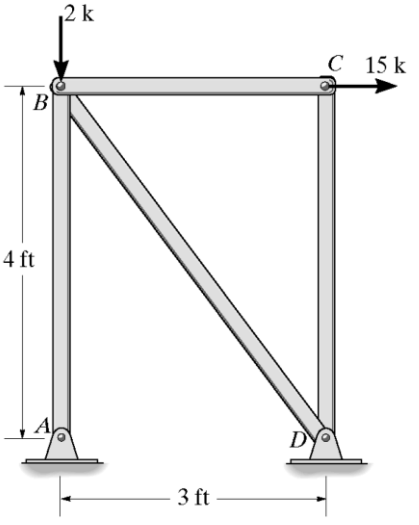
حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=15)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | -(2-1.333P) | 1.333 | 18 | 48 | 1152 |
| $\mathcal{BC}$ | P | 1.00 | 15 | 36 | 540 |
| $\mathcal{BD}$ | -1.6667P | -1.667 | 25 | 60 | 2500 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | 0 | 0 | 48 | 0 |
| | | | | | $\Sigma = 4192$ |

$$\Delta_{C_h} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{4192}{3\times 29\times 10^3} = 0.0482in$$




۹-۴۰) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $B$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی و سطح مقطع آنها برابر $3in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۴۰

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

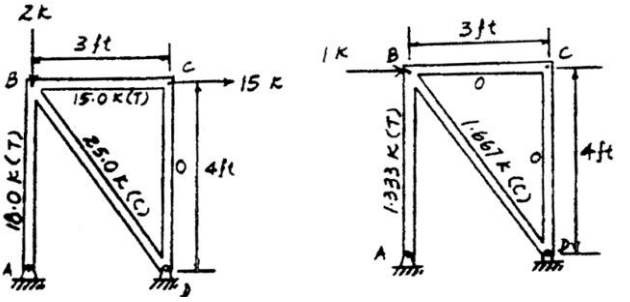
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت افقی و به سمت راست، در $B$ داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 1.333 | 18 | 48 | 1152 |
| $\mathcal{BC}$ | 0 | 15 | 36 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -1.667 | -25 | 60 | 2500 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| | | | | $\Sigma = 3652$ |

$$\Delta_{B_h} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{3652}{3\times 29\times 10^3} = 0.042in$$

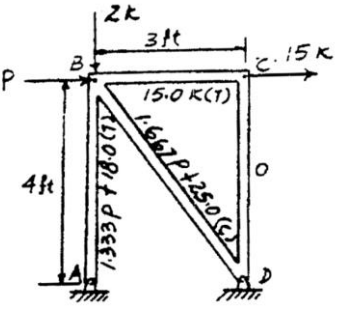



۹-۴۱) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=0)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 1.333P+18 | 1.333 | 18 | 48 | 1152 |
| $\mathcal{BC}$ | 15 | 0 | 15 | 36 | 0 |
| $\mathcal{BD}$ | -(1.667P+25) | -1.667 | -25 | 60 | 2500 |
| $\mathcal{CD}$ | 0 | 0 | 0 | 48 | 0 |
| | | | | | $\Sigma = 3652$ |

$$\Delta_{B_h} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{3652}{3\times 29\times 10^3} = 0.042in$$

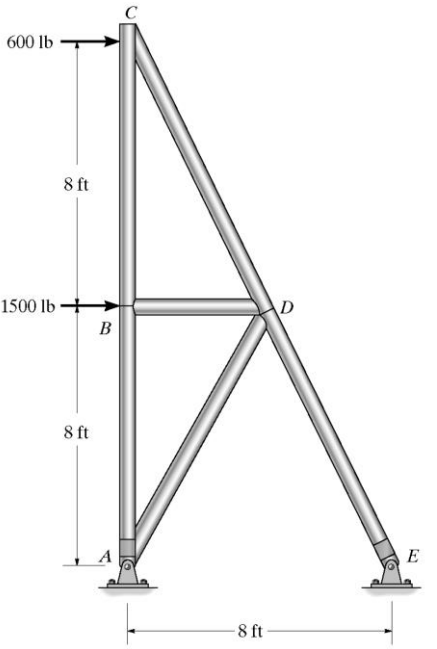



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-٤۲) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $C$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا در انتهای خود به صورت مفصلی می‌باشد.

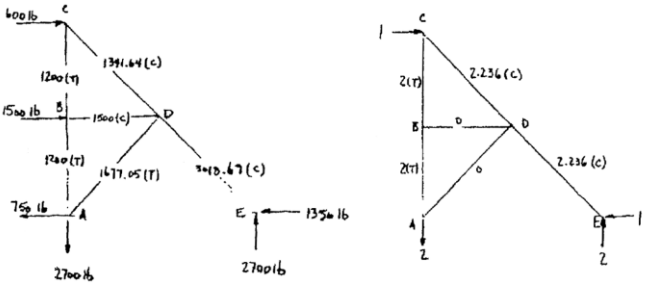



شکل مسئله ۹-٤۲

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت افقی و به سمت راست در $C$ داریم:

$$\Delta_{C_h} = \sum \frac{nNL}{AE} = 2\left(\frac{2\times 1200\times 8\times 12}{AE}\right) + \frac{-2.236\times(-1341.64)\left(\sqrt{80}\right)\times 12}{AE}$$

$$+\frac{(-2.236)\times(-3018.69)\left(\sqrt{80}\right)\times 12}{AE} = \frac{1.51\times 10^{6}}{AE} \rightarrow$$



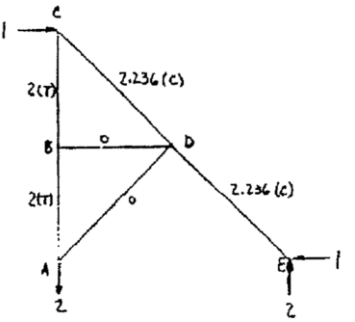

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۴۳) در تیر مسئله ۹-۴۲، بارهای اعمال شده بر روی سازه را حذف نمایید و مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $C$ را در حالتی که دمای اعضای $AB$ و $BC$ به اندازه $\Delta T = 200^\circ F$ افزایش می‌یابد را تعیین نمایید. سطح مقطع اعضا برابر $A=2in^2$ و ضریب ارتجاعی $E=29(10^3)ksi$ در نظر بگیرید. همچنین ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 10^{-6}/^\circ F$ می‌باشد.

$$\Delta_{C_h} = \sum n\alpha\Delta TL = 2\times10^{-6}\times200\times8\times12 + 2\times10^{-6}\times200\times8\times12 = 0.0768\,in \rightarrow$$

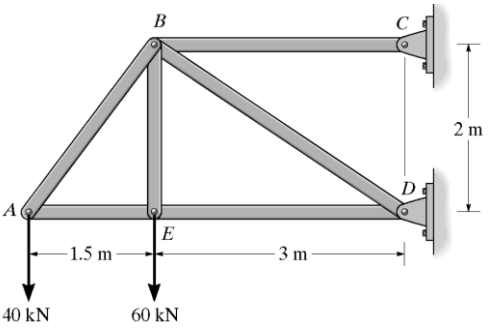



۹-۴۴) در تیر مسئله ۹-۴۲، بارهای اعمال شده بر روی سازه را حذف نمایید و مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در مفصل $C$ را در حالتی عضو $CD$ به اندازه $0.5in$ کوتاه‌تر ساخته شود را تعیین نمایید.

حل)

$$\Delta_{C_h} = \sum n\Delta T = -2.236\times(-0.5) = 1.12in \rightarrow$$

۹-۴۵) با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل $A$ از خرپای زیر را تعیین نمایید. هر یک از اعضای خرپا، دارای سطح مقطع $400mm^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۴۵

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

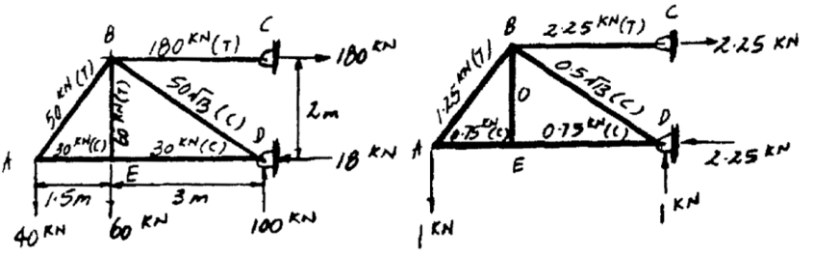
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم در $A$ داریم:

| عضو | $n$ | $N$ | $L$ | $nNL$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 1.25 | 50 | 2.5 | 156.26 |
| $\mathcal{AE}$ | -0.75 | -30 | 1.5 | 33.75 |
| $\mathcal{BC}$ | 2.25 | 180 | 3 | 1215 |
| $\mathcal{BD}$ | $-0.5\sqrt{13}$ | $-50\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | 1171.8 |
| $\mathcal{BE}$ | 0 | 60 | 2 | 0 |
| $\mathcal{DE}$ | -0.75 | -30 | 3 | 67.5 |
| | | | | $\Sigma = 2644.30$ |

$$\Delta_{A_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{2644.30\times10^{3}}{400\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.0331m = 33.1mm$$




۹-٤٦) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

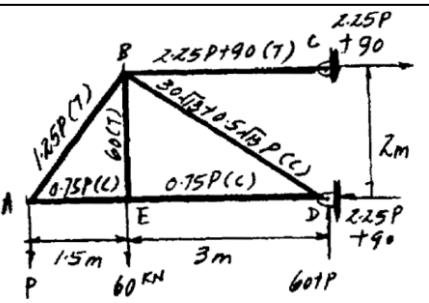
| عضو | $N$ | $\partial N/\partial P$ | $N(P=40)$ | $L$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{AB}$ | 1.25P | 1.25 | 50 | 2.5 | 156.26 |
| $\mathcal{AE}$ | -0.75P | -0.75 | -30 | 1.5 | 33.75 |
| $\mathcal{BC}$ | 2.25P+90 | 2.25 | 180 | 3 | 1215 |
| $\mathcal{BD}$ | $-\left(30\sqrt{13}+0.5\sqrt{13}P\right)$ | $-0.5\sqrt{13}$ | $-50\sqrt{13}$ | $\sqrt{13}$ | 1171.8 |
| $\mathcal{BE}$ | 60 | 0 | 60 | 2 | 0 |
| $\mathcal{DE}$ | -0.75P | -0.75 | -30 | 3 | 67.5 |
| | | | | | $\Sigma = 2644.30$ |

$$\Delta_{B_h} = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{2644.3\times10^{3}}{400\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.0331m = 33.1mm$$

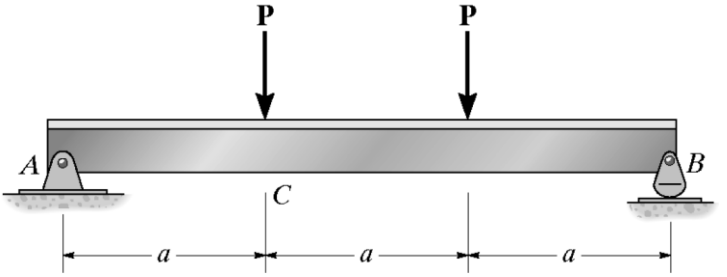
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۹–۴۷) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.

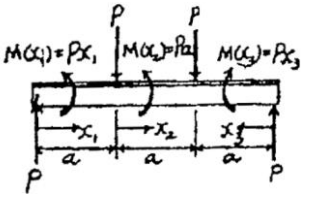



شکل مسئله ۹–۴۷

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در جهت قائم در $C$ داریم:

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx \quad \Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{2}{3}x_1\right)(Px_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{1}{3}(2a-x_2)\right)(Pa)dx_2$$

$$+\frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{x_3}{3}\right)(Px_3)dx_3 = \frac{5Pa^3}{6EI}\downarrow$$




۹–۴۸) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P'}\right)\frac{dx}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\int_0^a (Px_1)\left(\frac{2}{3}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a (Pa)\left(\frac{1}{3}(2a-x_2)\right)dx_2$$

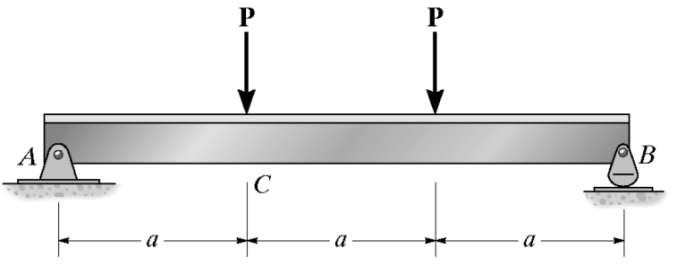
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$+\frac{1}{EI}\int_0^a (Px_3)\left(\frac{x_3}{3}\right)dx_3 = \frac{5Pa^3}{6EI}\downarrow$$

۹-۴۹) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار دوران ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.



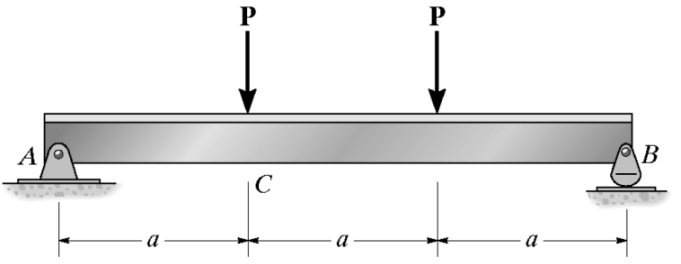

شکل مسئله ۹-۴۹

حل) با اعمال یک دوران واحد، در $C$ داریم:

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx \quad \Rightarrow \quad \theta_C = \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{x_1}{3a}\right)(Px_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{1}{3a}(2a-x_2)\right)(Pa)dx_2$$

$$+\frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{x_3}{3a}\right)(Px_3)dx_3 = \frac{Pa^2}{2EI}$$

۹-۵۰) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در طول تیر ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۵۰

حل) با اعمال یک لنگر واحد، در $A$ داریم:

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx \quad \Rightarrow$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a \left(1-\frac{x_1}{3a}\right)(Px_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{1}{3a}(2a-x_2)\right)(Pa)dx_2$$

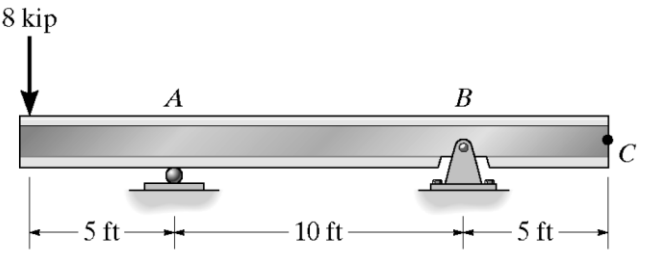
$$+\frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{x_3}{3a}\right)(Px_3)dx_3 = \frac{Pa^2}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۵۱) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. ممان اینرسی تیر برابر $I=53.8\ in^4$ و $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر بگیرید.

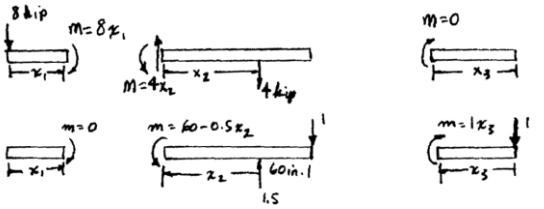



شکل مسئله ۹-۵۱

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در $C$ داریم:

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\left[0+\int_0^{120}(60-0.5)(4x_2)dx_2+0\right] = \frac{576000}{EI} = \frac{576000}{29\times10^3\times53.8} = 0.369in$$

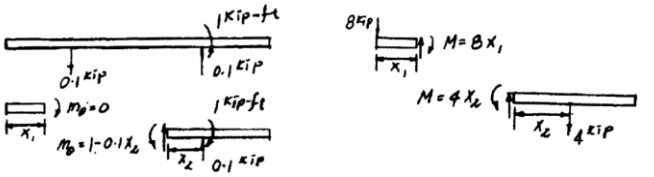



۹-۵۲) در تیر مسئله قبل، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار شیب ایجاد شده در $B$ را تعیین نمایید. ممان اینرسی تیر برابر $I=53.8\ in^4$ و $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر بگیرید.

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx \quad \Rightarrow$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\int_0^5(0)(8x_1)dx_1+\int_0^{10}(1-0.1x_2)(4x_2)dx_2\right]$$

$$= \frac{66.67}{EI} = \frac{66.67\times12^2}{29\times10^3\times53.8} = 6.153\times10^{-3}rad = 0.353^\circ$$

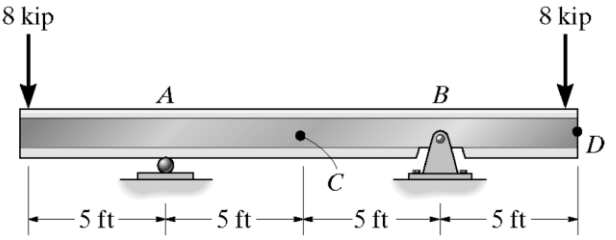



**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۵۳) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. ممان اینرسی تیر برابر $I=245\ in^4$ و $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۵۳

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در $C$ داریم:

$$1.\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx$$

$$\Delta_C = 0 + 2\int_0^{60} \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)(-480)}{EI}dx = \frac{864000}{29\times10^3\times245} = 0.122in$$

۹-۵۴) در تیر شکل قبل، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار دوران ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید. ممان اینرسی تیر برابر $I=245\ in^4$ و $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر بگیرید.

حل) با اعمال یک لنگر واحد، در $A$ داریم:

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx \quad \Rightarrow$$

$$\theta_A = 0 + \int_0^{120} \frac{\left(\frac{x}{120}-1\right)(-480)}{EI}dx = \frac{28800}{29\times10^3\times245} = 4.05\times10^{-3}rad$$

۹-۵۵) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\theta_A = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$\theta_A = 0 + \int_0^{120} \frac{-480\left(\frac{x}{120}-1\right)}{EI}dx = 0 + \frac{-480\left(\frac{1}{2}\left(\frac{120^2}{120}\right)-120\right)}{EI}$$

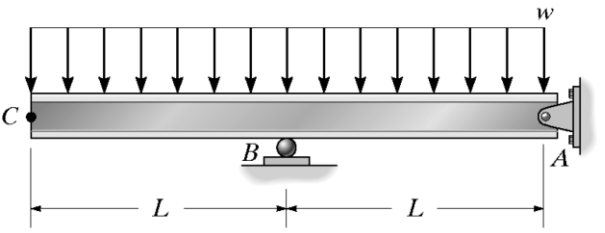
$$= \frac{28800}{29\times10^3\times245} = 4.05\times10^{-3}rad$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۵۶) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.

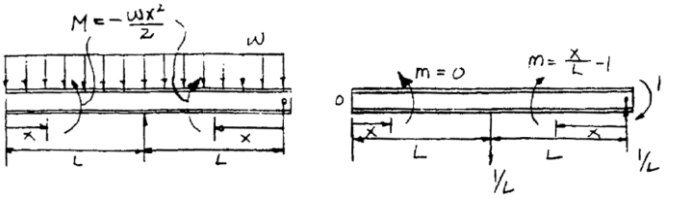



شکل مسئله ۹-۵۶

حل) با اعمال یک لنگر واحد، در $A$ داریم:

$$1.\theta_A = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \quad \Rightarrow$$

$$= 0 + \int_0^L \frac{\left(\frac{x}{L}-1\right)\left(-\frac{wx^2}{2}\right)}{EI} dx = \frac{-\frac{w}{8}\frac{L^4}{L} + \frac{wL^3}{6}}{EI} = \frac{wL^3}{24EI}$$

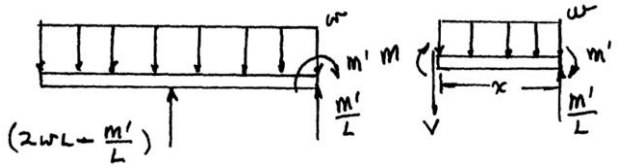



۹-۵۷) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\theta_A = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$M = \frac{M'}{L}x - M' - \frac{wx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M'} = \frac{x}{L} - 1 \quad \Rightarrow \quad M' = 0$$



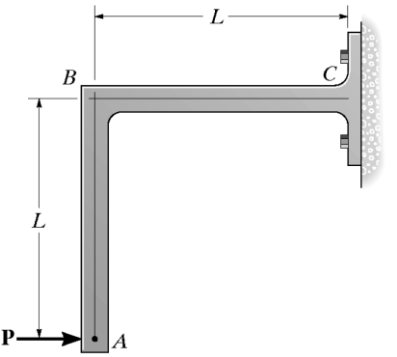

$$\theta_A = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{wx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{L}-1\right)dx = \frac{-w}{2EI}\left(\frac{L^3}{4} - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{wL^3}{24EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-۵۸) در تیر شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. تکیه‌گاه نبشی نشان داده شده به صورت گیردار است.

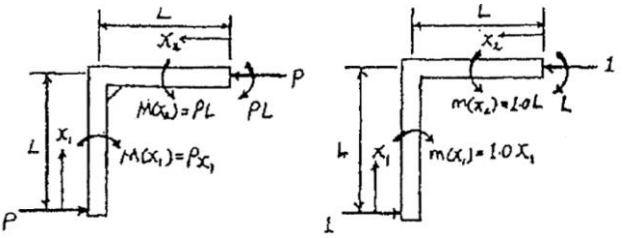



شکل مسئله ۹-۵۸

حل) با اعمال یک نیروی واحد، در $A$ داریم:

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx$$

$$(\Delta_A)_h = \frac{1}{EI}\int_0^L (1.00x_1)(Px_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^L (1.00L)(PL)dx_2 = \frac{4PL^3}{3EI} \rightarrow$$




۹-۵۹) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta_A)_h = \frac{1}{EI}\int_0^L (Px_1)(1.00x_1)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^L (PL)(1.00L)dx_2 = \frac{4PL^3}{3EI} \rightarrow$$

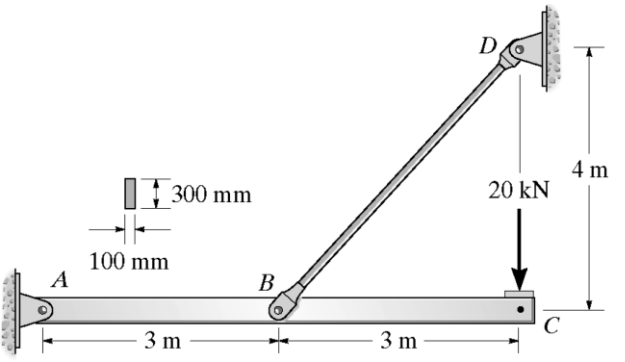
۹-۶۰) میله $ABC$ دارای مقطع مستطیلی است. میله $DB$ دارای قطر $20mm$ می‌باشد. مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. تنها اثر خمش ایجاد شده در میله $ABC$ و

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



اثر نیروی محوری ایجاد شده در میله $DB$ را تعیین نمایید. مقدار $E=200GPa$ در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۹-۶۰

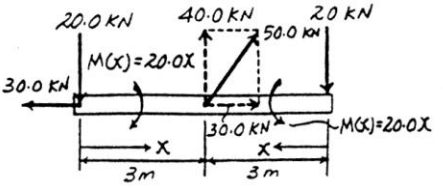
حل) با اعمال یک نیروی واحد، در $C$ داریم:

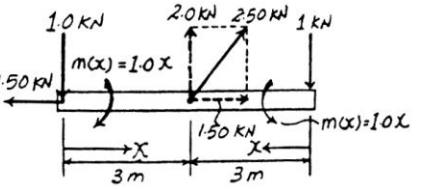
$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx + \frac{nNL}{AE}$$

$$\Delta_C = 2\left[\frac{1}{EI}\int_0^{3m}(1.00x)(20.0x)dx\right] + \frac{2.5\times 50.0\times 5}{AE}$$

$$\Delta_C = \frac{360}{EI} + \frac{625}{AE} = \frac{360\times 1000}{200\times 10^9 \times \left(\frac{1}{12}\times 0.1\times 0.3^3\right)} + \frac{625\times 1000}{\left(\frac{\pi}{4}\times 0.02^2\right)\times 200\times 10^9}$$

$$= 0.017947\ m = 17.9mm \downarrow$$




۹-۶۱) در سیستم سازه‌ای مسئله قبل، مقدار شیب ایجاد شده در $A$ را تعیین نمایید.

حل) با اعمال یک لنگر واحد، در $A$ داریم:

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx + \frac{nNL}{AE}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^{3m}(1-0.3333x)(20.0x)dx + \frac{(-0.41667)(50)(5)}{AE}$$

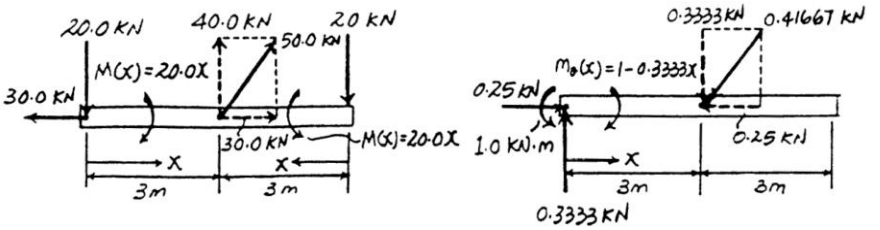
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

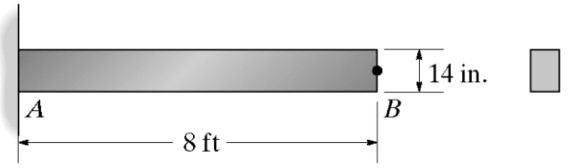


$$\Rightarrow \theta_A = \frac{30}{EI} - \frac{104.167}{AE} = \frac{30.0\times1000}{200\times10^9\left(\frac{1}{12}\times0.1\times0.3^2\right)} - \frac{104.167\times1000}{\left(\frac{\pi}{4}\times0.02^2\right)\times200\times10^9}$$

$$= -0.991\times10^{-3}\,rad$$




٩-٦٢) زیر تیر شکل زیر تحت دمای $T_b = 250^\circ F$ و روی تیر تحت دمای $T_t = 50^\circ F$ می‌باشد. اگر $\alpha = 6.5\times10^{-6}/^\circ F$ باشد، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $B$ را بواسطه تغییرات دما تعیین نمایید.

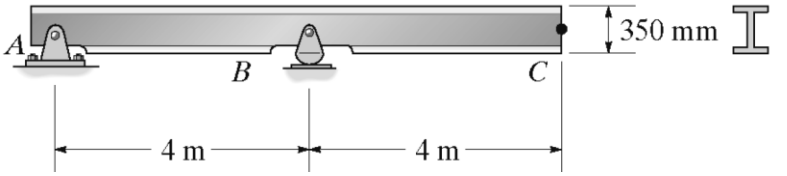



شکل مسئله ٩-٦٢

حل) با در نظر گرفتن مبداء $x$ از انتهای سمت راست تیر داریم:

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{m\alpha\left(T_b - T_t\right)}{c}dx = \int_0^{96}\frac{(-x)\times6.5\times10^{-6}\times100}{7}dx = -0.428in = 0.428in\uparrow$$

٩-٦٣) زیر تیر شکل زیر تحت دمای $T_b = 30^\circ C$ و روی تیر تحت دمای $T_t = 200^\circ C$ می‌باشد. اگر $\alpha = 12\times10^{-6}/^\circ C$ باشد، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $C$ را بواسطه تغییرات دما، تعیین نمایید.




شکل مسئله ٩-٦٣

حل)

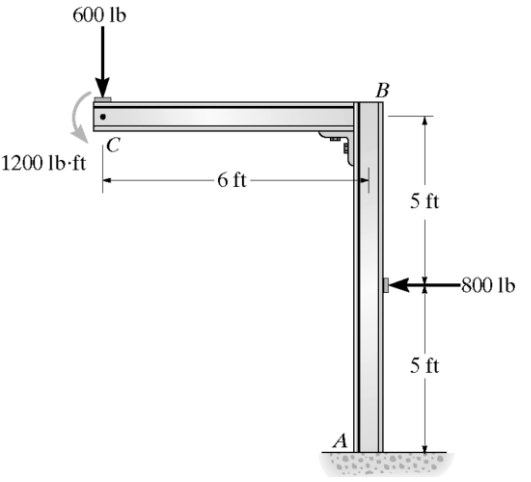
$$\Delta_C = \int_0^L \frac{m\alpha\Delta T_m}{c}dx = 2\int_0^{4000}\frac{(-x)\times12\times10^{-6}\times(-85)}{175}dx = 93.3mm\downarrow$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-٦٤) در سیستم سازه‌ای شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. تکیه‌گاه $A$ صورت گیردار است. تنها اثر خمش را در نظر بگیرید.



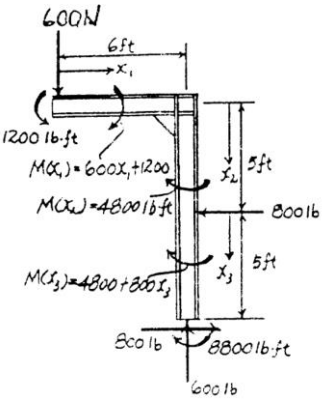

شکل مسئله ۹-٦٤

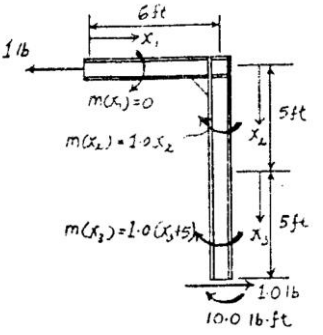
حل)

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx$$

$$(\Delta_C)_h = 0 + \frac{1}{EI}\int_0^5 (1.00x_2)4800\,dx_2 + \frac{1}{EI}\int_0^5 1.00(x_3+5)(4800+800x_3)\,dx_3$$

$$\Rightarrow (\Delta_C)_h = \frac{323\times10^3}{EI}$$



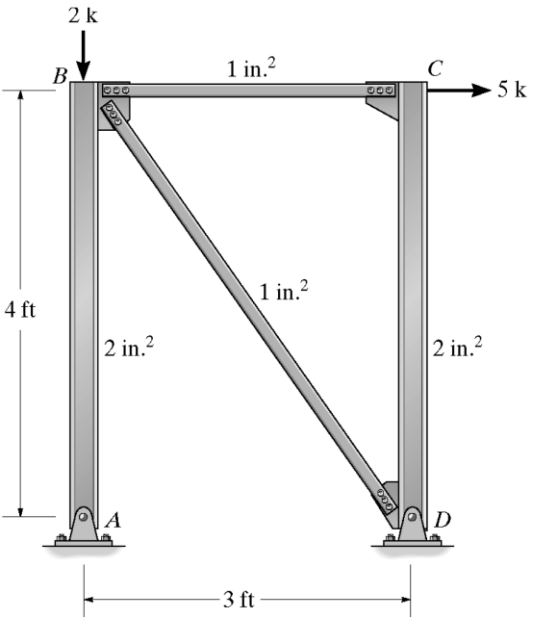




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۹-٦۵) در سیستم سازه‌ای شکل زیر، با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی می‌باشند. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۹-٦۵

حل) با اعمال یک بار واحد در $C$ داریم:

$$(\Delta_C)_h = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{1.33\times 4.667\times 4\times 12}{2\times 29\times 10^3} + \frac{1\times 5\times 3\times 12}{1\times 29\times 10^3}$$
$$+ \frac{-8.33\times(-1.667)\times 5\times 12}{1\times 29\times 10^3} = 0.0401 in \rightarrow$$

۹-٦٦) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

| عضو | $N$ | $\partial N / \partial P$ |
|---|---|---|
| $AB$ | 1.333P+4.667 | 1.333 |
| $BC$ | P+5 | 1 |
| $BD$ | -1.667P-8.33 | -1.667 |
| $CD$ | 0 | 0 |

$$\Delta_{C_h} = N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{4.667\times 1.33\times 4\times 12}{3\times 29\times 10^3} + \frac{5\times 1\times 3\times 12}{1\times 29\times 10^3} + 0$$

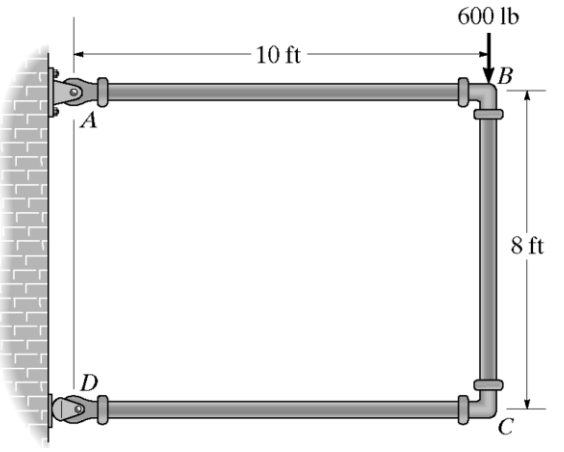
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$+\frac{-8.33\times(-1.667)\times 5\times 12}{1\times 29\times 10^3}=0.0401in\rightarrow$$

۹-۶۷) با استفاده از روش کار مجازی مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در تکیه‌گاه غلتکی $D$ را تعیین نمایید.




شکل مسئله ۹-۶۷

حل)

$$(\Delta_D)_v=\int_0^{10}\frac{(x)(600x)dx}{EI}+\int_0^{8}\frac{(10)(750x)dx}{EI}+0=\frac{440}{EI}\downarrow$$

۹-۶۸) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

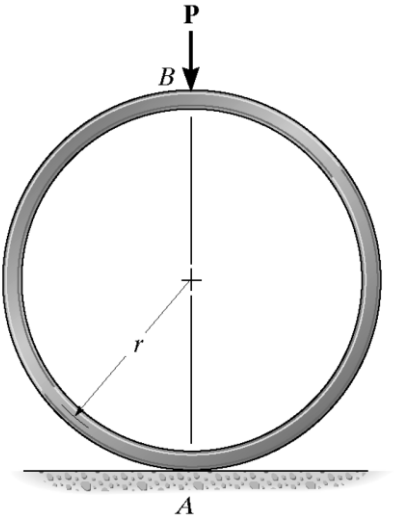
$$(\Delta_D)_v=\int_0^{10}\frac{(600x)xdx}{EI}+\int_0^{8}\frac{(10)(750x)dx}{EI}+0=\frac{440}{EI}\downarrow$$

۹-۶۹) در رینگ شکل زیر مقدار جابجایی نقطه $B$ را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





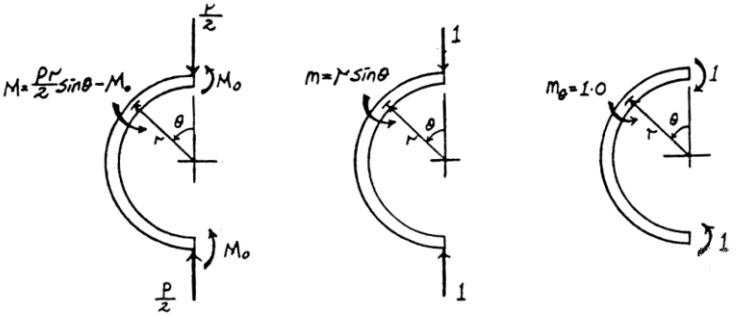

شکل مسئله ۹-۶۹

حل) به سبب تقارن می‌توان نصف حلقه را در نظرگرفت و جابجایی افقی $B$ برابر صفر است.

$$1.\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} ds$$

که در رابطه فوق، $ds = rd\theta$ می‌باشد.

$$\theta_B = 0 = \frac{1}{EI}\int_0^\pi 1.00\left(\frac{\mathrm{Pr}}{2}\sin\theta - M_0\right) rd\theta \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{\mathrm{Pr}}{\pi}$$




برای جابجایی قائم ایجاد شده در $B$ داریم:

$$1.\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds = \Delta_B = \frac{1}{EI}\int_0^\pi (r\sin\theta)\left(\frac{\mathrm{Pr}}{2}\sin\theta - \frac{\mathrm{Pr}}{\pi}\right) rd\theta$$

$$= \frac{\mathrm{Pr}^3}{2\pi EI}\int_0^\pi \left(\pi\sin^2\theta - 2\sin\theta\right) d\theta = \frac{\mathrm{Pr}^3}{4\pi EI}\int_0^\pi \left(\pi(1-\cos 2\theta) - 4\sin\theta\right) d\theta$$

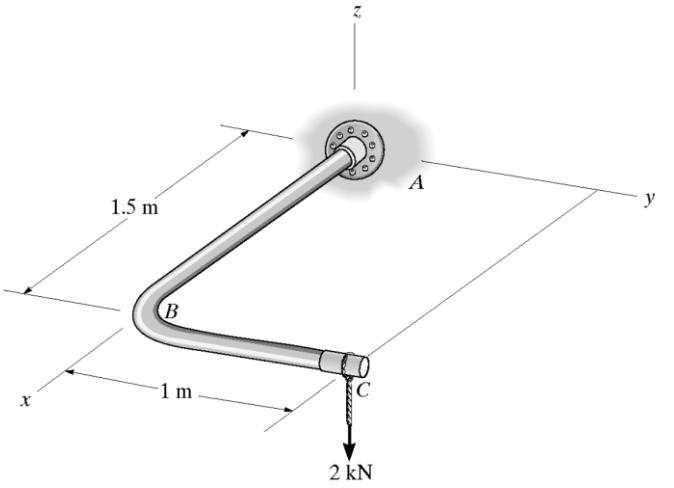
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{\mathrm{Pr}^3}{4\pi EI}\left(\pi^2 - 8\right)$$

۹-۷۰) برای میله شکل زیر، $G=75\ GPa$، $E=200\ GPa$ و دارای شعاع ۳۰ میلیمتر است. با استفاده از روش کار مجازی مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. اثر خمش، برش و انرژی کرنشی پیچشی را در نظر بگیرید.




شکل مسئله ۹-۷۰

حل)

$$\left(\Delta_C\right)_v = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx + \int_0^L K\left(\frac{vV}{GA}\right)dx + \sum \frac{tTL}{GJ} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(-x)(-2x)}{EI}dx + \int_0^{1.5} \frac{(x-1.5)(2x-3)}{EI}dx + \int_0^1 \frac{\left(\frac{10}{9}\right)(1)(2)}{GA}dx$$

$$+ \int_0^{1.5} \frac{\left(\frac{10}{9}\right)(1)(2)}{GA}dx + \frac{(-1)(-2)(1.5)}{GJ} + 0$$

$$\left(\Delta_C\right)_v = \frac{2.25\times10^3}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}\times0.03^4} + \frac{5.556\times10^3}{75\times10^9\times\pi\times0.03^2} + \frac{3\times10^3}{75\times10^9\times\frac{\pi}{2}\times0.03^4}$$

$$\Rightarrow \left(\Delta_C\right)_v = 0.017684 + 0.0000262 + 0.0314380 = 0.0491\,m = 49.1\,mm\downarrow$$

۹-۷۱) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$P = 2kN \quad \Rightarrow \quad (\Delta_C)_v = \int_0^L \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)dx + \int_0^L K\left(\frac{V}{GA}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)dx + \sum \frac{T}{GJ}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)L$$

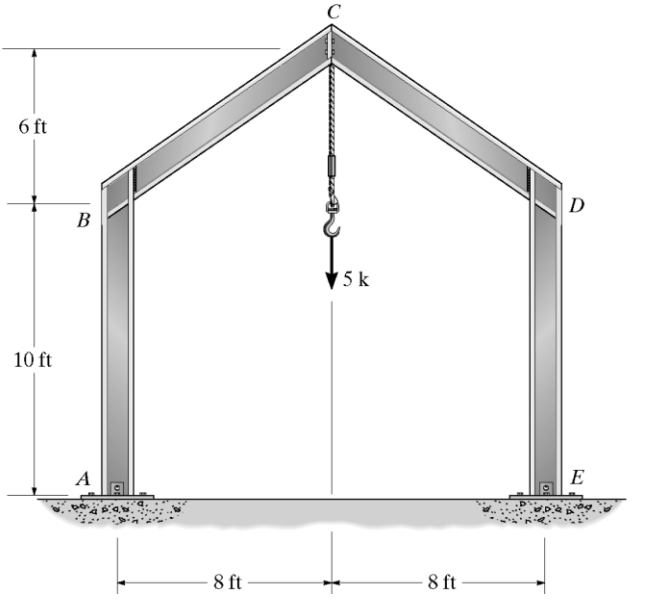
$$= \int_0^1 \frac{(-2x)(-x)}{EI}dx + \int_0^{1.5} \frac{(2x-3)(x-1.5)}{EI}dx + \int_0^1 \frac{\left(\frac{10}{9}\right)(2)(1)}{GA}dx$$

$$+ \int_0^{1.5} \frac{\left(\frac{10}{9}\right)(2)(1)}{GA}dx + \frac{(-2)(-1)(1.5)}{GJ} + 0$$

$$(\Delta_C)_v = \frac{2.25\times10^3}{200\times10^9\times\frac{\pi}{4}\times0.03^4} + \frac{5.556\times10^3}{75\times10^9\times\pi\times0.03^2} + \frac{3\times10^3}{75\times10^9\times\frac{\pi}{2}\times0.03^4}$$

$$\Rightarrow (\Delta_C)_v = 0.017684 + 0.0000262 + 0.0314380 = 0.0491\,m = 49.1mm\downarrow$$

۹-۷۲) در قاب نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. فرض کنید که اتصال اعضا در نقاط $A$، $C$ و $E$ به صورت مفصلی و همچنین مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۷۲

حل)

$$(\Delta_C)_v = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = 2\left[\int_0^{10} \frac{0.25x(1.25x)dx}{EI} + \int_0^{10} \frac{-0.25x(-1.25x)dx}{EI}\right]$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$= \frac{1.25\times10^3}{3EI} = \frac{417}{EI} \downarrow$$

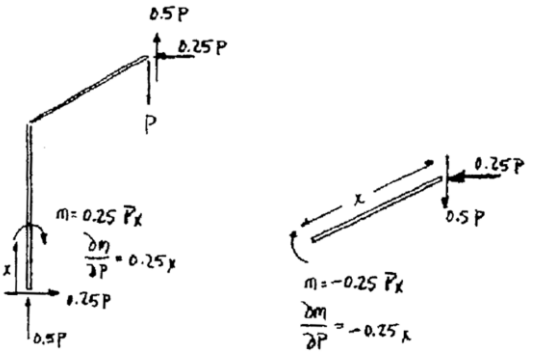
۹-۷۳) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

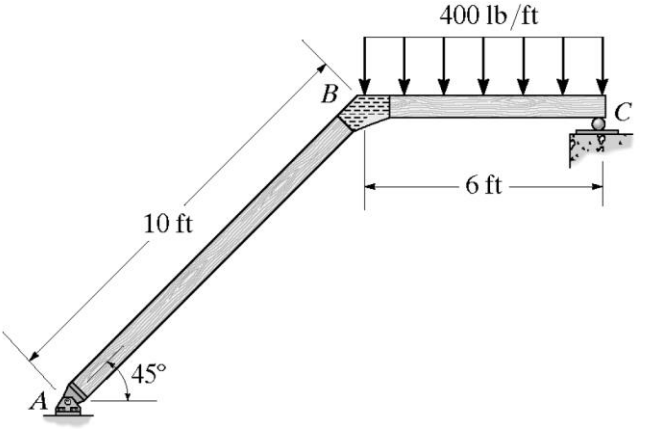
$$P = 5kN \quad \Rightarrow \quad (\Delta_C)_v = \int_0^L \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)dx$$

$$\Rightarrow (\Delta_C)_v = 2\left[\int_0^{10} \frac{(1.25x)0.25x\,dx}{EI} + \int_0^{10} \frac{(-1.25x)(-0.25x)dx}{EI}\right]$$

$$= \frac{1.25\times10^3}{3EI} = \frac{417}{EI} \downarrow$$




۹-۷۴) در سیستم نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش کار مجازی، مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۹-۷۴

حل)

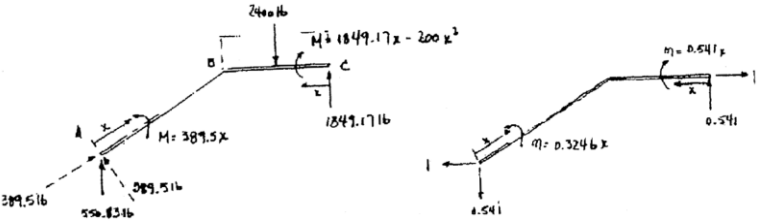
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$(\Delta_C)_h = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^6 \frac{(0.541x)(1849.17x - 200x^2)dx}{EI} + \int_0^{10} \frac{(0.325x)(389.5x)dx}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[(333.47x^3 - 27.05x^4)\Big|_0^6 + (42.15x^3)\Big|_0^{10}\right] = \frac{79.1}{EI} \rightarrow$$




۹-۷۵) مسئله قبل را با استفاده از روش کاستیگلیانو دوباره حل نمایید.

حل) با استفاده از قضیه کاستگلیانو داریم:

$$P = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta_C)_h = \int_0^L \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)dx$$

$$(\Delta_C)_h = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^6 \frac{(0.541x)(1849.17x - 200x^2)dx}{EI} + \int_0^{10} \frac{(0.325x)(389.5x)dx}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[(333.47x^3 - 27.05x^4)\Big|_0^6 + (42.15x^3)\Big|_0^{10}\right] = \frac{79.1}{EI} \rightarrow$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل دهم
# تحلیل سازه‌های نامعین ایستایی با استفاده از روش نیرو

## ۱۰-۱ کلیات

در طراحی سازه‌ها با توجه به اینکه آن سازه به چه منظوری مورد استفاده قرار می‌گیرند، به صورت معین استاتیکی و یا نامعین انتخاب می‌شوند. اضافه کردن لولا در نقاط عطف می‌تواند سازه را معین کند و مشکل را مرتفع سازد. این روند و روال برای ساخت سازه‌های بلند میسر نمی‌باشد و این سازه‌ها نامعین باقی می‌مانند. بدین ترتیب هر دو نوع سازه عملاً وجود دارند، به همین دلیل روش‌های تحلیلی برای هر دو نوع سازه معین و نامعین استاتیکی نیاز است. قاب پرتال (درگاه) نشان داده شده در شکل ۱۰-۱ را در نظر بگیرید. قاب، بارهای $P$ و $W$ را در صفحه خود حمل می‌کند و بدین ترتیب، سیستم دوبعدی است. از آنجایی که اعضای عمودی $AB$ و $FD$ قاب در انتهای نقاط $A$ و $F$ گیردار شده‌اند، بارهای اعمال شده تولید ٦ عکس‌العمل نیرو و گشتاور مانند آنچه در شکل نشان داده شده است می‌کنند. برای یک سیستم دو بعدی سه معادله تعادل استاتیکی وجود دارد. بدین ترتیب این قاب از نظر استاتیکی نامعین خارجی است و دارای درجه نامعینی ۳ است. این موقعیت با برش زدن در یکی از اعضا بهبود نمی‌یابد زیرا با وجود حذف یکی از مجموعه عکس‌العمل‌ها، سه برآیند تنش داخلی را ایجاد می‌کند. اگر سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مشخص باشند یا سه برآیند تنش مشخص باشند با استفاده از معادله‌های تعادل استاتیکی سه مجهول به دست می‌آیند و مسئله حل می‌شود. در تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی دو روش به کار می‌رود. در یک روش، سازه با آزاد کردن به یک سازه معین استاتیکی کاهش می‌یابد، یعنی با حذف تعداد مناسبی از مجهولات با استفاده از بررسی شرایط تعادل استاتیکی شرایطی فراهم شود که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یا برآیند تنش‌های داخلی به دست بیایند.

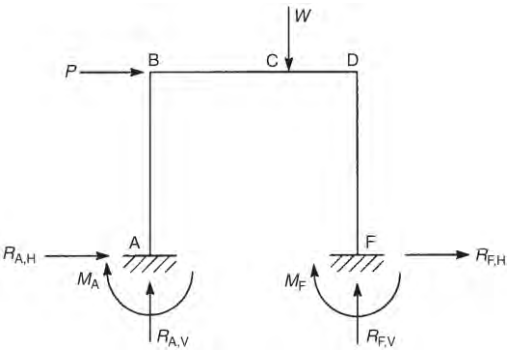
به عنوان مثال در قاب شکل ۱۰-۱ اگر یکی از تکیه‌گاه‌ها غلتکی و دیگری مفصل شود تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به سه کاهش می‌یابد. نتیجه مشابهی به دست می‌آید اگر

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



یک تکیه‌گاه گیردار باقی بماند و دیگری کاملاً حذف شود. آزاد کردن یک سازه با این روش باعث ایجاد جابجایی‌هایی می‌شود که در غیر این حالت وجود نخواهند داشت. این جابجایی‌ها را می‌توان با تحلیل سازه آزاد شده معین استاتیکی محاسبه کرد. سپس سیستم نیروی مورد نیاز برای حذف آنها به دست خواهد آمد. یعنی با استفاده از شرایط سازگاری جابجایی.




*شکل۱۰-۱ نامعینی استاتیکی یک قاب پرتال*

این روش اصطلاحاً روش نرمی یا روش نیرو نامیده می‌شود. روش دیگری که به عنوان روش سختی یا روش جابجایی شناخته می‌شود مشابه روش نرمی است، تفاوت اصلی این است که در این روش، مجهولات، جابجایی‌ها و تغییرمکان‌ها در نقاط خاصی از سازه هستند. این روش نیازمند آن است که سازه به تعدادی المان تقسیم شود که برای هر کدام از المان‌ها روابط بار-جابجایی مشخص باشند و مجهول نباشند. سپس معادله‌های تعادل در محل تقاطع المان‌ها با هم بر حسب جابجایی‌ها نوشته می‌شود و برای به دست آوردن جابجایی‌های خواسته شده حل می‌شوند. برای سازه‌های واقعی، نتیجه هر دو روش نرمی و سختی، درجات بالایی از نامعینی استاتیکی و تعداد زیادی از معادلات همزمان را به همراه خواهند آورد که به وسیله تکنیک‌های بر مبنای کامپیوتر به راحتی قابل حل هستند. با این وجود، روش نرمی نیازمند این است که سازه با آزاد کردن، به شرایط معین استاتیکی کاهش یابد که این روند، نیازمند قضاوت طراح است. روش سختی به هیچ قضاوتی نیازمند نیست و به صورت خاصی برای محاسبه خودکار مناسب است. هرچند کاربرد عملی روش‌های

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

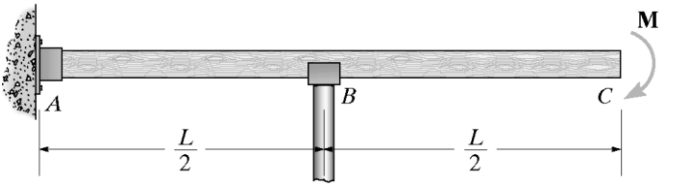
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



سختی و نرمی اساساً بر مبنای کامپیوتر است، اما این روش‌های تحلیل همانطور که خواهیم دید دارای مبنای دستی هستند.[1]

**۱۰-۲ مسائل:**

۱۰-۱) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نموده و دیاگرام لنگر خمشی تیر را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ گیردار و $B$ غلتکی است.



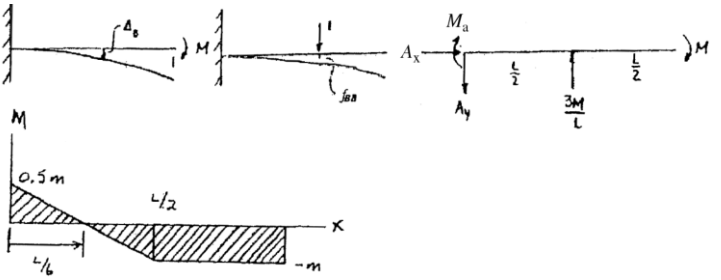

شکل مسئله ۱۰-۱

حل)

$$\Delta_B = \frac{M}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{8EI}$$

$$f_{BB} = \frac{1\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{L^3}{24EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta_B + B_y f_{BB} = 0$$

$$\frac{ML^2}{8EI} + B_y \frac{L^3}{24EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{3M}{L}$$




$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_y + \frac{3M}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{3M}{L}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3M}{L}\left(\frac{L}{2}\right) - M - M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = 0.5M$$

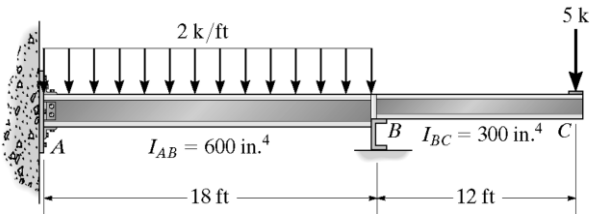
[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۰-۲) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ گیردار و $B$ غلتکی است. همچنین $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر گرفته شود.



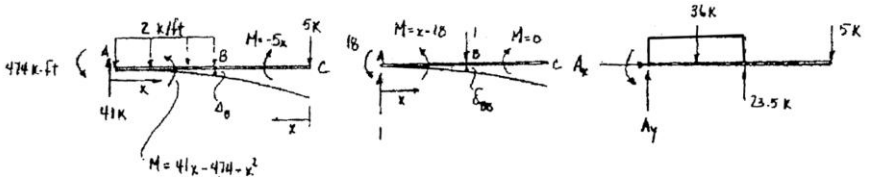

شکل مسئله ۱۰-۲

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم معین شده و خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{18} \frac{(x-18)(41x-474x^2)}{EI_{AB}}dx + 0 = \frac{45684}{EI_{AB}}$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^{18} \frac{(18-x)}{EI_{AB}}dx + 0 = \frac{1944}{EI_{AB}}$$

$$\Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{45684}{EI_{AB}} + B_y \frac{1944}{EI_{AB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = -23.5k$$

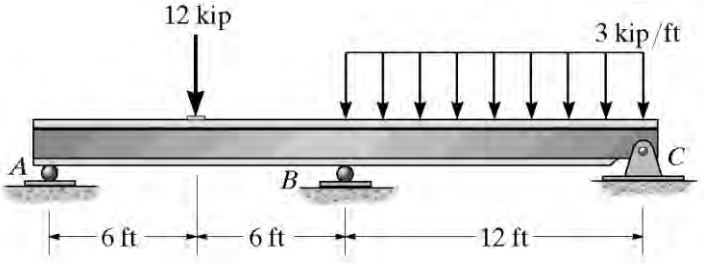



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 36 - 23.5 + 5 = 17.5$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_A + 36\times 9 - 23.5\times 18 + 5\times 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 51k.ft$$

۱۰-۳) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نموده و دیاگرام لنگر خمشی تیر را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۰-۳

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) سیستم یک درجه نامعین است. با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y + C_y - 12 - 36 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y \times 12 + C_y \times 24 - 12 \times 6 - 36 \times 18 = 0 \qquad (2)$$

با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم معین شده و خواهیم داشت:

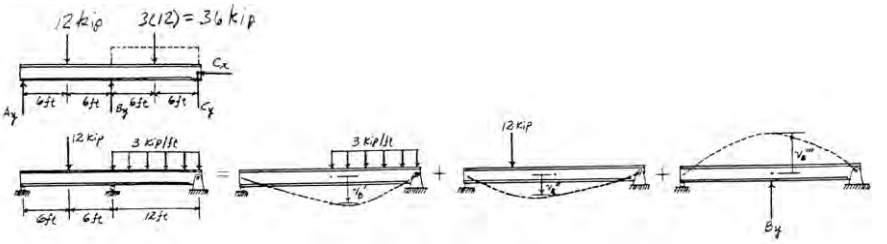
$$\upsilon'_B = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5 \times 3 \times 24^4}{768EI} = \frac{6480}{EI} \downarrow$$

$$\upsilon''_B = \frac{Pbx}{6EIL}\left(L^2 - b^2 - x^2\right) = \frac{12 \times 6 \times 12}{6 \times EI \times 24}\left(24^2 - 6^2 - 12^2\right) = \frac{2376}{EI} \downarrow$$

$$\upsilon'''_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{B_y \times 24^3}{48EI} = \frac{288B_y}{EI} \uparrow$$

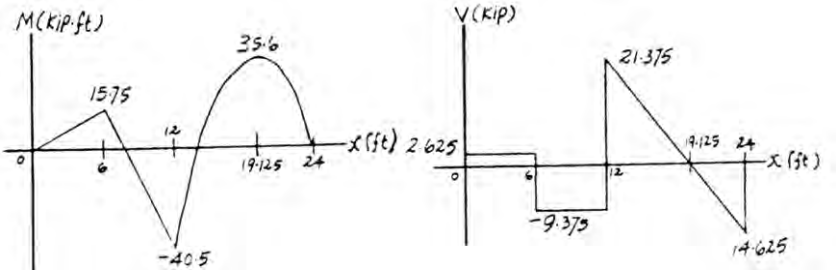
شرایط همسازی ایجاب می‌کند که، $0 = \upsilon'_B + \upsilon''_B + \upsilon'''_B$

$$0 = \frac{6480}{EI} + \frac{2376}{EI} + \left(-\frac{288B_y}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad B_y = 30.75kip$$




با جایگذاری مقدار $B_y$ در روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A_y = 2.625kip \qquad C_y = 14.625kip$$

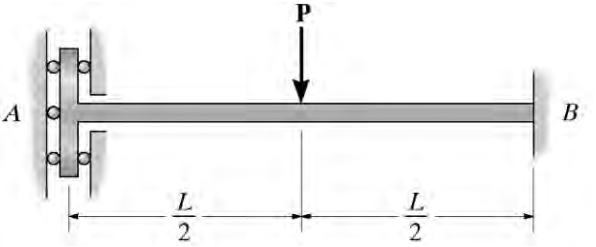



۱۰-٤) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. تکیه‌گاه $A$ تنها قادر به تحمل یک لنگر و $B$ گیردار است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-٤

حل) با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

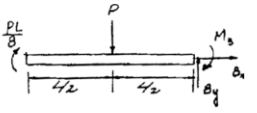
$$(\theta_A)_1 = \frac{PL^2}{8EI} \qquad (\theta_A)_2 = \frac{M_A L}{EI} \quad \Rightarrow \quad 0 = (\theta_A)_1 - (\theta_A)_2$$

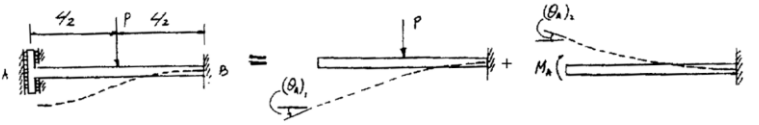
$$0 = \frac{PL^2}{8EI} - \frac{M_A L}{EI} \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{PL}{8}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{PL}{8} + \frac{PL}{2} - M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = \frac{3PL}{8}$$

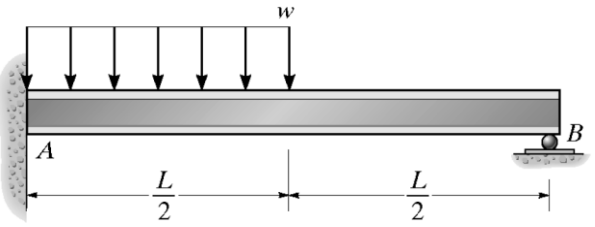
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = P$$





۱۰-۵) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۰-۵

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

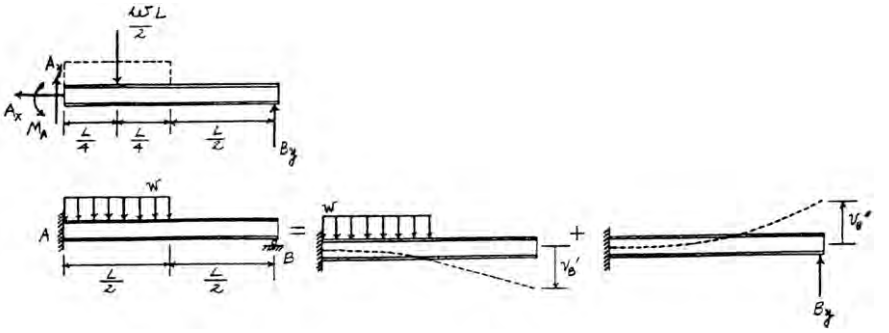
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y - \frac{wL}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y(L) + M_A - \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = 0 \qquad (2)$$

با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:



$$\upsilon'_B = \frac{7wL^4}{384EI} \downarrow \qquad \upsilon''_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y L^3}{3EI} \uparrow$$

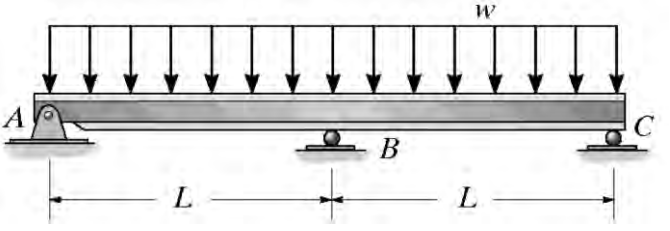
با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$0 = \upsilon'_B + \upsilon''_B = \frac{7wL^4}{384EI} + \left(-\frac{B_y L^3}{3EI}\right) \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{7wL}{128}$$

با جایگذاری $B_y$ در روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A_y = \frac{57wL}{128} \qquad M_A = \frac{9wL^2}{128}$$

۱۰-۶) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نموده و دیاگرام لنگر خمشی تیر را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۰-۶

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y + C_y - 2wL = 0 \qquad (1)$$

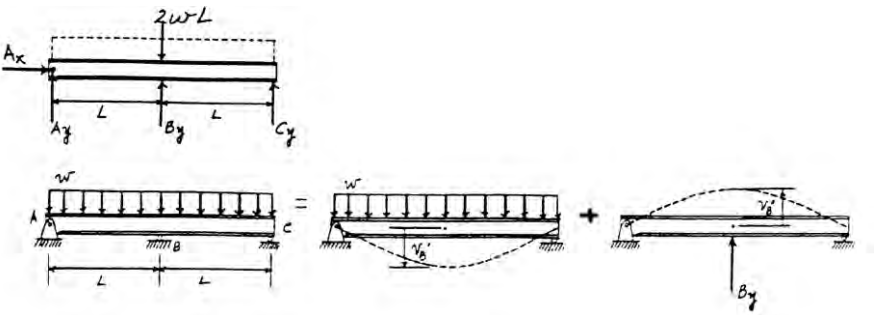
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y(L) + C_y(2L) - (2wL)(L) = 0 \qquad (2)$$

با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:



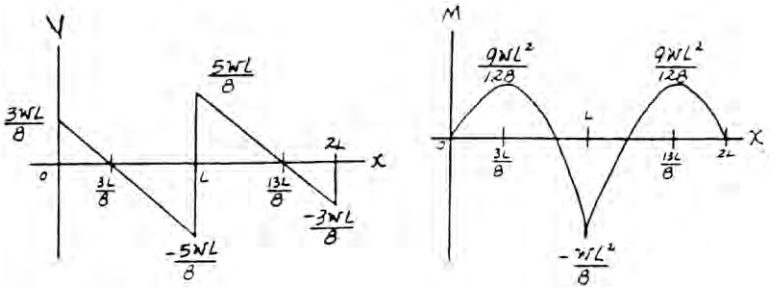

$$\upsilon'_B = \frac{5wL^4_{AC}}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI} \downarrow \qquad \upsilon''_B = \frac{PL^3_{AC}}{48EI} = \frac{B_y(2L)^3}{48EI} = \frac{B_yL^3}{6EI} \uparrow$$

با استفاده از شرایط همسازی داریم:

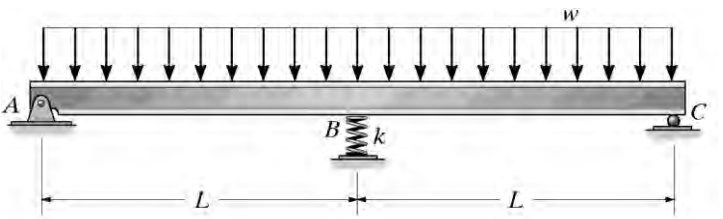
$$0 = \upsilon'_B + \upsilon''_B = \frac{5wL^4}{24EI} + \left(-\frac{B_yL^3}{6EI}\right) \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{5wL}{4}$$

با جایگذاری $B_y$ در روابط (۱) و (۲) داریم:

$$C_y = A_y = \frac{3wL}{8}$$




۱۰–۷) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های فنر گذاشته شده در $B$ با سختی $k$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.



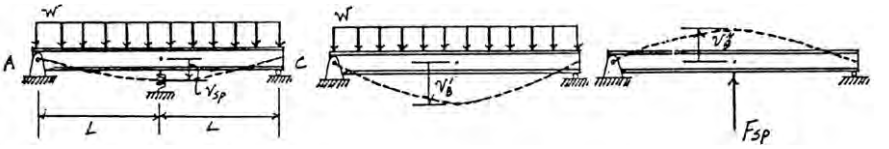

شکل مسئله ۱۰–۷

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:

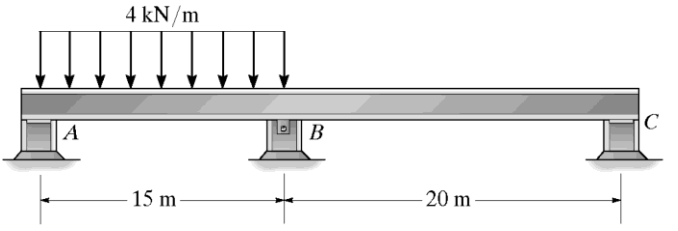



$$\upsilon'_B = \frac{5wL^4_{AC}}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI} \downarrow \qquad \upsilon''_B = \frac{PL^3_{AC}}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}L^3}{6EI} \uparrow$$

با توجه به رابطه سختی و نیروی ایجاد شده در فنر ($\upsilon_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$) و با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$\upsilon_{sp} = \upsilon'_B + \upsilon''_B = \frac{F_{sp}}{k} = \frac{5wL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) \quad \Rightarrow \quad F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

۱۰–۸) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. فرض نمایید که $A$ و $C$ غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی عمل می‌نمایند.




شکل مسئله ۱۰–۸

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم به صورت معین در می‌آید و در نهایت با استفاده از شرایط همسازی مقدار عکس‌العمل $B$ تعیین می‌شود.

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{15} \frac{\left(\frac{4}{7}x\right)\left(\frac{330}{7}x - 2x^2\right)}{EI}dx + \int_0^{20} \frac{\left(\frac{3}{7}x\right)\left(\frac{90}{7}x\right)}{EI}dx = \frac{30535.714}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^{15} \frac{\left(\frac{4}{7}x\right)^2}{EI}dx + \int_0^{20} \frac{\left(\frac{3}{7}x\right)^2}{EI}dx = \frac{857.143}{EI}$$

$$\Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{30535.714}{EI} + B_y\left(\frac{857.143}{EI}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y = -35.525\,kN = -35.6kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 60 \times 7.5 - 35.625 \times 15 + C_y \times 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 2.41kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - 60 + 35.625 - 2.41 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 26.8kN$$

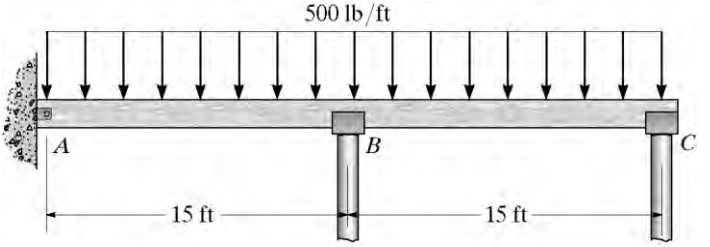
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

۱۰-۹) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نموده و دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و تکیه‌گاه‌های $B$ و $C$ به صورت غلتکی هستند.




شکل مسئله ۱۰-۹

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم به صورت معین در می‌آید و در نهایت با استفاده از شرایط همسازی مقدار عکس‌العمل $B$ تعیین می‌شود.

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = 2\int_0^{15} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)\left(7500x - 250x^2\right)}{EI}dx = \frac{5273437.5}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = 2\int_0^{15} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{EI}dx = \frac{562.5}{EI}$$

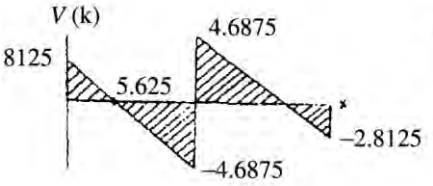
$$\Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5273437.5}{EI} + B_y\left(\frac{562.5}{EI}\right) = 0$$

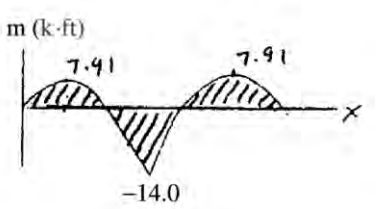
$$\Rightarrow \quad B_y = -9375\,lb = -9.38k$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y \times 30 - (15 - 9.375)\times 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 2.8125 = 2.81k$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - (15 - 9.375) + 2.8125 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2.8125 = 2.81k$$



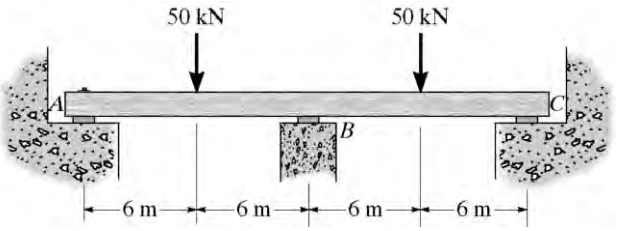




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۰-۱۰) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. فرض نمایید که $C$ و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی عمل می‌نماید.



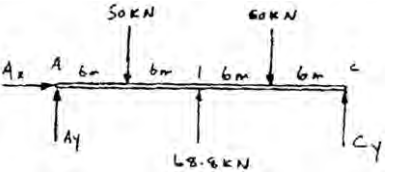

*شکل مسئله ۱۰-۱۰*

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم به صورت معین در می‌آید و در نهایت با استفاده از شرایط همسازی مقدار عکس‌العمل $B$ تعیین می‌شود.

$$\Delta_B = M_{B'} = \frac{1800}{EI}\times 3 + \frac{900}{EI}\times 8 - \frac{2700}{EI}\times 12 = -\frac{19800}{EI}$$

$$f_{BB} = m_{B'} = \frac{36}{EI}\times 4 - \frac{36}{EI}\times 12 = -\frac{288}{EI}$$

$$+\downarrow \Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{19800}{EI} + B_y\left(\frac{288}{EI}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = -68.8kN$$




$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 68.8\times 12 + C_y \times 24 - 50\times 6 - 50\times 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 15.6kN$$

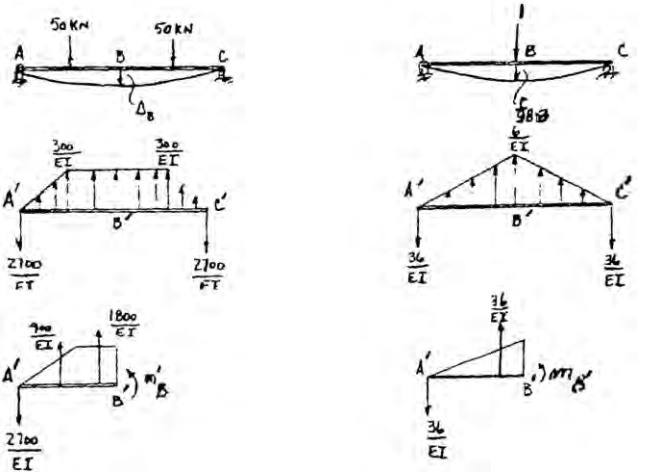
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 68.8 - 100 + 15.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 15.6kN$$

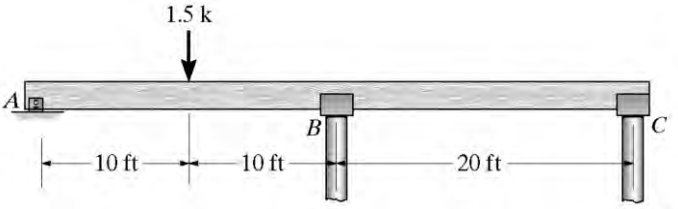
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





۱۰–۱۱) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است. فرض نمایید که $C$ و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی عمل می‌نماید.



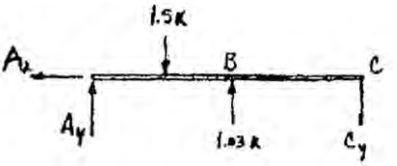

*شکل مسئله ۱۰–۱۱*

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم به صورت معین در می‌آید و در نهایت با استفاده از شرایط همسازی مقدار عکس‌العمل $B$ تعیین می‌شود.

$$\Delta_B = M_{B'} = \frac{93.75}{EI}\times 20 - \frac{75}{EI}\times\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{1375}{EI}$$

$$f_{BB} = M' = \frac{100}{EI}\times 20 - \frac{100}{EI}\times\frac{20}{3} = \frac{1333.33}{EI}$$

$$\Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1375}{EI} + B_y\left(\frac{1333.33}{EI}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = -1.03k$$




$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.5\times 30 - 1.03\times 20 - A_y\times 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 0.609\,k$$

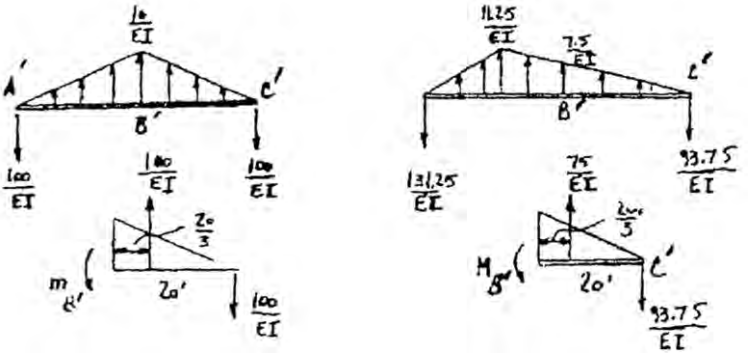
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

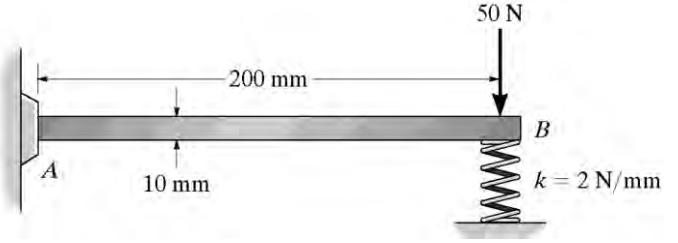


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.609 - 1.5 + 1.03 - C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 0.141$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$




۱۰-۱۲) در سیستم شکل زیر مقدار جابجایی ایجاد شده در انتهای $B$ را تعیین نمایید. تیر دارای عرض ۵ میلیمتر و ارتفاع ۱۰ میلیمتر است. همچنین دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم نمایید. مقدار $E=200GPa$ در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱۲*

حل) ممان اینرسی تیر حول محور تحت خمش به صورت زیر خواهد بود:

$$I = \frac{1}{12}(0.005)(0.01)^3 = 0.4166(10^{-9})m^4$$

$$(\Delta_B)_1 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{50 \times 0.2^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 0.4166 \times 10^{-9}} = 0.0016m$$

$$(\Delta_B)_2 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{2000\Delta_B \times 0.2^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 0.4166 \times 10^{-9}} = 0.064\Delta_B$$

با اعمال شرایط همسازی تغییرشکل‌ها داریم:

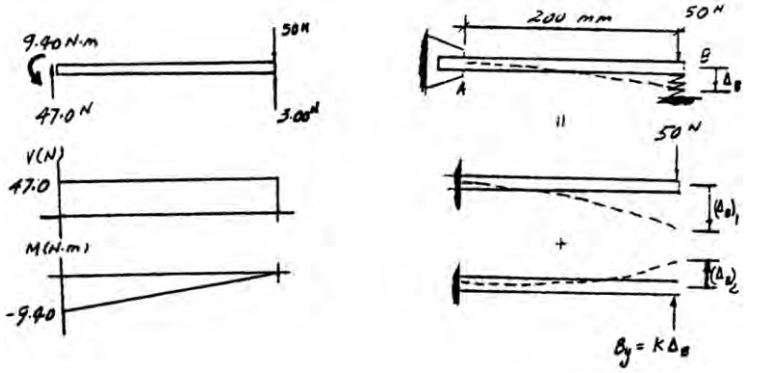
$$+\downarrow \Delta_B = (\Delta_B)_1 - (\Delta_B)_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_B = 0.0016 - 0.064\Delta_B = 0.001503\ m = 1.5mm$$

$$B_y = k\Delta_B = 2 \times 1.5 = 3N$$

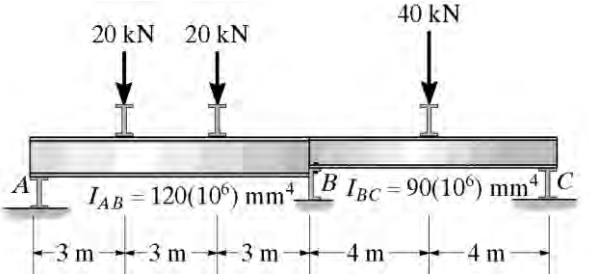
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



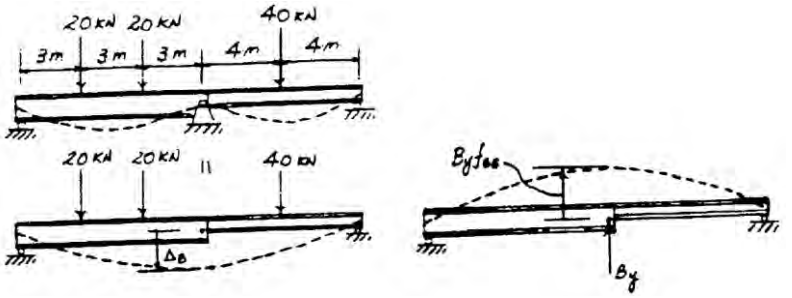



۱۰-۱۳) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین و دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید که $C$ و $A$ غلتکی و تکیه‌گاه $B$ به صورت مفصلی عمل می‌نماید. مقدار $E=200\ GPa$ در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱۳*

حل) با حذف تکیه‌گاه $B$ سیستم به صورت معین در می‌آید و در نهایت با استفاده از شرایط همسازی مقدار عکس‌العمل $B$ تعیین می‌شود.




شرایط سازگاری تغییرشکل‌ها ایجاب می‌نماید که:

$$+\downarrow \Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \qquad (1)$$

با استفاده از روش تیر مزدوج داریم:

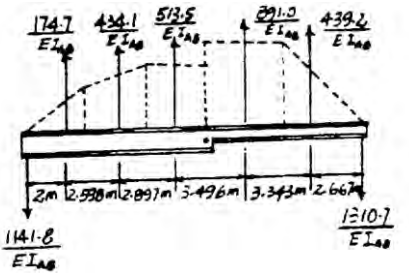
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

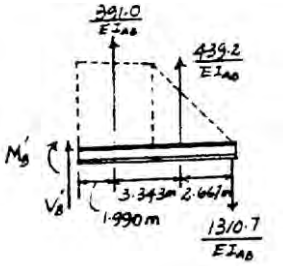
**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum M_{B'}=0 \quad \Rightarrow \quad -M_{B'}+\frac{891}{EI_{AB}}\times 1.99+\frac{439.2}{EI_{AB}}\times 5.333-\frac{1310.7}{EI_{AB}}\times 8=0$$

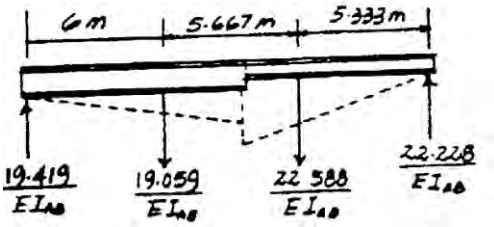
$$\Rightarrow \quad \Delta_B=M_{B'}=-\frac{6369.6}{EI_{AB}}$$

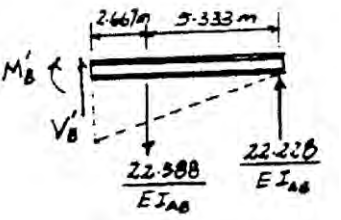



$$\sum M_{B'}=0 \quad \Rightarrow \quad -M_{B'}-\frac{22.588}{EI_{AB}}\times 2.667+\frac{22.228}{EI_{AB}}\times 8=0$$

$$\Rightarrow \quad f_{BB}=M_{B'}=\frac{117.59}{EI_{AB}}$$




از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{6369.6}{EI_{AB}}-\frac{117.59}{EI_{AB}}B_y=0$$

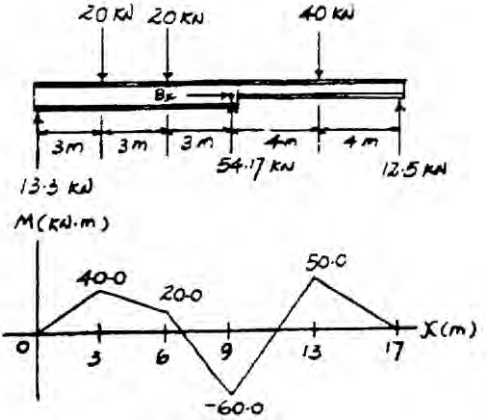
$$\Rightarrow B_y=54.2kN \qquad B_x=0$$

$$\Rightarrow C_y=12.5kN \qquad A_y=13.3kN$$

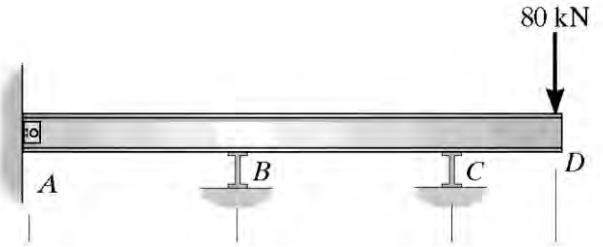
**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





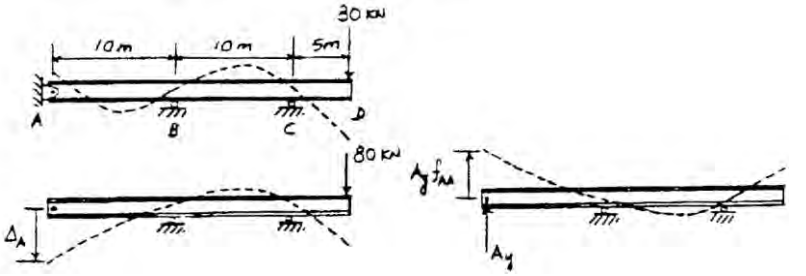

۱۰-۱٤) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه $A$ به اندازه ۳۰ میلیمتر به سمت بالا حرکت می‌کند. فرض نمایید که $B$ و $C$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی عمل می‌نماید. مقدار $E=200\ GPa$ و $I = 90\times10^{6} mm^{4}$ در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱٤*

حل) با اعمال شرایط همسازی داریم:

$$+\uparrow \qquad 0.03 = A_y f_{AA} - \Delta_A \qquad (1)$$




با استفاده از روش تیر مزدوج داریم:

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{A'} - \frac{666.67}{EI}\times 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_A = M_{A'} = -\frac{6666.67}{EI}$$

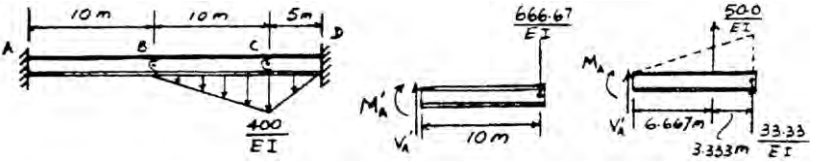
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\sum M_{A'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_{A'} + \frac{50}{EI} \times 6.667 + \frac{33.33}{EI} \times 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_{AA} = M_{A'} = \frac{666.67}{EI}$$




از رابطه (۱) داریم:

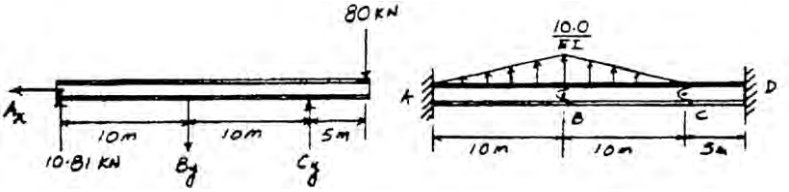
$$0.03 = A_y \frac{666.67 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 90 \times 10^{-6}} - \frac{6666.67 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 90 \times 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow A_y = 10.81kN = 10.8kN$$

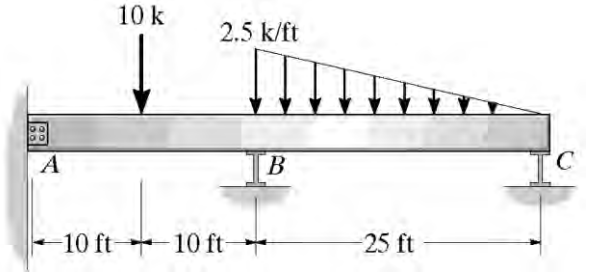
$$\Rightarrow B_y = 61.6kN$$

$$\Rightarrow C_y = 131kN$$

$$\Rightarrow A_x = 0$$




۱۰-۱۵) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید که $C$ و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی عمل می‌نماید. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱۵*

حل) با اعمال شرایط همسازی داریم:

$$+\downarrow \qquad \Delta_B - B_y f_{BB} = 0 \qquad (1)$$

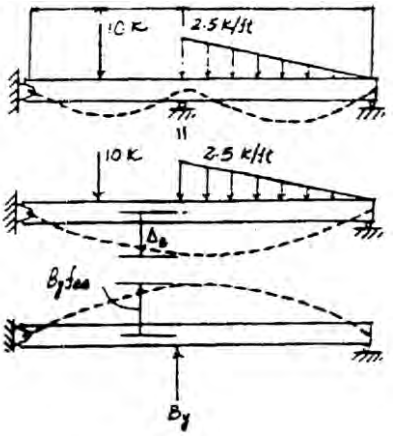
با استفاده از روش کار مجازی داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

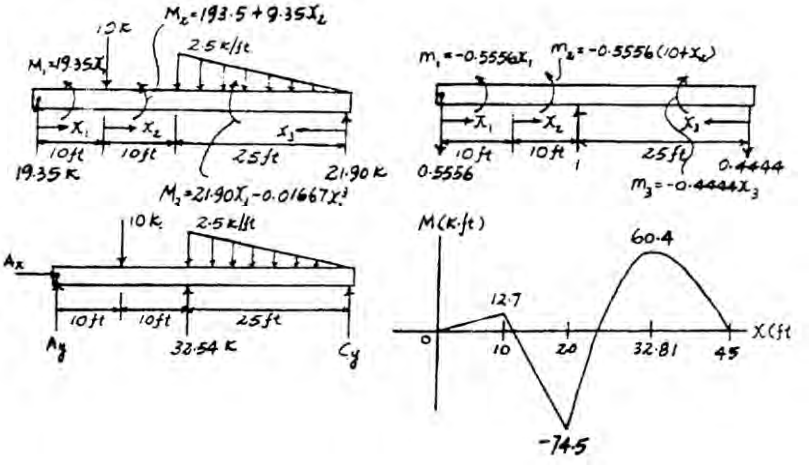


$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(-0.5556x_1)\times(19.35x_1)}{EI}dx_1$$
$$+\int_0^{10} \frac{(-5.556-0.5556x_2)\times(193.5+9.35x_2)}{EI}dx_2$$
$$+\int_0^{25} \frac{(-0.4444x_3)\times(21.9x_3-0.01667x_3^3)}{EI}dx_3 = -\frac{60263.53}{EI}$$
$$f_{BB} = \int_0^{10} \frac{(-0.5556x_1)^2}{EI}dx_1 + \int_0^{25} \frac{(-0.4444x_3)^2}{EI}dx_3 + \int_0^{10} \frac{(-5.556-0.555x_2)^2}{EI}dx_2$$
$$= \frac{1851.85}{EI}$$




از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{60262.53}{EI} - B_y\frac{1851.85}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 32.5k$$




$$\Rightarrow A_x = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

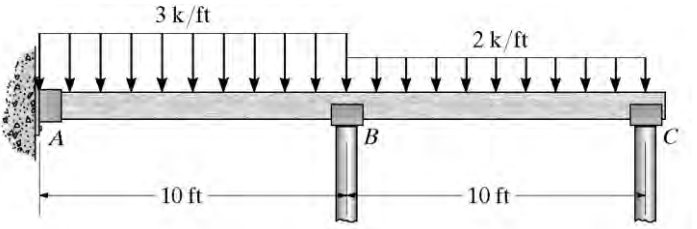
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$\Rightarrow A_y = 1.27k$

$\Rightarrow C_y = 7.44k$

۱۰-۱۶) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. فرض کنید که $C$ و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ به صورت گیردار عمل می‌نماید.




شکل مسئله ۱۰-۱۶

حل)

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \frac{15416.7}{EI}$$

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \frac{42916.7}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{x^2}{EI}dx + 0 = \frac{333.3}{EI}$$

$$f_{CC} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{x^2}{EI}dx + \int_0^{10} \frac{(10+x)^2}{EI}dx = \frac{2666.7}{EI}$$

$$f_{CB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(10+x)x}{EI}dx + 0 = \frac{833.3}{EI} = f_{BC}$$

$$\Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC} = 0$$

$$15416.7 + B_y(333.3) + C_y(833.3) = 0$$

$$\Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC} = 0$$

$$42916.7 + B_y(333.3) + C_y(2666.7) = 0$$

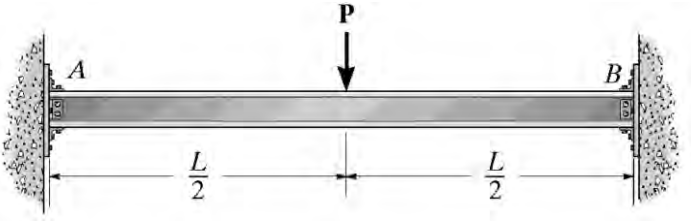
$$C_y = -7.5k \qquad B_y = -27.5k$$

۱۰-۱۷) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار هستند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






*شکل مسئله ۱۰-۱۷*

حل) با حذف لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌ها،تکیه‌گاه‌های گیردار را به صورت مفصلی در نظر می‌گیریم. با اعمال شرایط همسازی داریم:

$$\theta - \theta' = 0$$

$$\theta = A'_y = \frac{PL^2}{16EI}$$

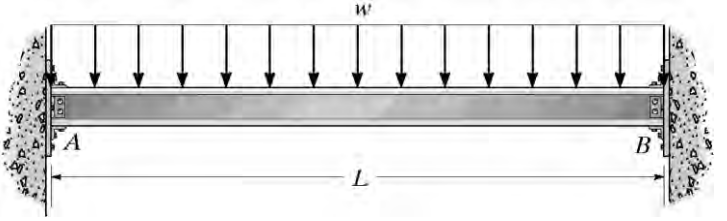
$$\theta' = A''_y = \frac{ML}{2EI}$$

$$\Rightarrow \frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{2EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{PL}{8}$$

با استفاده از تقارن و نوشتن معادله تعادل داریم:

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} \quad \Rightarrow \quad A_y = B_y = \frac{P}{2}$$

۱۰-۱۸) در تیر شکل زیر، دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ گیردار هستند. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱۸*

حل) با حذف لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌ها،تکیه‌گاه‌های گیردار را به صورت مفصلی در نظر می‌گیریم. با اعمال شرایط همسازی داریم:

$$\theta - \theta' = 0$$

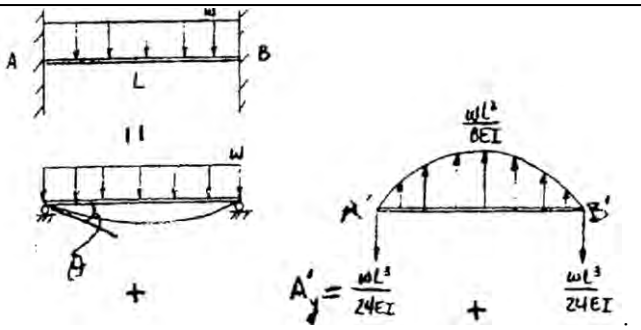
$$\theta = A' = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$\theta' = A''_y = \frac{ML}{2EI}$$

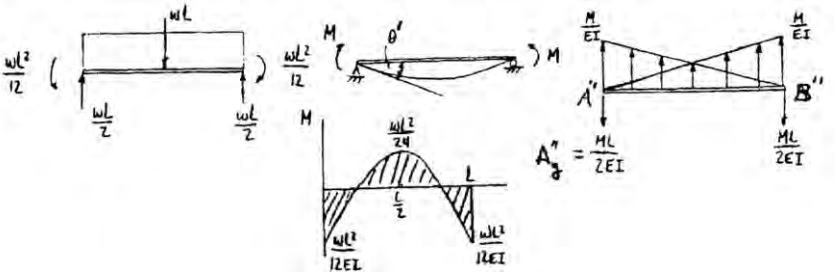
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

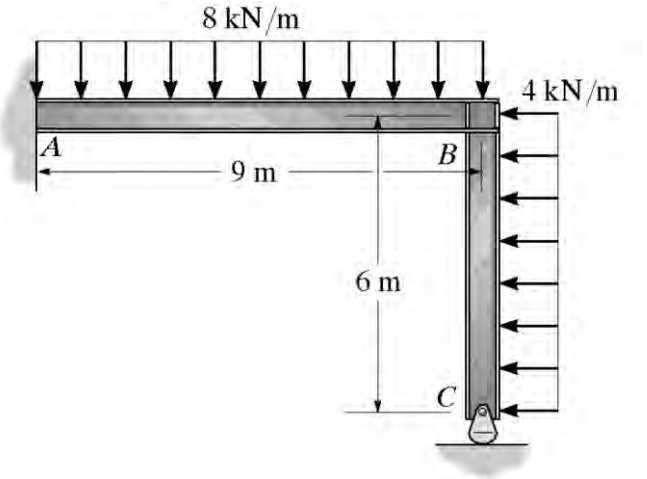





$$\frac{wL^3}{24EI}+\frac{ML}{2EI}=0 \quad \Rightarrow \quad M=M_A=M_B=-\frac{wL^2}{12}$$




۱۰-۱۹) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ گیردار و $C$ غلتکی می‌باشد. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۱۹*

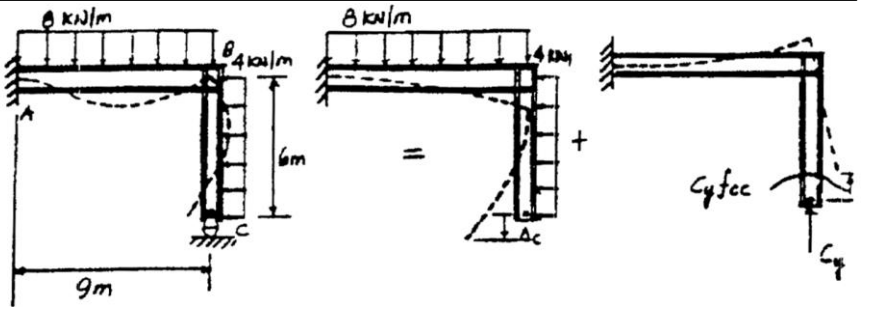
حل) با حذف تکیه‌گاه $C$ و اعمال شرایط مرزی داریم:

$$+\downarrow \qquad 0=\Delta_C - C_y f_{CC} \qquad (1)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

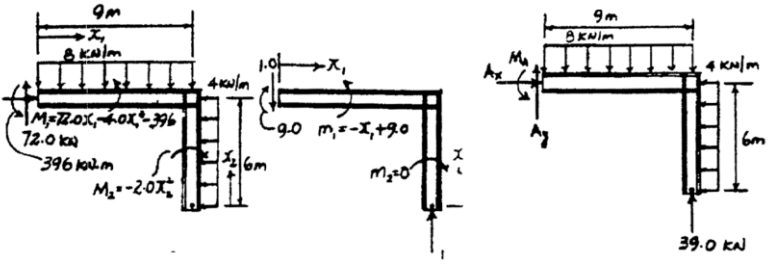





با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^9 \frac{(-x_1+9)(72x_1-4x_1^2-396)}{EI}dx_1 = \frac{-9477}{EI}$$

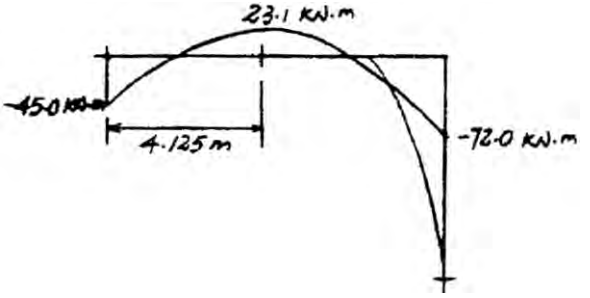
$$f_{CC} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^9 \frac{(-x_1+9)^2}{EI}dx_1 = \frac{243}{EI}$$




با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$\Rightarrow \qquad 0 = \frac{9477}{EI} - \frac{243}{EI}C_y$$

$$C_y = 39kN \quad \Rightarrow \quad A_y = 33kN \quad \Rightarrow \quad A_x = 24kN \quad \Rightarrow \quad M_A = 45kN.m$$

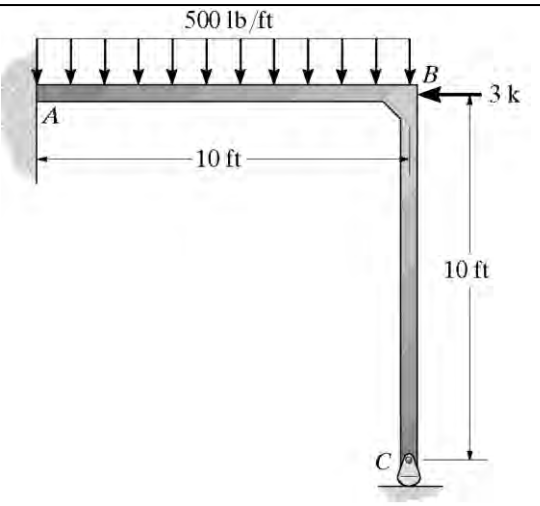



۱۰-۲۰) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-۲۰

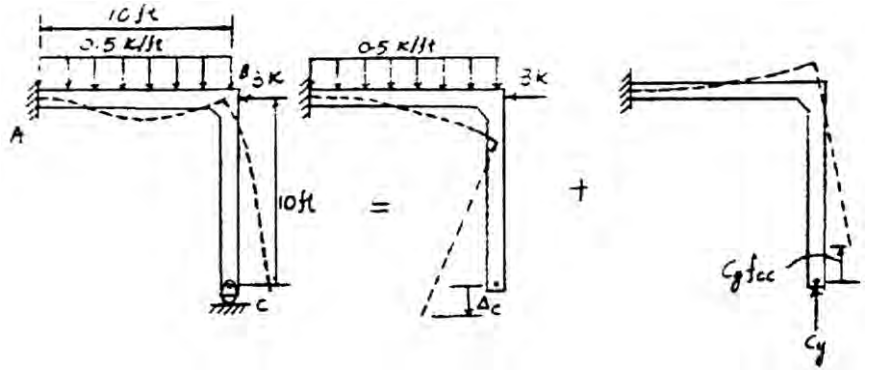
حل) با حذف تکیه‌گاه $C$ و اعمال شرایط مرزی داریم:

$$+\downarrow \qquad 0 = \Delta_C - C_y f_{CC} \qquad (1)$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(x_1)(-0.25x_1^2)}{EI}dx_1 = \frac{-625}{EI}$$

$$f_{CC} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(x_1)^2}{EI}dx_1 = \frac{333.33}{EI} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{625}{EI} - \frac{333.33}{EI}C_y$$

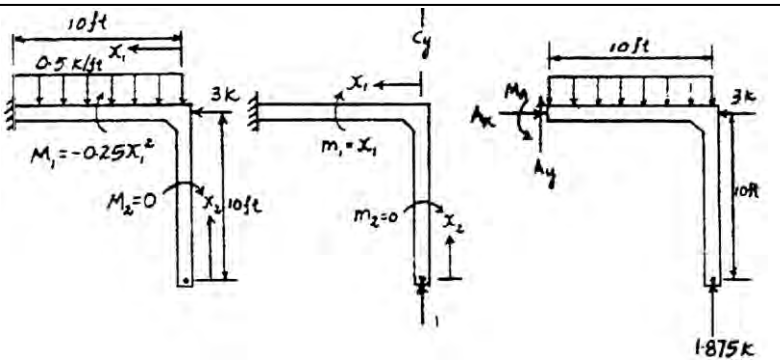



$$\Rightarrow C_y = 1.875k \qquad A_x = 3k \qquad A_y = 3.125k \qquad M_A = 6.25k.ft$$

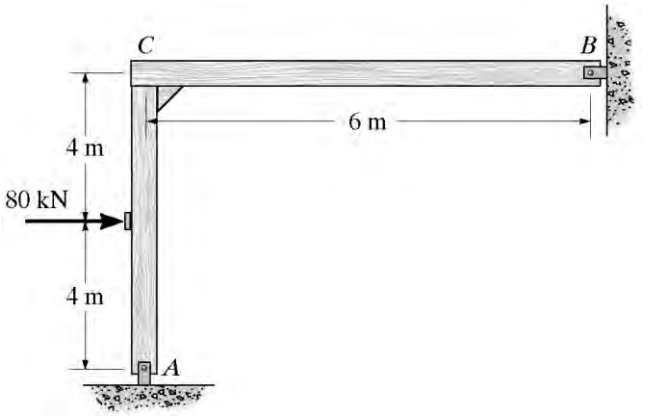
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۰-۲۱) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$ و $B$ به صورت مفصلی می‌باشد. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۲۱*

حل) با حذف مولفه افقی تکیه‌گاه $A$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad 80-B_x=0 \quad \Rightarrow \quad B_x=80kN$$

$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad 80\times 4-A_y\times 6=0 \quad \Rightarrow \quad A_y=53.33kN$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad -53.333-B_y=0 \quad \Rightarrow \quad B_y=53.33kN$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad 1-B_x=0 \quad \Rightarrow \quad B_x=1kN$$

$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad 1\times 8-A_y\times 6=0 \quad \Rightarrow \quad A_y=1.33kN$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad -1.333-B_y=0 \quad \Rightarrow \quad B_y=-1.33kN$$

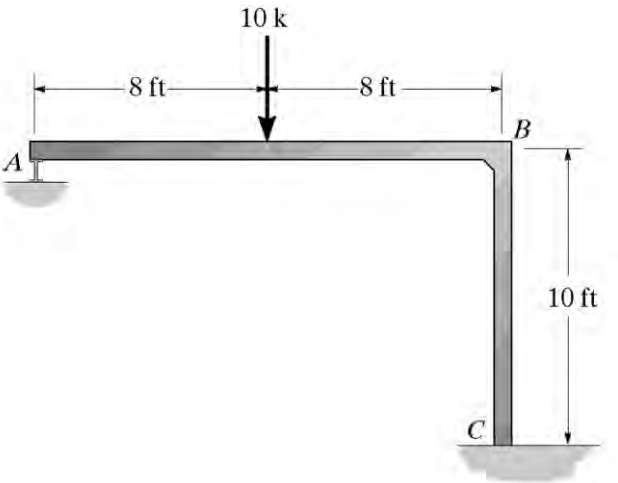
$$m_1=-x_1 \qquad m_2=-4-x_2 \qquad m_3=-1.333\,x$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



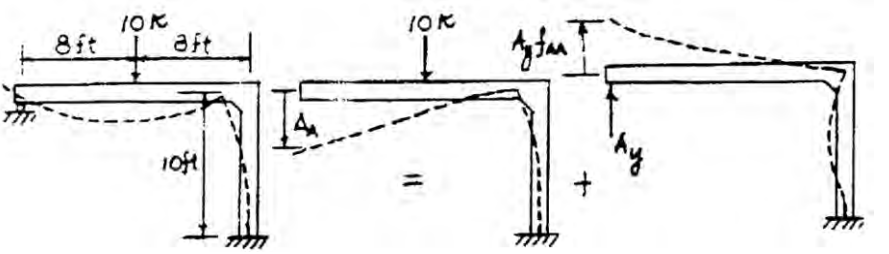
۱۰-۲۲) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$ به صورت غلتکی و $C$ به صورت گیردار است. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۲۲*

حل) با حذف تکیه‌گاه $C$ و نوشتن معادله همسازی داریم:

$$+\downarrow \qquad 0 = \Delta_A - A_y f_{AA} \qquad (1)$$




با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^8 \frac{(8+x_2)(-10x_2)}{EI}dx_2 + \int_0^{10} \frac{(16)(-80)}{EI}dx_3 = \frac{-17066.67}{EI}$$

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^8 \frac{(x_1)^2}{EI}dx_1 + \int_0^8 \frac{(8+x_2)^2}{EI}dx_2 + \int_0^{10} \frac{(16)^2}{EI}dx_3 = \frac{3925.33}{EI}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:

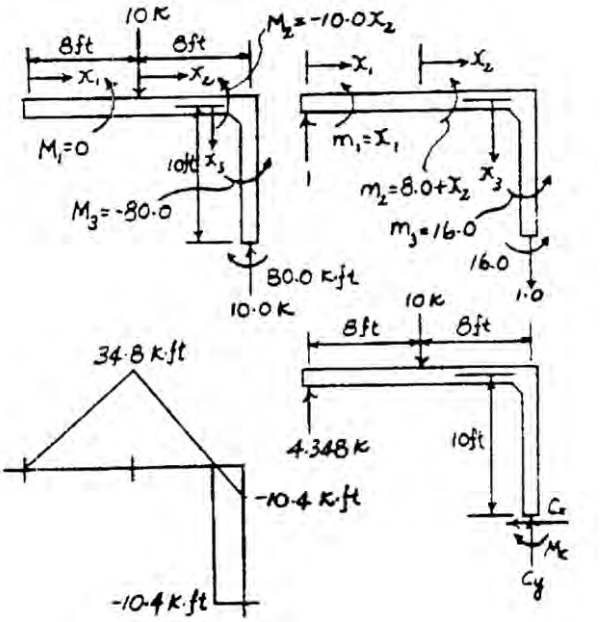
$$0 = \frac{17066.67}{EI} - \frac{3925.33}{EI}A_y \quad \Rightarrow \quad A_y = 4.348k = 4.35k$$

$$C_x = 0 \qquad C_y = 5.65k \qquad M_C = 10.4k.ft$$

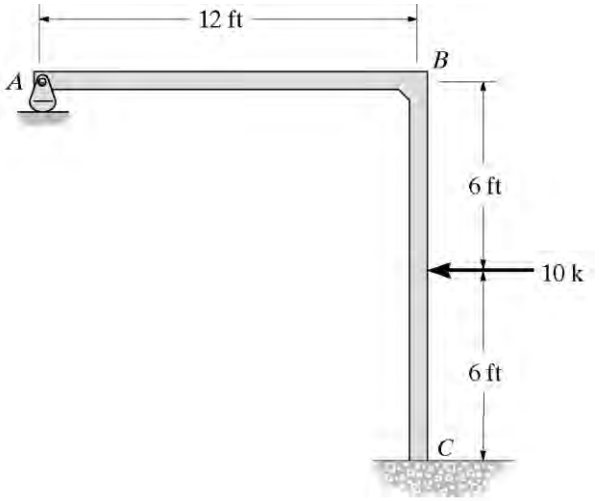
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۰-۲۳) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$ به صورت غلتکی و $C$ به صورت گیردار است. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۲۳*

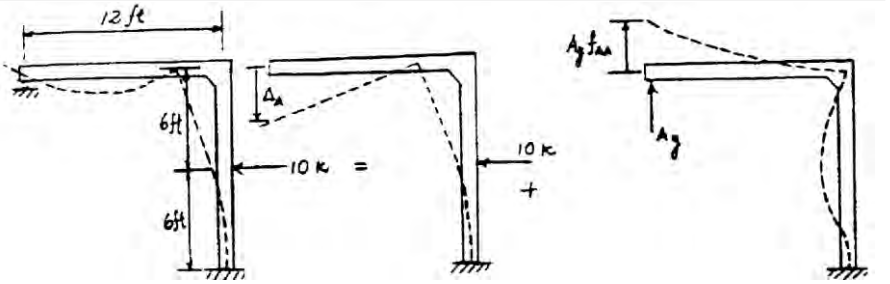
حل) با حذف تکیه‌گاه $C$ و نوشتن معادله همسازی داریم:

$$+\downarrow \qquad 0 = \Delta_A - A_y f_{AA} \qquad (1)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با استفاده از روش کار مجازی داریم:

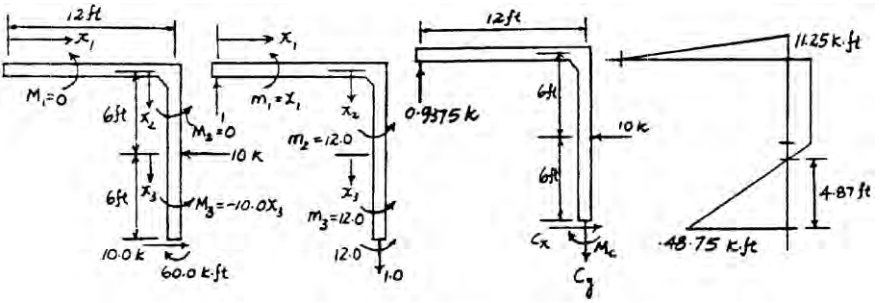
$$\Delta_A = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^6 \frac{(12)(-10x_3)}{EI}dx_3 = \frac{-2160}{EI}$$

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^{12} \frac{(x_1)^2}{EI}dx_1 + \int_0^6 \frac{(12)^2}{EI}dx_2 + \int_0^6 \frac{(12)^2}{EI}dx_3 = \frac{2304}{EI}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$0 = \frac{2160}{EI} - \frac{2304}{EI}A_y \quad \Rightarrow \quad A_y = 0.9375k$$

$$C_x = 10k \qquad C_y = 0.9375\,k \qquad M_C = 48.75k.ft$$

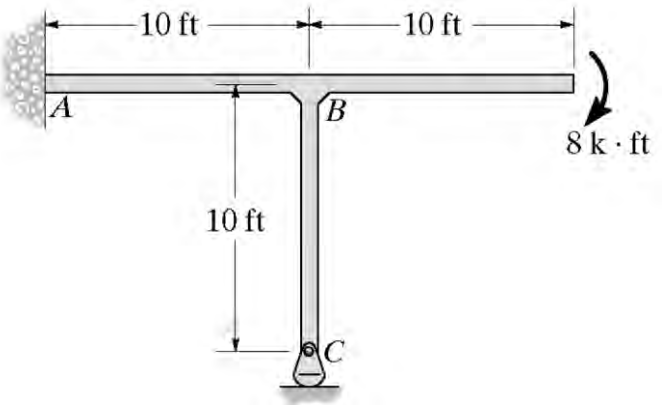



۱۰-۲٤) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه $C$ به مقدار $0.15in$ در جهت قائم حرکت دارد. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ و $I=600\ in^4$ در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

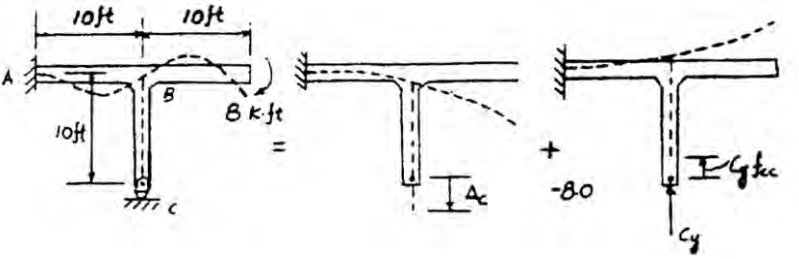





شکل مسئله ۱۰-۲٤

حل) با حذف تکیه‌گاه $C$ و نوشتن معادله همسازی داریم:

$$+\uparrow \qquad 0.15 = -\Delta_C - C_y f_{CC} \qquad (1)$$




با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(10-x_1)(-8)}{EI}dx_1 = -\frac{400}{EI}$$

$$f_{CC} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(10-x_1)^2}{EI}dx_1 = \frac{333.33}{EI}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:

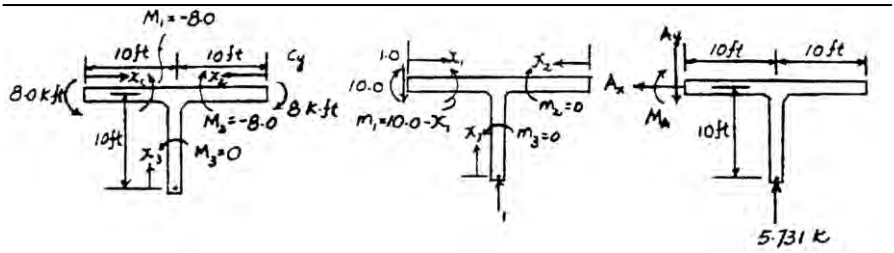
$$0.15 = -\frac{400\times1728}{29\times10^3\times600} + C_y \times \frac{333.33\times1728}{29\times10^3\times600} \quad \Rightarrow \quad C_y = 5.73k$$

$$A_y = 5.73k \qquad A_x = 0 \qquad M_A = 49.3k.ft$$

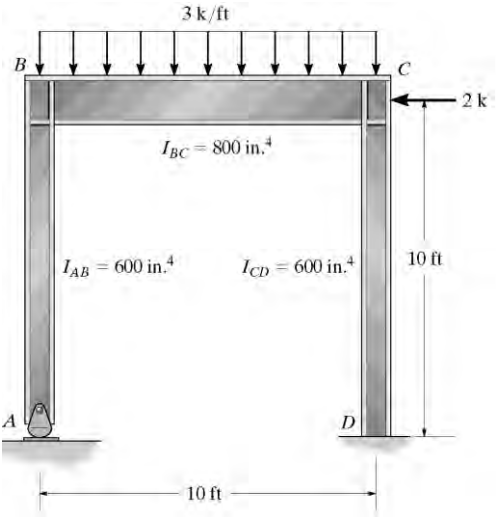
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۰-۲۵) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه $C$ به مقدار $0.15in$ در جهت قائم حرکت دارد. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰-۲۵

حل) با حذف تکیه‌گاه $A$ و نوشتن معادله همسازی داریم:

$$+\downarrow \qquad \Delta_A + A_y f_{AA} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = 0 + \int_0^{10} \frac{(x)\left(\frac{3}{2}x^2\right)}{EI_{BC}}dx + \int_0^{10} \frac{(10)(170-2x)}{EI_{CD}}dx = \frac{18812.5}{EI_{CD}}$$

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = 0 + \int_0^{10} \frac{(x)^3}{EI_{BC}}dx + \int_0^{10} \frac{(10)^2}{EI_{CD}}dx = \frac{1250}{EI_{CD}}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{18812.5}{EI_{CD}} + A_y\left(\frac{1250}{EI_{CD}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -15k$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -30 + 15 + D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 15k$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

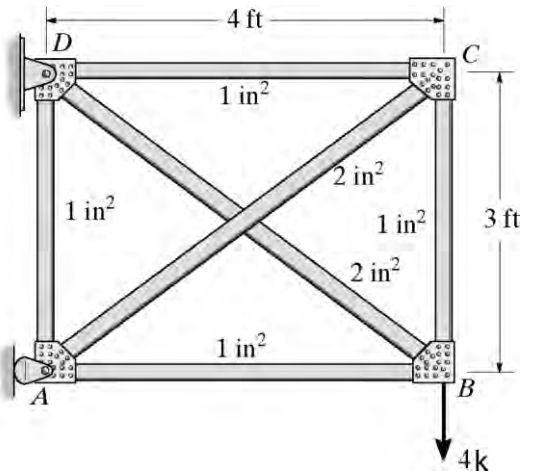
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad D_x = 2k$

$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 15\times10 - 2\times10 - 30\times5 + M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 20k.ft$

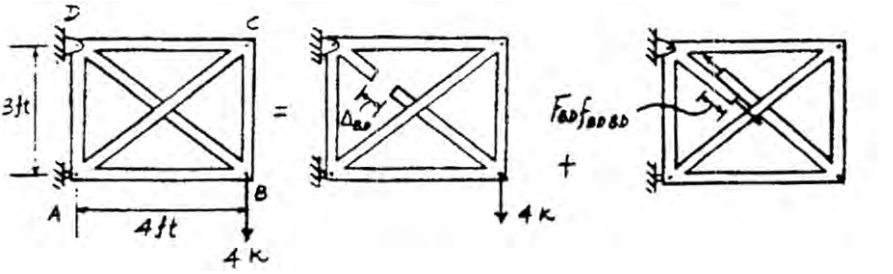
۱۰-۲۶) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰-۲۶

حل) با حذف عضو $BD$ و نوشتن شرایط سازگاری داریم:

$0 = \Delta_{BD} + F_{BD}\, f_{BDBD} \qquad (1)$




با استفاده از روش کار مجازی داریم:

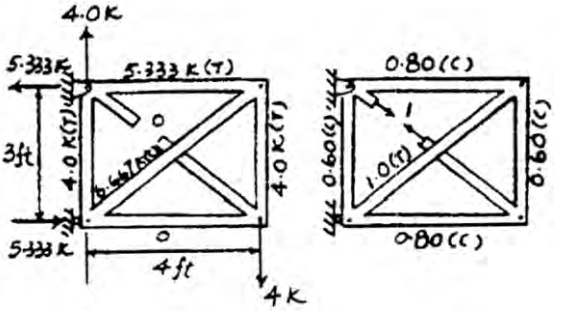
$$\Delta_{BD} = \Sigma\frac{nNL}{AE} = \frac{2\times(-0.6)\times4\times3}{1\times E} + \frac{(-0.8)\times(5.333)\times4}{1\times E} + \frac{1\times(-6.667)\times5}{2E} = \frac{-48.133}{E}$$

$$f_{BDBD} = \Sigma\frac{nnL}{AE} = \frac{2\times(-0.6)^2\times3}{1\times E} + \frac{2\times(-0.8)^2\times4}{1\times E} + \frac{2\times1^2\times5}{2E} = \frac{12.28}{E}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$0=\frac{-48.133}{E}+F_{BD}\frac{12.28}{E} \quad \Rightarrow \quad F_{BD}=3.92k(T)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA}-\frac{4}{5}\times 3.92=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BA}=3.136k=3.14k(C)$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC}+\frac{3}{5}\times 3.92-4=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC}=1.648k=1.65k(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

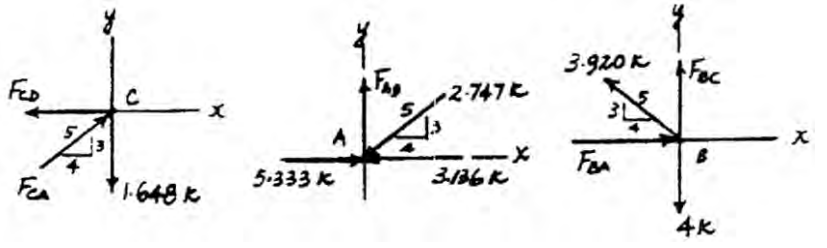
$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}F_{CA}-1.648=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA}=2.747k=2.75k(C)$$

$$\overset{+}{\leftarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD}-\frac{4}{5}\times 2.747=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD}=2.2k(T)$$

در مفصل $A$ داریم:

$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD}-\frac{3}{5}\times 2.747=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD}=1.65k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad 5.333-\frac{4}{5}\times 2.747-3.136=0$$ کنترل صحت محاسبات

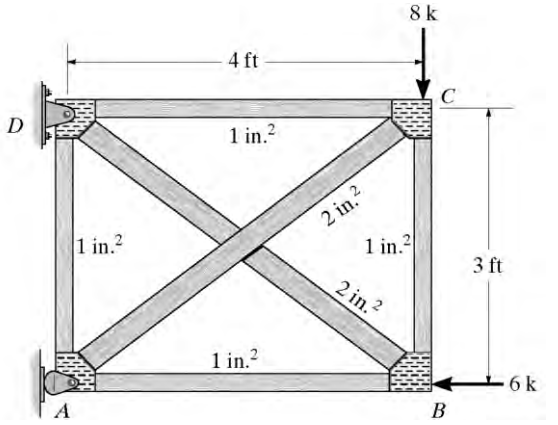



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۰-۲۷) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰-۲۷

حل) با حذف عضو $BC$ و اعمال شرایط همسازی داریم:

$$\Delta_{CB}=\Sigma\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{E}\left[\frac{1.33\times10.67\times4}{1}+\frac{1.33\times(-6)\times4}{1}+\frac{1\times8\times3}{1}\right.$$
$$\left.+\frac{-1.667\times(-13.33)\times5}{1}\right]=\frac{104.4}{E}$$

$$f_{CBCB}=\Sigma\frac{n^2L}{AE}=\frac{1}{E}\left[\frac{2\times1.33^2\times4}{1}+\frac{2\times1^2\times3}{1}+\frac{2\times(-1.667)^2\times5}{5}\right]=\frac{34.1}{E}$$

$$\Delta_{CB}+F_{CB}f_{CBCB}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{104.4}{E}+F_{CB}\left(\frac{34.1}{E}\right)\quad\Rightarrow\quad F_{CB}=-3.062k=3.06k(C)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$+\uparrow\sum F_y=0\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{5}F_{AC}-8+3.062=0\quad\Rightarrow\quad F_{AC}=8.23k(C)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{5}\times8.23-F_{DC}=0\quad\Rightarrow\quad F_{DC}=6.58k(T)$$

در مفصل $B$ داریم:

$$+\uparrow\sum F_y=0\quad\Rightarrow\quad-3.062+\frac{3}{5}\times F_{DB}=0\quad\Rightarrow\quad F_{DB}=5.103k=5.1k(T)$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\quad\Rightarrow\quad F_{AB}-6-5.103\times\frac{4}{5}=0\quad\Rightarrow\quad F_{AB}=10.1k(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

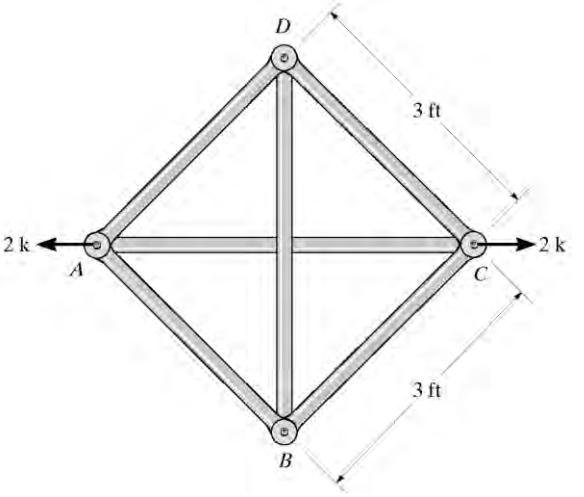
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



در مفصل $A$ داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -8.23\times\frac{3}{5}+F_{DA}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{DA}=4.94k(T)$$

۱۰–۲۸) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضای خرپا را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $AE$ ثابت در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰–۲۸

حل) با حذف عضو $AC$ داریم:

$$\Delta_{AC}=\Sigma\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{AE}\left[(-0.707)\times1.414\times3\times4+1\times(-2)\times\sqrt{18}\right]=-\frac{20.485}{AE}$$

$$f_{ACAC}=\Sigma\frac{n^2L}{AE}=\frac{1}{AE}\left[4\times(-0.707)^2\times3+2\times1^2\times\sqrt{18}\right]=\frac{14.485}{AE}$$

$$\Delta_{AC}+F_{AC}f_{ACAC}=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{20.485}{AE}+F_{AC}\left(\frac{14.485}{AE}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{AC}=1.414k=1.41k(T)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC}=F_{CB}=F$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2-1.414-2F\times\cos45^\circ=0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC}=F_{CB}=0.414k(T)$$

به سبب تقارن سیستم داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

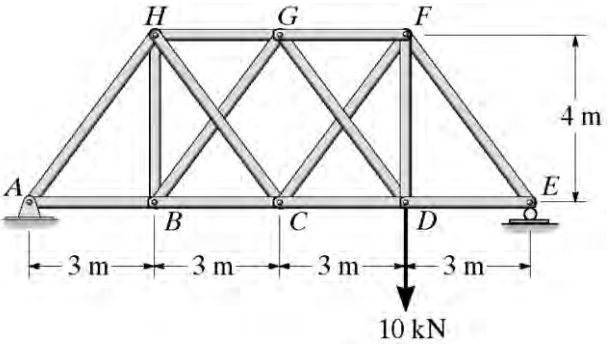


$$F_{AD} = F_{AB} = 0.414k(T)$$

در مفصل $D$ داریم:

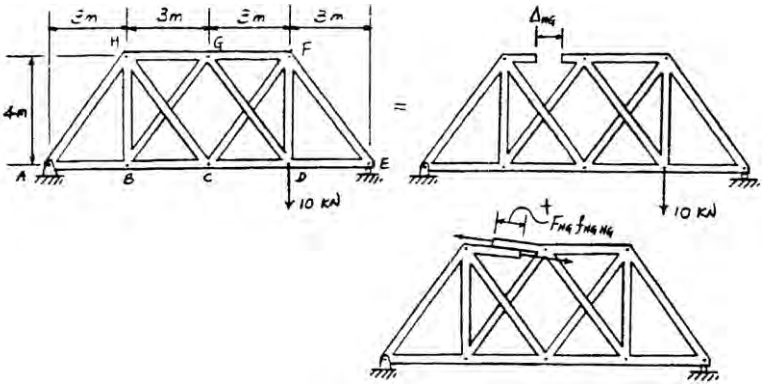
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DB} - 2\times 0.414 \times \cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DB} = 0.586k(C)$$

۱۰-۲۹) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو $HG$ را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $AE$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۲۹*

حل) با توجه به شکل زیر داریم:




$$\Delta_{HC} = \Sigma \frac{nNL}{AE} = \frac{1}{AE}\left[1.33\times 5\times 4 + (-1)(-7.5)\times 3 + (-1.333)\times 5\times 4\right.$$
$$+(-1)\times 1.875\times 3 + 1\times 5.625\times 3 + (-1.667)(-6.25)\times 5$$
$$\left.+(-1.667)(-3.125)\times 5 + 1.667\times 3.125\times 5 + 1.667\times 6.25\times 5\right] = \frac{190}{AE}$$

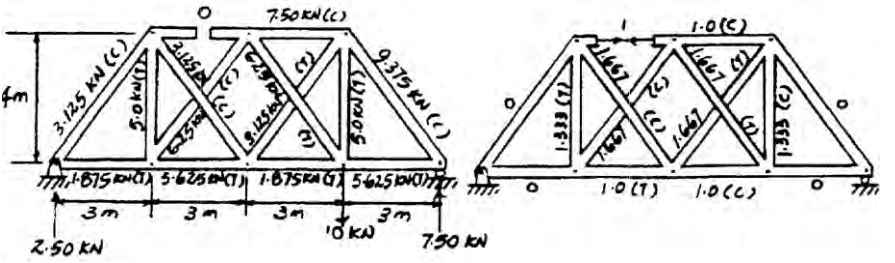
$$f_{HGHG} = \Sigma \frac{nnL}{AE} = \frac{1}{AE}\left[2\times 1.333^2\times 4 + 4\times 1^2\times 3 + 4\times 1.667^2\times 5\right] = \frac{81.778}{AE}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\frac{190}{AE}+F_{HG}\left(\frac{81.778}{AE}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{HG}=-2.3234kN=2.32kN(C)$$




۱۰-۳۰) در خرپای مسئله قبل، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو $HB$ را تعیین نمایید.

حل) با توجه به مسئله ۱۰-۲۹ داریم:

در مفصل $A$ داریم:

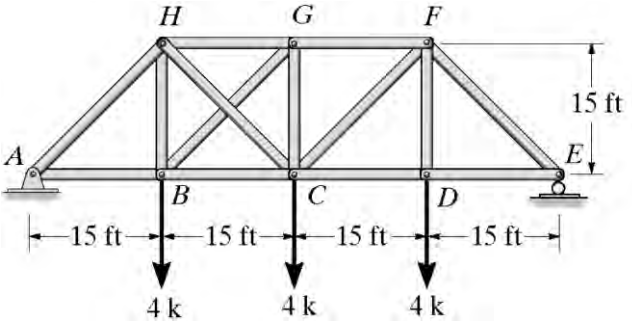
$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad 2.5-\frac{4}{5}F_{AH}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{AH}=3.125kN(C)$$

در مفصل $H$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}\times 3.125-2.325+\frac{3}{5}F_{HC}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{HC}=0.7473kN(T)$$

$$+\uparrow\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}\times 3.125-\frac{4}{5}\times 0.7473-F_{HB}=0 \quad \Rightarrow \quad F_{HB}=1.90kN(T)$$

۱۰-۳۱) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو $HG$ را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $AE$ ثابت در نظر گرفته شود.




*شکل مسئله ۱۰-۳۱*

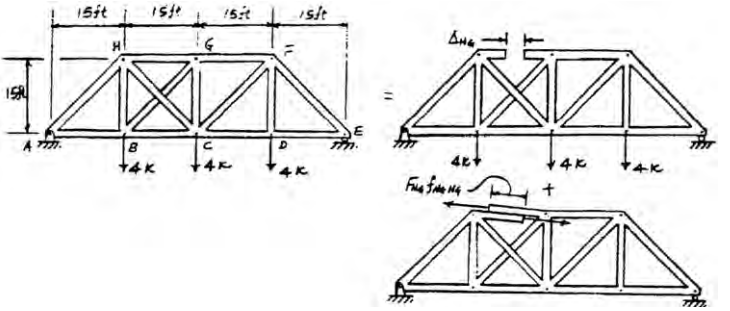
حل) با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$0=\Delta_{HG}+F_{HG}f_{HGHG} \qquad (1)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

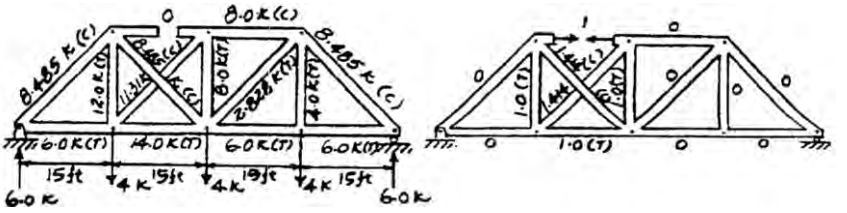





با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{HG} = \Sigma \frac{nNL}{AE} = \frac{1\times 12\times 15}{AE} + \frac{1\times 14\times 15}{AE} + \frac{1\times 8\times 15}{AE}$$

$$= + \frac{(-1.414)\times(-11.31)\times 21.21}{AE} + \frac{(-1.414)\times(-8.485)\times 21.21}{AE} = \frac{1103.97}{AE}$$

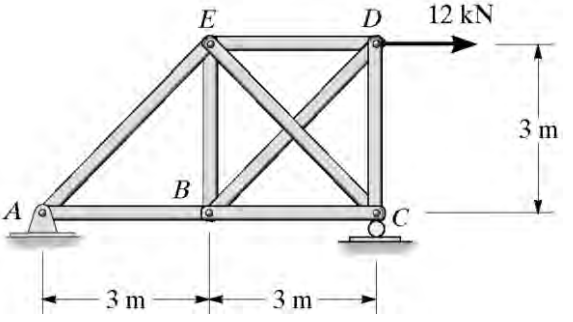



$$f_{HGHG} = \Sigma \frac{nnL}{AE} = \frac{4\times 1^2\times 15}{AE} + \frac{2\times(-1.414)^2\times 21.21}{AE} = \frac{144.85}{AE}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$0 = \frac{1103.97}{AE} + \frac{144.85}{AE} F_{HG} \quad \Rightarrow \quad F_{HG} = -7.621k = 7.62k(C)$$

۱۰-۳۲) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو $BE$ را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $AE$ ثابت در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰-۳۲

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



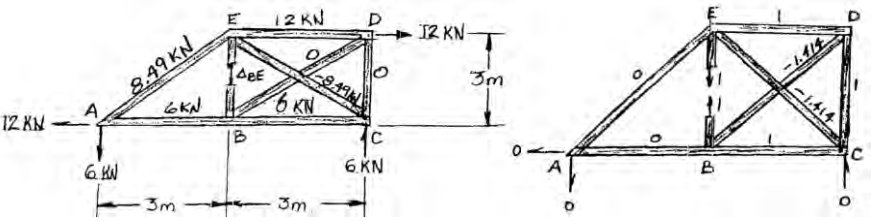
حل) با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$\Delta_{BE} + F_{BE}\delta_{BEBE} = 0$$

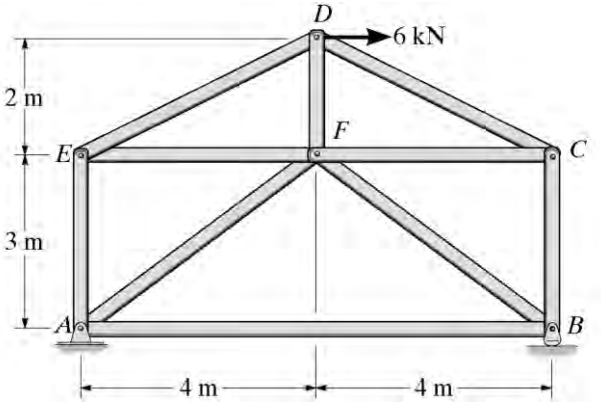
$$\Delta_{BE} = \Sigma\frac{nNL}{AE} = \frac{1}{AE}\{(6\times 0\times 3)+(6\times 1\times 3)+(0\times 1\times 3)+(12\times 1\times 3)$$
$$+0\times(-1.414)\times 3\sqrt{2}+8.49\times 0\times 3\sqrt{2}+(-8.49)(-1.414)\times 3\sqrt{2}\}=\frac{104.912}{AE}$$

$$\delta_{BEBE} = \Sigma\frac{n^2L}{AE} = \frac{1}{AE}\{1^2\times 3+1^2\times 3+1^2\times 3+1^2\times 3+(-1.414)^2\times 3\sqrt{2}$$
$$+(-1.414)^2\times 3\sqrt{2}+0+0\}=\frac{28.971}{AE}$$

$$\frac{104.912}{AE}+F_{BE}\left(\frac{28.971}{AE}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad F_{BE}=-3.621kN=3.62kN(C)$$




۱۰-۳۳) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو $DF$ را تعیین نمایید. فرض کنید تمام اعضا در انتهای خود به صورت مفصلی هستند. مقدار $AE$ ثابت در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۰-۳۳

حل) با استفاده از شرایط همسازی داریم:

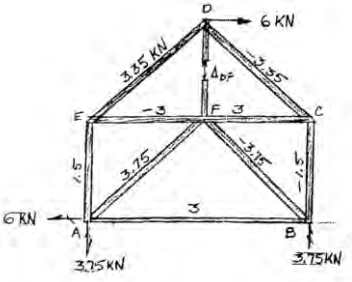
$$\Delta_{DF} + F_{DF}\delta_{DFDF} = 0$$

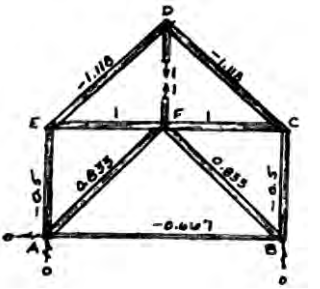
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_{DF}=\Sigma\frac{nNL}{AE}=\frac{1}{AE}\{(1.5\times(-0.5)\times3)+3.35(-1.118)\times4.472$$
$$+(-3.35)(-1.118)\times4.472+(-1.5)(-0.5)\times3+3\times(-0.667)\times8+3.75\times0.833\times5$$
$$+3\times1\times4+(-3.75)\times0.833\times5+(-3)\times1\times4\}=\frac{16}{AE}$$




$$\delta_{DFDF}=\frac{n^2L}{AE}=\frac{1}{AE}\{0.5^2\times3+1.118^2\times4.472+1.118^2\times4.72+0.5^2\times3+0.667^2\times8$$
$$+0.833^2\times5+0.833^2\times5+1^2\times4+1^2\times4+1^2\times2\}=\frac{33.48}{AE}$$

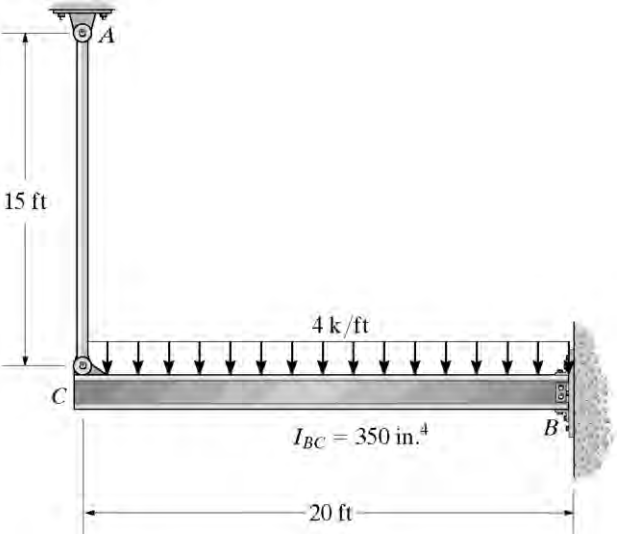
$$\frac{16}{AE}+F_{DF}\left(\frac{33.18}{AE}\right)=0\quad\Rightarrow\quad F_{DF}=0.478kN(C)$$

۱۰-۳٤) تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل زیر میله‌ای به قطر *0.5in* نگهداری می‌شود. در صورتی که تکیه‌گاه *B* به صورت گیردار باشد و تیر تحت یک بار گسترده به شدت *4 k/ft* قرار داشته باشد، نیروی ایجاد شده در میله را تعیین نمایید. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-۳٤

حل) با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$\downarrow + \qquad \Delta_{AC} + F_{AC} f_{ACAC} = 0$$

$$\Delta_{AC} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \Sigma \frac{nNL}{AE} = \int_0^{20} \frac{(1x)(-2x^2)}{EI} dx + 0 = -\frac{80000}{EI}$$

$$f_{ACAC} = \int_0^L \frac{m^2}{EI} dx + \Sigma \frac{n^2 L}{AE} = \int_0^{20} \frac{x^2}{EI} dx + \frac{1^2 \times 15}{AE} = \frac{2666.67}{EI} + \frac{15}{AE}$$

$$-\frac{80000}{EI} + F_{AC}\left(\frac{2666.67}{EI} + \frac{15}{AE}\right) = 0$$

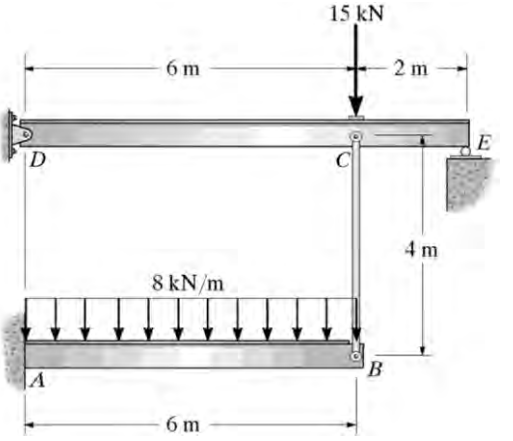
$$-\frac{80000}{\frac{350}{12^4}} + F_{AC}\left(\frac{2666.67}{\frac{350}{12^4}} + \frac{15}{\pi\left(\frac{0.25}{12}\right)^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AC} = 28k$$

۱۰-۳۵) سیستم سازه‌ای شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام لنگر خمشی برای تیرها را ترسیم نمایید. ممان اینرسی تیر برابر $I=100(10^6)\ mm^4$، سطح مقطع میله $A=200mm^2$ و ضریب ارتجاعی برای تمام قسمت‌های سازه برابر $E=200\ GPa$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

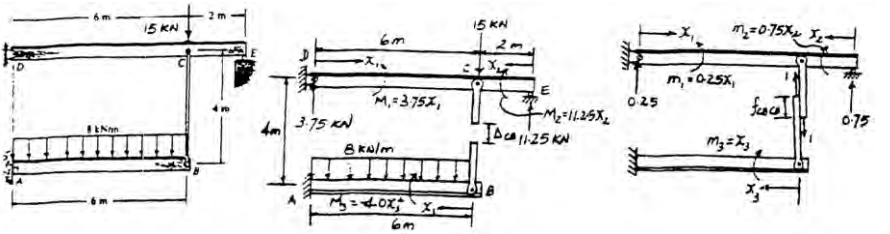
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-۳۵

حل) با نوشتن معادله همسازی داریم:



$$0 = \Delta_{CB} + F_{CB} f_{CBCB} \qquad (1)$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{CB} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^6 \frac{0.25x_1 \times 3.75x_1}{EI} dx_1 + \int_0^2 \frac{0.75x_2 \times 11.25x_2}{EI} dx_2 + \int_0^6 \frac{1x_3 \times \left(-4x_3^2\right)}{EI} dx_3 = \frac{-1206}{EI}$$

$$f_{CBCB} = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx + \Sigma \frac{nnL}{AE} = \int_0^6 \frac{\left(0.25x_1\right)^2}{EI} dx_1 + \int_0^2 \frac{\left(0.75x_2\right)^2}{EI} dx_2 + \int_0^6 \frac{\left(1x_3\right)^2}{EI} dx_3 + \frac{1^2 \times 4}{AE} = \frac{78}{EI} + \frac{4}{AE}$$

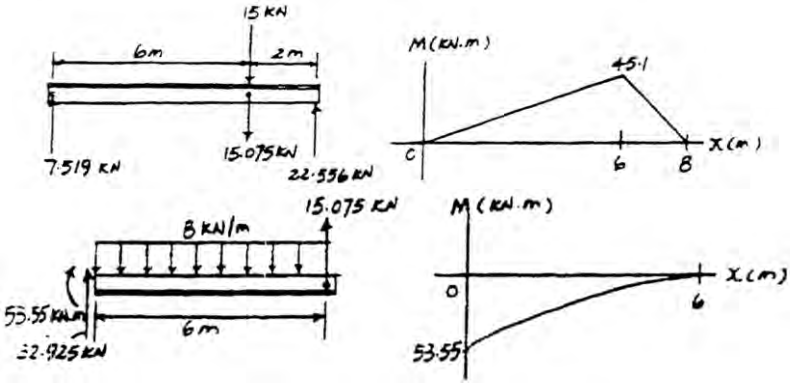
با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$-\frac{1206}{E(100)(10^{-6})} + F_{CB}\left[\frac{78}{E(100)(10^{-6})} + \frac{4}{200(10^{-6})E}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = 15.075kN(T)$$

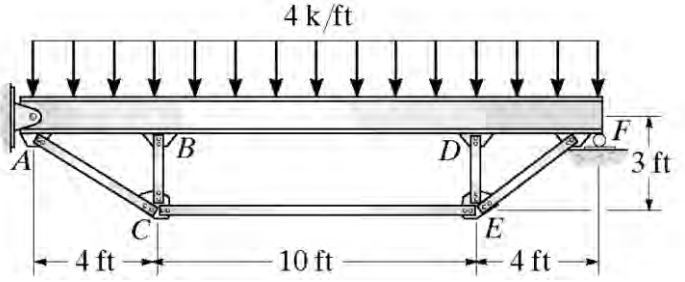
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



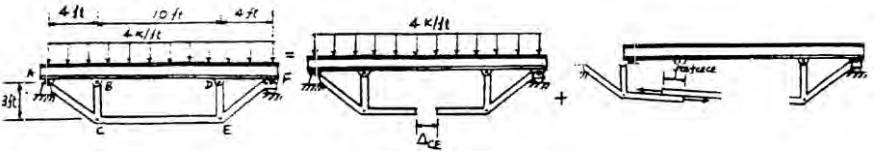



۱۰-۳٦) سیستم سازه‌ای شکل زیر را در نظر بگیرید. مقدار نیروی ایجاد شده در تمام اعضای پایینی سیستم را تعیین نمایید. از ضخامت تیر صرف نظر کنید. فرض کنید که اتصال تمام اعضا به تیر به صورت مفصلی می‌باشد. همچنین از اثر نیروی برشی و محوری ایجاد شده در تیر صرف نظر کنید. سطح مقطع هر یک از میله‌ها برابر $3\ in^2$ و ممان اینرسی تیر برابر $I=600\ in^4$ و ضریب ارتجاعی $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱۰-۳٦

حل) با نوشتن معادله همسازی داریم:




$$0 = \Delta_{CE} + F_{CE}\, f_{CECE} \qquad (1)$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{CB} = \int_0^6 \frac{0.25x_1 \times 3.75x_1}{EI}\, dx_1 + \int_0^2 \frac{0.75x_2 \times 11.25x_2}{EI}\, dx_2$$

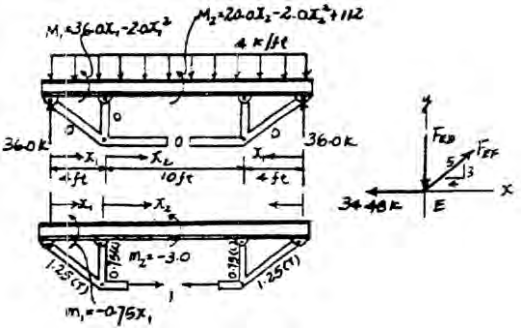
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_{CB}=\int_0^L \frac{mM}{EI}dx=2\int_0^4 \frac{(-0.75x_1)\times(36x_1-2x_1^2)}{EI}dx_1$$
$$+\int_0^{10}\frac{-3\times 20x_2-2x_2^2+112}{EI}dx_2=\frac{-5320}{EI}$$

$$f_{CECE}=\int_0^L \frac{mM}{EI}dx+\Sigma\frac{nnL}{AE}=2\int_0^4\frac{(-0.75x_1)^2}{EI}dx_1+\int_0^{10}\frac{(-3)^2}{EI}dx_2$$
$$+\frac{2\times 1.25^2\times 5}{AE}+\frac{2\times(-0.75)^2\times 3}{AE}+\frac{(1)^2\times 10}{AE}=\frac{114}{EI}+\frac{29}{AE}$$




با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$0=-\frac{5320(1728)}{E(600)}+F_{CE}\left[\frac{114(1728)}{E(600)}+\frac{29(12)}{3E}\right]\quad\Rightarrow\quad F_{CE}=34.48k=34.5k(T)$$

در مفصل $E$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=0\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{5}F_{EF}-34.48=0\quad\Rightarrow\quad F_{EF}=43.1k(T)$$

$$+\uparrow\sum F_y=0\quad\Rightarrow\quad -F_{ED}+\frac{3}{5}(43.1)=0\quad\Rightarrow\quad F_{ED}=25.9k(C)$$

به علت تقارن سازه:

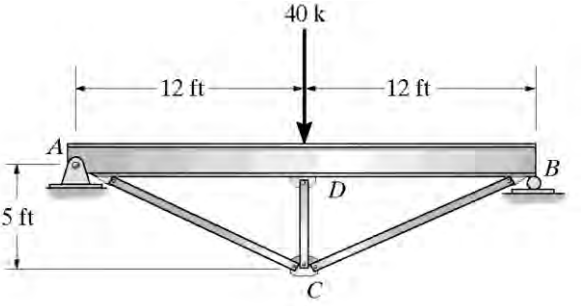
$$F_{AC}=F_{EF}=43.1k(T)\quad,\quad F_{CB}=F_{ED}=25.9(C)$$

۱۰-۳۷) سیستم سازه‌ای شکل زیر را در نظر بگیرید. مقدار نیروی ایجاد شده در تمام اعضای پایینی سیستم را تعیین نمایید. از ضخامت تیر صرف نظر کنید. فرض کنید که اتصال تمام اعضا به تیر به صورت مفصلی می‌باشد. همچنین از اثر نیروی برشی و محوری ایجاد شده در تیر صرف نظر کنید. سطح مقطع هر یک از میله‌ها برابر $2\ in^2$ و ممان اینرسی تیر برابر $I=400\ in^4$ و ضریب ارتجاعی $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

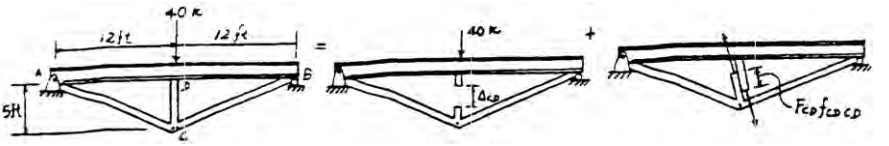
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-۳۷

حل) با نوشتن معادله همسازی داریم:




$$0 = \Delta_{CD} + F_{CD} f_{CDCD} \qquad (1)$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{CD} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = 2\int_0^{12} \frac{0.5\times(20x)x}{EI} dx = \frac{11520}{EI}$$

$$f_{CDCD} = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx = 2\int_0^{12} \frac{(0.5x)^2}{EI} dx + \frac{2\times 1.3^2 \times 13}{AE} + \frac{1^2\times 5}{AE} = \frac{288}{EI} + \frac{48.94}{AE}$$

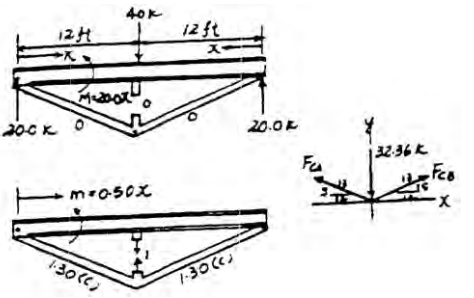
با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$0 = \frac{11520(1728)}{E(400)} + \left(\frac{288(1728)}{E(400)} + \frac{48.94\times 12}{2E}\right) F_{CD} \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = -32.36k = 32.4k(C)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = F_{CB}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{5}{13}\right) F_{CA} - 32.36 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = F_{CB} = 42.1k(T)$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

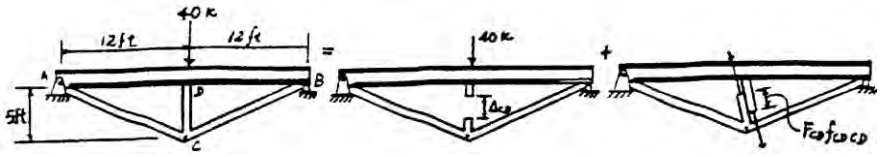
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۰–۳۸) در شکل مسئله ۱۰–۳۷، مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده در تیر را تعیین نمایید.

حل) ) با نوشتن معادله همسازی داریم:

$$0 = \Delta_{CD} + F_{CD} f_{CDCD} \qquad (1)$$

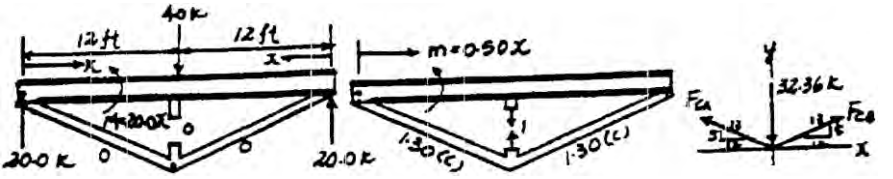



با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\Delta_{CD} = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = 2\int_0^{12} \frac{0.5\times(20x)x}{EI}dx = \frac{11520}{EI}$$

$$f_{CDCD} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = 2\int_0^{12} \frac{(0.5x)^2}{EI}dx + \frac{2\times 1.3^2\times 13}{AE} + \frac{1^2\times 5}{AE} = \frac{288}{EI} + \frac{48.94}{AE}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:



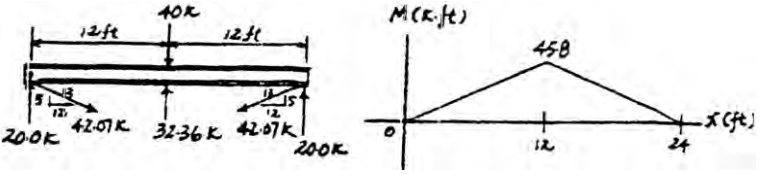

$$0 = \frac{11520(1728)}{E(400)} + \left(\frac{288(1728)}{E(400)} + \frac{48.94\times 12}{2E}\right)F_{CD} \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = -32.36k = 32.4k(C)$$

در مفصل $C$ داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = F_{CB}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{5}{13}\right)F_{CA} - 32.36 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CA} = F_{CB} = 42.07k(T)$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 45.8k.ft$$

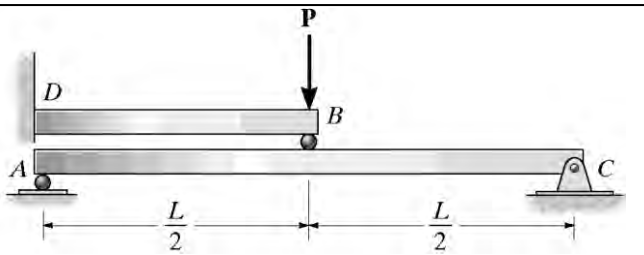



۱۰–۳۹) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی $C$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ برای هر دو تیر ثابت است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





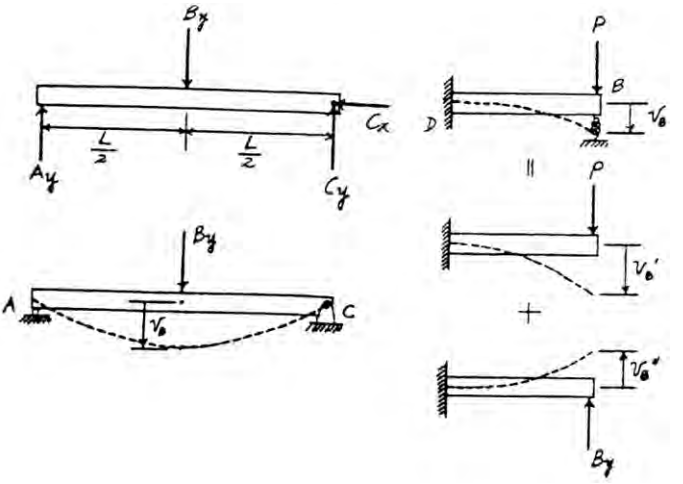

شکل مسئله ۱۰-۳۹

حل) با توجه به دیاگرام جسم آزاد شکل داریم:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y L - B_y\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

با استفاده از جمع آثار قوا داریم:




$$\upsilon_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{B_y L^3}{48EI}\downarrow \quad \Rightarrow \quad \upsilon'_B = \frac{PL^3_{BD}}{3EI} = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}\downarrow$$

$$\upsilon''_B = \frac{PL^3_{BD}}{3EI} = \frac{B_y L^3}{24EI}\uparrow$$

با استفاده از شرایط همسازی تغییرشکل‌ها داریم:

$$(+\downarrow) \quad \upsilon_B = \upsilon'_B + \upsilon''_B \quad \Rightarrow \quad \frac{B_y L^3}{48EI} = \frac{PL^3}{24EI} + \left(-\frac{B_y L^3}{24EI}\right) \quad \Rightarrow \quad B_y = \frac{2P}{3}$$

با جانشینی $B_y$ در رابطه (۱) داریم:

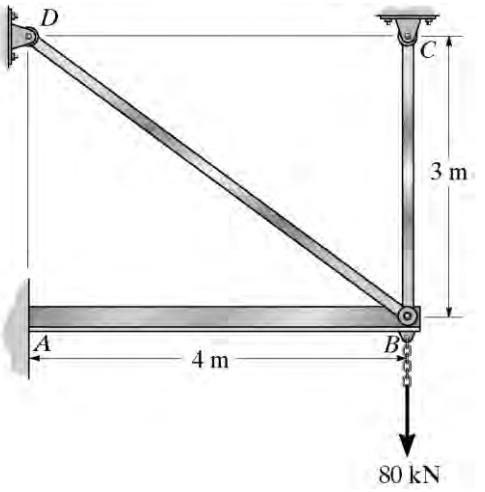
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$C_y = \frac{P}{3}$$

۱۰-٤۰) سیستم سازه‌ای شکل زیر را در نظر بگیرید. مقدار نیروی ایجاد شده در تمام اعضای متصل به تیر $AB$ را تعیین نمایید. فرض کنید که اتصال تمام اعضا به تیر به صورت مفصلی می‌باشد. همچنین از اثر نیروی برشی و محوری ایجاد شده در تیر صرف نظر کنید. سطح مقطع هر یک از میله‌ها برابر $A=100\ mm^2$ و ممان اینرسی تیر برابر $I_b=200(10^6)\ mm^4$ و ضریب ارتجاعی $E=200\ GPa$ می‌باشد.



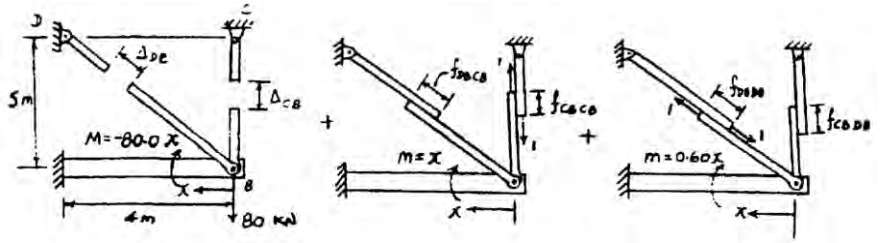

شکل مسئله ۱۰-٤۰

حل) با استفاده از شرایط همسازی داریم:

$$\Delta_{DB} + F_{DB} f_{DBDB} + F_{CB} f_{DBCB} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{CB} + F_{DB} f_{CBDB} + F_{CB} f_{CBCB} = 0 \quad (2)$$

با استفاده از روش کار مجازی داریم:




$$\Delta_{DB} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(0.6x)\times(-80x)}{EI} dx = -\frac{1024}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\Delta_{CB}=\int_0^L \frac{mM}{EI}dx=\int_0^4 \frac{(1x)\times(-80x)}{EI}dx=-\frac{1706.67}{EI}$$

$$f_{CBCB}=\int_0^L \frac{mm}{EI}dx+\Sigma\frac{nnL}{AE}=\int_0^4 \frac{(1x)^2}{EI}dx+\frac{1^2\times 3}{AE}=\frac{21.33}{EI}+\frac{3}{AE}$$

$$f_{DBDB}=\int_0^L \frac{mm}{EI}dx+\Sigma\frac{nnL}{AE}=\int_0^4 \frac{(0.6x)^2}{EI}dx+\frac{1^2\times 5}{AE}=\frac{7.68}{EI}+\frac{5}{AE}$$

$$f_{DBCB}=\int_0^4 \frac{(0.6x)(1x)}{EI}dx=\frac{12.8}{EI}$$

با استفاده از رابطه (١) داریم:

$$\frac{1024}{E(200)(10^{-6})}+F_{DB}\left[\frac{7.68}{E(200)(10^{-6})}+\frac{5}{E(100)(10^{-6})}+F_{CB}\frac{12.8}{E(200)(10^{-6})}\right]=0$$

$$0.0884\,F_{DB}+0.064\,F_{CB}=5.12$$

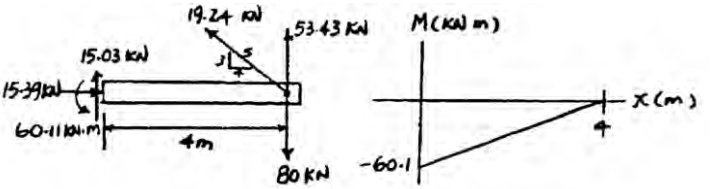
با استفاده از رابطه (٢) داریم:

$$-\frac{1706.67}{E(200)(10^{-6})}+F_{DB}\frac{12.8}{E(200)(10^{-6})}+F_{CB}\left[\frac{21.33}{E(200)(10^{-6})}+\frac{3}{E(100)(10^{-6})}\right]=0$$

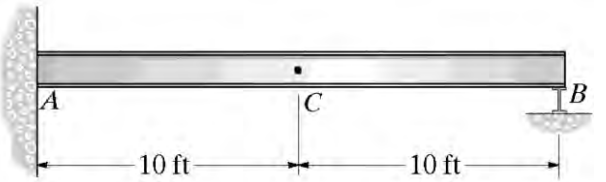
$$0.064\,F_{DB}+0.13667\,F_{CB}=8.533$$

با حل دو معادله فوق داریم:

$$F_{DB}=19.24kN=19.2kN \quad , \quad F_{CB}=53.43kN=53.4kN$$




١٠-٤١) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر برش در $C$ را ترسیم نمایید. مقادیر عددی خط تاثیر را برای هر ٥ فوت طول تیر بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و $EI$ ثابت است.



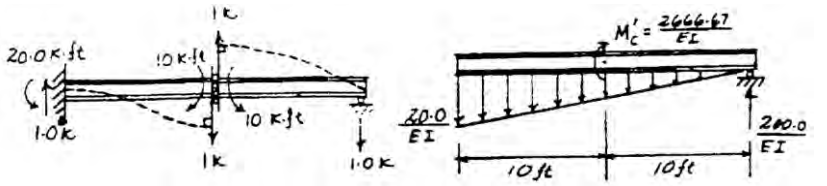

شکل مسئله ١٠-٤١

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)




در $x = 0$ داریم:

$$\Delta_0 = M'_0 = 0$$

در $x = 5\,ft$ داریم:

$$\Delta_5 = M'_5 = \frac{2000}{EI}(15) - \frac{112.5}{EI}(5) - \frac{2666.67}{EI} = \frac{-229.17}{EI}$$

در $x = 10^-\,ft$ داریم:

$$\Delta_{10^-} = M'_{10^-} = \frac{200}{EI}(10) - \frac{2666.67}{EI} - \frac{50}{EI}(3.333) = -\frac{833.33}{EI}$$

در $x = 10^+\,ft$ داریم:

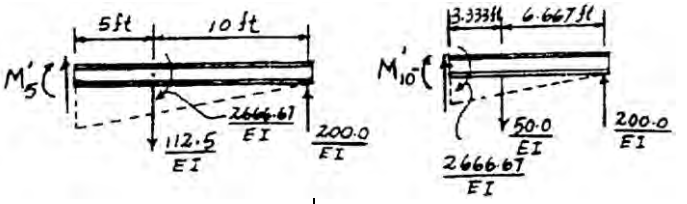
$$\Delta_{10^+} = M'_{10^+} = \frac{200}{EI}(10) - \frac{50}{EI}(3.333) = \frac{1833.33}{EI}$$

در $x = 15\,ft$ داریم:

$$\Delta_{15} = M'_{15} = \frac{200}{EI}(5) - \frac{12.5}{EI}(1.667) = \frac{979.17}{EI}$$

در $x = 20\,ft$ داریم:

$$\Delta_{20} = M'_{20} = 0$$

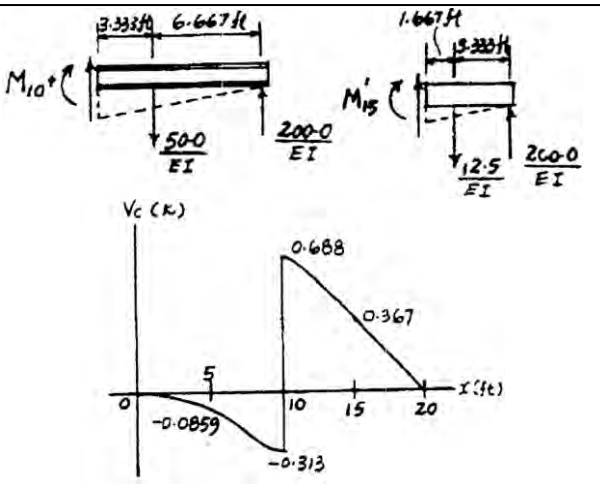



| $x$ | $\frac{\Delta_i}{M'_C}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | -0.0859 |
| $10^-$ | -0.3125 |
| $10^+$ | 0.688 |
| 15 | 0.367 |
| 20 | 0 |

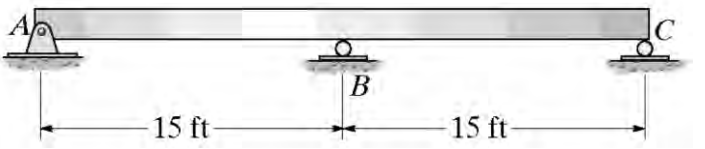
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





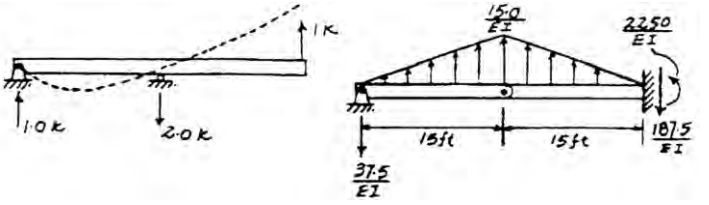

۱۰-٤۲) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر عکس‌العمل $C$ را ترسیم نمایید. مقادیر عددی خط تاثیر را برای هر ۵ فوت طول تیر بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $B$ به صورت غلتکی و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۰-٤۲

حل) با حذف عکس‌العمل $C$ و اعمال نیروی واحد در آن و در $x = 0$ داریم:

$$\Delta_0 = M'_0 = 0$$



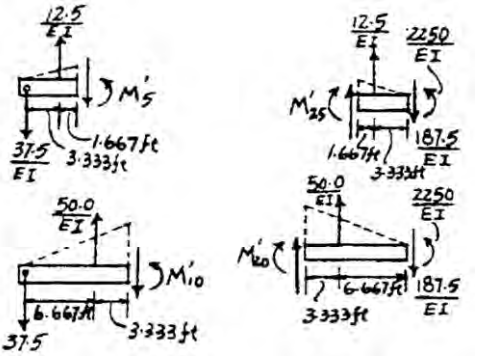

در $x = 5\,ft$ داریم:

$$\Delta_5 = M'_5 = \frac{12.5}{EI}(1.667) - \frac{37.5}{EI}(5) = \frac{-166.67}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






در $x = 10\ ft$ داریم:

$$\Delta_{10} = M'_{10} = \frac{50}{EI}(3.333) - \frac{37.5}{EI}(10) = -\frac{208.33}{EI}$$

در $x = 15\ ft$ داریم:

$$\Delta_{15} = M'_{15} = 0$$

در $x = 20\ ft$ داریم:

$$\Delta_{20} = M'_{20} = \frac{2250}{EI} + \frac{50}{EI}3.333 - \frac{187.5}{EI}(10) = \frac{541.67}{EI}$$

در $x = 25\ ft$ داریم:

$$\Delta_{25} = M'_{25} = \frac{2250}{EI} + \frac{12.5}{EI}1.667 - \frac{187.5}{EI}(5) = \frac{1333.33}{EI}$$

در $x = 30\ ft$ داریم:

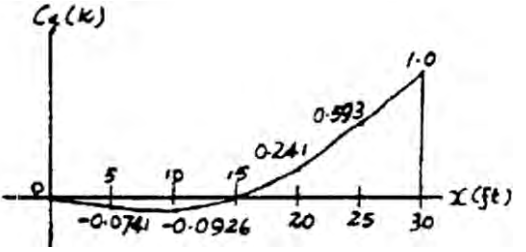
$$\Delta_{30} = M'_{30} = \frac{2250}{EI}$$

| $x$ | $\frac{\Delta_i}{\Delta_{30}}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | -0.0741 |
| 10 | -0.0926 |
| 15 | 0 |
| 20 | 0.241 |
| 25 | 0.593 |
| 30 | 1 |

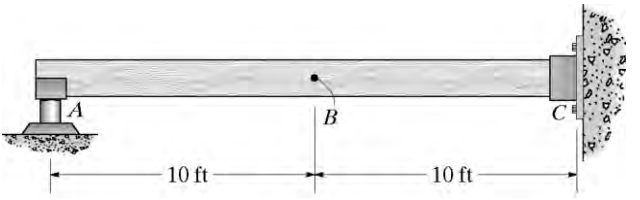
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






١٠-٤٣) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر برش در نقطه $B$ را ترسیم نمایید. مقادیر عددی خط تاثیر را برای هر ٥ فوت طول تیر بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی، $C$ گیردار و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ١٠-٤٣

حل) با حذف برش در $B$ داریم:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M' = \frac{200}{EI}(20)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2666.67}{EI}$$

در $x = 5\,ft$ داریم:

$$\Delta_5 = M'_5 = \frac{12.5}{EI}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{100}{EI}(5) = \frac{-479.167}{EI}$$

در $x = 10^-\,ft$ داریم:

$$\Delta_{10^-} = M'_{10^-} = \frac{50}{EI}\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{100}{EI}(10) = -\frac{833.33}{EI}$$

در $x = 10^+\,ft$ داریم:

$$\Delta_{10^+} = M'_{10^+} = \frac{1166.6}{EI} + \frac{50}{EI}\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{100}{EI}(10) = \frac{333.33}{EI}$$

در $x = 15\,ft$ داریم:

$$\Delta_{15} = M'_{15} = -\frac{100}{EI}(15) + \frac{50}{EI}\left(5 + \frac{10}{3}\right) + \frac{12.5}{EI}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1166.6}{EI} = \frac{104.167}{EI}$$

| $x$ | $\Delta$ | مقدار خط تاثیر |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

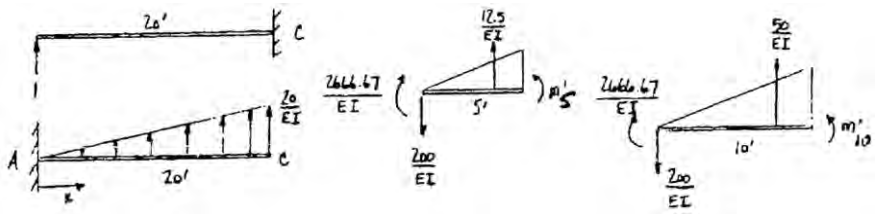
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | |
|---|---|---|
| 5 | $-\frac{479.167}{EI}$ | -0.411 |
| $10^-$ | $\frac{83.33}{EI}$ | -0.714 |
| $10^+$ | $\frac{333.33}{EI}$ | 0.286 |
| 15 | $\frac{104.167}{EI}$ | 0.0893 |
| 20 | 0 | 0 |

۱۰-٤٤) برای تیر شکل قبل، خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی $A$ را ترسیم نمایید. مقادیر عددی خط تاثیر را برای هر ۵ فوت طول تیر بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ به صورت غلتکی، $C$ گیردار و $EI$ ثابت است.

حل)




در $x = 5\ ft$ داریم:

$$\Delta_5 = M'_5 = \frac{2666.67}{EI} - \frac{200}{EI}(5) + \frac{12.5}{EI}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1687.5}{EI}$$

در $x = 10\ ft$ داریم:

$$\Delta_{10} = M'_{10} = \frac{2666.67}{EI} - \frac{200}{EI}(10) + \frac{50}{EI}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{833.33}{EI}$$

در $x = 15\ ft$ داریم:

$$\Delta_{15} = M'_{15} = \frac{2666.67}{EI} - \frac{200}{EI}(15) + \frac{112.5}{EI}\left(\frac{15}{3}\right) = \frac{229.17}{EI}$$

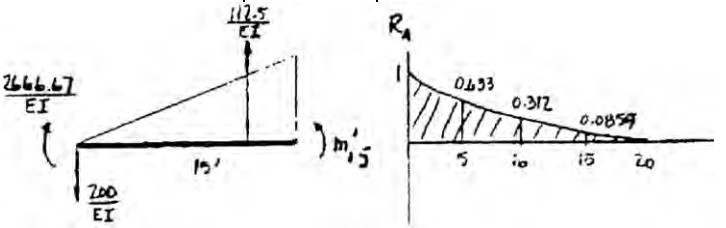
| $x$ | $\Delta$ | مقدار خط تاثیر |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{2666.67}{EI}$ | 0 |
| 5 | $\frac{1687.5}{EI}$ | 0.633 |
| 10 | $\frac{833.33}{EI}$ | 0.312 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

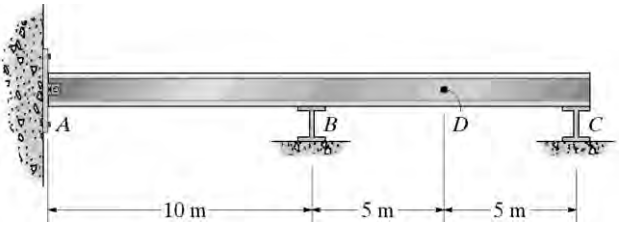
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | |
|---|---|---|
| 15 | $\frac{229.17}{EI}$ | 0.0859 |
| 20 | 0 | 0 |

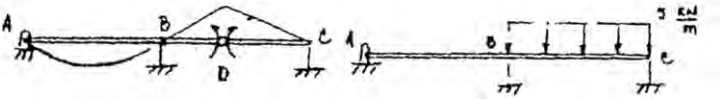



۱۰-٤٥) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر لنگر در $D$ را ترسیم نمایید. مقدار حداکثر لنگر مثبت ایجاد شده در تیر به سبب بار زنده یکنواخت $5\ kN/m$ را تعیین نمایید فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی، $B$ و $C$ غلتکی و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۰-٤٥

حل)




$$\Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{10} \frac{(0.5x)(12.5x)}{EI}dx + \int_0^{10} \frac{(0.5x)\left(37.5x - \frac{5}{2}x^2\right)dx}{EI} = \frac{5208.3}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = 2\int_0^{10} \frac{(0.5x)^2}{EI} = \frac{166.7}{EI}$$

$$+\downarrow \Delta_B + B_y f_{BB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5208.3}{EI} + B_y\left(\frac{166.7}{EI}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = -31.25kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -31.25\times 10 + 50\times 15 - C_y \times 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = 21.875\,kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 31.25 - 50 + 21.875 - A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 3.125\,kN$$

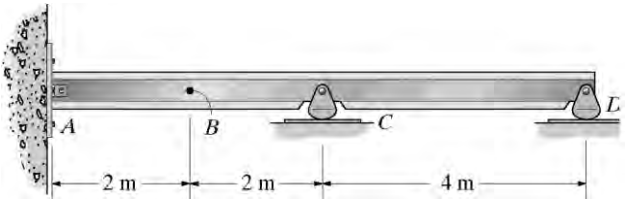
$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D + 25\times 2.5 - 21.875\times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 46.9kN.m$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

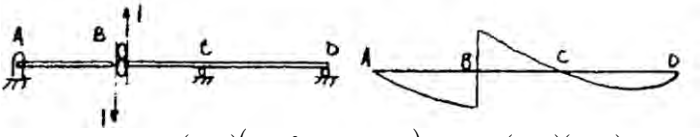


۱۰-٤٦) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر برش در نقطه $B$ را ترسیم نمایید. اگر یک بار گسترده زنده به شدت $6kN/m$ بر روی تیر حرکت کند، مقدار حداکثر برش مثبت ایجاد شده در $B$ را بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و $EI$ ثابت است.



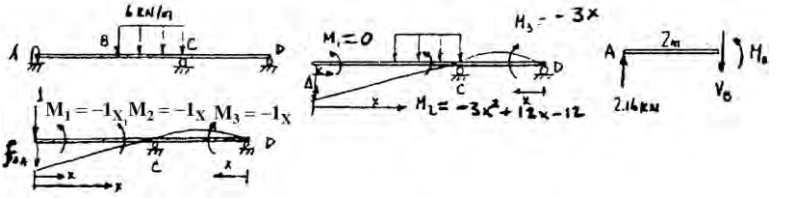

شکل مسئله ۱۰-٤٦

حل)




$$\Delta_A = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = 0 + \int_2^4 \frac{(-1x)(-3x^2+12x-12)}{EI}dx + \int_0^4 \frac{(-1x)(-3x)}{EI}dx = \frac{92}{EI}$$

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^2 \frac{(-1x)^2}{EI}dx + \int_2^4 \frac{(-1x)^2}{EI}dx + \int_0^4 \frac{(-1x)^2}{EI}dx = \frac{42.67}{EI}$$




$$\Delta_A + A_y f_{AA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{92}{EI} + A_y f_{AA} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{92}{EI} + A_y\left(\frac{42.67}{EI}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -2.16kN$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - 2.16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (V_B)_{\max} = V_B = 2.16kN$$

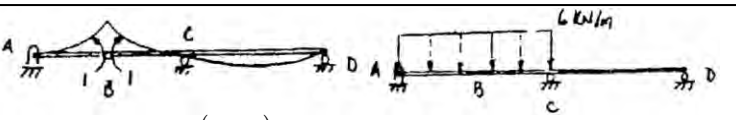
۱۰-٤٧) برای تیر شکل مسئله قبل، خط تاثیر لنگر در نقطه $B$ را ترسیم نمایید. اگر یک بار گسترده زنده به شدت $6kN/m$ بر روی تیر حرکت کند، مقدار حداکثر لنگر مثبت ایجاد شده در $B$ را بدست آورید. فرض کنید که تکیه‌گاه $A$ به صورت مفصلی و $EI$ ثابت است.

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



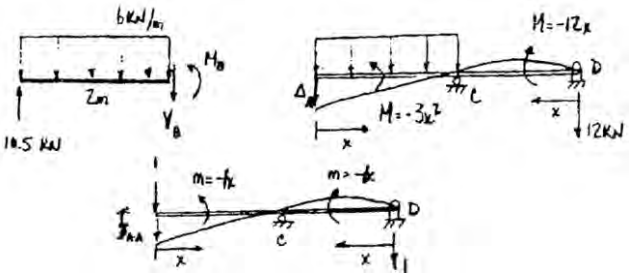


$$\Delta_A = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^4 \frac{(-1x)(-3x^2)}{EI}dx + \int_0^4 \frac{(-1x)(-12x)}{EI}dx = \frac{448}{EI}$$

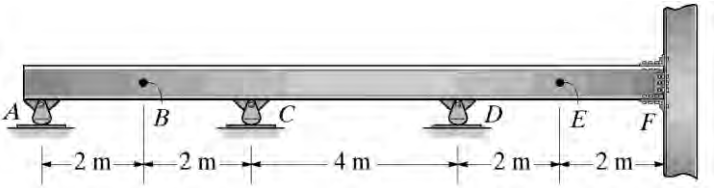
$$f_{AA} = \int_0^L \frac{m^2}{EI}dx = \int_0^4 \frac{(-1x)^2}{EI}dx + \int_0^4 \frac{(-1x)^2}{EI}dx = \frac{42.67}{EI}$$

$$\Delta_A + A_y f_{AA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{448}{EI} + A_y\left(\frac{42.67}{EI}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -10.5kN$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B + 6\times 2\times 1 - 10.5\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (M_B)_{\max} = M_B = 9kN.m$$



١٠-٤٨) برای تیر شکل زیر، خط تاثیر الف) عکس‌العمل قائم $C$ ب) لنگر در $B$ و پ) برش در $E$ را ترسیم نمایید. در هر یک از حالات موقعیت قرار گیری بار گسترده یکنواخت زنده را بر روی تیر ترسیم نمایید که باعث ایجاد حداکثر واکنش مثبت گردد. فرض کنید که تکیه‌گاه $F$ به صورت گیردار است.



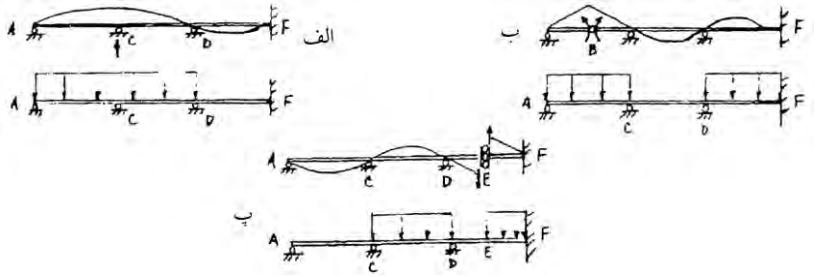

*شکل مسئله ١٠-٤٨*

حل)

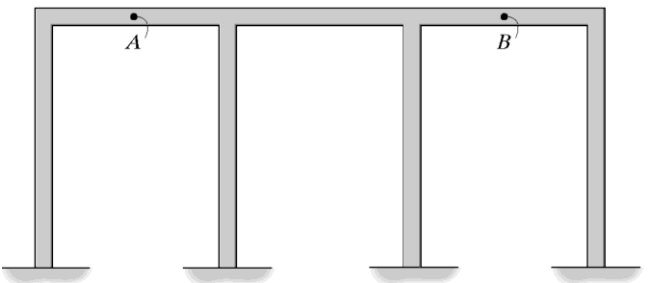
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



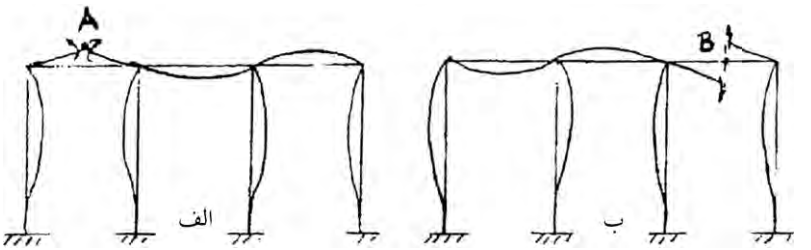



۱۰-۴۹) شماتیک خط تاثیر الف) لنگر در $A$ ب) برش در $B$ را ترسیم نمایید.

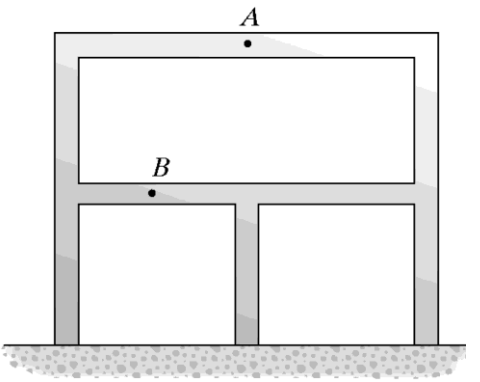



شکل مسئله ۱۰-۴۹

حل)




۱۰-۵۰) شماتیک خط تاثیر الف) لنگر در $A$ ب) برش در $B$ را ترسیم نمایید.



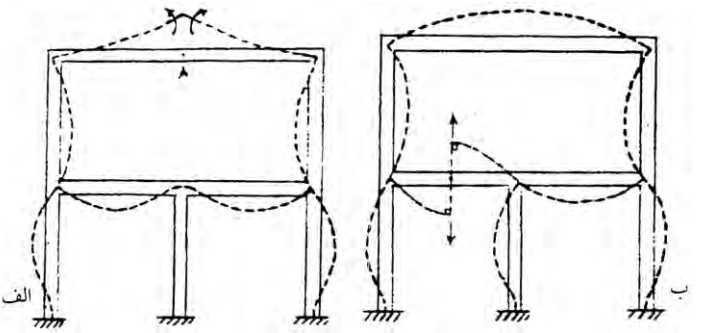

شکل مسئله ۱۰-۵۰

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

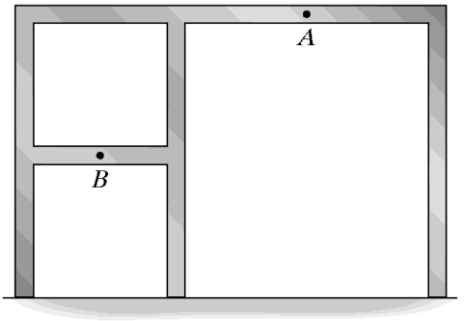
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

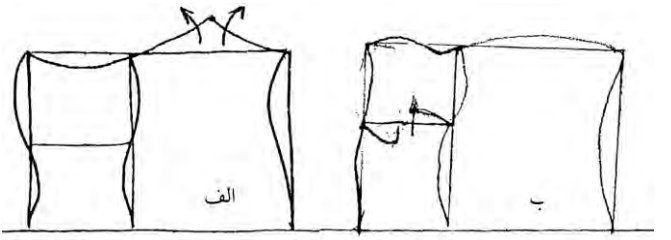



۱۰–۵۱) شماتیک خط تاثیر الف) لنگر در $A$ ب) برش در $B$ را ترسیم نمایید.




*شکل مسئله ۱۰–۵۱*

حل)

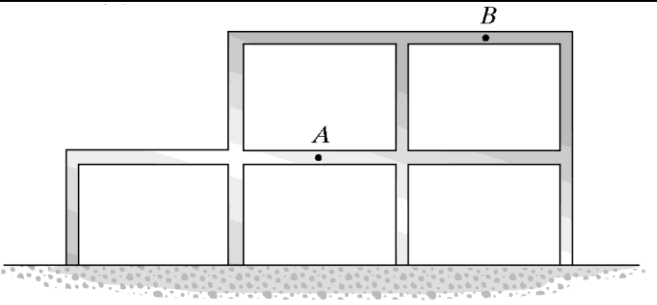



۱۰–۵۲) شماتیک خط تاثیر الف) لنگر در $A$ ب) برش در $B$ را ترسیم نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

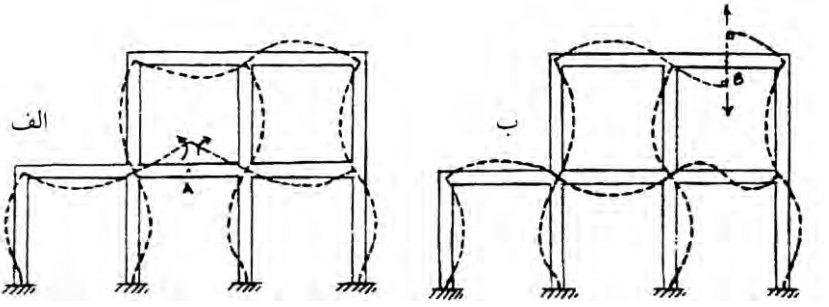
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۰-۵۲

حل)




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

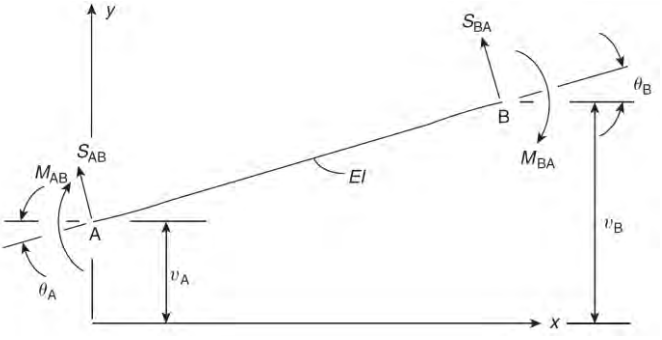


# فصل یازدهم

# تحلیل سازه‌ها بر اساس روش جابجایی: معادلات شیب افت

## ۱۱-۱ کلیات

در تحلیل سازه‌ها، روابط شیب افت برای المان‌های تیر، بخشی حیاتی از روش سختی بشمار می‌آیند. نیروهای برشی و گشتاورهای انتهایی المان تیر در اینجا به جابجایی‌ها و دوران انتها مربوط می‌شوند. علاوه بر این، این روابط روشی را برای حل فراهم می‌کنند که می‌توانیم گشتاورهای انتهایی تیرها و قاب‌های نامعین استاتیکی را تعیین کنیم. این روش با عنوان روش شیب افت شناخته می‌شود. تیر $AB$ نشان داده شده در شکل۱۱-۱ را در نظر بگیرید. تیر دارای صلبیت خمشی $EI$ است و در انتهاهای خود تحت گشتاورهای $M_{AB}$ و $M_{BA}$ و نیروهای برشی $S_{AB}$ و $S_{BA}$ قرار دارد. نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی جابجایی‌های $\upsilon_A$ و $\upsilon_B$ و دورآنهای $\theta_A$ و $\theta_B$ را مانند آنچه نمایش داده شده است تولید می‌کنند. در اینجا ما با گشتاورهای انتهایی تیر طرف هستیم. علامت قراردادی محدب و مقعر، دیگر برای توصیف این گشتاورها مناسب نیست زیرا یک گشتاور ساعتگرد در انتهای سمت چپ تیر با گشتاور پادساعتگرد انتهای سمت راست تشکیل یک کوپل می‌دهد و تولید گشتاور خمشی در تمام مقاطع تیر خواهد کرد.




*شکل ۱۱-۱ شیب و افت در یک تیر*

بنابراین ما یک قرارداد علامت را برمی‌گزینیم، به گونه‌ای که گشتاور در یک نقطه مثبت است اگر به صورت ساعتگرد اعمال شود و منفی است اگر به صورت پادساعتگرد اعمال

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

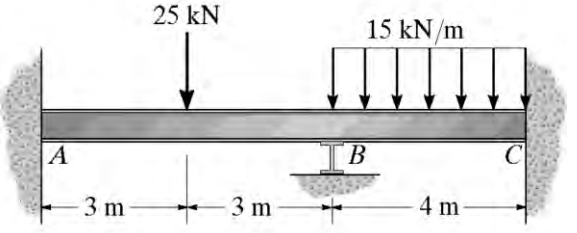
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



شود. بنابراین در شکل ۱۱-۱ هر دو گشتاور $M_{AB}$ و $M_{BA}$ مثبت هستند. حال در حل یک مسئله خاص می بینیم که چگونه این گشتاورها بر حسب توزیع گشتاورهای خمشی در طول تیر تفسیر می‌شوند. در تحلیل، ما از اثرات نیروهای محوری صرف نظر می‌کنیم زیرا اثر نیروهای محوری قابل چشم پوشی هستند. همینطور، گشتاورهای $M_{AB}$ و $M_{BA}$ مستقل از یکدیگر هستند اما نیروهای برشی که در غیاب بارهای جانبی مساوی و مخالف هم بودند، به گشتاورهای انتهایی وابسته‌اند.[1]

**۱۱-۲ مسائل:**

۱۱-۱) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $B$ به صورت غلتکی است.




*شکل مسئله ۱۱-۱*

حل) بر اساس روش شیب افت، داریم:

$$M_{AB} = 2\frac{EI}{L}\left(2\theta_A + \theta - \frac{3\Delta}{L}\right) + FEM_{AB}$$

$$M_{AB} = 2\frac{EI}{6}(0 + \theta_B) - \frac{25\times 6}{8}$$

$$M_{BA} = 2\frac{EI}{6}(2\theta_B) + \frac{25\times 6}{8}$$

$$M_{BC} = 2\frac{EI}{4}(2\theta_B) - \frac{15\times 4^2}{12}$$

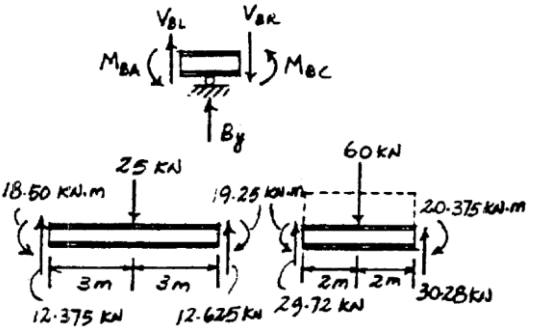
$$M_{CB} = 2\frac{EI}{4}(\theta_B) + \frac{15\times 4^2}{12}$$

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





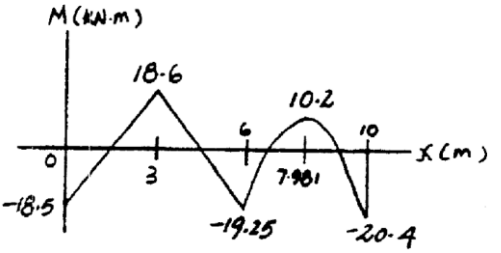

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

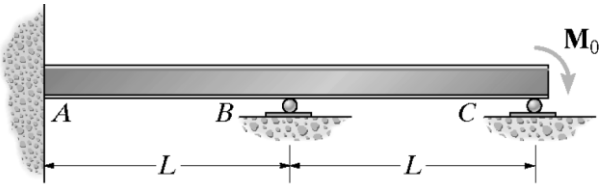
$$\Rightarrow \quad \frac{2EI}{6}(2\theta_B)+\frac{25\times 6}{8}+\frac{2EI}{4}(2\theta_B)-\frac{15\times 4^2}{12}=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B=\frac{0.75}{EI}$$

$$M_{AB}=-18.5kN.m \quad , \quad M_{CB}=20.375\,kN.m=20.4kN.m \quad , \quad M_{BA}=19.25kN.m$$

$$M_{BC}=-19.25kN.m$$




۱۱-۲) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $C$ و $B$ به صورت غلتکی است. مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۲

حل) بر اساس روش شیب افت، داریم:

$$M_{AB}=2\frac{EI}{L}(0+\theta_B-0)+0=\frac{2}{L}EI\theta_B$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



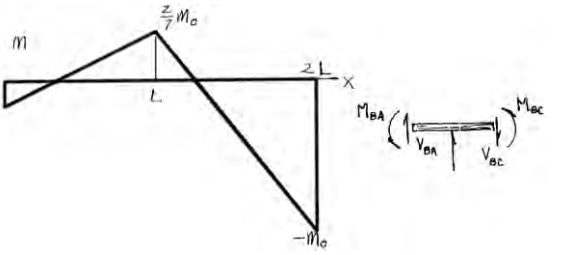
$$M_{BA}=2\frac{EI}{L}\left(2\theta_B+0-0\right)+0=\frac{4}{L}EI\theta_B$$

$$M_{BC}=2\frac{EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_C-0\right)+0=\frac{4}{L}EI\theta_B+\frac{2}{L}EI\theta_C$$

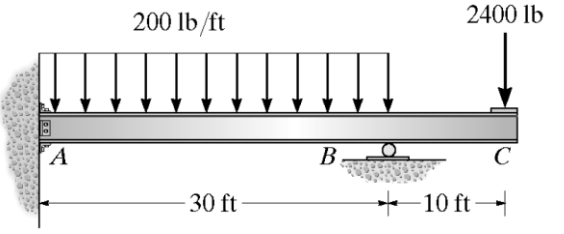
$$M_{CB}=2\frac{EI}{L}\left(2\theta_C+\theta_B-0\right)+0=\frac{4}{L}EI\theta_C+\frac{2}{L}EI\theta_B-M_D$$

$$\Sigma M_B=0 \quad \Rightarrow \quad M_{BA}+M_{BC}=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B=\frac{-M_0L}{14EI} \quad \rightarrow \quad \theta_C=\frac{2M_0L}{7EI}$$

$$M_{BC}=\frac{2}{7}M_0 \qquad M_{AB}=\frac{-1}{7}M_0 \qquad M_{BA}=\frac{-2}{7}M_0$$



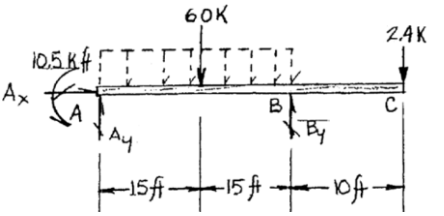

۱۱-۳) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $B$ به صورت غلتکی است. مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۳

حل) با ترسیم دیاگرام آزاد و بر اساس روش شیب افت، داریم:

$$FEM_{AB}=\frac{1}{12}(w)(L^2)=\frac{1}{12}(200)(30^2)=15k.ft$$




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

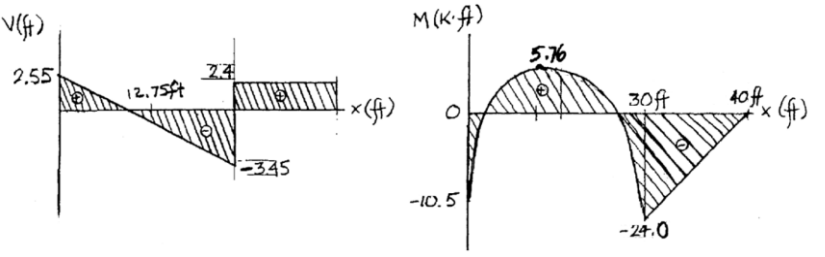


$$M_{AB} = 2\frac{EI}{30}(0+\theta_B-0)-15$$

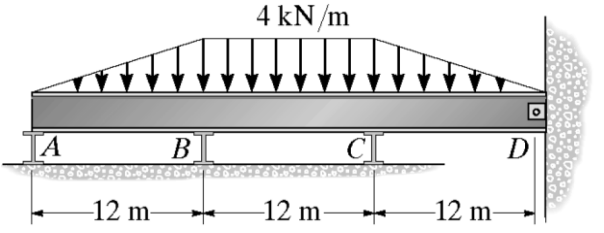
$$M_{BA} = 2\frac{EI}{30}(2\theta_B+0-0)+15$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BA}+2400\times 10=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{67.5}{EI}$$

$$M_{AB} = -10.5k.ft \quad , \quad M_{BA} = 24k.ft$$




١١-٤) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های $B$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که $A$، $B$ و $C$ صورت غلتکی و $D$ به صورت مفصلی و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ١١-٤

حل) بر اساس روش شیب افت، داریم:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{12}(\theta_B)+\frac{4\times 12^2}{15} \qquad M_{AB}=0$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_C)-\frac{4\times 12^2}{12}$$

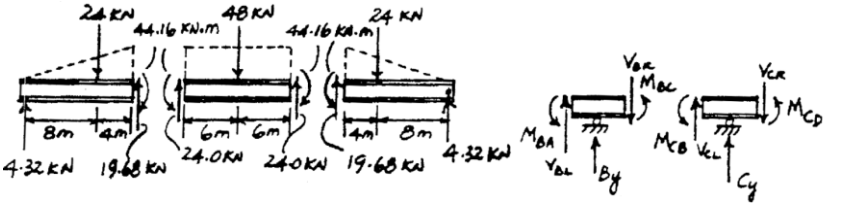
$$M_{CB} = \frac{2EI}{12}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{4\times 12^2}{12}$$

$$M_{CD} = \frac{3EI}{12}(\theta_C)-\frac{4\times 12^2}{15}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BC} + M_{BC} = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$\frac{3EI}{12}\theta_B + \frac{4\times 12^2}{15} + \frac{2EI}{12}(2\theta_B + \theta_C) - \frac{4\times 12^2}{12} = 0$$

$$0.5833\,\theta_B + 0.1667\,\theta_C = 9.6$$

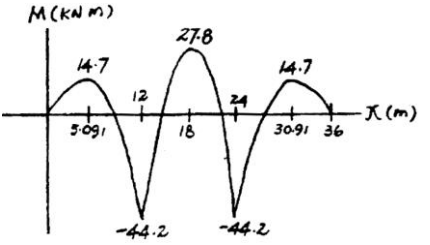
$$\frac{2EI}{12}(2\theta_C + \theta_B) + \frac{4\times 12^2}{12} + \frac{3EI}{12}(\theta_C) - \frac{4\times 12^2}{15} = 0$$

$$0.5833\,\theta_C + 0.1667\,\theta_B = -9.6$$

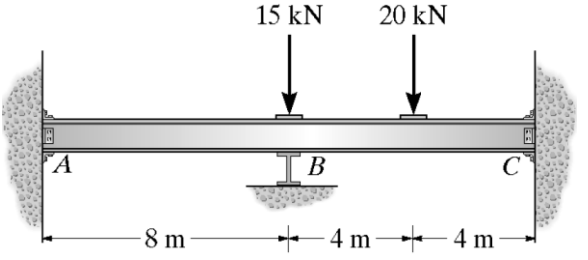
با حل معادلات داریم:

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{23.4}{EI}$$

$$M_{BA} = 44.2k.ft \quad , \quad M_{BC} = -44.2 \quad , \quad M_{CB} = 44.2 \quad , \quad M_{CD} = -44.2k.ft$$




۱۱–۵) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ گیردار بوده و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱–۵

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

$$M_{AB}=\frac{2EI}{8}(0+\theta_B-0)+0=\frac{EI}{4}\theta_B$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{8}(2\theta_B+0-0)+0=\frac{EI}{2}\theta_B$$

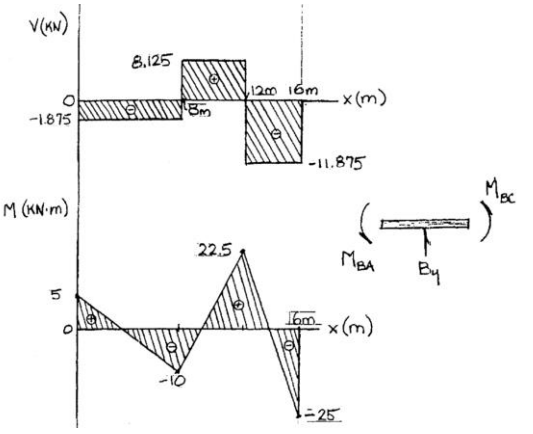
$$M_{BC}=\frac{2EI}{8}(2\theta_B+0-0)-20=\frac{EI}{2}\theta_B-20$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{8}(0+\theta_B-0)+20=\frac{EI}{4}\theta_B+20$$

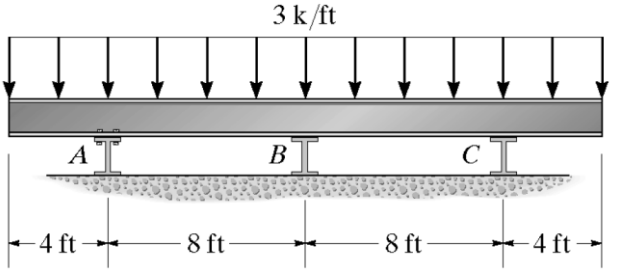
$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

$$\theta_B=\frac{20}{EI} \quad , \quad M_{AB}=5kN.m \quad , \quad M_{BA}=10kN.m$$

$$M_{BC}=-10kN.m \quad , \quad M_{CB}=25kN.m$$




۱۱-۶) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر داخلی ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ به صورت مفصلی و $B$ و $C$ غلتکی بوده و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۶

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

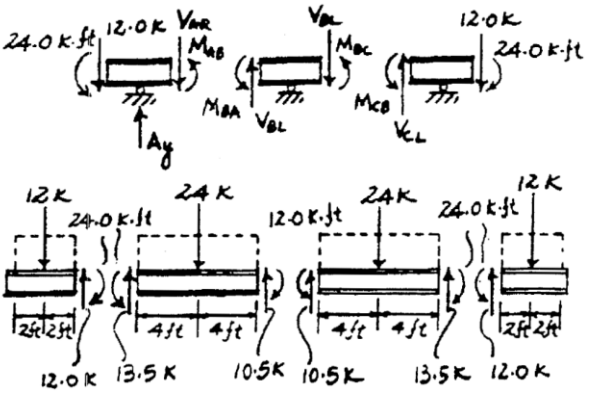
$$M_{AB}=\frac{2EI}{8}(2\theta_A+\theta_B)-\frac{3\times8^2}{12}$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{8}(2\theta_B+\theta_A)+\frac{3\times8^2}{12}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{8}(2\theta_B+\theta_C)-\frac{3\times8^2}{12}$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{8}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{3\times8^2}{12}$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:




$$M_{AB}+24=0$$

$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

$$M_{CB}-24=0$$

$$\frac{2EI}{8}(2\theta_A+\theta_B)-\frac{3\times8^2}{12}+24=0$$

$$0.5\theta_A+0.25\theta_B=\frac{-8}{EI}$$

$$\frac{2EI}{8}(2\theta_B+\theta_A)+\frac{3\times8^2}{12}+\frac{2EI}{8}(2\theta_B+\theta_C)-\frac{3\times8^2}{12}=0$$

$$\theta_B+0.25\theta_A+0.25\theta_C=0$$

$$\frac{2EI}{8}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{3\times8^2}{12}-24=0$$

$$0.5\theta_C+0.25\theta_B=\frac{8}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

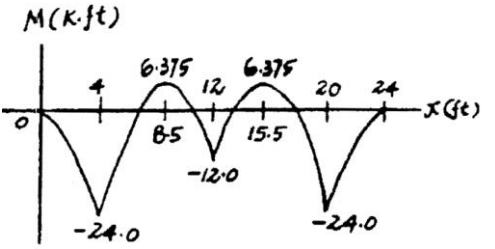
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



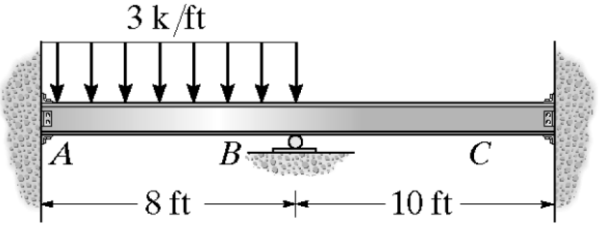
با حل همزمان سه معادله و سه مجهول داریم:

$$\theta_B = 0 \quad , \quad \theta_A = -\theta_C = -\frac{16}{EI}$$

$$M_{AB} = -24k.ft \quad , \quad M_{BA} = 12k.ft \quad , \quad M_{BC} = -12k.ft \quad , \quad M_{CB} = 24k.ft$$




۱۱-۷) در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های ایجاد شده در $A$ و $B$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ مفصلی بوده و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۱-۷*

حل) با تعیین لنگر گیرداری انتهایی برای اعضاء داریم:

$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{8} = \frac{3\times 8^2}{8} = 24k.ft$$

$$FEM_{BC} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{8}(\theta_B - 0) + 24$$

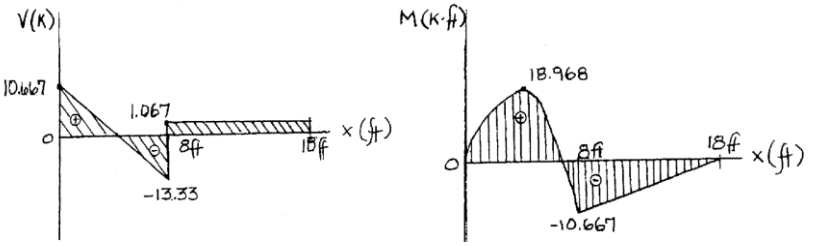
$$M_{BC} = \frac{3EI}{10}(\theta_B - 0) + 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



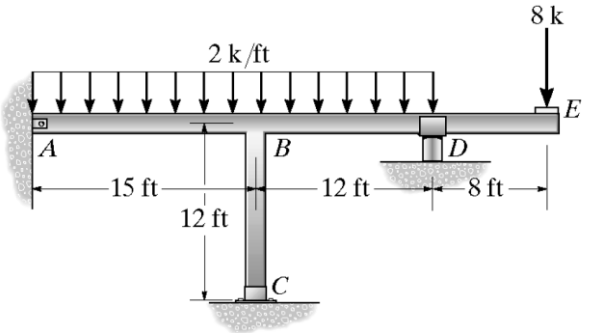



$$\theta_B = -\frac{320}{9EI}$$

$$M_{BA} = 10.667\,k.f \quad , \quad M_{BC} = -10.667\,k.ft \quad , \quad A_y = 10.667\,k = 10.7k$$

$$B_y = 14.4k \quad , \quad C_x = 0 \quad , \quad C_y = -1.0667\,k = -1.07k$$

۱۱-۸) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $B$، $C$ و $D$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را برای تیر $ABCD$ ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ مفصلی، $D$ غلتکی و $C$ گیردار بوده و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۸

حل)

$$(FEM)_{BA} = \frac{2\times 15^2}{8} = 56.25k.ft \quad , \quad (FEM)_{BD} = \frac{-2\times 12^2}{12} = -24k.f$$

$$(FEM)_{DB} = 24k.ft \quad , \quad (FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 0$$

$$M_{BA} = 3E\left(\frac{I}{15}\right)(\theta_B - 0) + 56.25 = 0.2EI\theta_B + 56.25 \qquad (1)$$

$$M_{BD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2\theta_B + \theta_D - 0) - 24 = 0.3333EI\theta_B + 0.1667EI\theta_D - 24 \qquad (2)$$

$$M_{DB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2\theta_D + \theta_B - 0) + 24 = 0.3333EI\theta_D + 0.1666EI\theta_B + 24 \qquad (3)$$

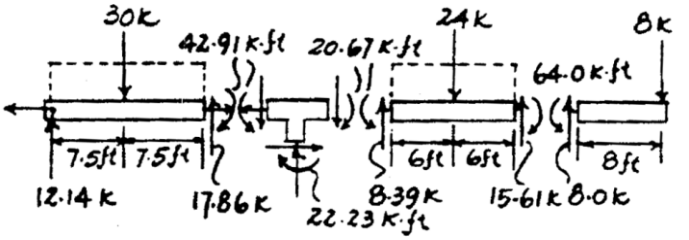
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2\theta_B + 0 - 0) + 0 = 0.3333EI\theta_B \qquad (4)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2(0) + \theta_B - 0) + 0 = 0.1667EI\theta_B \qquad (5)$$




با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0 \qquad (6)$$

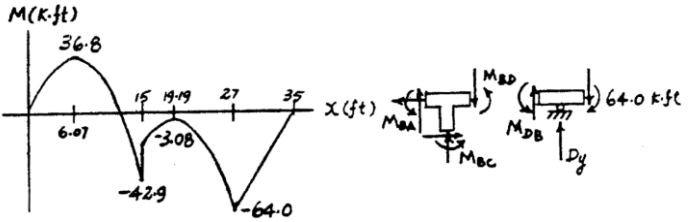
$$M_{DB} - 64 = 0 \qquad (7)$$

با حل معادلات (۱) تا (۷) داریم:

$$\theta_B = \frac{-66.7}{EI} \qquad \theta_D = \frac{153.35}{EI}$$

$$M_{BA} = 42.9k.ft \quad , \quad M_{BD} = -20.7k.ft \quad , \quad M_{DB} = 64.0k.ft$$

$$M_{BC} = -22.2k.ft \quad , \quad M_{CB} = -11.1k.ft$$

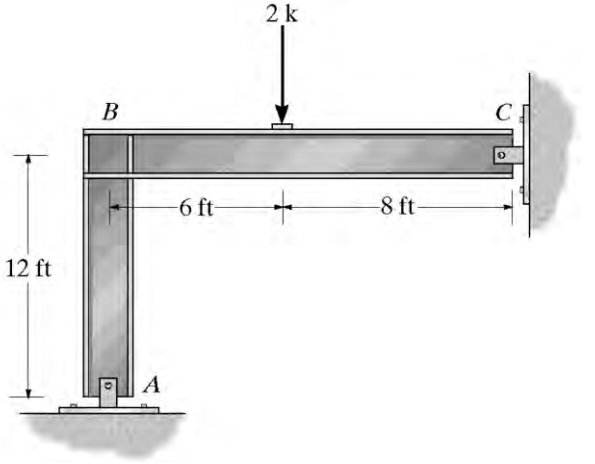



۱۱–۹) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ مفصلی و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





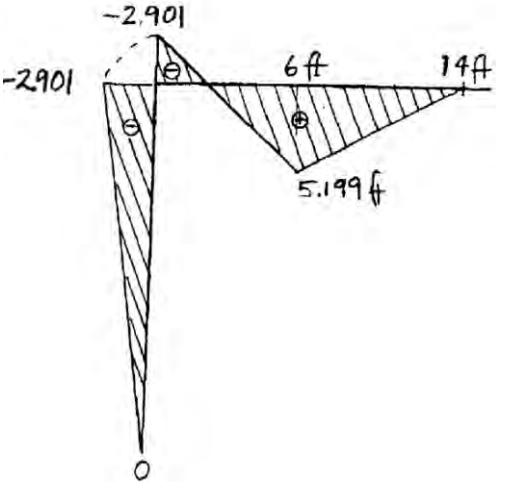

شکل مسئله ۱۱-۹

حل)

$$(FEM)_{BC} = \frac{P}{L^2}\left(b^2 a + \frac{a^2 b}{2}\right) = \frac{2}{14}\left(8^2 \times 6 + \frac{6^2 \times 8}{2}\right) = 5.388 k.ft$$

$$M_{BC} = \frac{3}{14} EI\theta_B - 5.388 \quad , \quad M_{BA} = \frac{2EI}{12}(\theta_B - 0) \quad \Rightarrow \quad M_{BC} + M_{BA} = 0$$

$$\theta_B = \frac{11.604}{EI} \quad \Rightarrow \quad M_{BC} = -2.901 k.ft \quad , \quad M_{BA} = 2.901 k.ft$$

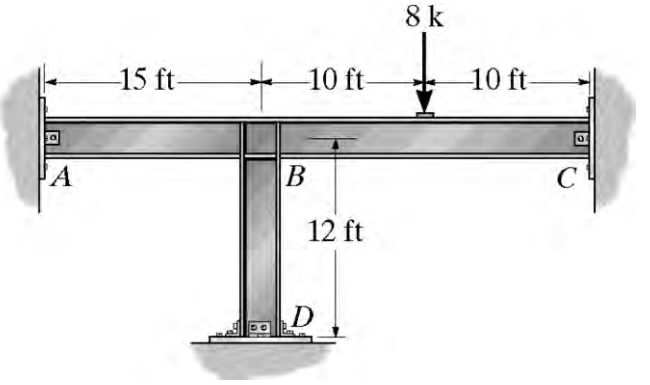



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۱-۱۰) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $B$ و $D$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ مفصلی و $D$ گیردار بوده و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۱۰

حل)

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{BD} = (FEM)_{DB} = 0$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-3\times 8\times 20}{16} = -30k.ft$$

$$M_{BA} = 3E\left(\frac{I}{15}\right)(\theta_B - 0) + 0 = 0.2EI\theta_B \qquad (1)$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{20}\right)(\theta_B - 0) - 30 = 0.15EI\theta_B - 30 \qquad (2)$$

$$M_{BD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2\theta_B + 0 - 0) + 0 = 0.3333EI\theta_B \qquad (3)$$

$$M_{DB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2(0) + \theta_B - 0) + 0 = 0.1667EI\theta_B \qquad (4)$$

با نوشتن معادله تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} + = 0 \qquad (5)$$

با حل معادلات (۱) تا (۵) داریم:

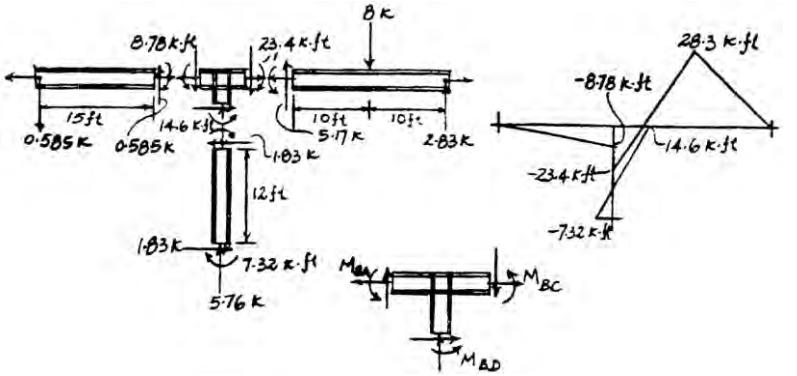
$$\theta_B = \frac{43.90}{EI} \quad , \quad M_{BA} = 8.78k.ft$$

$$M_{BC} = -23.4k.ft \quad , \quad M_{BD} = 14.6k.ft \quad , \quad M_{DB} = 7.32k.ft$$

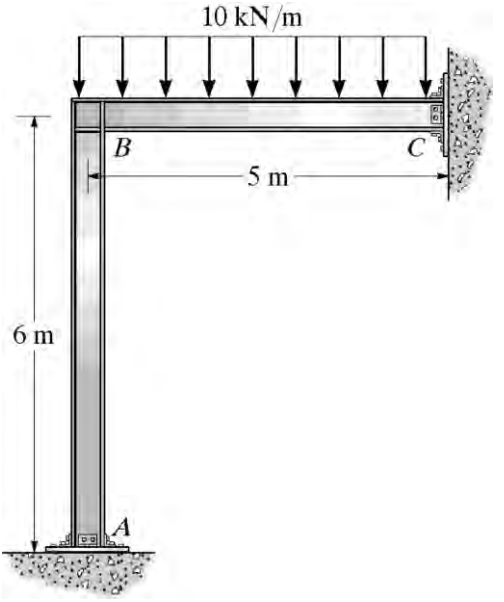
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۱-۱۱) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ گیردار و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۱-۱۱*

حل)

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{10\times 5^2}{12} = -20.8333kN.m$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = 20.8333kN.m$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$M_{BA}=\frac{2EI}{6}\left(2\theta_B+0-3(0)\right)=\frac{2}{3}EI\theta_B$$

$$M_{AB}=\frac{1}{3}EI\theta_B$$

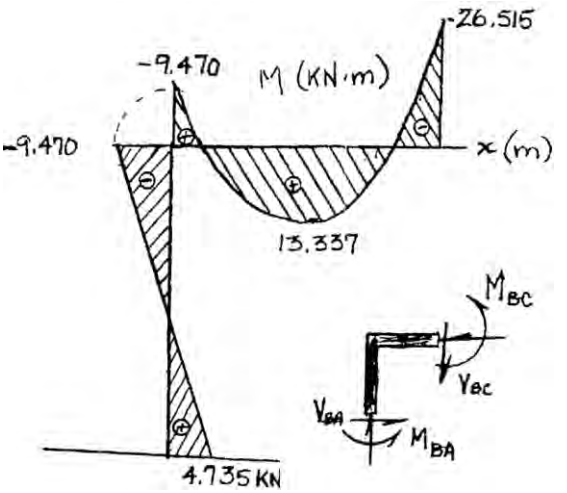
$$M_{BC}=\frac{4}{5}EI\theta_B-20.833kN.m$$

$$M_{CB}=\frac{2}{5}EI\theta_B+20.833kN.m$$

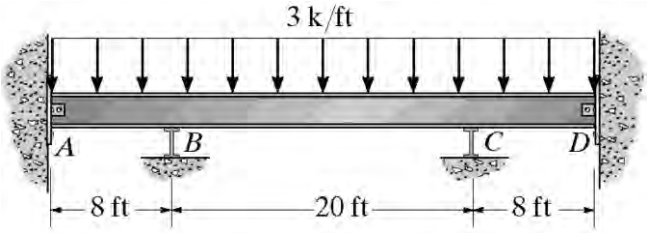
$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad M_{BC}+M_{BA}=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B=\frac{14.204}{EI}$$

$$M_{BA}=9.47kN.m \quad , \quad M_{AB}=4.74kN.m \quad , \quad M_{BC}=-9.47kN.m$$

$$M_{CB}=26.52kN.m$$




۱۱-۱۲) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $B$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین نمایید. فرض کنید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $D$ مفصلی، $B$ و $C$ غلتکی و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۱۲

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل)

$$(FEM)_{BA}=\frac{3\times 8^2}{8}=24k.ft \quad , \quad (FEM)_{BC}=\frac{-3\times 20^2}{12}=-100k.ft$$

$$(FEM)_{CB}=100k.ft \quad , \quad (FEM)_{CD}=-24k.ft$$

$$M_{BA}=3E\left(\frac{I}{8}\right)(\theta_B-0)+24=\frac{3EI\theta_B}{8}+24 \qquad (1)$$

$$M_{BC}=2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_B+\theta_C-0)-100=0.2EI\theta_B+0.1EI\theta_C-100 \qquad (2)$$

$$M_{CB}=2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_C+\theta_B-0)+100=0.2EI\theta_C+0.1EI\theta_B+100 \qquad (3)$$

$$M_{CD}=3E\left(\frac{I}{8}\right)(\theta_C-0)-24=\frac{3EI\theta_C}{8}-24 \qquad (4)$$

با نوشتن معادلات تعادل برای گره‌ها داریم:

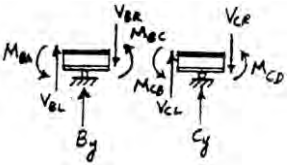
$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (5)$$

$$M_{CB}+M_{CD}=0 \qquad (6)$$

با حل همزمان روابط (١) تا (٦) داریم:

$$\theta_B=\frac{160}{EI} \quad , \quad \theta_C=\frac{160}{EI} \quad , \quad M_{BA}=84.0k.ft$$

$$M_{BC}=-84.0k.ft \quad , \quad M_{CB}=84.0k.ft \quad , \quad M_{CD}=-84.0k.ft$$

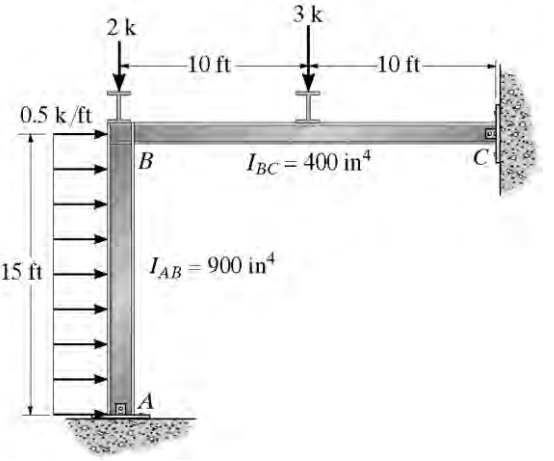



١١-١٣) در سازه شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های افقی و قائم تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ را که به صورت مفصلی هستند را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین نمایید. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





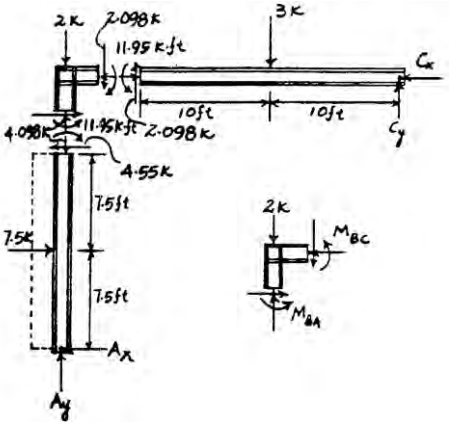

شکل مسئله ۱۱-۱۳

حل)

$$(FEM)_{BA} = \frac{0.5\times 15^2}{8} = 14.06k.ft \quad , \quad (FEM)_{BC} = \frac{-3\times 3\times 20}{16} = -11.25k.ft$$

$$M_{BA} = \frac{3\times 29\times 10^3\times 900}{15\times 144}(\theta_B - 0) + 14.06 = 36250\theta_C + 14.06 \qquad (1)$$

$$M_{BC} = \frac{3\times 29\times 10^3\times 400}{20\times 144}(\theta_B - 0) - 11.25 = 12083.33\theta_B - 11.25 \qquad (2)$$




با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (3)$$

با حل معادلات (۱) تا (۳) داریم:

$$\theta_B = -0.000058138\ rad$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

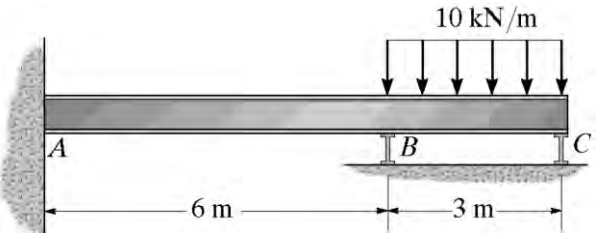


$M_{BA} = 11.95k.ft \quad , \quad M_{BC} = -11.95k.ft$

بنابراین:

$A_x = 2.95k \quad , \quad A_y = 4.1k \quad , \quad C_x = 4.55k \quad , \quad C_y = 0.902k$

۱۱-۱٤) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $A$ و $B$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۱٤

حل)

$$M_{AB} = \frac{2EI}{6}\left(2(0) + \theta_B - 0\right) + 0$$

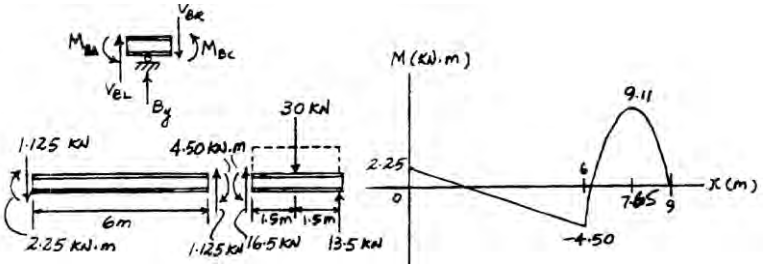
$$M_{BA} = \frac{2EI}{6}\left(2\theta_B\right) + 0$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{3}\left(\theta_B - 0\right) - \frac{10\times 3^2}{8}$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4EI}{6}\theta_B + \frac{3EI}{3}\theta_B - 11.25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{6.75}{EI}$$

$$M_{AB} = 2.25kN.m \quad , \quad M_{BA} = 4.5kN.m \quad , \quad M_{BC} = -4.5kN.m$$

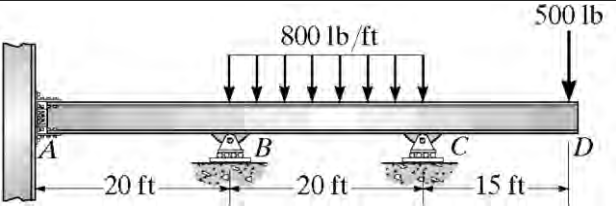



۱۱-۱۵) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در $A$، $B$ و $C$ را با استفاده از معادلات شیب افت تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه $A$ گیردار و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۱-۱۵

حل)

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0 \qquad (FEM)_{BC} = -(FEM)_{CB} = \frac{-0.8\times 20^2}{12} = -26.67k.ft$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)\left(2(0)+\theta_B-0\right)+0 = 0.1EI\theta_B \qquad (1)$$

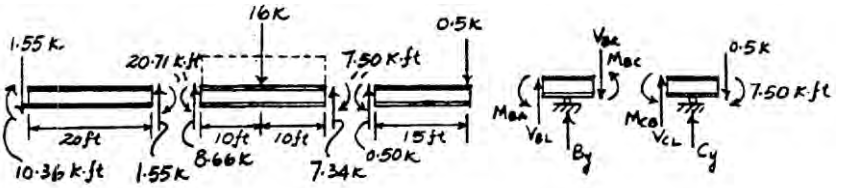
$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)\left(2\theta_B+0-0\right)+0 = 0.2EI\theta_B \qquad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)\left(2\theta_B+\theta_C-0\right)-26.67 = 0.2EI\theta_B+0.1EI\theta_C-26.67 \qquad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)\left(2\theta_C+\theta_B-0\right)+26.67 = 0.2EI\theta_C+0.1EI\theta_B+26.67 \qquad (4)$$

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (5)$$

$$M_{CB}-7.5=0 \qquad (6)$$




با معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\theta_C = -\frac{147.62}{EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{103.57}{EI}$$

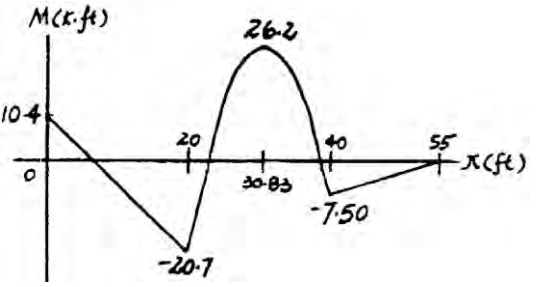
$$M_{AB} = 10.36k.ft = 10.4k.ft \quad , \quad M_{BA} = 20.71k.ft = 20.7k.ft$$

$$M_{BC} = -20.71k.ft = -20.7k.ft \quad , \quad M_{CB} = 7.5k.ft$$

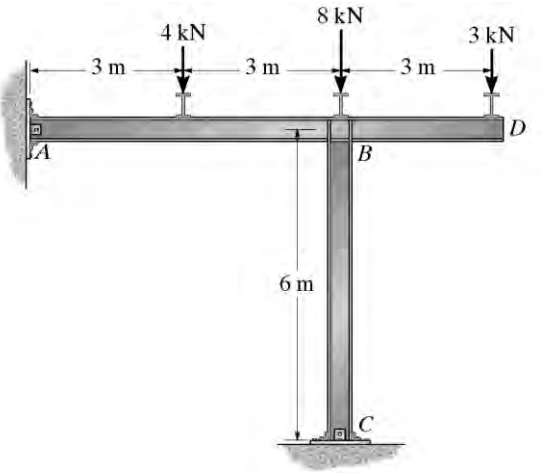
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۱-۱٦) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. تمام تکیه‌گاه‌های سازه به صورت گیردار و $EI$ ثابت در نظر گرفته شوند.




*شکل مسئله ۱۱-۱٦*

حل) قسمت کنسولی سازه به صورت معین می‌باشد.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{6}(0+\theta_B) - \frac{4\times 6}{8}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6}(2\theta_B) + \frac{4\times 6}{8}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{6}(2\theta_B)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6}(\theta_B)$$

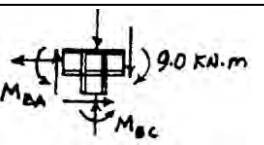
با نوشتن معادلات تعادل خواهیم داشت:

$$M_{BA} + M_{BC} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{6}(2\theta_B) + \frac{4\times 6}{8} + \frac{2EI}{6}(2\theta_B) - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{4.5}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





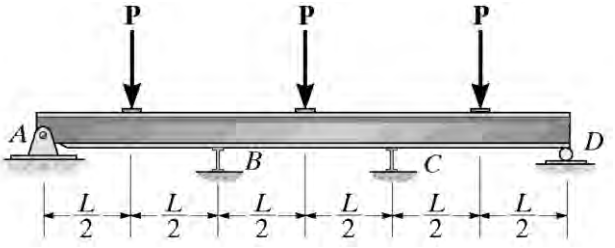

$$M_{AB}=\frac{2EI}{6}\left(0+\frac{4.5}{EI}\right)-\frac{4\times 6}{8}=-1.5kN.m$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{6}\left(\frac{4.5}{EI}\right)=1.5kN.m$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{6}\left(2\frac{4.5}{EI}\right)-\frac{4\times 6}{8}=6.0kN.m$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{6}\left(2\left(\frac{4.5}{EI}\right)\right)=3.0kN.m$$

۱۱-۱۷) در تیر شکل زیر که تحت سه بار متمرکز قرار دارد، مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده در آن را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید.




شکل مسئله ۱۱-۱۷

حل)

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}(\theta_B-0)+\frac{3PL}{16}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{L}(2\theta_B+\theta_C-0)-\frac{PL}{8}$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{L}(2\theta_C+\theta_B-0)+\frac{PL}{8}$$

$$M_{CD}=\frac{3EI}{L}(\theta_C-0)-\frac{3PL}{16}$$

با نوشتن معادلات تعادل:

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad M_{CB}+M_{CD}=0$$

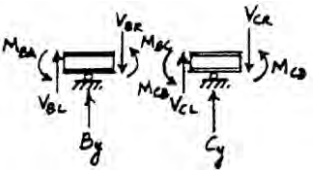
$$\frac{3EI}{L}\theta_B+\frac{3PL}{16}+\frac{4EI}{L}\theta_B+\frac{2EI}{L}\theta_C-\frac{PL}{8}=0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_C+7\theta_B=-\frac{PL^2}{16EI} \qquad (1)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



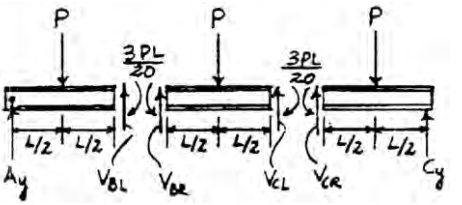
$$\frac{2EI}{L}\left(2\theta_C+\theta_B\right)+\frac{PL}{8}+\frac{3EI}{L}\theta_C-\frac{3PL}{16}=0 \quad \Rightarrow \quad 7\theta_C+2\theta_B=\frac{PL^2}{16EI} \qquad (2)$$




با حل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\theta_B=-\frac{PL^2}{80EI} \quad , \quad \theta_C=\frac{PL^2}{80EI}$$

$$M_{BA}=\frac{3PL}{20} \quad , \quad M_{BC}=-\frac{3PL}{20} \quad , \quad M_{CB}=\frac{3PL}{20} \quad , \quad M_{CD}=-\frac{3PL}{20}$$

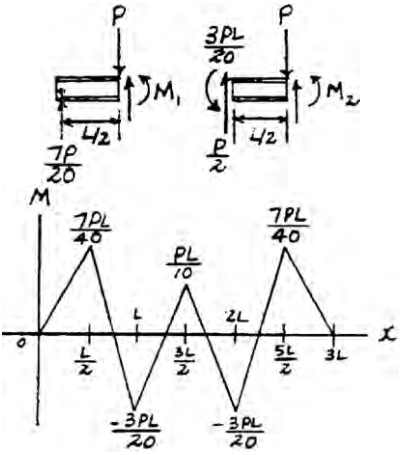



$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad -A_y(L)+P\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{3PL}{20}=0 \quad \Rightarrow \quad A_y=\frac{7}{20}P$$

$$\sum M_C=0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BR}(L)+P\left(\frac{L}{2}\right)+\frac{3PL}{20}-\frac{3PL}{20}=0 \quad \Rightarrow \quad V_{BR}=\frac{PL}{2}$$

$$\sum M=0 \quad \Rightarrow \quad M_1-\frac{7}{20}P\left(\frac{L}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad M_1=M_{\max}=\frac{7}{40}PL$$

$$\sum M=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3PL}{20}-\frac{P}{2}\left(\frac{L}{2}\right)+M_2=0 \quad \Rightarrow \quad M_2=\frac{1}{10}PL$$

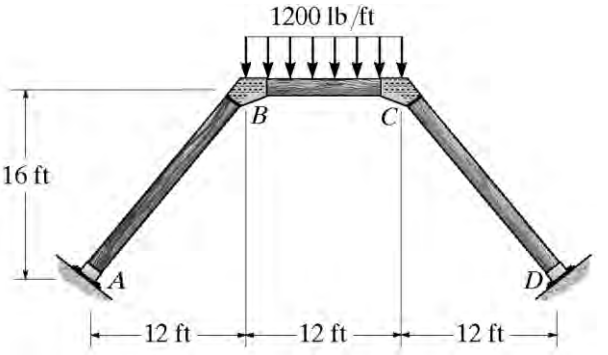



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۱-۱۸) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در هر گره را تعیین نمایید. فرض کنید که $EI$ ثابت و تکیه‌گاه‌های سازه به صورت گیردار می‌باشند.




شکل مسئله ۱۱-۱۸

حل)

$$M_{AB}=\frac{2EI}{20}(0+\theta_B)+0 \qquad M_{BA}=\frac{2EI}{20}(2\theta_B+0)+0$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_C)-\frac{1.2\times12^2}{12} \qquad M_{CB}=\frac{2EI}{12}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{1.2\times12^2}{12}$$

$$M_{CD}=\frac{2EI}{20}(2\theta_C+0)+0 \qquad M_{DC}=\frac{2EI}{20}(0+\theta_C)+0$$

با نوشتن معادله تعادل:

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{20}(2\theta_B)+\frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_C)-14.4=0$$

$$0.5333\theta_B+0.1667\theta_C=\frac{14.4}{EI} \qquad (1)$$

$$M_{CB}+M_{CD}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{12}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{1.2\times12^2}{12}+\frac{2EI}{20}(2\theta_C)=0$$

$$0.5333\theta_C+0.1667\theta_B=-\frac{14.4}{EI} \qquad (2)$$

با حل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\theta_B=\frac{39.27}{EI} \quad , \quad M_{AB}=3.93k.ft \quad , \quad M_{BA}=7.85k.ft \quad , \quad M_{BC}=-7.85k.ft$$

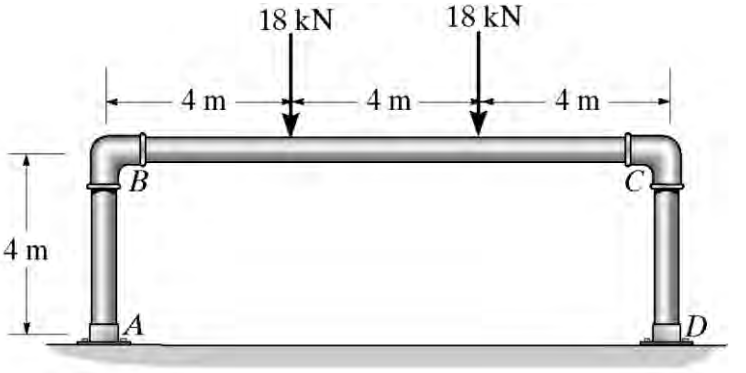
$$M_{CB}=7.85k.ft \quad , \quad M_{CD}=-7.85k.ft \quad , \quad M_{DC}=-3.93k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۱-۱۹) قاب شکل زیر از لوله‌هایی تشکیل شده است که در انتهای خود به صورت گیردار به یکدیگر مرتبط هستند. مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۱-۱۹

حل)

$$M_{AB}=\frac{2EI}{4}(0+\theta_B)+0$$
$$M_{BA}=\frac{2EI}{4}(2\theta_B+0)+0$$
$$M_{BC}=\frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_C)-\frac{2\times18\times12}{9}$$
$$M_{CB}=\frac{2EI}{12}(2\theta_C+\theta_B)+\frac{2\times18\times12}{9}$$
$$M_{CD}=\frac{2EI}{4}(2\theta_C+0)+0$$
$$M_{DC}=\frac{2EI}{4}(0+\theta_C)+0$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{AB}+M_{BC}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{4}(2\theta_B)+\frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_C)-48=0$$
$$\Rightarrow 1.333\theta_B+0.1667\theta_C=\frac{48}{EI} \qquad (1)$$
$$M_{CB}+M_{CD}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{12}(2\theta_C+\theta_B)+48+\frac{2EI}{4}(2\theta_C)=0$$
$$\Rightarrow 1.333\theta_C+0.1667\theta_B=-\frac{48}{EI} \qquad (2)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

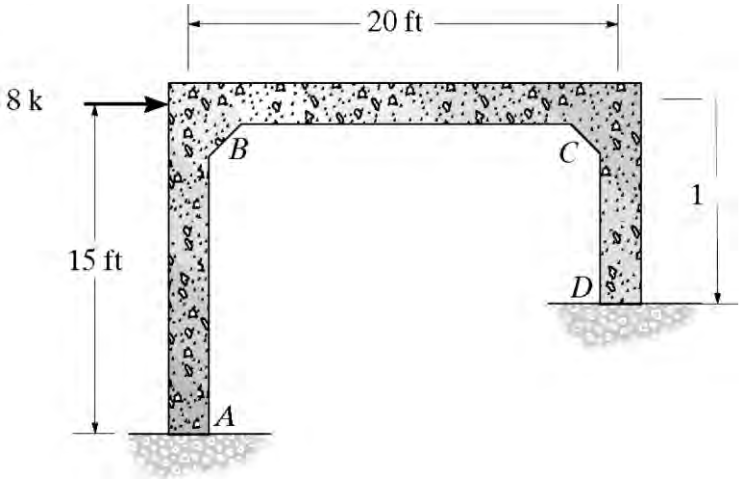
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{41.143}{EI} \quad , \quad M_{AB} = 20.6kN.m \quad , \quad M_{BA} = 41.1kN.m$$
$$M_{BC} = -41.1kN.m \quad , \quad M_{CB} = 41.1kN.m \quad , \quad M_{CD} = -41.1kN.m$$
$$M_{DC} = -20.6kN.m$$

۱۱-۲۰) در قاب شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۱-۲۰

حل) قاب دارای انتقال جانبی است:

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

$$\psi_{AB} = \frac{2}{3}\psi_{DC} \qquad M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)\left(2(0) + \theta_B - 3\left(\frac{2}{3}\right)\psi_{DC}\right) + 0 = 0.1333EI\theta_B - 0.2667EI\psi_{DC} \qquad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)\left(2\theta_B + 0 - 3\left(\frac{2}{3}\right)\psi_{DC}\right) + 0 = 0.2667EI\theta_B - 0.2667EI\psi_{DC} \qquad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_B + \theta_C - 3(0)) + 0 = 0.2EI\theta_B + 0.1EI\theta_C \qquad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)(2\theta_C + \theta_B - 3(0)) + 0 = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_B \qquad (4)$$

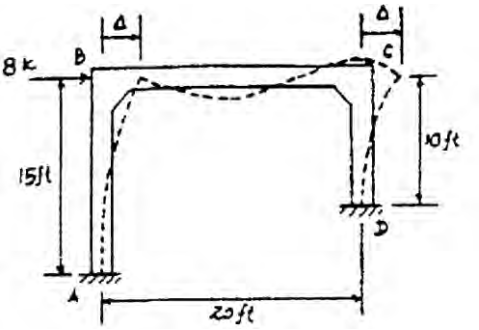
$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)(2\theta_C + 0 - 3\psi_{DC}) + 0 = 0.4EI\theta_C - 0.6EI\psi_{DC} \qquad (5)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)\left(2(0)+\theta_C-3\psi_{DC}\right)+0 = 0.2EI\theta_C - 0.6EI\psi_{DC} \qquad (6)$$

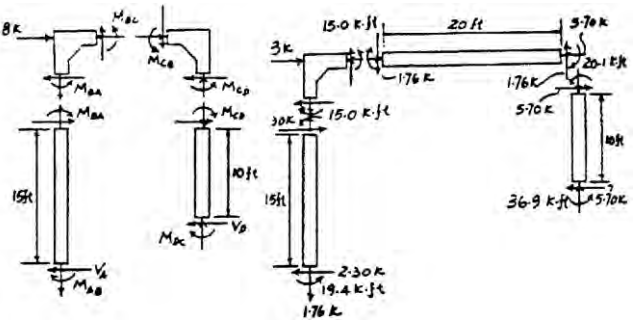



با نوشتن معادلات تعادل در گره‌ها و معادله تعادل برش داریم:

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (7) \qquad\qquad M_{CB}+M_{CD}=0 \qquad (8)$$

$$V_A+V_D-8=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\left(M_{AB}+M_{BA}\right)}{15}-\frac{\left(M_{CD}+M_{DC}\right)}{10}-8=0$$

$$2M_{AB}+2M_{BA}+3M_{CD}+3M_{DC}=-240 \qquad (9)$$

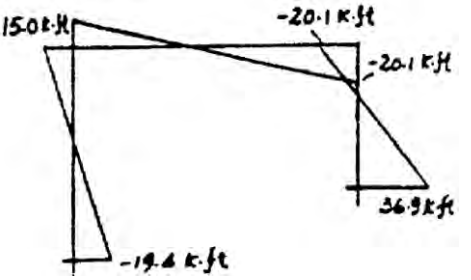



با حل همزمان سه معادله فوق داریم:

$$\theta_B=\frac{33.149}{EI} \quad , \quad \theta_C=\frac{83.978}{EI} \quad , \quad \psi_{DC}=\frac{89.503}{EI}$$

$$M_{AB}=-19.4k.ft \quad , \quad M_{BA}=-15k.ft \quad , \quad M_{BC}=15k.ft$$

$$M_{CB}=20.1k.ft \quad , \quad M_{CD}=-20.1k.ft \quad , \quad M_{DC}=-36.9k.ft$$

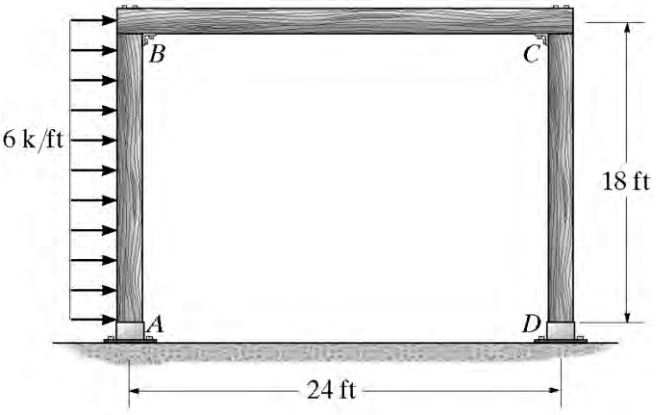



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۱-۲۱) در قاب شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت و تکیه‌گاه‌ها به صورت گیردار در نظر گرفته شود.




شکل مسئله ۱۱-۲۱

حل) قاب دارای انتقال جانبی است:

$$(FEM)_{BC}=(FEM)_{CB}=(FEM)_{CD}=(FEM)_{DC}=0$$

$$(FEM)_{AB}=-\frac{6\times 18^2}{12}=-162k.ft \quad , \quad (FEM)_{BA}=162k.ft$$

$$\psi_{AB}=\psi_{DC} \quad \rightarrow \quad M_N=2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N+\theta_F-3\psi)+(FEM)_N$$

$$M_{AB}=2E\left(\frac{I}{18}\right)(2(0)+\theta_B-3\psi_{AB})-162=0.1111EI\theta_B-0.3333EI\psi_{AB}-162 \qquad (1)$$

$$M_{BA}=2E\left(\frac{I}{18}\right)(2(\theta_B)+0-3\psi_{AB})+162=0.2222EI\theta_B-0.3333EI\psi_{AB}+162 \qquad (2)$$

$$M_{BC}=2E\left(\frac{I}{24}\right)(2\theta_B+\theta_C-3(0))+0=0.1667EI\theta_B+0.0833EI\theta_C \qquad (3)$$

$$M_{CB}=2E\left(\frac{I}{24}\right)(2\theta_C+\theta_B-3(0))+0=0.1667EI\theta_B+0.0833EI\theta_C \qquad (4)$$

$$M_{CD}=2E\left(\frac{I}{18}\right)(2\theta_C+0-3\psi_{AB})+0=0.2222EI\theta_C-0.3333EI\psi_{AB} \qquad (5)$$

$$M_{DC}=2E\left(\frac{I}{18}\right)(2(0)+\theta_C-3\psi_{AB})+0=0.1111EI\theta_C-0.3333EI\psi_{AB} \qquad (6)$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (7) \quad , \quad M_{CD}+M_{CB}=0 \qquad (8)$$

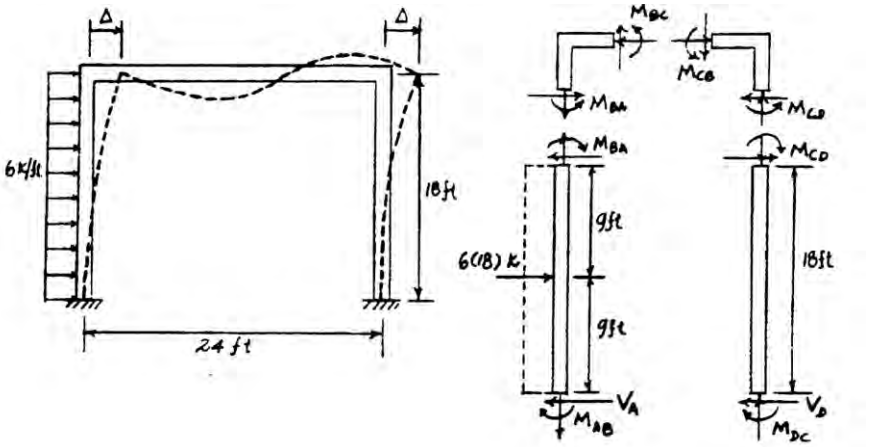
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$V_A + V_D - 6\times 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{(M_{AB}+M_{BA}-972)}{18} - \frac{(M_{CD}+M_{DC})}{18} - 108 = 0$$

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} = -972 \qquad (9)$$




با حل معادلات فوق داریم:

$$\theta_B = \frac{265.09}{EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{795.27}{EI} \quad , \quad \psi_{AB} = \frac{994.09}{EI}$$

$$M_{AB} = -464\,k.ft \quad , \quad M_{BA} = -110\,k.ft \quad , \quad M_{BC} = 110\,k.ft$$

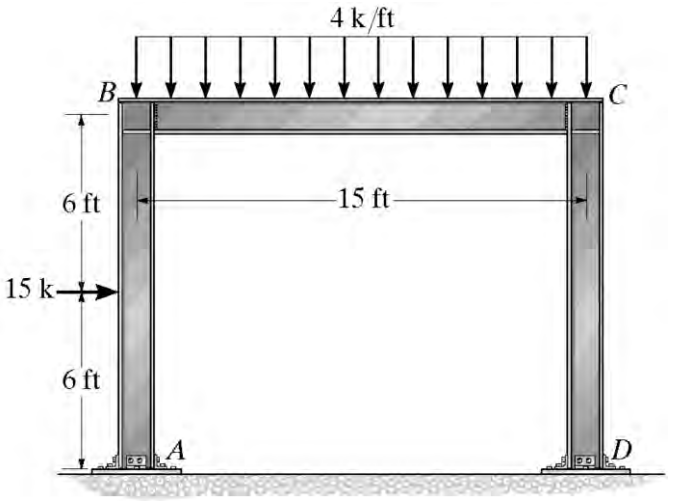
$$M_{CB} = 155\,k.ft \quad , \quad M_{CD} = -155\,k.ft \quad , \quad M_{DC} = -243\,k.ft$$

۱۱-۲۲) در قاب شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. مقدار $EI$ ثابت و تکیه‌گاه‌ها به صورت گیردار در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۱-۲۲

حل) سازه دارای انتقال جانبی است.

$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0 \quad , \quad \psi_{AB} = \psi_{DC}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{-15\times 12}{8} = -22.5k.ft \quad , \quad (FEM)_{BA} = 22.5k.ft$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-4\times 15^2}{12} = -75k.ft \quad , \quad (FEM)_{CB} = 75.0k.ft$$

$$\rightarrow \quad M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2(0) + \theta_B - 3\psi_{AB}) - 22.5 = 0.1667EI\theta_B - 0.5EI\psi_{AB} - 22.5 \qquad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2\theta_B + 0 - 3\psi_{AB}) + 22.5 = 0.3333EI\theta_B - 0.5EI\psi_{AB} + 22.5 \qquad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)(2\theta_B + \theta_C - 3(0)) - 75 = 0.2667EI\theta_B + 0.1333EI\theta_C - 75 \qquad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)(2\theta_C + \theta_B - 3(0)) + 75 = 0.1333EI\theta_B + 0.2667EI\theta_C + 75 \qquad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)(2\theta_C + 0 - 3\psi_{AB}) + 0 = 0.3333EI\theta_C - 0.5EI\psi_{AB} \qquad (5)$$

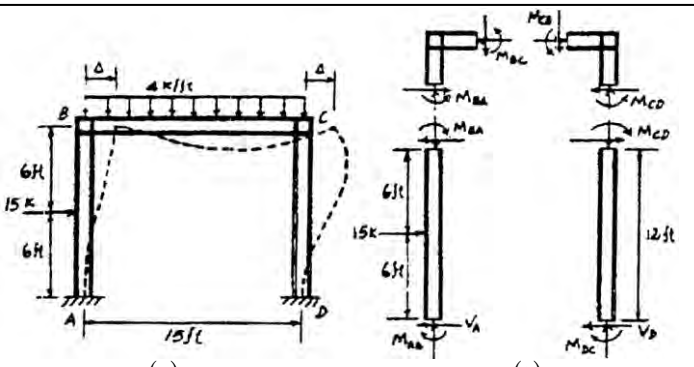
$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)(2(0) + \theta_C - 3\psi_{AB}) + 0 = 0.1667EI\theta_C - 0.5EI\psi_{AB} \qquad (6)$$

با نوشتن معادلات تعادل در گره‌ها و معادله تعادل برش داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$$M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (7) \qquad\qquad M_{CD}+M_{CB}=0 \qquad (8)$$

$$V_A+V_D-15=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{(M_{AB}+M_{BA}-90)}{12}-\frac{(M_{CD}+M_{DC})}{12}-15=0$$

$$M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}=-90 \qquad (9)$$

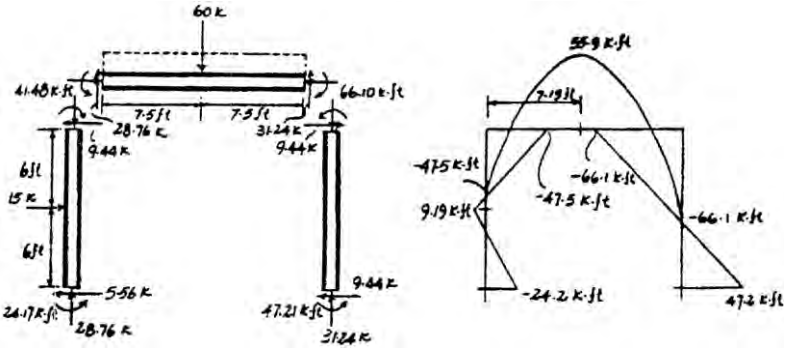
با حل همزمان معادلات فوق داریم:

$$\theta_B=\frac{159.88}{EI} \quad , \quad \theta_C=\frac{-113.33}{EI} \quad , \quad \psi_{AB}=\frac{56.64}{EI}$$

$$M_{AB}=-24.17k.ft=-24.2k.ft \quad , \quad M_{BA}=47.48k.ft=47.5k.ft$$

$$M_{BC}=-47.48k.ft=-47.5k.ft \quad , \quad M_{CB}=66.01k.ft=66k.ft$$

$$M_{CD}=-66.01k.ft=-66.0k.ft \quad , \quad M_{DC}=-47.21k.ft=-47.2k.ft$$

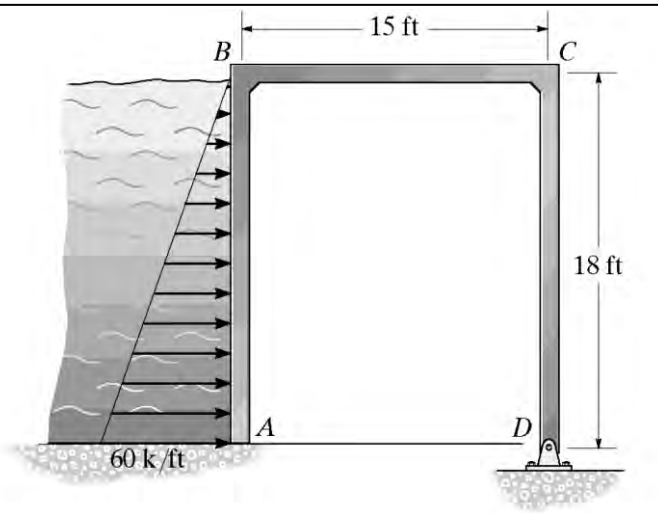



۱۱-۲۳) در قاب شکل زیر که سمت چپ آن تحت فشار هیدرواستاتیک آب قرار دارد، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت و تکیه‌گاه‌ها به صورت گیردار در نظر گرفته شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۱-۲۳

حل) سازه دارای انتقال جانبی است.

$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = (FEM)_{CD} = 0$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{-60\times 18^2}{20} = -972k.ft \quad , \quad (FEM)_{BA} = \frac{60\times 18^2}{30} = 648k.ft$$

$$\rightarrow \quad M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)(2(0) + \theta_B - 3\psi_{AB}) - 972 = 0.1111EI\theta_B - 0.3333EI\psi_{AB} - 972 \qquad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)(2\theta_B + 0 - 3\psi_{AB}) + 648 = 0.2222EI\theta_B - 0.3333EI\psi_{AB} + 648 \qquad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)(2\theta_B + \theta_C - 3(0)) + 0 = 0.2667EI\theta_B + 0.1333EI\theta_C \qquad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)(2\theta_C + \theta_B - 3(0)) + 0 = 0.2667EI\theta_C + 0.1333EI\theta_B \qquad (4)$$

$$M_{CD} = 3E\left(\frac{I}{18}\right)(\theta_C - \psi_{AB}) + 0 = 0.1667EI\theta_C - 0.1666EI\psi_{AB} \qquad (5)$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad (6) \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad (7)$$

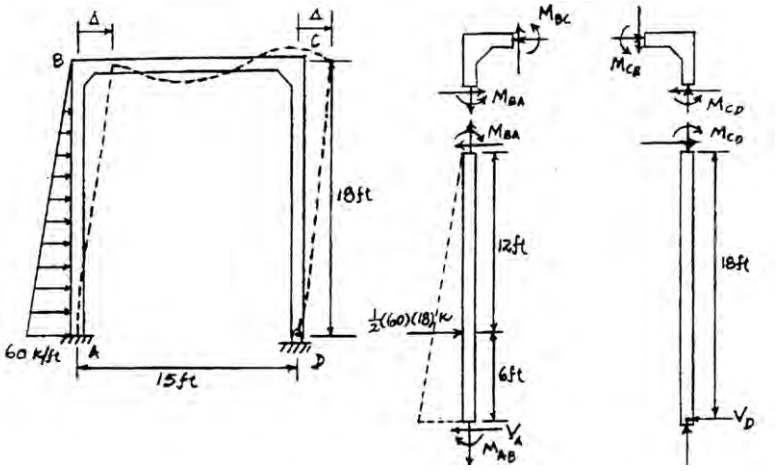
$$V_A + V_D - \frac{1}{2}(60)(18) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{(M_{BA} + M_{AB} - 540\times 12)}{18} - \frac{M_{CD}}{18} - 540 = 0$$

$$M_{BA} + M_{AB} + M_{CD} = -3240 \qquad (8)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





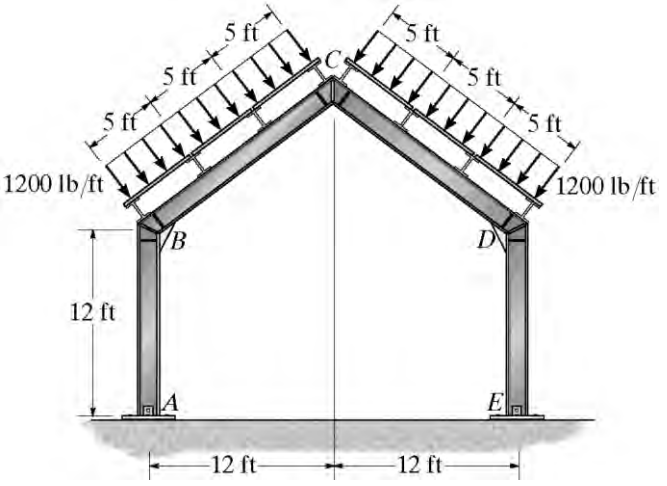

با حل معادلات (۱) تا (۸):

$$\theta_C = \frac{1254.194}{EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{1222.839}{EI} \quad , \quad \psi_{AB} = \frac{4239.174}{EI}$$

$$M_{AB} = -2.25(10^3)k.ft \qquad M_{BA} = -493\,k.ft$$

$$M_{BC} = 493\,k.ft \qquad M_{CB} = 497\,k.ft \qquad M_{CD} = -497\,k.ft$$

۱۱-۲٤) قاب سوله نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت نیروهای گسترده مانند شکل می‌باشد. برآیند نیروهای گسترده اعمال شده بر قاب توسط لاپه‌های گذاشته شده بر روی سقف به صورت نیروهایی متمرکز منتقل می‌شوند. فرض کنید که $A$ و $B$ مفصلی بوده و اتصال تمام اعضا به یکدیگر به صورت گیردار و $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۱-۲٤

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) سازه به صورت متقارن بوده و دارای انتقال جانبی نیست.

$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CD} = \frac{-2\times 6\times 15}{9} = -20k.ft$$

$$(FEM)_{CB} = (FEM)_{DC} = 20k.ft$$

$$\rightarrow \quad M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{12}(\theta_B)$$

$$\rightarrow \quad M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{15}(2\theta_B + \theta_C) - 20$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_B) + 20$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_D) - 20$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{15}(2\theta_D + \theta_C) + 20$$

$$\rightarrow \quad M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{DE} = \frac{3EI}{12}\theta_D$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$$

یا

$$\frac{2EI}{12}\theta_B + \frac{2EI}{15}(2\theta_B + \theta_C) - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.5167\theta_B + 0.1333\theta_C = \frac{20}{EI}$$

$$\frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_B) + 20 + \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_D) - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\theta_C + \theta_B + \theta_D = 0$$

$$\frac{2EI}{15}(2\theta_D + \theta_C) + 20 + \frac{3EI}{12}\theta_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.51667\theta_D + 0.1333\theta_C = -\frac{20}{EI}$$

با حل معادلات فوق داریم:

$$\theta_C = 0 \quad , \quad \theta_B = -\theta_D = \frac{38.71}{EI} \qquad \Rightarrow$$

$$M_{BA} = 9.68k.ft \quad , \quad M_{BC} = -9.68k.ft \quad , \quad M_{CB} = 25.2k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$M_{CD} = -25.2k.ft \quad , \quad M_{DC} = 9.68k.ft \quad , \quad M_{DE} = -9.68k.ft$

۱۱-۲۵) مسئله قبل را با فرض گیردار بودن تکیه‌گاه‌ها حل نمایید.

حل) سازه به صورت متقارن بوده و دارای انتقال جانبی نیست.

$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CD} = \frac{-2\times 6\times 15}{9} = -20k.ft$$

$$(FEM)_{CB} = (FEM)_{DC} = 20k.ft$$

$$\rightarrow \quad M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{12}(\theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{12}(2\theta_B)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{15}(2\theta_B + \theta_C) - 20$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_B) + 20$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_D) - 20$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{15}(2\theta_D + \theta_C) + 20$$

$$M_{DE} = \frac{2EI}{12}(2\theta_D)$$

$$M_{ED} = \frac{2EI}{12}(\theta_D)$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$$

یا

$$\frac{2EI}{12}(2\theta_B) + \frac{2EI}{15}(2\theta_B + \theta_C) - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.6\theta_B + 0.1333\theta_C = \frac{20}{EI}$$

$$\frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_B) + 20 + \frac{2EI}{15}(2\theta_C + \theta_D) - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0.5333\,\theta_C + 0.1333\,\theta_B + 0.1333\,\theta_D = 0$$

$$\frac{2EI}{15}(2\theta_D + \theta_C) + 20 + \frac{2EI}{12}(2\theta_D) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.6\theta_D + 0.1333\theta_C = -\frac{20}{EI}$$

با حل معادلات فوق داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\theta_C = 0 \quad , \quad \theta_B = -\theta_D = \frac{33.33}{EI} \quad \Rightarrow$$

$$M_{AB} = 5.56k.ft \quad , \quad M_{BA} = 11.1k.ft \quad , \quad M_{BC} = -11.1k.ft$$

$$M_{CB} = 24.4k.ft \quad , \quad M_{CD} = -24.4k.ft \quad , \quad M_{DC} = 11.1k.ft$$

$$M_{DE} = -11.1k.ft \quad , \quad M_{ED} = -5.56k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



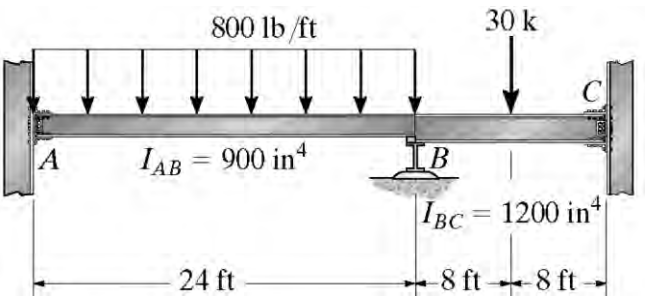
# فصل دوازدهم
# تحلیل سازه‌ها بر اساس روش جابجایی: پخش لنگر

## ۱-۱۲ کلیات

مثال‌های حل شده در فصل‌های قبل برای سازه‌های نامعین نشان می‌دهند که هر چه سازه پیچیده‌تر باشد، تعداد مجهولات بیشتر می‌شود و بدین ترتیب تعداد معادلات همزمانی که باید حل شوند بیشتر می‌شود. بدین ترتیب روش‌های دستی تحلیل بسیار خسته کننده می‌شوند و راهکارهای ساده‌تر بیشتر مورد علاقه هستند. یک راهکار دیگر این است که از تکنیک‌های بر مبنای رایانه بهره ببریم اما روش دستی قدرتمند دیگری نیز وجود دارد، روندی تکراری که با عنوان روش پخش لنگر شناخته می‌شود. این روش توسط پروفسور هاردی کراس بوجود آمد و در یک مقاله، در سال ۱۹۳۲ به انجمن مهندسین عمران ایالات متحده *ASCE* ارائه شد.[1]

## ۲-۱۲ مسائل:

۱۲-۱) مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ ، $B$ و $C$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، تکیه‌گاه $A$ و $C$ به صورت گیردار و تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۱*

حل) در ابتدا با تعیین ضرایب پخش داریم:

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



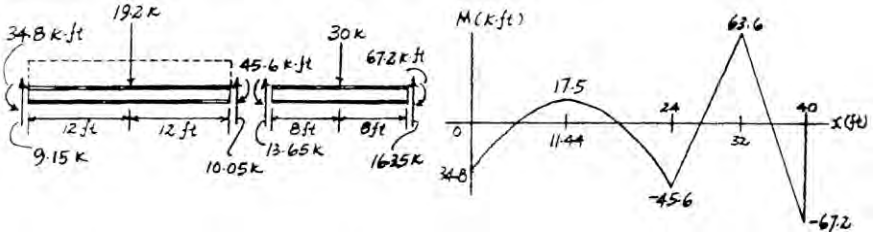
$$(DF)_{AB}=0 \qquad (DF)_{BA}=\frac{\frac{0.75I_{BC}}{24}}{\frac{0.75I_{BC}}{24}+\frac{I_{BC}}{16}}=0.3333$$

$$(DF)_{CB}=0 \qquad (DF)_{BC}=0.6667$$

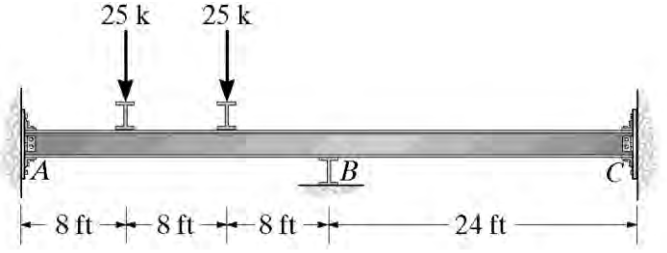
$$(FEM)_{AB}=\frac{-0.8\times 24^2}{12}=-38.4k.ft \quad \rightarrow \quad (FEM)_{BA}=38.4k.ft$$

$$(FEM)_{BC}=\frac{-30\times 16}{8}=-60.0k.ft \quad \rightarrow \quad (FEM)_{CB}=60.0k.ft$$

| گره | *A* | *B* | | *C* |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 0 | 0.3333 | 0.6667 | 0 |
| *FEM* | -38.4 | 38.4 | -60 | 60 |
| پخش | | 7.2 | 14.4 | |
| | 3.6 | | | 7.2 |
| Σ*M* | -34.8 | 45.6 | -45.6 | 67.2 |




۱۲-۲) مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ ، $B$ و $C$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ و$C$ به صورت گیردار و تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۲*

حل) با تعیین لنگرهای گیرداری انتهایی داریم:

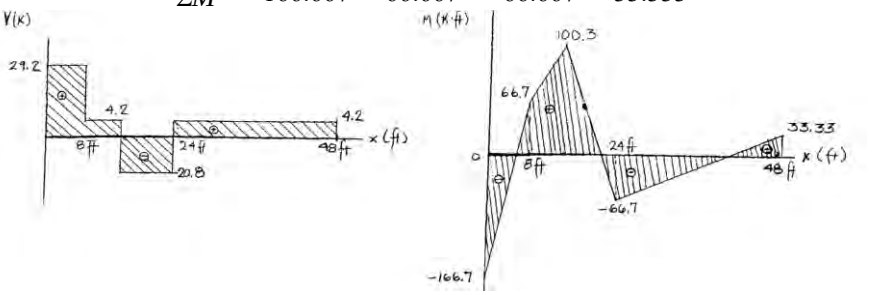
$$FEM_{BC}=0 \qquad FEM_{BA}=-FEM_{AB}=\frac{2PL}{9}=\frac{2\times 25\times 24}{9}=133.333k.ft$$

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

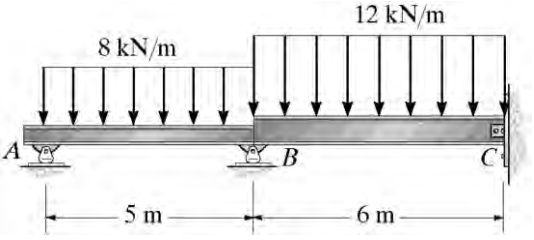
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| گره | ***A*** | ***B*** | | ***C*** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| *FEM* | -133.333 | 133.333 | 0 | 0 |
| پخش | | -66.667 | -66.667 | |
| | -33.333 | | | -33.333 |
| $\Sigma M$ | -166.667 | 66.667 | -66.667 | -33.333 |




۱۲-۳) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده $B$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، تکیه‌گاه $C$ به مفصلی، $I_{AB}=0.75I_{BC}$ و $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۲-۳

حل)

$$(DF)_{AB}=1 \quad , \quad (DF)_{BA}=\frac{\frac{0.75I_{BC}}{5}}{\frac{0.75I_{BC}}{5}+\frac{I_{BC}}{6}}=0.4737$$

$$(DF)_{BC}=0.5263 \quad , \quad (DF)_{CB}=1$$

$$(FEM)_{AB}=\frac{-8\times5^2}{12}=-16.667kN.m \quad , \quad (FEM)_{BA}=16.667kN.m$$

$$(FEM)_{BC}=\frac{-12\times6^2}{12}=-36kN.m \quad , \quad (FEM)_{CB}=36kN.m$$

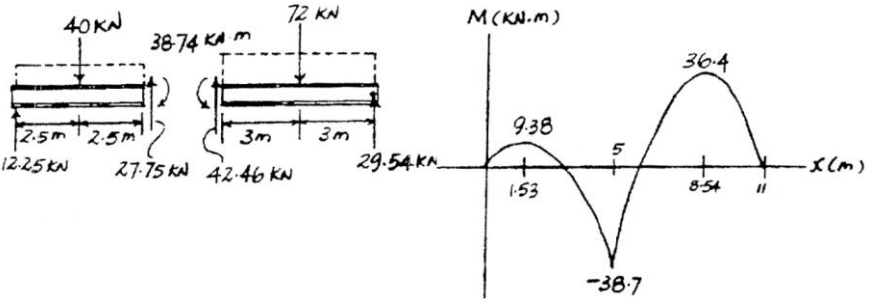
| گره | ***A*** | ***B*** | | ***C*** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 1 | 0.4737 | 0.5263 | 1 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

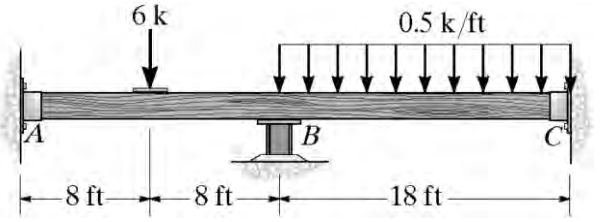
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *FEM* | -16.667 | 16.667 | -36 | 36 |
| | 16.667 | 9.158 | 10.175 | -36 |
| پخش | | 8.333 | -18 | |
| | | 4.579 | 5.088 | |
| $\Sigma M$ | 0 | 38.7 | -38.7 | 0 |




١٢-٤) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ ، $B$ و $C$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ و$C$ به صورت گیردار و تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد.




شکل مسئله ١٢-٤

حل) با تعیین ضرائب پخش داریم:

$$(DF)_{AB}=0 \quad (DF)_{BA}=\frac{\frac{I}{16}}{\frac{I}{16}+\frac{I}{8}}=0.5294 \quad (DF)_{BC}=0.4706 \quad (DF)_{CB}=0$$

$$(FEM)_{AB}=\frac{6\times16}{8}=-12k.ft \quad , \quad (FEM)_{BA}=12k.ft$$

$$(FEM)_{BC}=\frac{-0.5\times18^2}{12}=-13.5k.ft \quad , \quad (FEM)_{CB}=13.5k.ft$$

| گره | ***AB*** | ***B*** | | ***C*** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 0 | 0.5294 | 0.4706 | 0 |
| *FEM* | -12 | 12 | -13.5 | 13.5 |
| پخش | | 0.794 | 0.706 | |

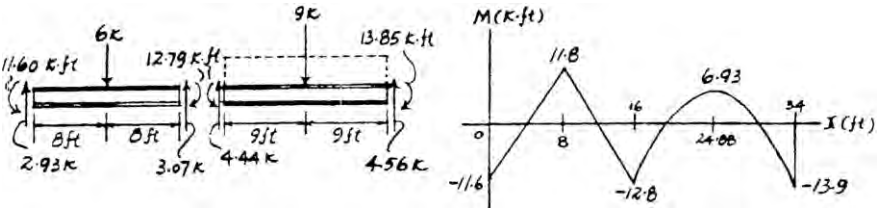
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

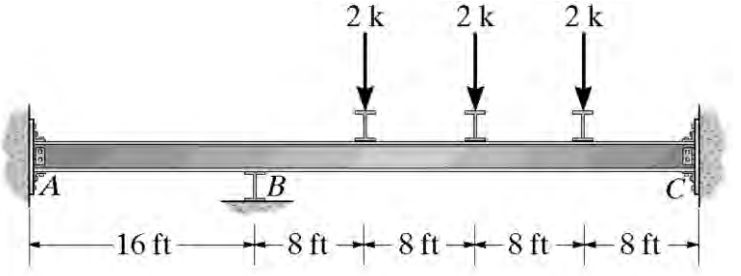


| | | 0.397 | | | 0.353 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Sigma M$ | -11.6 | 12.8 | -12.8 | 13.8 |

$M_{AB} = -11.6k.ft \quad M_{BA} = 12.8k.ft \quad M_{BC} = -12.8k.ft \quad M_{CB} = 13.8k.ft$




۱۲-۵) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ ، $B$ و $C$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ و$C$ به صورت گیردار و تکیه‌گاه $B$ غلتکی می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۵*

حل) با تعیین لنگرهای گیرداری انتهایی داریم:

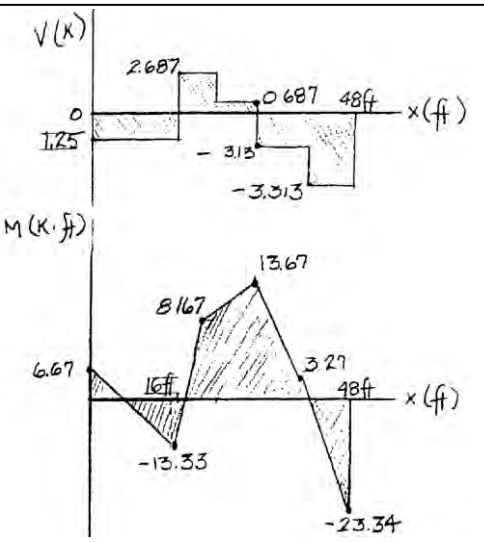
$$FEM_{CB} = \frac{15PL}{48} = \frac{15\times 2\times 32}{48} = 20k.ft \quad , \quad FEM_{BC} = -20k.ft$$

| گره | **A** | **B** | | **C** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 0 | 0.667 | 0.333 | 0 |
| *FEM* | 0 | 0 | -20 | 20 |
| پخش | | 13.33 | 6.67 | |
| | 6.67 | | | 3.34 |
| $\Sigma M$ | 6.67 | 13.33 | -13.33 | 23.34 |

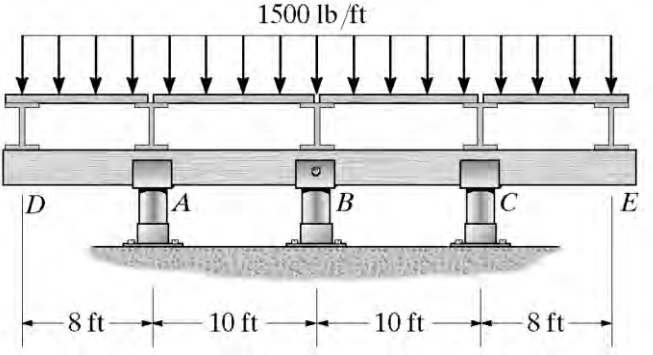
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۲-٦) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ ، $B$ و $C$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ و$C$ به صورت غلتکی و تکیه‌گاه $B$ مفصلی می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-٦*

حل) با تعیین ضرایب انتقال داریم:

$$(DF)_{AD} = (DF)_{CE} = 0 \quad (DF)_{AB} = (DF)_{CB} = 1 \quad (DF)_{BA} = (DF)_{BC} = 0.5$$
$$(FEM)_{AD} = 48k.ft \qquad (FEM)_{CE} = -48k.ft$$

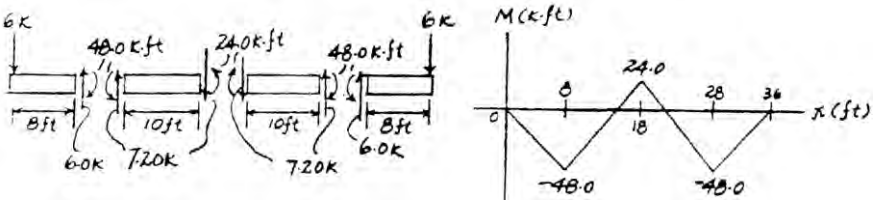
| گره | **A** | | **B** | | **C** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AD | AB | BA | BC | CB | CE |
| *DF* | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 1 | 0 |
| *FEM* | 48 | | | | | -48 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

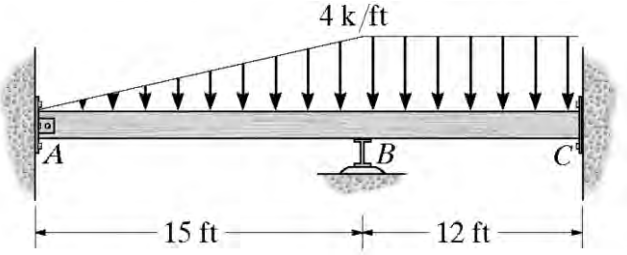
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| پخش | | -48 | | | 48 | |
| | | | -24 | 24 | | |
| $\Sigma M$ | 48 | -48 | -24 | 24 | 48 | -48 |




۷-۱۲) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $B$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $C$ به صورت گیردار و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ مفصلی می‌باشد.




شکل مسئله ۱۲-۷

حل) باتعیین لنگرهای گیرداری انتهایی داریم:

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{4\times 15^2}{30} = -30k.ft \qquad (FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{20} = \frac{4\times 15^2}{20} = 45k.ft$$

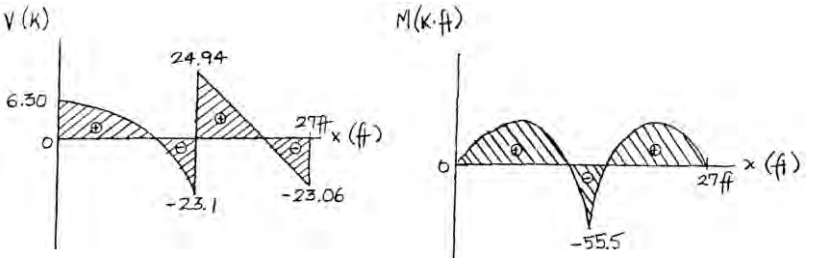
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4\times 12^2}{12} = -48k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 48k.ft$$

| گره | **A** | **B** | | **C** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 1 | 0.375 | 0.625 | 0 |
| *FEM* | -30 | 45 | -48 | 48 |
| | 30 | 1.125 | 1.875 | |
| پخش | | 15 | | 0.9375 |
| | | -5.625 | -9.375 | |
| | | | | -4.688 |
| $\Sigma M$ | 0 | 55.5 | -55.5 | 44.25 |

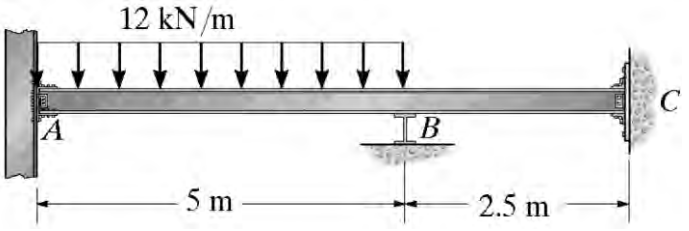
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۲–۸) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $A$ و $B$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $C$ به صورت مفصلی و $B$ غلتکی و تکیه‌گاه $A$ گیردار می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲–۸*

حل) با تعیین ضرایب انتقال داریم:

$$(DF)_{AB}=0 \qquad (DF)_{BA}=\frac{\frac{4I}{5}}{\frac{4I}{5}+\frac{3I}{2.5}}=0.4 \qquad (DF)_{BC}=0.6 \qquad (DF)_{CB}=1$$

$$(FEM)_{AB}=\frac{-12\times 5^2}{12}=-25kN.m$$

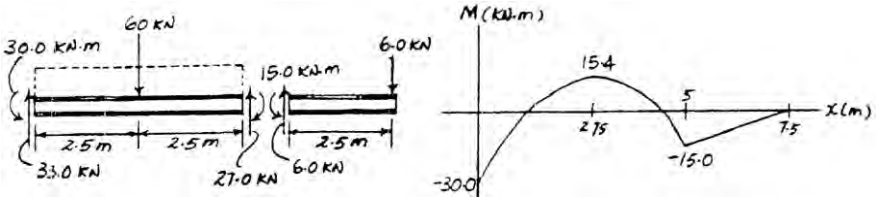
$$(FEM)_{BA}=25kN.m \qquad (FEM)_{BC}=(FEM)_{CB}=0$$

| گره | **A** | **B** | | **C** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 0 | 0.4 | 0.6 | 1 |
| *FEM* | -25 | 25 | | |
| پخش | | -10 | -15 | |
| | -5 | | | |
| Σ*M* | -30 | 15 | -15 | 0 |

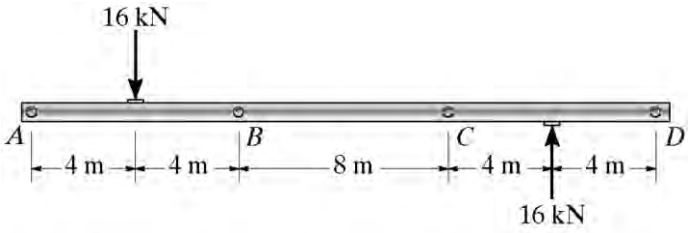
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






۱۲-۹) میله شکل زیر، را در نظر بگیرید که در هر یک از نقاط نشان داده به صورت مفصلی می‌باشد. در صورتی که بتوان از نیروی محوری ایجاد شده در میله صرف نظر نمود، مقدار عکس‌العمل قائم مفصل‌ها را تعیین نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۹*

حل) با توجه به تقارن هندسی تیر و پاد متقارن بودن بارگذاری داریم:

$$K_{BA}=\frac{3EI}{8} \qquad K_{BC}=\frac{6EI}{8}$$

$$(DF)_{BA}=\frac{\frac{3EI}{8}}{\frac{3EI}{8}+\frac{6EI}{8}}=0.3333 \qquad (DF)_{BC}=\frac{\frac{6EI}{8}}{\frac{3EI}{8}+\frac{6EI}{8}}=0.6667$$

$$FEM_{BA}=\frac{3\times16\times8}{16}=24kN.m$$

| گره | **A** | **B** | |
|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC |
| *DF* | 1 | 0.3333 | 0.6667 |
| *FEM* | | 24 | |
| پخش | | -8 | -16 |
| Σ*M* | 0 | 16 | -16 |

برای قطعه $AB$ داریم:

$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow \quad -A_y\times8+16\times4-16=0 \quad \Rightarrow \quad A_y=6kN$$

$$\uparrow+\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BL}+6-16=0 \quad \Rightarrow \quad V_{BL}=10kN$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



برای قطعه $BC$ داریم:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{BR} \times 8 + 16 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BR} = 4kN$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CL} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CL} = 4kN$$

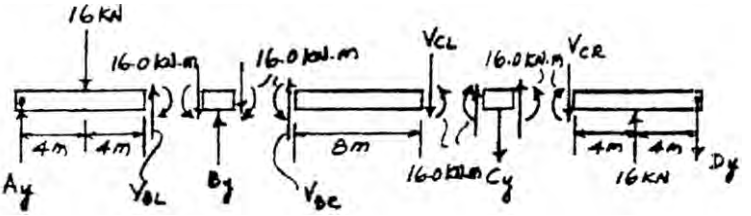
برای قطعه $CD$ داریم:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -D_y \times 8 + 16 \times 4 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_y = 6kN$$

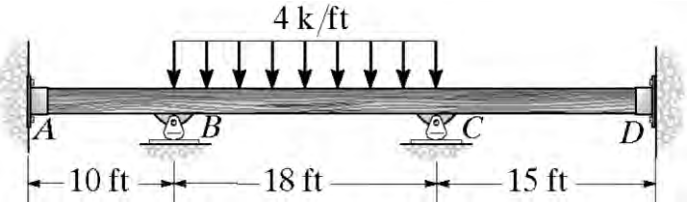
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{CR} - 6 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CR} = 10kN$$

$$B_y = V_{BL} + V_{BR} = 10 + 4 = 14kN$$

$$C_y = V_{CL} + V_{CR} = 4 + 10 = 14kN$$




۱۲–۱۰) در تیر شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه‌ها را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ و $D$ گیردار می‌باشند.




*شکل مسئله ۱۲–۱۰*

حل) با تعیین ضرایب انتقال داریم:

$$(DF)_{AB} = 0 \qquad (DF)_{BA} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{18}} = 0.6429 \qquad (DF)_{BC} = 0.3571$$

$$(DF)_{CB} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18} + \frac{1}{15}} = 0.4545$$

$$(DF)_{CD} = 0.5455 \qquad (DF)_{DC} = 0$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

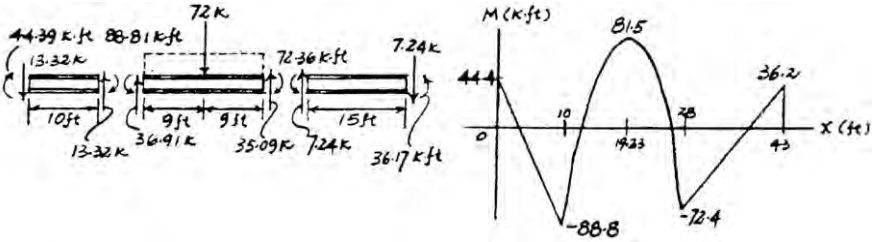
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$(FEM)_{BC} = -\frac{4\times 18^2}{12} = -108k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 108k.ft$$

| گره | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *FEM* | 0 | 0.6429 | 0.3571 | 0.4545 | 0.5455 | 0 |
| | | | -108 | 108 | | |
| | | 69.43 | 38.57 | -49.09 | -58.91 | |
| | 34.72 | | -24.54 | 19.28 | | -29.46 |
| | | 15.78 | 8.76 | -8.76 | -10.52 | |
| | 7.89 | | -4.38 | 4.38 | | -5.26 |
| پخش | | 2.82 | 1.56 | -1.99 | -2.39 | |
| | 1.41 | | -1.00 | 0.78 | | -1.20 |
| | | 0.64 | 0.36 | -0.35 | -0.43 | |
| | 0.32 | | -0.18 | 0.18 | | -0.21 |
| | 0.06 | | -0.04 | 0.03 | | -0.05 |
| $\Sigma M$ | 44.4 | 88.8 | -88.8 | 72.4 | -72.4 | -36.2 |

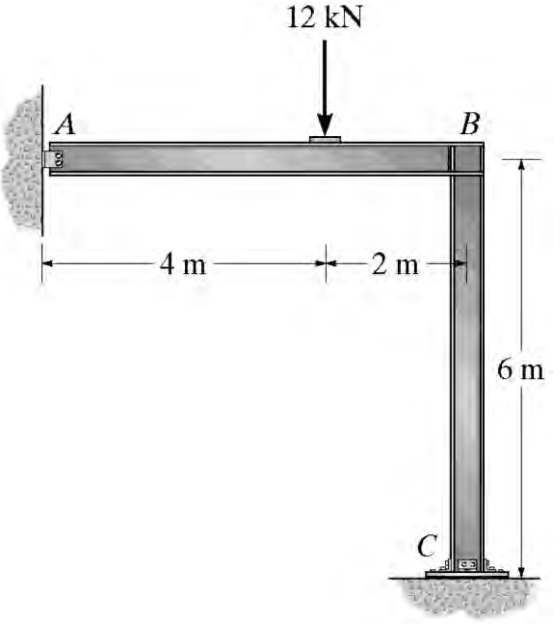



۱۲–۱۱) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در $B$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، $EI$ ثابت و تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $C$ به صورت گیردار می‌باشند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



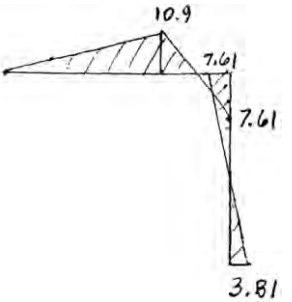



*شکل مسئله ۱۲-۱۱*

حل) با تعیین لنگر گیرداری داریم:

$$(FEM)_{BA}=\left(\frac{P}{L^2}\right)\left(b^2a+\frac{a^2b}{2}\right)=\left(\frac{12}{6^2}\right)\left(4^2\times 2+\frac{2^2\times 4}{2}\right)=13.33kN.m$$

| گره | ***A*** | ***B*** | | ***C*** |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| *DF* | 1 | 0.429 | 0.571 | 0 |
| *FEM* | 0 | 13.33 | 0 | 0 |
| | | -5.72 | -7.61 | |
| پخش | | | | -3.81 |
| $\Sigma M$ | 0 | 7.61 | -7.61 | -3.81 |

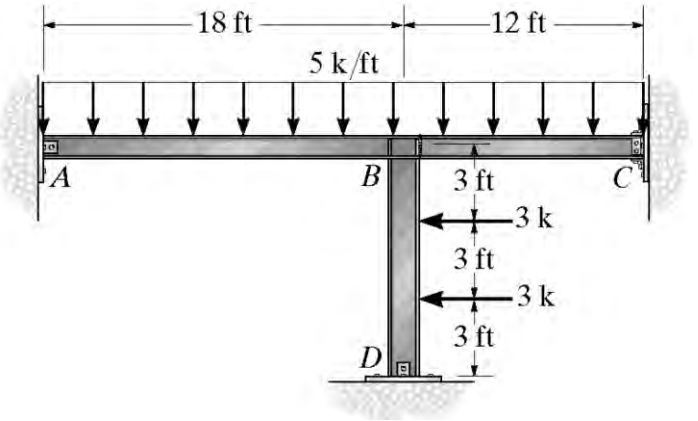



Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۲-۱۲) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضاء را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید، تکیه‌گاه $A$ و $D$ مفصلی و $C$ به صورت گیردار می‌باشند. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$، $I_{ABC}=700\ in^4$ و $I_{BD}=1100\ in^4$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱۲-۱۲

حل) با تعیین ضرائب انتقال برای اعضاء داریم:

$$(DF)_{AB}=(DF)_{DB}=1 \qquad (DF)_{CB}=0$$

$$(DF)_{BA}=\frac{\frac{3I_{ABC}}{18}}{\frac{3I_{ABC}}{18}+\frac{4I_{ABC}}{12}+\frac{3(1.5714)I_{ABC}}{9}}=0.1628$$

$$(DF)_{BC}=0.3256 \qquad (DF)_{BD}=0.5116$$

$$(FEM)_{AB}=\frac{-5\times18^2}{12}=-135k.ft \qquad (FEM)_{BA}=135k.ft$$

$$(FEM)_{BC}=\frac{-5\times12^2}{12}=-60k.ft \qquad (FEM)_{CB}=60k.ft$$

$$(FEM)_{BD}=\frac{-2\times3\times9}{9}=-6.0k.ft \qquad (FEM)_{DB}=6.0k.ft$$

| گره | A | | B | | C | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BD | BC | CB | DB |
| *DF* | 1 | 0.1628 | 0.5116 | 0.3256 | 0 | 1 |
| *FEM* | -135 | 135 | -6.0 | -60 | 60 | 6.0 |
| | 135 | -11.23 | -35.30 | 22.47 | | -6.0 |
| پخش | | 67.5 | -3.0 | | -11.23 | |
| | | -10.5 | -33.00 | -21.00 | | |

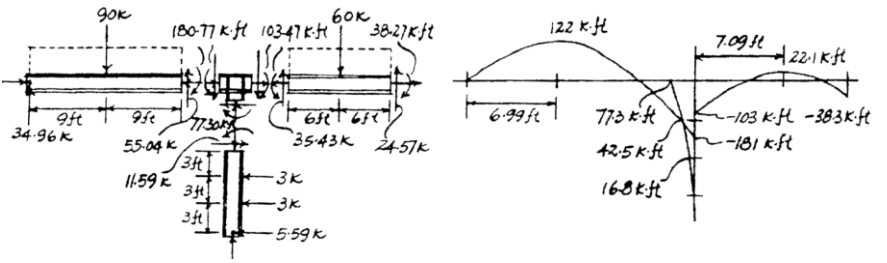
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

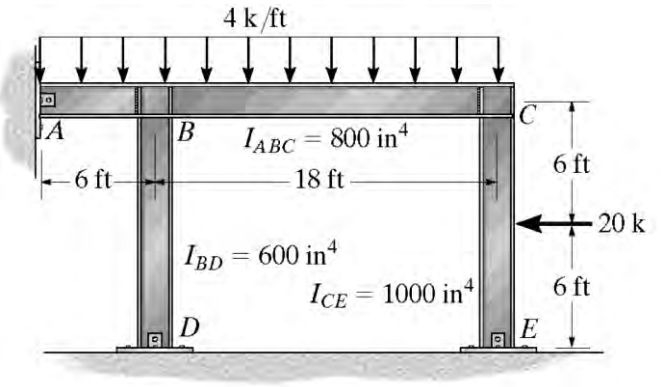


-10.5

$\Sigma M$ 0 181 -77.3 -103 38.3 0




۱۲–۱۳) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضاء را تعیین نمایید. فرض نمایید، تکیه‌گاه $A$، $D$ و $E$ مفصلی و $B$ و $C$ به صورت گیردار می‌باشند. مقدار $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱۲–۱۳

حل)

$$(DF)_{AB} = 1 \qquad (DF)_{BA} = \frac{\frac{3I_{ABC}}{6}}{\frac{3I_{ABC}}{6} + \frac{4I_{ABC}}{18} + \frac{3(0.75)I_{ABC}}{12}} = 0.5496$$

$$(DF)_{BC} = 0.2443 \qquad (DF)_{BD} = 0.2061$$

$$(DF)_{CB} = \frac{\frac{4I_{ABC}}{18}}{\frac{4I_{ABC}}{18} + \frac{3(1.25)I_{ABC}}{12}} = 0.4156 \qquad (DF)_{CE} = 0.5844$$

$$(DF)_{DB} = (DF)_{EC} = 1$$

$$(FEM)_{AB} = -\frac{4\times 6^2}{12} = -12k.ft \qquad (FEM)_{BA} = 12k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

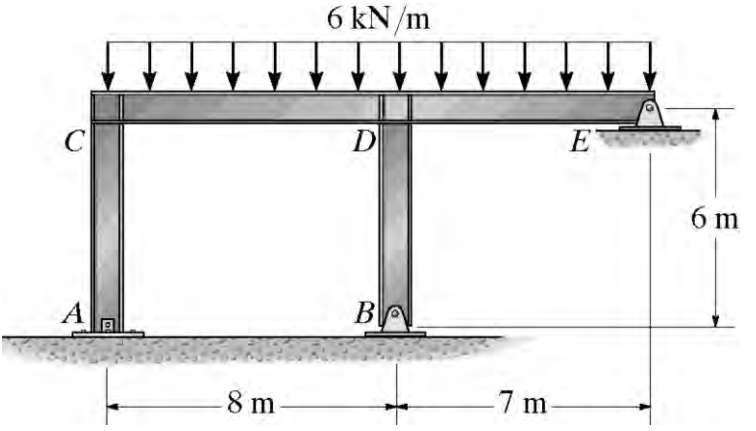


$$(FEM)_{BC} = -\frac{4\times 18^2}{12} = -108k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 108k.ft$$

$$-(FEM)_{EC} = (FEM)_{CE} = -\frac{20\times 12^2}{8} = -30.0k.ft \qquad (FEM)_{BD} = (FEM)_{DB} = 0$$

| گره | A | | B | | C | | E | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | *AB* | *BA* | *BD* | *BC* | *CB* | *CE* | *EC* | *DB* |
| *DF* | 1 | 0.5496 | 0.2061 | 0.2443 | 0.4156 | 0.5844 | 1 | 1 |
| *FEM* | -12 | 12 | | -108 | 108 | -30 | 30 | |
| | 12 | 52.76 | 19.79 | 23.45 | -32.42 | -45.58 | -30 | |
| | | 6 | | -16.21 | 11.73 | -15 | | |
| | | 5.61 | 2.1 | 2.49 | 1.36 | 1.91 | | |
| | | | | 0.68 | 1.25 | | | |
| | | -0.37 | -0.14 | -0.17 | -0.52 | -0.73 | | |
| | | | | -0.26 | -0.08 | | | |
| | | 0.14 | 0.05 | 0.06 | 0.03 | 0.05 | | |
| $\Sigma M$ | 0 | 76.2 | 21.8 | -98.0 | 89.4 | -89.4 | 0 | 0 |

۱۲-۱۴) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضاء را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را برای آن ترسیم نمایید. فرض نمایید، تکیه‌گاه $A$ گیردار و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ۱۲-۱۴

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**Web: www.M-Alirezaei.com** انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

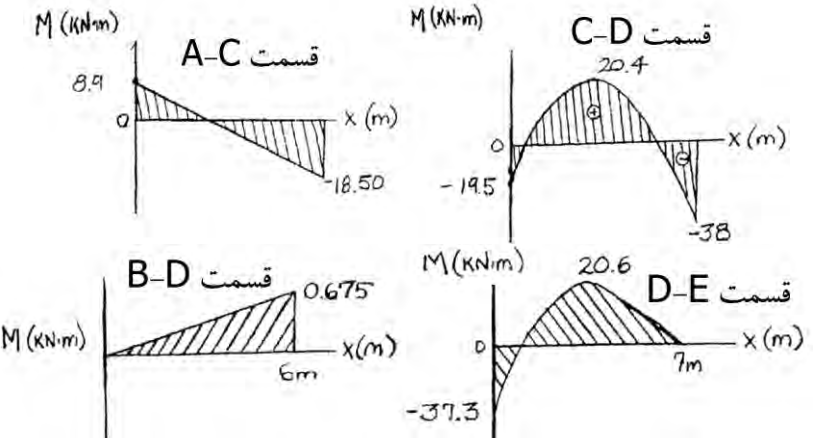


$$FEM_{AC} = 0 \qquad FEM_{BD} = 0$$

$$FEM_{CD} = \frac{wL^2}{12} = \frac{6\times 8^2}{12} = 32kN.m = FEM_{DC}$$

$$FEM_{DE} = \frac{wL^2}{8} = \frac{6\times 7^2}{8} = 36.75kN.m$$

| گره | **A** | **B** | **C** | | | **D** | | **E** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | *AC* | *BD* | *CA* | *CD* | *DC* | *DB* | *DE* | *ED* |
| *DF* | 0 | 1 | 0.5714 | 0.4286 | 0.35 | 0.35 | 0.3 | 1 |
| *FEM* | | | | -32 | 32 | | -36.75 | |
| | | | 18.285 | 13.715 | 1.6625 | 1.6625 | 1.425 | |
| | 9.1425 | | | 0.83125 | 6.8576 | | | |
| | | | -0.4749 | -0.3563 | -2.4 | -2.4 | -2.057 | |
| | -0.2374 | | | | -1.2 | -0.17815 | | |
| | | | 0.6868 | 0.51432 | 0.06235 | 0.06235 | 0.0534 | |
| $\Sigma M$ | 8.905 | | 18.5 | -18.5 | 38 | -0.67515 | -37.33 | |

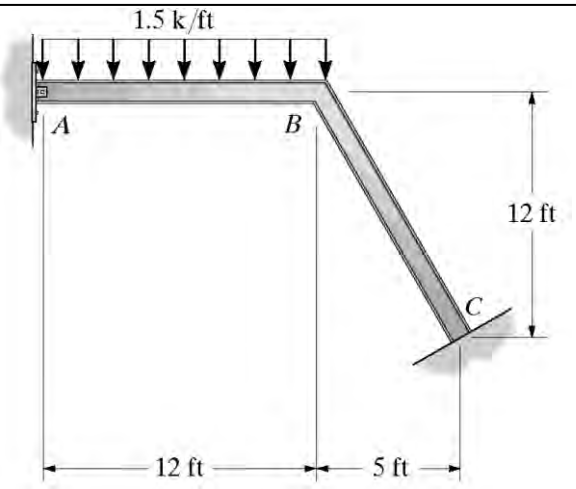



۱۲–۱۵) مقدار لنگر ایجاد شده در $B$ را تعیین و دیاگرام لنگر خمشی را ترسیم نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه $A$ مفصلی و $EI$ ثابت باشد.

**Telegram Channel: @AlirezaeiChannel**

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



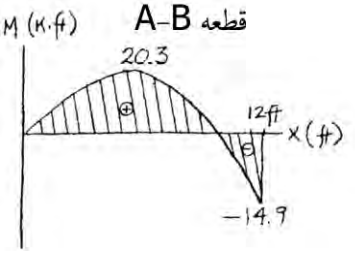


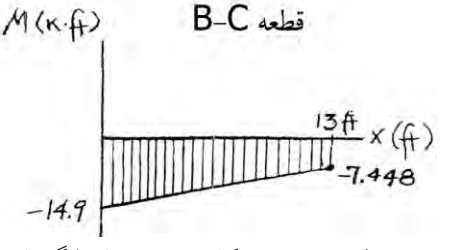

شکل مسئله ۱۲-۱۵

حل)

$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{8} = \frac{1.5\times 12^2}{8} = 27k.ft \qquad FEM_{BC} = 0$$

| گره | A | B | | C |
|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB |
| $DF$ | 1 | 0.44828 | 0.55172 | 0 |
| $FEM$ | | 27 | | |
| پخش | | -12.103 | -14.897 | |
| | | | | -7.4485 |
| $\Sigma M$ | 0 | 14.897 | -14.897 | -7.4485 |



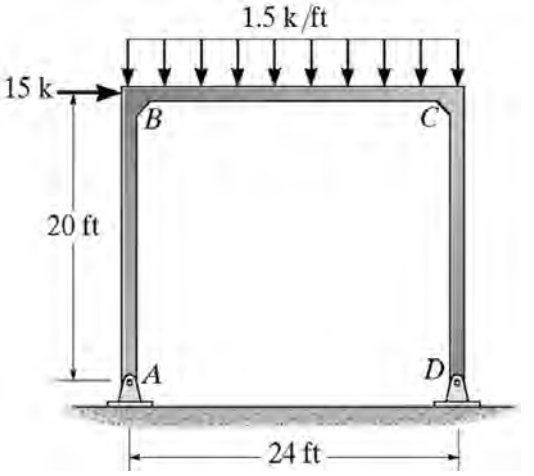




۱۲-۱۶) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۲-۱۶

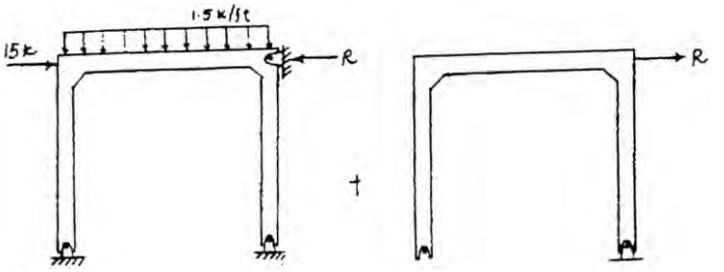
حل) با توجه به اینکه سازه دارای انتقال جانبی می‌باشد:

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 1$$

$$(DF)_{BA} = (DF)_{CD} = \frac{\frac{3I}{20}}{\frac{3I}{20}+\frac{4I}{24}} = 0.4737 \qquad (DF)_{BC} = (DF)_{CB} = 0.5263$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-1.5\times 24^2}{12} = -72k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 72k.ft$$




| گره | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 1 | 0.4737 | 0.5263 | 0.5263 | 0.4737 | 1 |
| *FEM* | | | -72 | 72 | | |
| | | 34.11 | 37.89 | -37.89 | -34.11 | |
| پخش | | | -18.95 | 18.95 | | |
| | | 8.98 | 9.97 | -9.97 | -8.98 | |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | -4.98 | 4.98 | | |
| 2.36 | 2.62 | -2.62 | -2.36 | |
| | -1.31 | 1.31 | | |
| 0.62 | 0.69 | -0.69 | -0.62 | |
| | -0.35 | 0.35 | | |
| 0.16 | 0.18 | -0.18 | -0.16 | |
| | -0.09 | 0.09 | | |
| 0.04 | 0.05 | -0.05 | -0.04 | |
| | -0.02 | 0.02 | | |
| 0.01 | 0.01 | -0.01 | -0.01 | |
| 46.28 | -46.28 | 46.28 | -46.28 | $\Sigma M$ |

برای قاب بدون انتقال جانبی داریم:

$$\overset{+}{\leftarrow}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R + 2.314 - 2.314 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 15k$$

| گره | **A** | **B** | | **C** | | **D** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 1 | 0.4737 | 0.5263 | 0.5263 | 0.4737 | 1 |
| *FEM* | | 100 | | | -100 | |
| | | 47.37 | 52.63 | 52.63 | 47.37 | |
| | | | 26.32 | 26.32 | | |
| | | -12.47 | -13.85 | -13.85 | -12.47 | |
| | | | -6.93 | -6.93 | | |
| | | 3.28 | 3.64 | 3.64 | 3.28 | |
| | | | 1.82 | 1.82 | | |
| پخش | | -0.86 | -0.96 | -0.96 | -0.86 | |
| | | | -0.48 | -0.48 | | |
| | | 0.23 | 0.25 | 0.25 | 0.23 | |
| | | | 0.13 | 0.13 | | |
| | | -0.06 | -0.07 | -0.07 | -0.06 | |
| | | | -0.03 | -0.03 | | |
| | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | |
| | | -62.50 | 62.50 | 62.50 | -62.50 | $\Sigma M$ |

$$R' = 3.125 + 3.125 = 6.25k$$

$$M_{BA} = 46.28 + \left(\frac{15}{6.25}\right)(-62.5) = -104k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



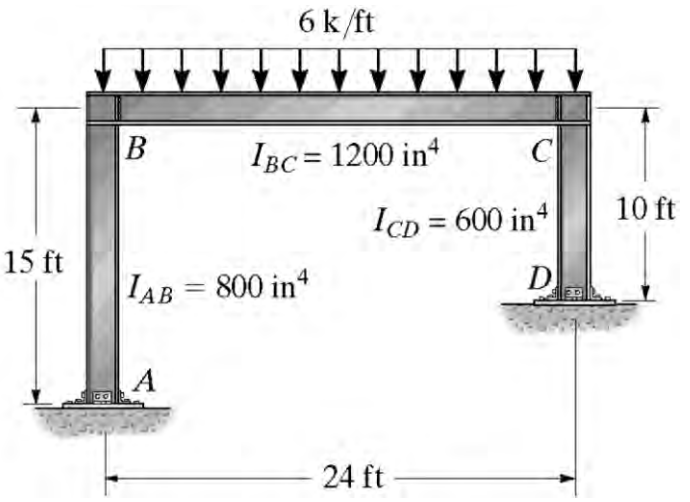
$$M_{BC} = -46.28 + \left(\frac{15}{6.25}\right)(62.5) = 104k.ft$$

$$M_{CB} = 46.28 + \left(\frac{15}{6.25}\right)(62.5) = 196k.ft$$

$$M_{CD} = -46.28 + \left(\frac{15}{6.25}\right)(-62.5) = -196k.ft$$

$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

۱۲-۱۷) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه‌های $A$ و $D$ به صورت گیردار هستند و $E=29(10^3)\ ksi$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۱۷*

حل) با توجه به اینکه سازه دارای انتقال جانبی می‌باشد، داریم:

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 0$$

$$(DF)_{BA} = \frac{\left(\frac{8I_{BC}}{12}\right)/15}{\left[\left(\frac{8I_{BC}}{12}\right)/15\right] + \left[(I_{BC})/24\right]} = 0.5161 \qquad (DF)_{BC} = 0.4839$$

$$(DF)_{CB} = \frac{\frac{I_{BC}}{24}}{\frac{0.5I_{BC}}{10} + \frac{I_{BC}}{24}} = 0.4545 \qquad (DF)_{CD} = 0.5455$$

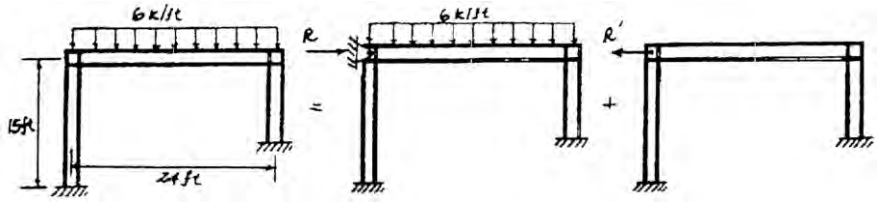
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0 \qquad (FEM)_{BC} = \frac{-6\times 24^2}{12} = -288k.ft$$

$$(FEM)_{CB} = 288k.ft \qquad (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$




| گره | A | | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC | |
| *DF* | 0 | 0.5161 | 0.4839 | 0.4545 | 0.5455 | 0 | |
| *FEM* | | | -288 | 288 | | | |
| | | 148.64 | 139-.36 | -130.90 | -157.10 | | |
| | 74.32 | | -65.45 | 69.68 | | -78.55 | |
| | | 33.78 | 31.67 | -31.67 | 38.01 | | |
| | 16.89 | | -15.84 | 15.84 | | -19.01 | |
| | | 8.18 | 7.66 | -7.2 | -8.64 | | |
| | 4.09 | | -3.6 | 3.83 | | -4.32 | |
| پخش | | 1.86 | 1.74 | -1.79 | -2.09 | | |
| | 0.93 | | -0.87 | 0.87 | | -1.04 | |
| | | 0.45 | 0.42 | -0.40 | -0.47 | | |
| | 0.22 | | -0.20 | 0.21 | | -0.24 | |
| | | 0.10 | 0.10 | -0.10 | -0.11 | | |
| | 0.05 | | -0.05 | 0.05 | | -0.06 | |
| | | 0.02 | 0.02 | -0.02 | -0.03 | | |
| $\Sigma M$ | 96.5 | 193.02 | -193.02 | 206.46 | -206.46 | -103.22 | |

برای سازه بدون انتقال جانبی:

$$\overset{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R + 19.301 - 30.968 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 11.666k$$

$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 100 = \frac{6E(0.75I_{AB})\Delta'}{10^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta' = \frac{100(10^2)}{6E(0.75I_{AB})}$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = \frac{6EI_{AB}\Delta'}{15^2} = \frac{6EI_{AB}}{15^2}\times\frac{100(10^2)}{6E(0.75I_{AB})} = 59.26k.ft$$

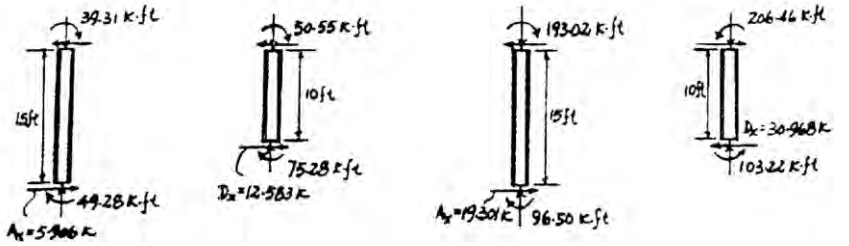
| گره | A | | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC | |
| *DF* | 0 | 0.5161 | 0.4839 | 0.4545 | 0.5455 | 0 | |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *FEM* | 59.26 | 59.26 | | | 100 | 100 |
| | | -30.58 | -28.68 | -45.45 | -54.55 | |
| | -15.29 | | -22.73 | -14.34 | | -27.28 |
| | | 11.73 | 11.00 | 6.52 | 7.82 | |
| | 5.87 | | 3.26 | 5.50 | | 3.91 |
| | | -1.68 | -1.58 | -2.50 | -3.00 | |
| | -0.84 | | -1.25 | -0.79 | | -1.50 |
| پخش | | 0.65 | 0.60 | 0.36 | 0.43 | |
| | 0.32 | | 0.18 | 0.30 | | 0.22 |
| | | -0.09 | -0.09 | -0.14 | -0.16 | |
| | -0.05 | | -0.07 | -0.04 | | -0.08 |
| | | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.02 | |
| | 0.02 | | 0.01 | 0.02 | | 0.01 |
| $\Sigma M$ | 49.28 | 39.31 | -39.31 | -50.55 | 50.55 | 75.28 |




$$R' = 5.906 + 12.585 = 18.489k$$

$$M_{AB} = 96.50 + \frac{11.666}{18.489} \times 49.28 = 128k.ft$$

$$M_{BA} = 193.02 - \frac{11.666}{18.489} \times 39.31 = 218k.ft$$

$$M_{BC} = -193.02 + \frac{11.666}{18.489} \times (-39.31) = -218k.ft$$

$$M_{CB} = 206.46 - \frac{11.666}{18.489} \times (-50.55) = 175k.ft$$

$$M_{CD} = -206.46 + \frac{11.666}{18.489} \times (50.55) = -175k.ft$$

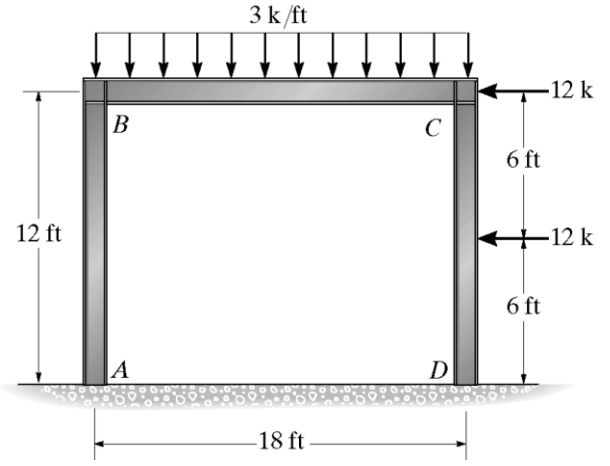
$$M_{DC} = -103.21 + \frac{11.666}{18.489} \times (75.28) = -55.7k.ft$$

۱۲–۱۸) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه‌های $A$ و $D$ به صورت مفصلی هستند و $EI$ ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۲-۱۸

حل) در حالتی سازه بدون انتقال جانبی در نظر گرفته شود، داریم:

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 1 \quad , \quad (DF)_{BC} = (DF)_{CB} = 0.4706$$

$$(DF)_{BA} = (DF)_{CD} = \frac{\frac{3I}{12}}{\frac{3I}{12} + \frac{4I}{18}} = 0.5294$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0 \quad , \quad (FEM)_{BC} = -\frac{3\times 18^2}{12} = -81k.ft$$

$$(FEM)_{CB} = (FEM)_{DC} = 81k.ft \quad , \quad (FEM)_{CD} = -\frac{12\times 12}{8} = -18k.ft$$

| گره | **A** | **B** | | **C** | | **D** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 1 | 0.5294 | 0.4706 | 0.4706 | 0.5294 | 1 |
| *FEM* | | | -81 | 81 | -18 | 18 |
| | | 42.88 | 38.12 | -29.65 | -33.35 | -18 |
| | | | -14.82 | 19.06 | -9.0 | |
| | | 7.85 | 6.97 | -4.74 | -5.33 | |
| | | | -2.36 | 3.49 | | |
| | | 1.25 | 1.11 | -1.64 | -1.85 | |
| پخش | | | -0.82 | 0.56 | | |
| | | 0.43 | 0.39 | -0.26 | -0.29 | |
| | | | -0.13 | 0.19 | | |
| | | 0.07 | 0.06 | -0.09 | -0.10 | |
| | | | -0.05 | 0.03 | | |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.02 | 0.02 | -0.01 | -0.02 | |
| $\Sigma M$ | 0 | 52.51 | -52.51 | 67.94 | -67.94 | 0 |

برای سازه بدون انتقال جانبی:

$$\overset{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R + 4.376 + 0.339 - 12 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 19.286$$

| گره | **A** | **B** | | **C** | | **D** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 1 | 0.5294 | 0.4706 | 0.4706 | 0.5294 | 1 |
| *FEM* | | 100 | | | 100 | |
| | | -52.94 | -47.06 | -47.06 | -52.94 | |
| | | | -23.53 | -23.53 | | |
| | | 12.46 | 11.07 | 11.07 | 12.46 | |
| | | | 5.54 | 5.54 | | |
| | | -2.93 | -2.61 | -2.61 | -2.93 | |
| پخش | | | -1.30 | -1.30 | | |
| | | 0.69 | 0.61 | 0.61 | 0.69 | |
| | | | 0.31 | 0.31 | | |
| | | -0.16 | -0.14 | -0.14 | -0.16 | |
| | | | -0.07 | -0.07 | | |
| | | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.04 | |
| $\Sigma M$ | 0 | 57.15 | -57.15 | -57.15 | 57.15 | 0 |

$$R' = 4.763k + 4.763k = 9.525k$$

$$M_{BA} = 52.51 + \frac{19.286}{9.525} \times 57.15 = 168k.ft$$

$$M_{BD} = -52.51 + \frac{19.286}{9.525} \times (-57.15) = -168k.ft$$

$$M_{DB} = 67.94 + \frac{19.286}{9.525} \times (-57.15) = -47.8k.ft$$

$$M_{DE} = -67.94 + \frac{19.286}{9.525} \times 57.15 = 47.8k.ft$$

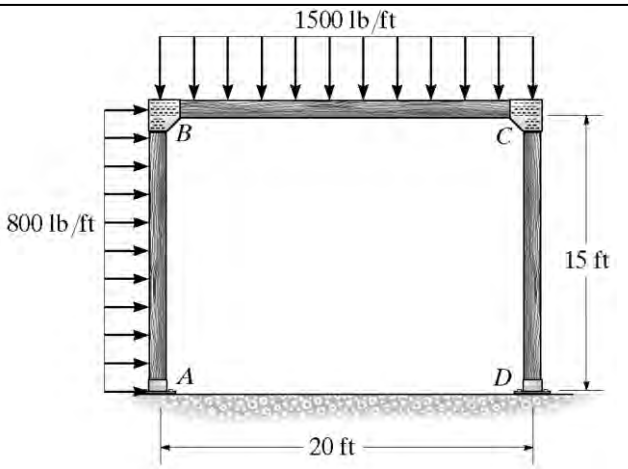
$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

۱۲-۱۹) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید تکیه‌گاه‌های $A$ و $D$ به صورت گیردار هستند و $EI$ ثابت می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۲-۱۹

حل) در حالتی سازه بدون انتقال جانبی در نظر گرفته شود، داریم:

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 0 \quad , \quad (DF)_{BA} = (DF)_{CD} = \frac{\frac{I}{15}}{\frac{I}{15}+\frac{I}{20}} = 0.5714$$

$$(DF)_{BC} = (DF)_{CB} = 0.4286$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{-0.8(15)^2}{12} = -15k.ft \qquad (FEM)_{BA} = 15k.ft$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-1.5(20)^2}{12} = -50k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 50k.ft$$

$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

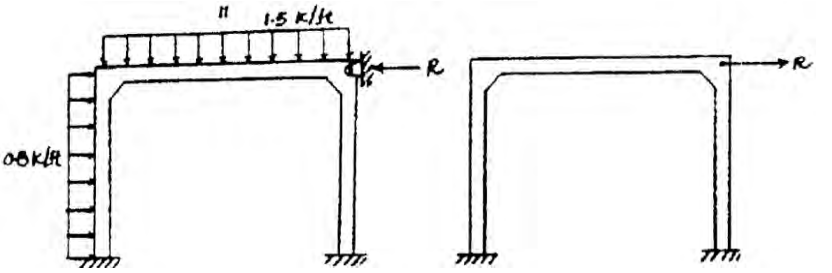
| گره | **A** | **B** | | **C** | | **D** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 0 | 0.5714 | 0.4286 | 0.4286 | 0.5714 | 0 |
| *FEM* | -15 | 15 | -50 | 50 | | |
| | | 20.00 | 15.00 | -21.43 | -28.57 | |
| | 10.00 | | -10.72 | 7.50 | | -14.29 |
| | | 6.12 | 4.59 | -3.21 | -4.29 | |
| | 3.06 | | -1.61 | 2.30 | | -2.14 |
| پخش | | 0.92 | 0.69 | -0.98 | -1.32 | |
| | 0.46 | | 0.49 | 0.34 | | 0.66 |
| | | 0.28 | 0.21 | -0.15 | -0.20 | |
| | 0.14 | | -0.07 | 0.11 | | -0.10 |
| | | 0.04 | 0.03 | -0.05 | -0.06 | |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.02 | | -0.02 | 0.02 | | -0.03 |
| $\Sigma M$ | -1.32 | 42.38 | -42.38 | 34.43 | -34.43 | -17.21 |




برای سازه بدون انتقال جانبی:

$$\overset{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R + 3.263 + 3.443 - 0.8(15) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 5.294k$$

| گره | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 0 | 0.5714 | 0.4286 | 0.4286 | 0.5714 | 0 |
| *FEM* | -100 | -100 | | | -100 | -100 |
| | | 57.14 | 42.86 | 42.86 | 57.14 | |
| | 28.57 | | 21.43 | 21.43 | | 28.57 |
| | | -12.25 | -9.18 | -9.18 | -12.25 | |
| | -6.12 | | -4.59 | -4.59 | | -6.12 |
| | | 2.62 | 1.97 | 1.97 | 2.62 | |
| پخش | 1.31 | | 0.98 | 0.98 | | 1.31 |
| | | -0.56 | -0.42 | -0.42 | -0.56 | |
| | -0.28 | | -0.21 | -0.21 | | -0.28 |
| | | 0.12 | 0.09 | 0.09 | 0.12 | |
| | 0.06 | | 0.05 | 0.05 | | 0.06 |
| $\Sigma M$ | -76.46 | -52.95 | 52.95 | 52.95 | -52.95 | -76.46 |

$$R' = 8.627 + 8.627 = 17.255k$$

$$M_{AB} = -1.32 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (-76.46) = -24.8k.ft$$

$$M_{BA} = 42.38 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (-52.95) = 26.1k.ft$$

$$M_{BC} = -42.38 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (52.95) = -26.1k.ft$$

$$M_{CB} = 34.43 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (52.95) = 50.7k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

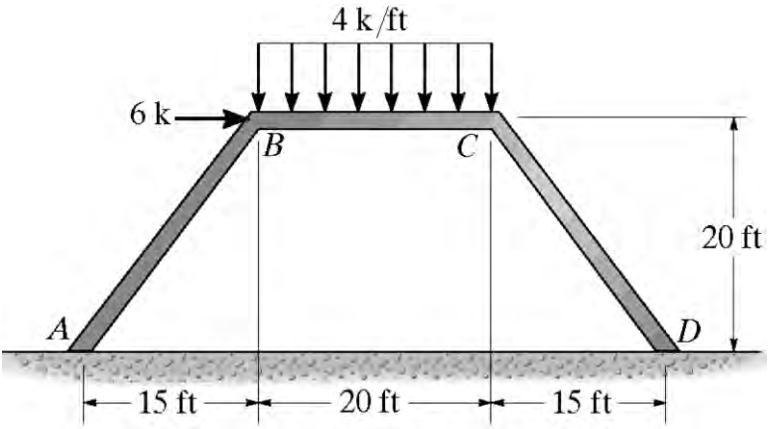
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$M_{CD} = -34.43 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (-52.95) = -50.7k.ft$$

$$M_{DC} = -17.22 + \left(\frac{5.294}{17.255}\right) \times (-76.46) = -40.7k.ft$$

۱۲-۲۰) در سازه شکل زیر، مقدار لنگر ایجاد شده در انتهای هر یک از تکیه‌گاه‌های گیردار $A$ و $D$ را تعیین نمایید. مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۲-۲۰*

حل) در حالتی سازه بدون انتقال جانبی در نظر گرفته شود، داریم:

$$(DF)_{AB} = (DF)_{DC} = 0 \quad , \quad (DF)_{BA} = (DF)_{CD} = \frac{\frac{I}{25}}{\frac{I}{25} + \frac{I}{20}} = 0.4444$$

$$(DF)_{BC} = (DF)_{CB} = 0.5556$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-4(20)^2}{12} = -133.33k.ft \qquad (FEM)_{CB} = 133.33k.ft$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 0$$

| گره | A | B | | C | | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 0 | 0.4444 | 0.5556 | 0.5556 | 0.4444 | 0 |
| *FEM* | | | -133.33 | 133.33 | | |
| | | 59.25 | 74.08 | -74.08 | -59.25 | |
| | 29.63 | | -37.04 | 37.04 | | -29.63 |
| پخش | | 16.46 | 20.58 | -20.58 | -16.46 | |
| | 8.23 | | -10.29 | 10.29 | | -8.23 |
| | | 4.57 | 5.72 | -5.72 | -4.57 | |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2.28 | | -2.86 | 2.86 | | -2.29 |
| | | 1.27 | 1.59 | -1.59 | -1.27 | |
| | 0.64 | | -0.79 | 0.79 | | -0.64 |
| | | 0.35 | 0.44 | -0.44 | -0.35 | |
| | 0.18 | | -0.22 | 0.22 | | -0.18 |
| | | 0.10 | 0.12 | -0.12 | -0.10 | |
| | 0.05 | | -0.06 | 0.06 | | -0.05 |
| | | 0.03 | 0.03 | -0.03 | -0.03 | |
| $\Sigma M$ | 41.00 | 82.03 | -82.03 | 82.03 | -82.03 | -41.00 |

$$R + 34.15 - 34.15 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 6k$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = \frac{-6EI\Delta'}{(25)^2} = -100k.ft \qquad \Delta' = \frac{(100)(25)^2}{6EI}$$

$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = \frac{(6EI)2\Delta'\cos\theta}{(20)^2} = \frac{(6EI)2(0.6)}{(20)^2}\left(\frac{(100)(25)^2}{6EI}\right) = 187.5k.ft$$

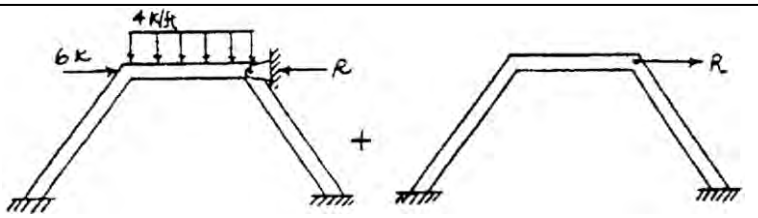
$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = -100\,k.ft$$

| گره | **A** | | **B** | | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عضو | AB | BA | BC | CB | CD | DC |
| *DF* | 0 | 0.4444 | 0.5556 | 0.5556 | 0.4444 | 0 |
| *FEM* | -100 | -100 | 187.5 | 187.5 | -100 | -100 |
| | | -38.88 | -48.62 | -48.62 | 38.88 | |
| | -19.44 | | -24.31 | -24.31 | | -19.44 |
| | | 10.80 | 13.51 | 13.51 | 10.80 | |
| | 5.40 | | 6.75 | 6.75 | | 5.40 |
| | | -3.00 | -3.75 | -3.75 | -3.00 | |
| | -1.50 | | -1.88 | -1.88 | | -1.50 |
| پخش | | 0.84 | 1.04 | 1.04 | 0.84 | |
| | 0.42 | | 0.52 | 0.52 | | 0.42 |
| | | -0.23 | -0.29 | -0.29 | -0.23 | |
| | -0.12 | | -0.14 | -0.14 | | -0.12 |
| | | 0.06 | 0.08 | 0.08 | 0.06 | |
| | 0.03 | | 0.04 | 0.04 | | 0.03 |
| | | -0.02 | -0.02 | -0.02 | -0.02 | |
| $\Sigma M$ | -115.21 | -130.44 | 130.44 | 130.44 | -130.44 | -115.21 |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






$$R' = 22.065k + 22.065k = 44.130k$$

$$M_{AB} = 41.00 + \left(\frac{6}{44.130}\right)(-115.21) = 25.3k.ft$$

$$M_{DC} = -41.00 + \left(\frac{6}{44.130}\right)(-115.21) = -56.7k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

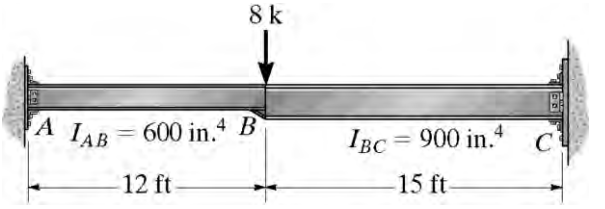
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل سیزدهم
# تحلیل تیرها و قاب‌ها با اعضای غیر منشوری

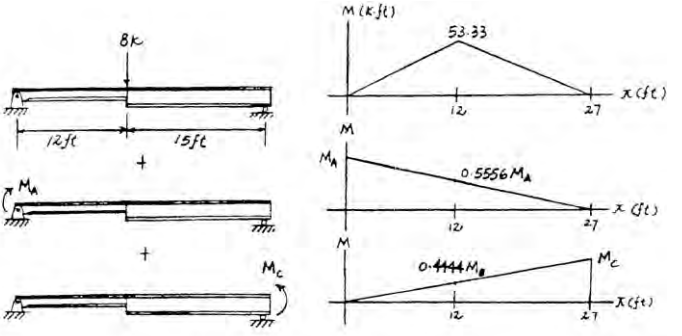
**۱-۱۳ مسائل:**

۱-۱۳) در تیر مرکب نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگرهای تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ گیردار بوده و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱۳-۱

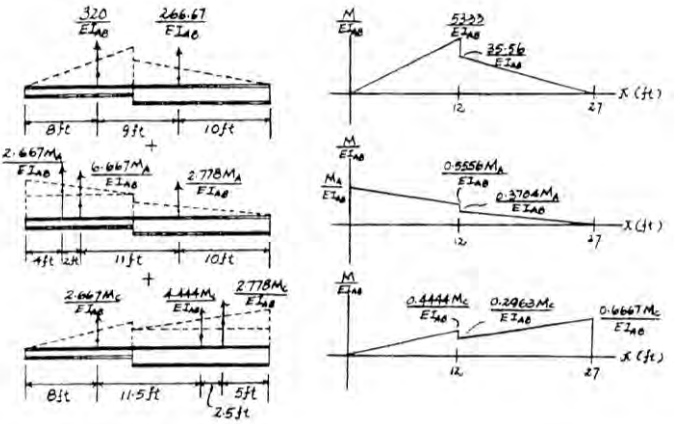
حل)




Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





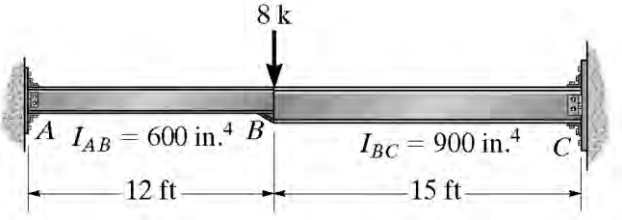
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 586.667 + 12.111 M_A + 9.8889 M_C = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 7093.333 + 97.8889 M_A + 169.111 M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_C = -26.4k.ft \qquad M_A = -26.9k.ft$$

علامت منفی نشان دهنده آن است که جهت واقعی لنگر مخالف جهت فرضی در دیاگرام جسم آزاد است.

۱۳-۲) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار سختی $K_A$ و ضریب انتقال $C_{CA}$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های $A$ و $C$ به صورت گیردار می‌باشند.



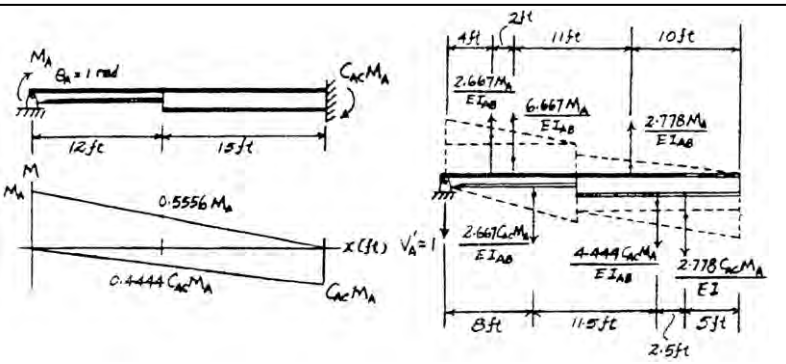

شکل مسئله ۱۳-۲

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است





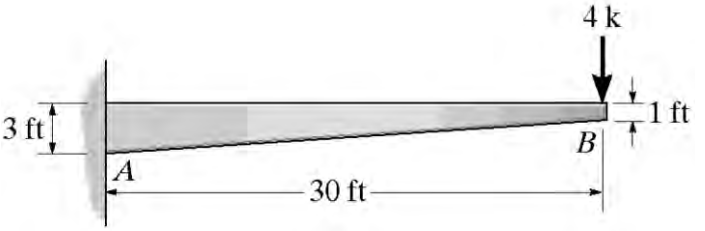

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 12.111 M_A - 9.8889 C_{AC} M_A = EI_{AB}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 97.889 M_A - 169.111 C_{AC} M_A = 0$$

$$K_A = M_A = 0.1566 EI_{AB} = 0.1566(29)(10^3)\frac{600}{144} = 18.9(10^3)k.ft$$

$$COF = C_{AC} = 0.579$$

۱۳-۳) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار شیب ایجاد شده در نقطه $B$ را تعیین نمایید. مقطع تیر به صورت مستطیلی و با عرض ثابت برابر یک فوت می‌باشد. برای محاسبه تیر را به قطعات پنج فوتی تقسیم نمایید. مقدار $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.



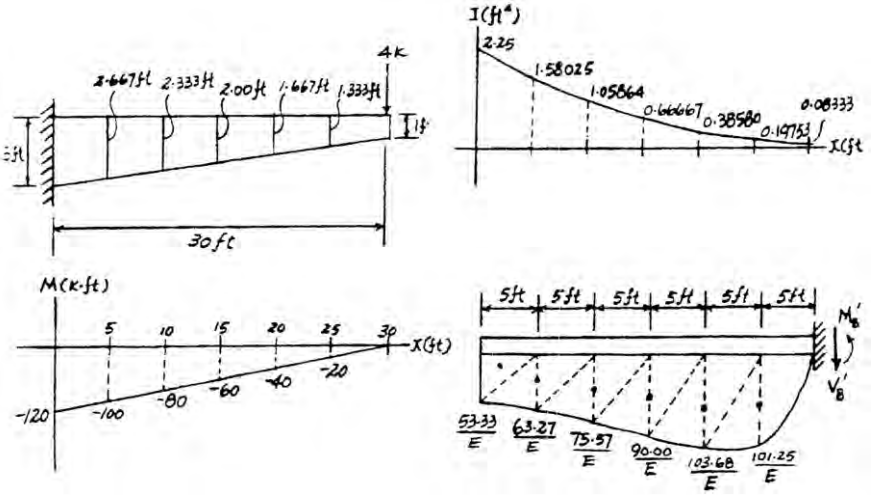

شکل مسئله ۱۳-۳

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



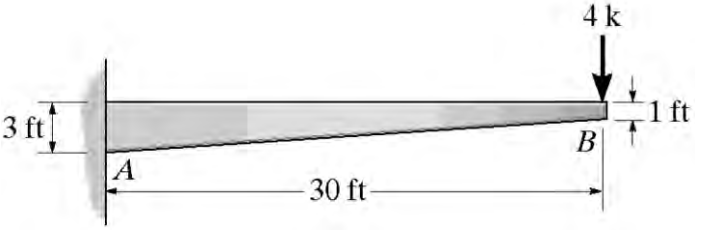



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_B - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{53.33}{E}\right)(5) - \left(\frac{63.27}{E}\right)(5) - \left(\frac{75.57}{E}\right)(5)$$

$$-\left(\frac{90.00}{E}\right)(5) - \left(\frac{103.68}{E}\right)(5) - \left(\frac{101.25}{E}\right)(5) = 0$$

$$\theta_B = -\frac{2302.2}{E} = -\frac{2302.2}{29(10)^3(144)} = -0.000551 \quad rad$$

١٣-٤) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار سختی و شریب انتقال برای انتهای $B$ را تعیین نمایید. برای محاسبه تیر را به قطعات پنج فوتی تقسیم نمایید. مقدار $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.



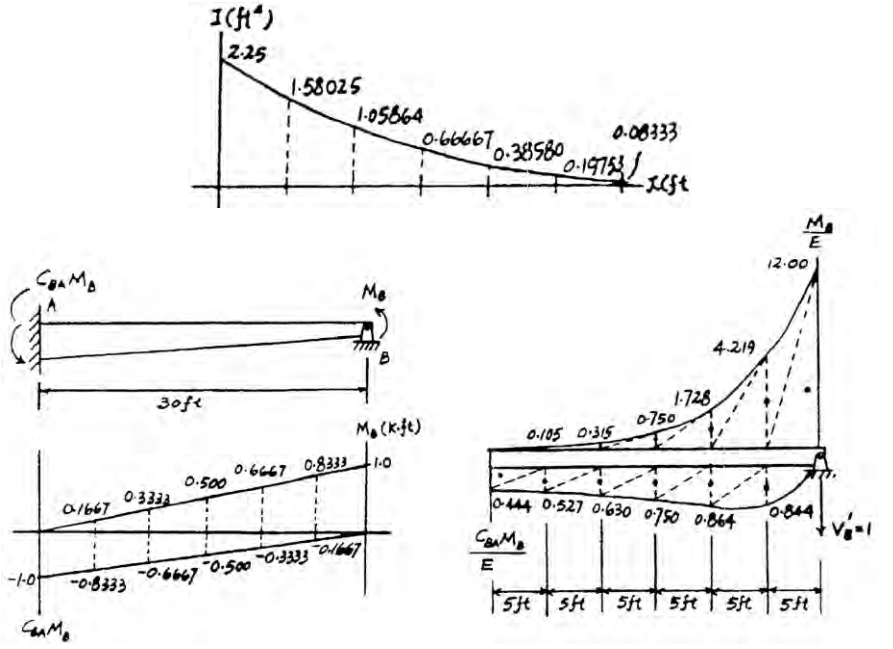

شکل مسئله ١٣-٤

حل)

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






| $\frac{C_{BA}M_B}{E}$ | | $\frac{M_B}{E}$ | |
|---|---|---|---|
| لنگر $B'$ | مساحت | لنگر $B'$ | مساحت |
| 21.10 | 4.22 | -50 | 30.00 |
| 43.20 | 4.32 | -105.48 | 21.10 |
| 56.25 | 3.75 | -86.40 | 8.64 |
| 63.00 | 3.15 | -56.25 | 3.75 |
| 65.88 | 2.64 | -31.50 | 1.58 |
| 31.45 | 1.11 | -13.12 | 0.52 |
| 280.88 | 19.19 | -342.75 | 65.59 Σ |

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad (-342.75)\left(\frac{M_B}{E}\right)+(280.88C_{BA})\left(\frac{M_B}{E}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad C_{BA}=1.22$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 65.59\left(\frac{M_B}{E}\right)-(19.19C_{BA})\left(\frac{M_B}{E}\right)-1=0$$

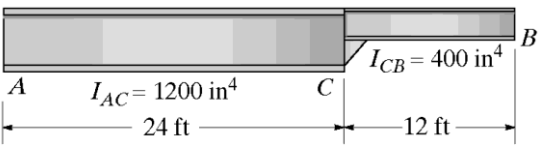
$$M_B = K_B = \frac{29(10)^3(144)}{42.17} = 99021k.ft = 99(10^3)k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

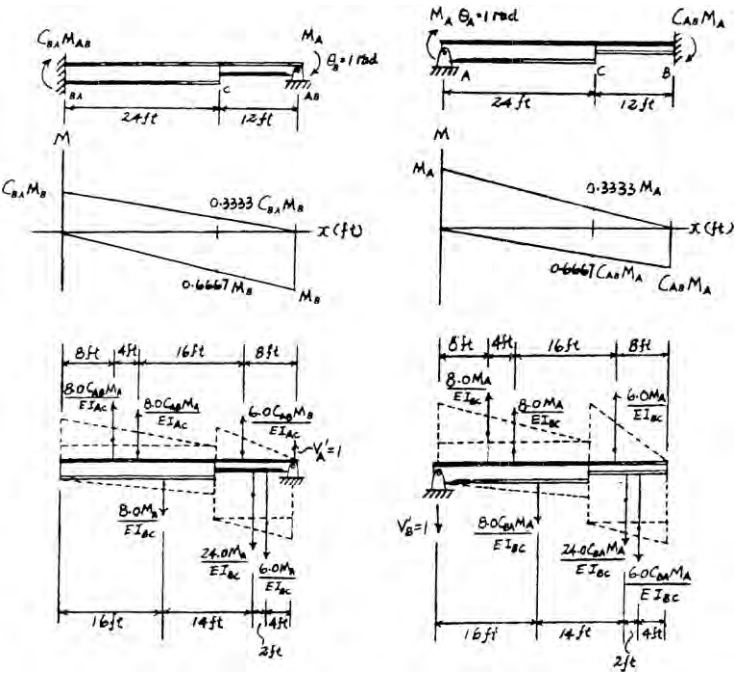


۱۳–۵) برای تیر نشان داده شده در شکل زیر، سختی و ضریب انتقال برای انتهای $A$ و $B$ را تعیین نمایید. مقدار $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱۳–۵

حل)




برای انتهای $A$ از تیر فوق داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 22.0C_{BA}M_B - 38.0M_B = -EI_{BC}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -464C_{BA}M_B + 328M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{BA} = 0.707$$

$$K_B = M_B = 0.04455\,EI_{BC} = 10765\,k.ft = 10.8(10^3)k.ft$$

برای انتهای $B$ از تیر فوق داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 22.0M_A - 38.0C_{AB}M_A = -EI_{BC}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 328M_A - 1040\,C_{AB}M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{AB} = 0.315$$

$$K_A = M_A = 24129\,k.ft = 24.1(10^3)k.ft$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل چهاردهم
# تحلیل خرپاها با استفاده از روش سختی

## ۱-۱۴ کلیات

در بین سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ روشی تحت عنوان روش ماتریسی[1] برای استفاده در کامپیوترهای پر سرعت دیجیتالی گسترش یافت. استفاده از این روش برای استفاده در تحلیل سازه‌هایی که دارای درجه نامعینی بالا هستند بسیار مناسب است. در روش‌های نرمی، معادلات نوشته شده، منجر به ایجاد دستگاه معادلاتی شده که بایستی به صورت همزمان حل شوند. استفاده از این روش معمولاً نیاز به حجم محاسباتی زیادی دارد. روش‌های ریاضی حل عددی اینگونه معادلات هر چند که شناخته شده هستند، لیکن حجم زیاد محاسبات و دقت مورد نیاز برای آنها، مشکل اساسی آنهاست. به روابطی که جابجایی‌ها و دوران‌ها در گره‌های سازه مجهولات آن می‌باشند، روش‌های سختی یا روش‌های جابجایی[2] گفته می‌شود. این نامگذاری به این دلیل است که در این روش‌ها جابجایی‌ها (شامل جابجایی انتقالی و دوران) مجهولات مسئله هستند. برای رابطه سازی روش‌های ماتریسی، می‌توان از روش‌های سازگاری و یا روش‌های تعادل استفاده نمود. این رابطه سازی هم به کمک معادلات بنیادی مکانیک سازه‌ها امکان‌پذیر است و هم می‌تواند توسط اصول انرژی انجام پذیرد.[3]

## ۲-۱۴ مسائل:

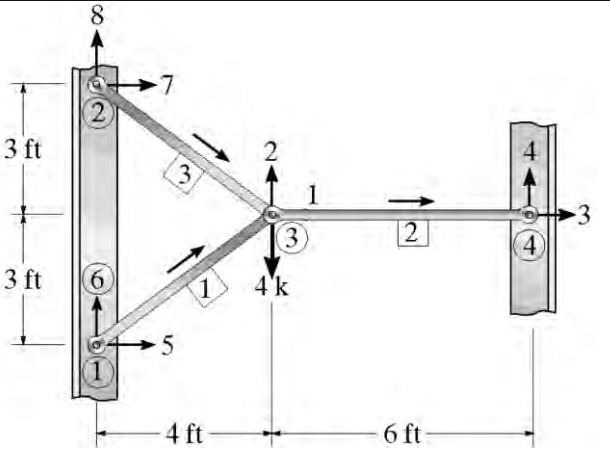
۱۴-۱) برای شکل زیر ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.5\ in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

[1] Matrix methods
[2] Displacement methods
[3] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۴-۱

حل) برای قطعه شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{AE}{60}\begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{10-4}{6} = 1 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-3}{6} = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{AE}{72}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۳ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-6}{5} = -0.6$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{AE}{60}\begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{bmatrix}$$

با روی هم‌گذاری ماتریس‌های فوق داریم: $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 510.72 & 0 & -201.39 & 0 & -154.67 & -116 & -154.67 & 116 \\ 0 & 174 & 0 & 0 & -116 & -87.0 & 116 & -87.0 \\ -201.39 & 0 & 201.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -154.67 & -116 & 0 & 0 & 154.67 & 116 & 0 & 0 \\ -116 & -87.0 & 0 & 0 & 116 & 87.0 & 0 & 0 \\ -154.67 & 116 & 0 & 0 & 0 & 0 & 154.67 & -116 \\ 116 & -87.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -116 & 87.0 \end{bmatrix}$$

۱۴-۲) در سازه نشان داده شده در مسئله ۱۴-۱، مقدار جابجایی قائم و افقی مفصل شماره ③ را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده از مسئله ۱۴-۱ و اعمال $\mathbf{Q}=\mathbf{KD}$ داریم.

$$\mathbf{D}_k=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Q}_k=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-4\\Q_3\\Q_4\\Q_5\\Q_6\\Q_7\\Q_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 510.72 & 0 & -201.39 & 0 & -154.67 & -116 & -154.67 & 116 \\ 0 & 174 & 0 & 0 & -116 & -87.0 & 116 & -87.0 \\ -201.39 & 0 & 201.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -154.67 & -116 & 0 & 0 & 154.67 & 116 & 0 & 0 \\ -116 & -87.0 & 0 & 0 & 116 & 87.0 & 0 & 0 \\ -154.67 & 116 & 0 & 0 & 0 & 0 & 154.67 & -116 \\ 116 & -87.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -116 & 87.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریسی و حل آن برای ماتریس فوق داریم:

$$0=510.72(D_1)+0(D_2)$$
$$-4=0(D_1)+174(D_2)$$

$$\Rightarrow D_1=0 \qquad D_2=-0.02299\,in\approx -0.023\,in$$

۱۴-۳) در سازه نشان داده شده در مسئله ۱۴-۱، مقدار نیروی داخلی ایجاد شده در هر یک از اعضا را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از مسئله ۱۴-۲ داریم،

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$D_1 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = 0 \quad , \quad D_2 = -0.02299$$

برای محاسبه نیروی ایجاد شده در هر یک از اعضا داریم:

$$q_F = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{N_x} \\ D_{N_y} \\ D_{F_x} \\ D_{F_y} \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$q_1 = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.02299 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{0.5\left(29\times10^3\right)}{60}\times0.6\times\left(-0.02299\right) = -3.33k = 3.33k(C)$$

برای قطعه شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{10-4}{6} = 1 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-3}{6} = 0$$

$$q_2 = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0.02299 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 0$$

برای قطعه شماره ۳ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-6}{5} = -0.6$$

$$q_3 = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.02299 \end{bmatrix}$$

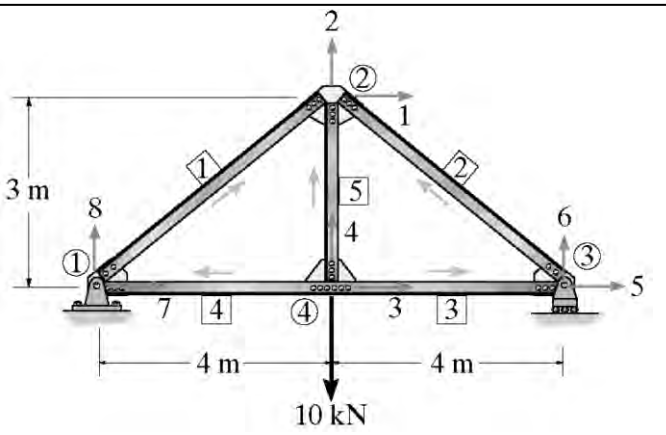
$$q_3 = \frac{0.5\left(29\times10^3\right)}{60}\times\left(-0.6\right)\times\left(-0.02299\right) = 3.33k = 3.33k(T)$$

١٤-٤) برای خرپای شکل زیر ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.0015\ m^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۴-٤

حل) برای قطعه شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-0}{5} = 0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-8}{5} = -0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 & -0.128 & 0.096 \\ -0.096 & 0.072 & 0.096 & -0.072 \\ -0.128 & 0.096 & 0.128 & -0.096 \\ 0.096 & -0.072 & -0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۳ داریم:

$$\lambda_x = \frac{8-4}{4} = 1 \quad , \quad \lambda_y = 0$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ٤ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\lambda_x = \frac{0-4}{4} = -1 \quad , \quad \lambda_y = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۵ داریم:

$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\mathbf{k}_5 = AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

ساختار ماتریس کلی سازه به صورت $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5$ خواهد بود.

$$\mathbf{K} = AE\begin{bmatrix} 0.256 & 0 & 0 & 0 & -0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0 & 0.4773 & 0 & -0.3333 & 0.096 & -0.072 & -0.096 & -0.072 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & 0.096 & -0.25 & 0 & 0.375 & -0.096 & 0 & 0 \\ 0.096 & -0.072 & 0 & 0 & -0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.378 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

۱۴-۵) در سازه نشان داده شده در مسئله ۱۴-۴، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل ④ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.0015\ m^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

حل) با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده از مسئله ۱۴-۴ و اعمال $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ داریم.

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-10\\0\\Q_6\\Q_7\\Q_8\end{bmatrix}=AE\begin{bmatrix}0.256&0&0&0&-0.128&0.096&-0.128&-0.096\\0&0.4773&0&-0.3333&0.096&-0.072&-0.096&-0.072\\0&0&0.5&0&-0.25&0&-0.25&0\\0&-0.3333&0&0.3333&0&0&0&0\\-0.128&0.096&-0.25&0&0.375&-0.096&0&0\\0.096&-0.072&0&0&-0.096&0.072&0&0\\-0.128&-0.096&-0.25&0&0&0&0.378&0.096\\-0.096&-0.072&0&0&0&0&0.096&0.072\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

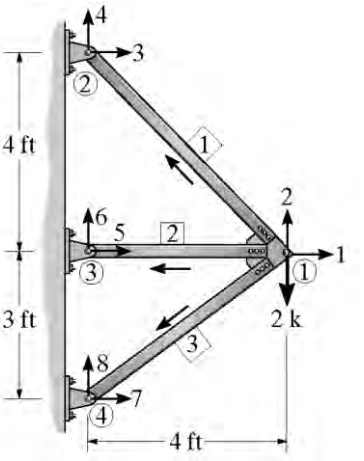
$$D_4=\frac{-135}{AE}=\frac{-135}{0.0015\times200\times10^6}=-4.5\times10^{-4}\,m=-0.45mm$$

با حل ماتریس فوق و انجام ضرب ماتریسی، برای عضو ٤ داریم:

$$\lambda_x=-1\quad,\quad\lambda_y=0$$

$$q_4=\frac{0.0015\times200\times10^6}{4}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.08889(10^{-3})\\-0.45(10^{-3})\\0\\0\end{bmatrix}$$

۱٤-٦) برای خرپای شکل زیر ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.75\ in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱٤-٦

حل) برای عضو شماره ۱ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x=\frac{0-4}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad\lambda_y=\frac{7-3}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{k}_1 = \frac{AE}{12}\begin{bmatrix} 0.0884 & -0.0884 & -0.0884 & 0.0884 \\ -0.0884 & 0.0884 & 0.0884 & -0.0884 \\ -0.0884 & 0.0884 & 0.0884 & -0.0884 \\ 0.0884 & -0.0884 & -0.0884 & 0.0884 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{4} = -1; \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{4} = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{AE}{12}\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۳ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{5} = -0.8; \qquad \lambda_y = \frac{0-3}{5} = -0.6$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{AE}{12}\begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ 0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

ساختار ماتریس سختی کلی به صورت $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ است. با جایگذاری $A=0.75$ $in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ داریم:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 845.3289 & 13.79611 & -160.2039 & 160.2039 & -453.125 & 0 & -232 & -174 \\ 13.79611 & 290.7039 & 160.2039 & -160.2039 & 0 & 0 & -174 & -130.5 \\ -160.2039 & 160.2039 & 160.2039 & -160.2039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 160.2039 & -160.2039 & -160.2039 & 160.2039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -453.125 & 0 & 0 & 0 & 453.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -232 & -174 & 0 & 0 & 0 & 0 & 232 & 174 \\ -174 & -130.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 174 & 130.5 \end{bmatrix}$$

۱۴-۷) در سازه نشان داده شده در مسئله ۱۴-۶، مقدار جابجایی قائم ایجاد شده در مفصل ① و مقدار نیروی داخلی عضو شماره ۲ را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده از مسئله ۱۴-۴ و اعمال $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ داریم.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 845.3289 & 13.79611 & -160.2039 & 160.2039 & -453.125 & 0 & -232 & -174 \\ 13.79611 & 290.7039 & 160.2039 & -160.2039 & 0 & 0 & -174 & -130.5 \\ -160.2039 & 160.2039 & 160.2039 & -160.2039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 160.2039 & -160.2039 & -160.2039 & 160.2039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -453.125 & 0 & 0 & 0 & 453.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -232 & -174 & 0 & 0 & 0 & 0 & 232 & 174 \\ -174 & -130.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 174 & 130.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = 845.3289D_1 + 13.79611D_2$$

$$-2 = 13.79611 + 290.7039D_2$$

با حل دو معادله خطی فوق داریم:

$$D_1 = 0.11237\left(10^{-3}\right)in \qquad D_2 = -6.8852\left(10^{-3}\right)in$$

برای تعیین نیروی ایجاد شده در عضو ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{4} = -1 \qquad \lambda_y = \frac{3-3}{4} = 0$$

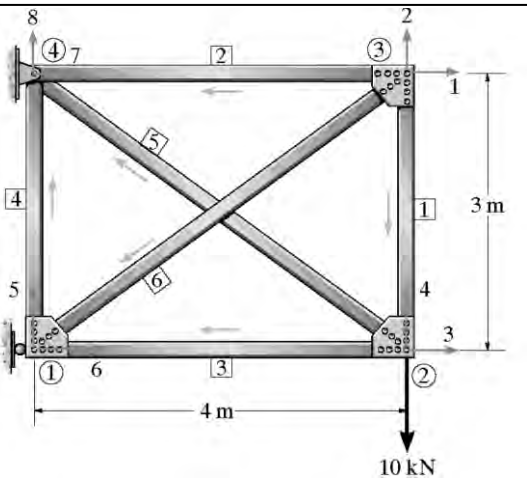
$$q_2 = \frac{0.75 \times 29 \times 10^3}{48}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\left(10^{-3}\right)\begin{bmatrix} 0.11237 \\ -6.8852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 50.9lb$$

۸-۱۴) برای خرپای شکل زیر ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.0015\ m^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۴-۸

حل) برای قطعه شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = \frac{0-3}{3} = -1$$

$$\mathbf{k}_1 = AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{4} = 1 \quad , \quad \lambda_y = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = AE\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۳ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{4} = -1 \quad , \quad \lambda_y = 0$$

$$\mathbf{k}_2 = AE\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ٤ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\mathbf{k}_1 = AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ۵ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{5} = -0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{3-0}{5} = 0.6$$

$$\mathbf{k}_5 = AE\begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 & -0.128 & 0.096 \\ -0.096 & 0.072 & 0.096 & -0.072 \\ -0.128 & 0.096 & 0.128 & -0.096 \\ 0.096 & -0.072 & -0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

برای قطعه شماره ٦ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{5} = -0.8 \quad , \quad \lambda_y = \frac{0-3}{5} = -0.6$$

$$\mathbf{k}_6 = AE\begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

ساختار ماتریس کلی به صورت $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6$ خواهد بود.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.4053 & 0 & -0.3333 & -0.072 & -0.096 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.378 & -0.096 & 0 & -0.25 & -0.128 & 0.096 \\ 0 & -0.3333 & -0.096 & 0.4053 & 0 & 0 & 0.096 & -0.072 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.4053 & 0.096 & 0 & -0.3333 \\ -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 & 0.096 & 0.378 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.128 & 0.096 & 0 & 0 & 0.378 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0.096 & -0.072 & -0.3333 & 0 & -0.096 & 0.4053 \end{bmatrix}$$

١٤–٩) مقدار نیروی ایجاد شده در عضو شماره ⑥ از خرپای مسئله ١٤–٨ را تعیین نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.0015\ m^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

حل) با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده از مسئله ١٤–٨ و اعمال $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ داریم.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.4053 & 0 & -0.3333 & -0.072 & -0.096 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.378 & -0.096 & 0 & -0.25 & -0.128 & 0.096 \\ 0 & -0.3333 & -0.096 & 0.4053 & 0 & 0 & 0.096 & -0.072 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.4053 & 0.096 & 0 & -0.3333 \\ -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 & 0.096 & 0.378 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.128 & 0.096 & 0 & 0 & 0.378 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0.096 & -0.072 & -0.3333 & 0 & -0.096 & 0.4053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جداسازی ماتریس فوق:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.096 \\ 0.096 & 0.4053 & 0 & -0.3333 & -0.072 \\ 0 & 0 & 0.378 & -0.096 & 0 \\ 0 & -0.3333 & -0.096 & 0.4053 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.4053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = AE\left(0.378\,D_1 + 0.096\,D_2 - 0.096\,D_5\right) \qquad (1)$$

$$0 = AE\left(0.096\,D_1 + 0.4053\,D_2 - 0.3333\,D_4 - 0.072\,D_5\right) \qquad (2)$$

$$0 = AE\left(0.378\,D_3 - 0.096\,D_4\right) \qquad (3)$$

$$-10 = AE\left(-0.3333\,D_2 - 0.096\,D_3 + 0.4053\,D_4\right) \qquad (4)$$

$$0 = AE\left(-0.096\,D_1 - 0.072\,D_2 + 0.4053\,D_5\right) \qquad (5)$$

با حل معادلات فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$D_1 = \frac{23.3517}{AE} \quad , \quad D_2 = \frac{-105.084}{AE} \quad , \quad D_3 = \frac{-30.0213}{AE}$$

$$, \quad D_4 = \frac{-118.209}{AE} \quad , \quad D_5 = \frac{-13.1367}{AE}$$

برای عضو شماره ٦ داریم:

$$\lambda_x = -0.8 \qquad \lambda_y = -0.6 \qquad L = 5m$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$q_6=\frac{AE}{5}\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6\end{bmatrix}\frac{1}{AE}\begin{bmatrix}23.3517\\-105.084\\0\\-13.1367\end{bmatrix}=-7.297kN\approx 7.3kN(C)$$

۱۰-۱۴) در خرپای نشان داده شده در مسئله ۸-۱۴، در صورتی که عضو شماره ① به مقدار ۱۰ میلیمتر بزرگتر ساخته شود، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو شماره ① را تعیین نمایید. برای حل مسئله مقدار نیروی ۱۰ کیلونیوتنی را حذف نمایید. برای تمام اعضا مقدار $A=0.0015\ m^2$ و $E=200GPa$ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix}(Q_1)_0\\(Q_2)_0\\(Q_3)_0\\(Q_4)_0\end{bmatrix}=\frac{AE(0.01)}{3}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=AE\begin{bmatrix}0\\-0.003333\\0\\0.003333\end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده در مسئله ۸-۱۴ داریم:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\Q_6\\Q_7\\Q_8\end{bmatrix}=AE\begin{bmatrix}0.378&0.096&0&0&-0.096&-0.128&-0.25&0\\0.096&0.4053&0&-0.3333&-0.072&-0.096&0&0\\0&0&0.378&-0.096&0&-0.25&-0.128&0.096\\0&-0.3333&-0.096&0.4053&0&0&0.096&-0.072\\-0.096&-0.072&0&0&0.4053&0.096&0&-0.3333\\-0.128&-0.096&-0.25&0&0.096&0.378&0&0\\-0.25&0&-0.128&0.096&0&0&0.378&-0.096\\0&0&0.096&-0.072&-0.3333&0&-0.096&0.4053\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\0\\0\\0\end{bmatrix}+AE\begin{bmatrix}0\\-0.00333\\0\\0.003333\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$0=0.378D_1+0.096D_2+0D_3+0D_4-0.096D_5+0 \qquad (1)$$

$$0=0.096D_1+0.4053D_2+0D_3-0.3333D_4-0.072D_5-0.003333 \qquad (2)$$

$$0=0D_1+0D_2+0.378D_3-0.096D_4+0D_5+0 \qquad (3)$$

$$0=0D_1-0.3333D_2-0.096D_3+0.4053D_4+0D_5+0.003333 \qquad (4)$$

$$0=-0.096D_1-0.072D_2+0D_3+0D_4+0.4053D_5+0 \qquad (5)$$

با حل معادله فوق داریم:

$$D_1=-0.0011111 \quad , \quad D_2=0.005 \quad , \quad D_3=-0.004375$$

$$D_4=-0.004375 \quad , \quad D_5=0.000625$$

مقدار نیروی ایجاد شده در عضو ۱ برابر است با:

$$\lambda_x=0 \quad , \quad \lambda_y=-1 \quad , \quad L=3m$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

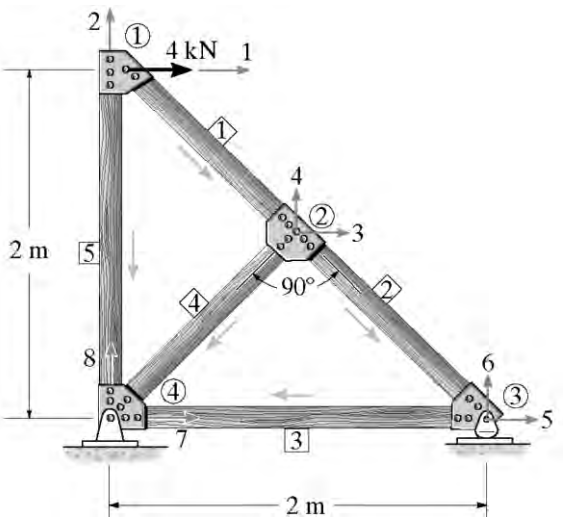
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$q_1 = \frac{0.0015(200)(10^9)}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.001111\\0.005\\-0.001111\\-0.004375\end{bmatrix} - (0.0015)(200)(10^9)(0.003333)$$

$$= -62.5kN = 62.5kN(C)$$

١٤-١١) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. مقدار $AE$ برای تمام اعضا ثابت می‌باشد.




شکل مسئله ١٤-١١

حل) برای عضو شماره ١ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{1-0}{\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -0.7071$$

$$\mathbf{k}_1 = AE\begin{bmatrix}0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536\\-0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.3536\\-0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.3536\\0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536\end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ٢ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-1}{\sqrt{2}} = -0.7071$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{k}_2 = AE\begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۳ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-2}{2} = -1 \qquad \lambda_y = 0$$

$$\mathbf{k}_3 = AE\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ٤ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-1}{\sqrt{2}} = -0.7071 \qquad \lambda_y = \frac{0-1}{\sqrt{2}} = -0.7071$$

$$\mathbf{k}_4 = AE\begin{bmatrix} 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۵ از خرپای فوق داریم:

$$\lambda_x = 0 \qquad \lambda_y = \frac{0-2}{2} = -1$$

$$\mathbf{k}_5 = AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ساختار ماتریس سختی کل سازه به صورت $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5$ خواهد بود.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3536 & 0.8536 & 0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ -0.3536 & 0.3536 & 1.0607 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 1.0608 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & -0.3536 & 0.3536 & 0.8536 & -0.3536 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 & -0.5 & 0 & 0.8536 & 0.3536 \\ 0 & -0.5 & -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



١٤-١٢) در خرپای نشان داده شده در مسئله١٤-١١، مقدار نیروی ایجاد شده در عضوهای ① و ⑤ را تعیین نمایید. مقدار $AE$ برای تمام اعضا ثابت می‌باشد.

حل) با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده در مسئله ١٤-١١ و اعمال رابطه $Q = KD$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3536 & 0.8536 & 0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ -0.3536 & 0.3536 & 1.0607 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 1.0608 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & -0.3536 & 0.3536 & 0.8536 & -0.3536 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 & -0.5 & 0 & 0.8536 & 0.3536 \\ 0 & -0.5 & -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جداسازی ماتریس فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 \\ -0.3536 & 0.8536 & 0.3536 & -0.3536 & 0 \\ -0.3536 & 0.3536 & 1.0607 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 1.0607 & 0.3536 \\ 0 & 0 & -0.3536 & 0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4 = AE\left(0.3536\,D_1 - 0.3536\,D_2 - 0.3536\,D_3 + 0.3536\,D_4\right) \qquad (1)$$

$$0 = AE\left(-0.3536\,D_1 + 0.8536\,D_2 + 0.3536\,D_3 - 0.3536\,D_4\right) \qquad (2)$$

$$0 = AE\left(-0.3536\,D_1 + 0.8536\,D_2 + 1.0607\,D_3 - 0.3536\,D_4 - 0.3536\,D_5\right) \qquad (3)$$

$$0 = AE\left(0.3536\,D_1 - 0.3536\,D_2 - 0.3536\,D_3 + 1.0607\,D_4 + 0.3536\,D_5\right) \qquad (4)$$

$$0 = AE\left(-0.3536\,D_3 + 0.3536\,D_4 + 0.8536\,D_5\right) \qquad (5)$$

با حل معادلات فوق، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$D_1 = \frac{38.624}{AE} \quad , \quad D_2 = \frac{8.00}{AE} \quad , \quad D_3 = \frac{9.656}{AE}$$

$$D_4 = \frac{-9.656}{AE} \quad , \quad D_5 = \frac{8.00}{AE}$$

برای عضو شماره ١ داریم:

$$\lambda_x = 0.7071 \quad , \quad \lambda_y = -0.7071 \quad , \quad L = 1.414\,m$$

$$q_1 = \frac{AE}{1.414}\left[-0.7071 \quad 0.7071 \quad 0.7071 \quad -0.7071\right]\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 38.624 \\ 8.00 \\ 9.656 \\ -9.656 \end{bmatrix}$$

$$= -5.66kN = 5.66kN(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

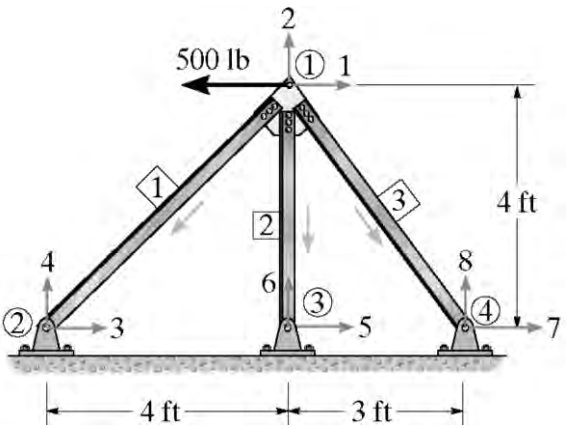


برای عضو شماره ۵ داریم:

$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = -1 \quad , \quad L = 2m$$

$$q_5 = \frac{AE}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{AE}\begin{bmatrix}38.624\\8.00\\0\\0\end{bmatrix} = 4.00kN(T)$$

۱۳-۱٤) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر، ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. مقدار $A=0.75in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.




شکل مسئله ۱٤-۱۳

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x = \frac{0-4}{\sqrt{32}} = -0.7071 \quad , \quad \lambda_y = \frac{0-4}{\sqrt{32}} = -0.7071$$

$$\mathbf{k}_1 = AE\begin{bmatrix}0.08839 & 0.08839 & -0.08839 & -0.08839\\0.08839 & 0.08839 & -0.08839 & -0.08839\\-0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839\\-0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839\end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = \frac{4-4}{4} = 0 \quad , \quad \lambda_y = \frac{0-4}{4} = -1$$

$$\mathbf{k}_2 = AE\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.25 & 0 & -0.25\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & -0.25 & 0 & 0.25\end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



برای عضو شماره ۳ داریم:

$$\lambda_x = \frac{7-4}{5} = 0.6 \quad , \quad \lambda_y = \frac{0-4}{5} = -0.8$$

$$\mathbf{k}_3 = AE\begin{bmatrix} 0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.096 \\ -0.096 & 0.128 & 0.096 & -0.128 \\ -0.072 & 0.096 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

ماتریس کلی سازه به صورت $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ خواهد بود، بنابراین:

$$\mathbf{K} = AE\begin{bmatrix} 0.16039 & -0.00761 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ -0.00761 & 0.46639 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & -0.25 & 0.096 & -0.128 \\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

۱۴-۱۴) مقدار جابجایی افقی ایجاد شده در گره شماره ① و نیروی ایجاد شده در عضو شماره ② را تعیین نمایید. مقدار $A=0.75in^2$ و $E=29(10^3)ksi$ می‌باشد.

حل) با استفاده از ماتریس کلی بدست آمده در مسئله ۱۴-۱۳، و اعمال $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ رابطه داریم:

$$\begin{bmatrix} -500 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} 0.16039 & -0.00761 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ -0.00761 & 0.46639 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & -0.25 & 0.096 & -0.128 \\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جداسازی ماتریس فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} -500 \\ 0 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} 0.16039 & -0.00761 \\ -0.00761 & 0.46639 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-500 = AE\left(0.16039\, D_1 - 0.00761\, D_2\right) \qquad (1)$$

$$0 = AE\left(-0.00761\, D_1 + 0.46639\, D_2\right) \qquad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$D_1 = \frac{-3119.85}{AE} = \frac{-3119.85\times 12}{0.75\times 29\times 10^6} = -0.00172in$$

$$D_2 = \frac{-50.917}{AE}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = -1 \quad , \quad L = 4\,ft$$

$$q_2 = \frac{AE}{4}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{AE}\begin{bmatrix}-3119.85\\ -50.917\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = -12.73lb = 12.7lb(C)$$

۱۴-۱۵) در خرپای نشان داده شده در مسئله ۱۴-۱۳، مقدار نیروی ایجاد شده در عضو شماره ② در اثر افزایش درجه حرارت به میزان $100^\circ F$ را تعیین نمایید. مقدار $A=0.75in^2$، $E=29(10^3)ksi$ و $\alpha = 6.5(10^{-6})/^\circ F$ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix}(Q_1)_0\\ (Q_2)_0\\ (Q_3)_0\\ (Q_4)_0\end{bmatrix} = AE(6.5)(10^{-6})(100)\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix}0\\ -650\\ 0\\ 650\end{bmatrix}(10^{-6})$$

با استفاده از ماتریس سختی بدست آمده در در مسئله ۱۴-۱۳، داریم:

$$\begin{bmatrix}-500\\ 0\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\\ Q_6\\ Q_7\\ Q_8\end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix}0.16039 & -0.00761 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096\\ -0.00761 & 0.46639 & -0.08839 & -0.08839 & 0 & -0.25 & 0.096 & -0.128\\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.08839 & -0.08839 & 0.08839 & 0.08839 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0\\ -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.072 & -0.096\\ 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & 0.128\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$+ AE\begin{bmatrix}0\\ -650\\ 0\\ 650\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\times 10^{-6}$$

$$\frac{-500}{0.75\times 29\times 10^6} = 0.16039D_1 - 0.00761D_2 + 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$0 = -0.00761\,D_1 + 0.46639\,D_2 - 650\times10^{-6}$$

با حل معادلات فوق داریم:

$$D_1 = -77.837\times10^{-6}\ ft \qquad D_2 = 1392.427\times10^{-6}\ ft$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x = 0 \quad , \quad \lambda_y = -1 \quad , \quad L = 4\ ft$$

$$q_2 = \frac{0.75\times29\times10^6}{4}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-77.837\\1392.427\\0\\0\end{bmatrix}\times10^{-6} - 75\times29\times10^6\times6.5\times10^{-6}\times100$$

$$= 7571.32 - 14137.5 = -6566.18lb = 6.57k(C)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

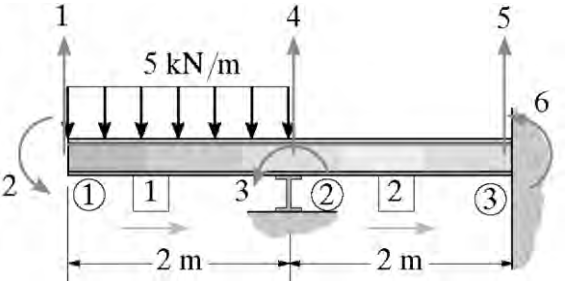
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل پانزدهم
# تحلیل تیرها با استفاده از روش سختی[1]

**۱۵-۱ مسائل:**

۱۵-۱) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر شکل زیر را تعیین نمایید. فرض کنید تکیه‌گاه شماره ۲ به صورت غلتکی و مقدار $EI$ ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۵-۱*

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

[1] برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با این روش به مرجع ۹ مراجعه نمایید. م

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است

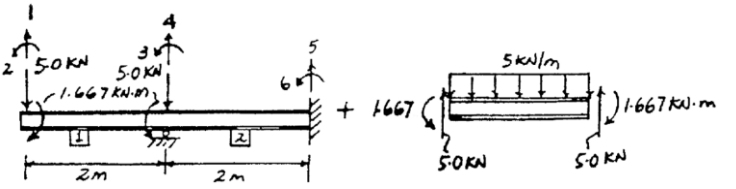


$$\begin{bmatrix} -5 \\ -1.667 \\ 1.667 \\ Q_4 - 5 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 4 & 0 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 3 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5 = 1.5D_1 + 1.5D_2 + 1.5D_3$$

$$-1.667 = 1.5D_1 + 2D_2 + 1D_3$$

$$1.667 = 1.5D_1 + 1D_2 + 4D_3$$




با حل همزمان معادلات فوق داریم:

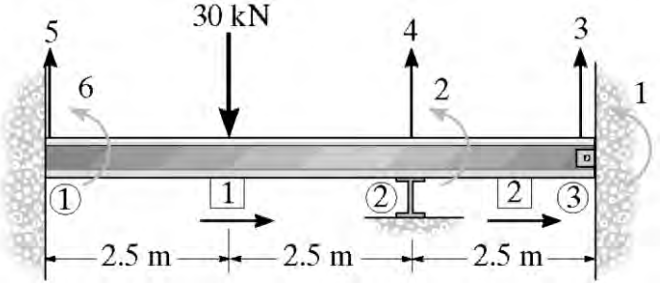
$$D_1 = \frac{-20}{EI} \quad , \quad D_2 = \frac{11.67}{EI} \quad , \quad D_3 = \frac{5.0}{EI}$$

$$Q_4 - 5 = -1.5EI\left(\frac{-20.0}{EI}\right) - 1.5EI\left(\frac{11.67}{EI}\right) + 0 = 17.5kN$$

$$Q_5 = 0 + 0 - 1.5EI\left(\frac{5.0}{EI}\right) = -7.5kN$$

$$Q_6 = 0 + 0 + 1EI\left(\frac{5.0}{EI}\right) = 5.0kN.m$$

۱۵-۲) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگر داخلی ایجاد شده در گره‌های ① و ② را تعیین نمایید. فرض کنید گره ② غلتکی، گره ③ مفصلی و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۵-۲

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 0.768 & 0.96 & -0.768 & 0.96 \\ 0.96 & 1.60 & -0.96 & 0.80 \\ -0.768 & -0.96 & 0.768 & -0.96 \\ 0.96 & 0.80 & -0.96 & 1.60 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = EI\begin{bmatrix} 1.60 & 0.80 & -0.96 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0.80 & 2.40 & -0.96 & 0.72 & 0.24 & 0.40 \\ -0.96 & -0.96 & 0.768 & -0.768 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0.72 & -0.768 & 0.864 & -0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.40 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 18.75 \end{bmatrix}$ با استفاده از رابطه $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 18.75 \\ Q_3 \\ Q_4 - 15.0 \\ Q_5 - 15.0 \\ Q_6 - 18.75 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 1.60 & 0.80 & -0.96 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0.80 & 2.40 & -0.96 & 0.72 & 0.24 & 0.40 \\ -0.96 & -0.96 & 0.768 & -0.768 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0.72 & -0.768 & 0.864 & -0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.40 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 18.75 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 1.60 & 0.80 \\ 0.80 & 2.40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$0 = EI\left(1.60D_1 + 0.80D_2\right)$$

$$18.75 = EI\left(0.80D_1 + 2.40D_2\right)$$

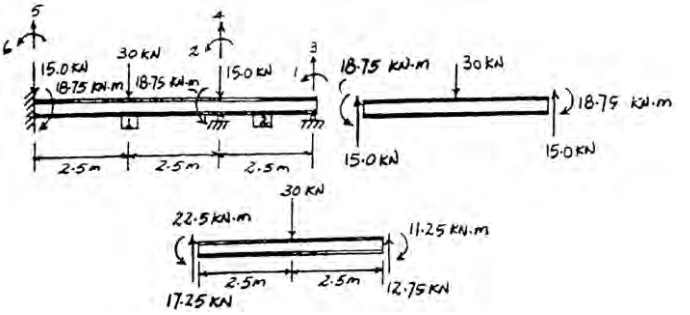
با حل همزمان دو رابطه فوق داریم:

$$D_1 = \frac{-4.6875}{EI} \qquad D_2 = \frac{9.375}{EI}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






برای عضو شماره یک داریم:

$$\begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_4 \\ q_2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.80 & -0.24 & 0.40 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.40 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9.375 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} + \begin{bmatrix} 15 \\ 18.75 \\ 15 \\ -18.75 \end{bmatrix}$$

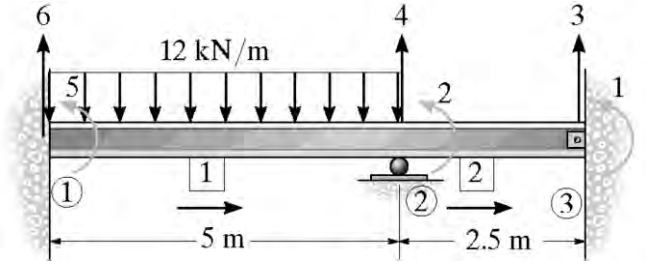
$$q_6 = 0.40EI\left(\frac{9.375}{EI}\right) + 18.75 = 22.5kN.m$$

$$q_2 = 0.80EI\left(\frac{9.375}{EI}\right) - 18.75 = -11.25kN.m$$

$$q_5 = 0.24EI\left(\frac{9.375}{EI}\right) + 15.0 = 17.25kN$$

$$q_4 = -0.24EI\left(\frac{9.375}{EI}\right) + 15.0 = 12.75kN$$

**۱۵-۳)** در تیر شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در کل تیر ثابت می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۵-۳*

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

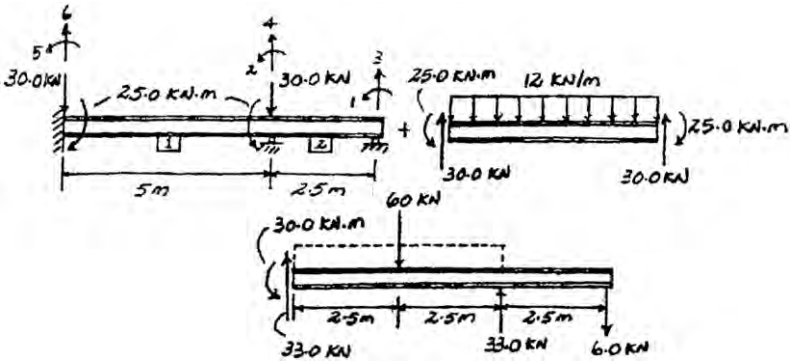
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.24 & 0.4 & -0.24 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 0.768 & 0.96 & -0.768 & 0.96 \\ 0.96 & 1.60 & -0.96 & 0.80 \\ -0.768 & -0.96 & 0.768 & -0.96 \\ 0.96 & 0.80 & -0.96 & 1.60 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ Q_3 \\ Q_4 - 30.0 \\ Q_5 - 25.0 \\ Q_6 - 30.0 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 1.60 & 0.80 & -0.96 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0.80 & 2.40 & -0.96 & 0.72 & 0.24 & 0.40 \\ -0.96 & -0.96 & 0.768 & -0.768 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0.72 & -0.768 & 0.864 & -0.096 & -0.24 \\ 0 & 0.24 & 0 & -0.096 & 0.096 & 0.24 \\ 0 & 0.40 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = 1.60D_1 + 0.80D_2$$

$$\frac{25.0}{EI} = 0.80D_1 + 2.40D_2 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{-6.25}{EI} \quad , \quad D_2 = \frac{12.5}{EI}$$

$$Q_3 = -0.96EI\left(\frac{-6.25}{EI}\right) - 0.96EI\left(\frac{12.5}{EI}\right) = -6.00kN$$

$$Q_4 - 30.0 = 0.96EI\left(\frac{-6.25}{EI}\right) + 0.72EI\left(\frac{12.5}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_4 = -33kN$$

$$Q_5 - 25.0 = 0 + 0.4EI\left(\frac{12.5}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_5 = 30kN.m$$

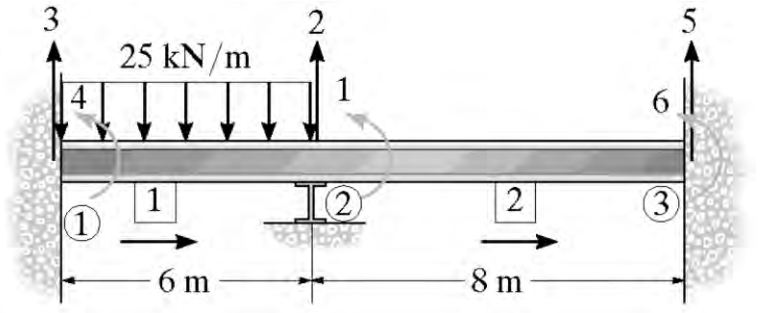
$$Q_6 - 30.0 = 0 + 0.24EI\left(\frac{12.5}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_6 = 33kN$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



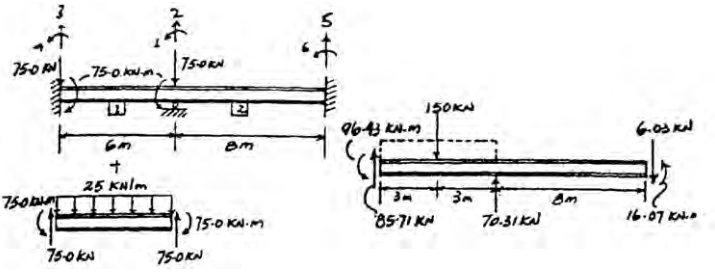
١٥-٤) در تیر شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های آن را تعیین نمایید. مقدار $EI$ در کل تیر ثابت می‌باشد. فرض کنید تکیه‌گاه ② غلتکی است.




شکل مسئله ١٥-٤

حل) برای عضو شماره ١ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} 0.05556 & 0.16667 & -0.05556 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.66667 & -0.16667 & 0.33333 \\ -0.05556 & -0.16667 & 0.05556 & -0.16667 \\ 0.16667 & 0.33333 & -0.16667 & 0.66667 \end{bmatrix}$$




برای عضو شماره ٢ داریم:

$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 0.02344 & 0.09375 & -0.02344 & 0.09375 \\ 0.09375 & 0.5 & -0.09375 & 0.25 \\ -0.02344 & -0.09375 & 0.02344 & -0.09375 \\ 0.09375 & 0.25 & -0.09375 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = EI\begin{bmatrix} 1.16667 & -0.07292 & 0.16667 & 0.33333 & -0.09375 & 0.25 \\ -0.07292 & 0.07899 & -0.05556 & -0.16667 & -0.02344 & 0.09375 \\ 0.16667 & -0.05556 & 0.05556 & 0.16667 & 0 & 0 \\ 0.33333 & -0.16667 & 0.16667 & 0.6667 & 0 & 0 \\ -0.09375 & -0.02344 & 0 & 0 & 0.02344 & -0.09375 \\ 0.25 & 0.09375 & 0 & 0 & -0.09375 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_k = [75]$$

با استفاده از رابطه $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ و جداسازی ماتریس بدست آمده داریم:

$$\begin{bmatrix} 75 \\ Q_2 - 75.0 \\ Q_3 - 75.0 \\ Q_4 - 75.0 \\ Q_5 \\ Q_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1.16667 & -0.07292 & 0.16667 & 0.33333 & -0.09375 & 0.25 \\ -0.07292 & 0.07899 & -0.05556 & -0.16667 & -0.02344 & 0.09375 \\ 0.16667 & -0.05556 & 0.05556 & 0.16667 & 0 & 0 \\ 0.33333 & -0.16667 & 0.16667 & 0.6667 & 0 & 0 \\ -0.09375 & -0.02344 & 0 & 0 & 0.02344 & -0.09375 \\ 0.25 & 0.09375 & 0 & 0 & -0.09375 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$75.0 = EI(1.16667)D_1 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{64.286}{EI}$$

$$Q_2 - 75.0 = -0.07292EI\left(\frac{64.286}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 70.31kN$$

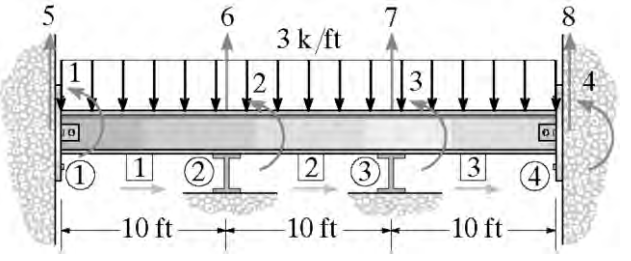
$$Q_3 - 75.0 = 0.16667EI\left(\frac{64.286}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_3 = 85.71kN$$

$$Q_4 - 75.0 = 0.33333EI\left(\frac{64.286}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_4 = M_1 = 96.43kN.m = 96.4kN.m$$

$$Q_5 = -0.09375EI\left(\frac{64.286}{EI}\right) = -6.03kN = 6.03kN$$

$$Q_6 = M_y = 0.25EI\left(\frac{64.286}{EI}\right) = 16.07kN.m = 16.1kN.m$$

**۱۵-۵)** در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگر داخلی ایجاد شده در گره‌های ② و ③ را تعیین نمایید. فرض کنید گره‌های ② و ③ غلتکی و گره‌های ① و④ مفصلی و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۵-۵

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) برای عضو شماره ۱ و ۲ و ۳ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = EI\begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.40 & -0.06 & 0.20 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.20 & -0.06 & 0.40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = EI\begin{bmatrix} 0.40 & 0.20 & 0 & 0 & 0.06 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.80 & 0.20 & 0 & 0.06 & 0 & -0.06 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0.80 & 0.20 & 0 & 0.06 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0.40 & 0 & 0 & 0.06 & -0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0 & 0 & 0.012 & -0.012 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0 & 0.06 & 0 & -0.012 & 0.024 & -0.012 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0.06 & 0 & -0.012 & 0.024 & -0.012 \\ 0 & 0 & -0.06 & -0.06 & 0 & 0 & -0.012 & 0.012 \end{bmatrix}$$

با اعمال رابطه $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ و با توجه به اینکه $\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} -25.0 \\ 0 \\ 0 \\ 25.0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ Q_5 - 15 \\ Q_6 - 30 \\ Q_7 - 30 \\ Q_8 - 15 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 0.40 & 0.20 & 0 & 0 & 0.06 & -0.06 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.80 & 0.20 & 0 & 0.06 & 0 & -0.06 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0.80 & 0.20 & 0 & 0.06 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0.40 & 0 & 0 & 0.06 & -0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0 & 0 & 0.012 & -0.012 & 0 & 0 \\ -0.06 & 0 & 0.06 & 0 & -0.012 & 0.024 & -0.012 & 0 \\ 0 & -0.06 & 0 & 0.06 & 0 & -0.012 & 0.024 & -0.012 \\ 0 & 0 & -0.06 & -0.06 & 0 & 0 & -0.012 & 0.012 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 0.40 & 0.20 & 0 & 0 \\ 0.20 & 0.80 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0.80 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0.40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-25.0 = EI(0.40D_1 + 0.20D_2) \qquad (1)$$

$$0 = EI(0.20D_1 + 2.80D_2 + 0.20D_3) \qquad (2)$$

$$0 = EI(0.20D_2 + 0.80D_3 + 0.20D_4) \qquad (3)$$

$$25.0 = EI(0.20D_3 + 0.40D_4) \qquad (4)$$

با حل همزمان معادلات فوق داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$D_1=\frac{-75.00}{EI} \quad , \quad D_2=\frac{25.00}{EI} \quad , \quad D_3=\frac{-25.00}{EI} \quad , \quad D_4=\frac{75.00}{EI}$$

برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\begin{bmatrix} q_5 \\ q_1 \\ q_6 \\ q_2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.40 & -0.06 & 0.20 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.20 & -0.06 & 0.40 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ -75.00 \\ 0 \\ 25.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15.0 \\ 25.0 \\ 15.0 \\ -25.0 \end{bmatrix}$$

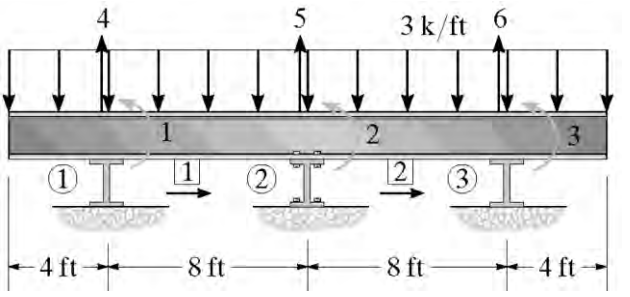
$$q_5=12.0k \quad , \quad q_1=0 \quad , \quad q_6=18.0k \quad , \quad M_2=q_2=-30.0k.ft$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\begin{bmatrix} q_6 \\ q_1 \\ q_7 \\ q_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.40 & -0.06 & 0.20 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.20 & -0.06 & 0.40 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 25.00 \\ 0 \\ -25.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15.0 \\ 25.0 \\ 15.0 \\ -25.0 \end{bmatrix}$$

$$q_6=15.0k \quad , \quad q_7=15 \quad , \quad q_3=M_3=-30.0k.ft \quad , \quad M_2=q_2=30.0k.ft$$

۱۵-۶) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ایجاد شده را تعیین نمایید. فرض کنید گره‌های ② و ③ غلتکی و گره‌های ① و④ مفصلی و $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۵-۶

حل) برای عضو شماره ۱ و ۲ داریم:

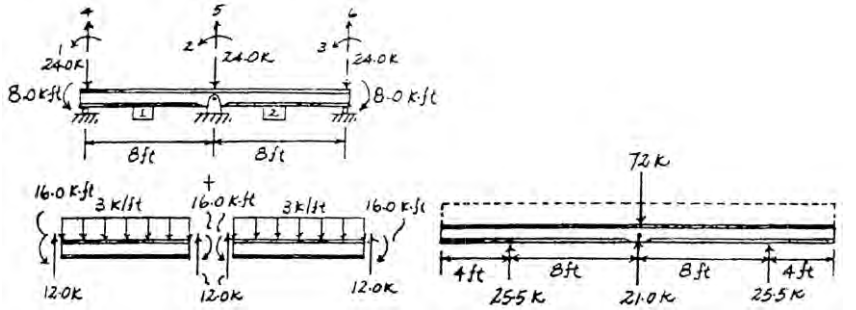
$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2=\frac{EI}{8}\begin{bmatrix} 0.1875 & 0.75 & -0.1875 & 0.75 \\ 0.75 & 4 & -0.75 & 2 \\ -0.1875 & -0.75 & 0.1875 & -0.75 \\ 0.75 & 2 & -0.75 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}=\mathbf{KD}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \\ Q_4-24 \\ Q_5-24 \\ Q_6-24 \end{bmatrix} = \frac{EI}{8}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0.75 & -0.75 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0.75 & 0 & -0.75 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0.75 & -0.75 \\ 0.75 & 0.75 & 0 & 0.1875 & -0.1875 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.75 & -0.1875 & 0.375 & -0.1875 \\ 0 & -0.75 & -0.75 & 0 & -0.1875 & 0.1875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$8 = \frac{EI}{8}(4D_1 + 2D_2)$$

$$0 = \frac{EI}{8}(2D_1 + 8D_2 + 2D_3)$$

$$-8 = \frac{EI}{8}(2D_2 + 4D_3)$$

با حل سه معادله فوق داریم:

$$D_1 = \frac{16}{EI} \quad , \quad D_2 = 0 \quad , \quad D_3 = -\frac{16}{EI}$$

$$Q_4 - 24.0 = \frac{EI}{8}(0.75)\left(\frac{16}{EI}\right) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad Q_4 = 25.5k$$

$$Q_5 - 24.0 = \frac{EI}{8}(-0.75)\left(\frac{16}{EI}\right) + 0 + \frac{EI}{8}(0.75)\left(\frac{-16}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_5 = 21.0k$$

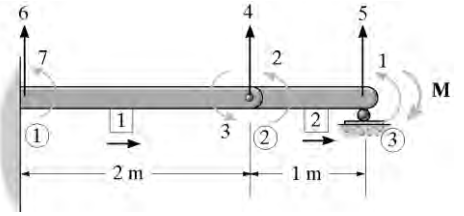
$$Q_6 - 24.0 = 0 + 0 + \frac{EI}{8}(-0.75)\left(\frac{-16}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_6 = 25.5k$$

۱۵-۷) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ایجاد شده را تعیین نمایید. فرض کنید $EI$ ثابت است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۵-۷

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} -M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1.5 & 0 & 1.5 & 1 \\ 6 & 6 & -1.5 & 13.5 & -12 & -1.5 & -1.5 \\ -6 & -6 & 0 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-M}{EI} = 4D_1 + 2D_2 + 6D_4$$

$$0 = 2D_1 + 4D_2 + 6D_4$$

$$0 = 2D_3 - 1.5D_4$$

$$0 = 6D_1 + 6D_2 + 1.5D_3 + 13.5D_4$$

با حل معادلات بالا داریم:

$$D_1 = \frac{-3M}{EI} \quad , \quad D_2 = \frac{-2.5M}{EI} \quad , \quad D_3 = \frac{-2M}{EI} \quad , \quad D_4 = \frac{2.667M}{EI}$$

$$Q_5 = -6EI\left(\frac{-3M}{EI}\right) - 6EI\left(\frac{-2.5M}{EI}\right) + 0 - 12EI\left(\frac{2.667M}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_5 = M$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

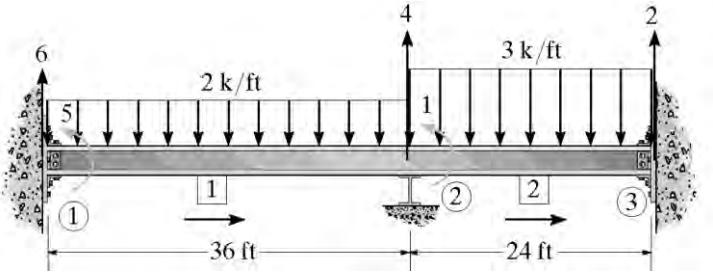
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$Q_6 = 0+0+1.5EI\left(\frac{2M}{EI}\right)-1.5EI\left(\frac{2.667M}{EI}\right)=-M$$

$$Q_7 = 0+0+1EI\left(\frac{2M}{EI}\right)-1.5EI\left(\frac{2.667M}{EI}\right)=-2M$$

۱۵–۸) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار لنگرهای ایجاد شده در تکیه‌گاه‌های ① و ③ را تعیین نمایید. فرض کنید تکیه‌گاه‌های ① و ③ بصورت گیردار و تکیه‌گاه ② به صورت غلتکی می‌باشد. مقدار $EI$ ثابت است.




شکل مسئله ۱۵–۸

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{36^3} & \frac{6}{36^2} & -\frac{12}{36^3} & \frac{6}{36^2} \\ \frac{6}{36^2} & \frac{4}{36} & -\frac{6}{36^2} & \frac{2}{36} \\ -\frac{12}{36^3} & -\frac{6}{36^2} & \frac{12}{36^3} & -\frac{6}{36^2} \\ \frac{6}{36^2} & \frac{2}{36} & \frac{6}{36^2} & \frac{4}{36} \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

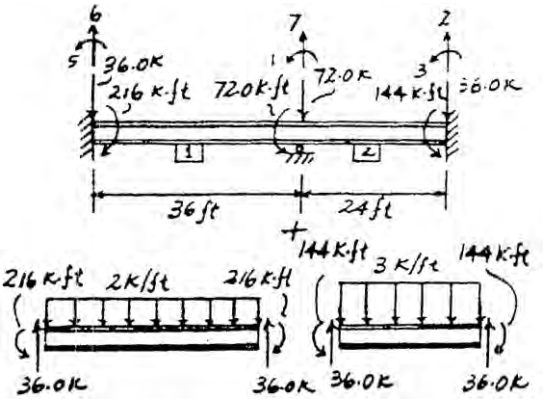
$$\mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{24^3} & \frac{6}{24^2} & -\frac{12}{24^3} & \frac{6}{24^2} \\ \frac{6}{24^2} & \frac{4}{24} & -\frac{6}{24^2} & \frac{2}{24} \\ -\frac{12}{24^3} & -\frac{6}{24^2} & \frac{12}{24^3} & -\frac{6}{24^2} \\ \frac{6}{24^2} & \frac{2}{24} & \frac{6}{24^2} & \frac{4}{24} \end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\begin{bmatrix} 72.0 \\ Q_2 - 36.0 \\ Q_3 + 144 \\ Q_4 - 72.0 \\ Q_5 - 216 \\ Q_6 - 36.0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{6}{24^2} & \frac{2}{24} & \frac{5}{864} & \frac{2}{36} & \frac{6}{36^2} \\ -\frac{6}{24^2} & \frac{12}{24^3} & -\frac{6}{24^2} & \frac{12}{24^3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{24} & -\frac{6}{24^2} & \frac{4}{24} & \frac{6}{24^2} & 0 & 0 \\ \frac{5}{864} & -\frac{12}{24^3} & \frac{6}{24^2} & \frac{35}{31104} & -\frac{6}{36^2} & -\frac{12}{36^3} \\ \frac{2}{36} & 0 & 0 & -\frac{6}{36^2} & \frac{4}{36} & \frac{6}{36^2} \\ \frac{6}{36^2} & 0 & 0 & \frac{12}{24^3} & \frac{6}{36^2} & \frac{12}{24^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$72.0 = \frac{5}{18} EI(D_1) \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{259.2}{EI}$$

$$Q_3 + 144 = \frac{2EI}{24}\left(\frac{259.2}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_3 = -122.4k.ft = 122k.ft$$

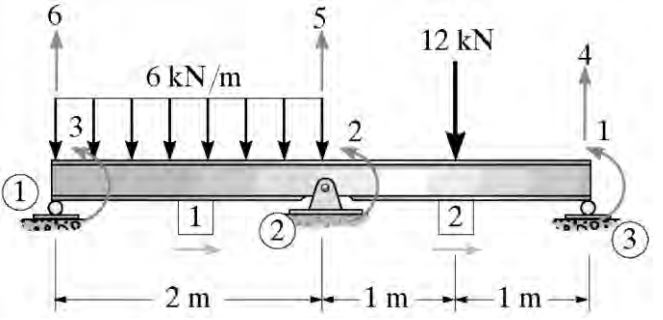
$$Q_5 - 216 = \frac{2EI}{36}\left(\frac{259.2}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_5 = 230k.ft = 230k.ft$$

**۱۵–۹)** در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ایجاد شده را تعیین نمایید. فرض کنید $EI$ ثابت است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است






شکل مسئله ۱۵-۹

حل) برای عضوهای ۱ و ۲ داریم:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = EI\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ Q_4 - 6 \\ Q_5 - 12 \\ Q_6 - 6 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 0 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{EI} = 2D_1 + 1D_2$$

$$\frac{-1}{EI} = 1D_1 + 4D_2 + 1D_3$$

$$\frac{-2}{EI} = 1D_2 + 2D_3$$

با حل معادلات فوق داریم:

$$D_1 = \frac{1.75}{EI} \quad , \quad D_2 = \frac{-0.50}{EI} \quad , \quad D_3 = \frac{-0.75}{EI}$$

$$Q_4 - 6 = -1.5EI\left(\frac{1.75}{EI}\right) - 1.5EI\left(\frac{-0.50}{EI}\right) + 0 \quad \Rightarrow \quad Q_4 = 4.125kN$$

$$Q_5 - 12 = 1.5EI\left(\frac{1.75}{EI}\right) + 0 - 1.5EI\left(\frac{-0.75}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_5 = 15.75kN$$

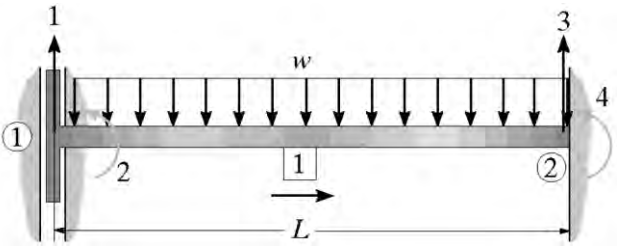
$$Q_6 - 6 = 0 + 1.5EI\left(\frac{-0.5}{EI}\right) + 1.5EI\left(\frac{-0.75}{EI}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_6 = 4.125kN$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



۱۵-۱۰) در تیر نشان داده شده در شکل زیر، مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ایجاد شده را تعیین نمایید. فرض کنید $EI$ ثابت است. تکیه‌گاه ① بصورت هدایت شونده است.

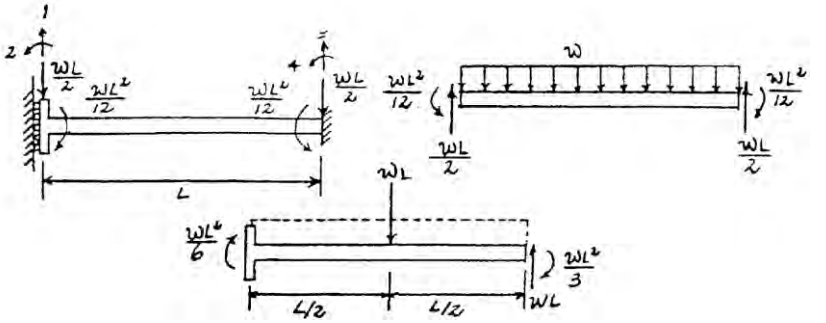



شکل مسئله ۱۵-۱۰

حل)

$$\begin{bmatrix} \frac{-wl}{2} \\ Q_2 - \frac{wl^2}{12} \\ Q_3 - \frac{wl}{2} \\ Q_4 + \frac{wl^2}{12} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-wl}{2EI} = \frac{12}{L^3} D_1 + 0 + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{-wL^4}{24EI}$$




$$Q_2 - \frac{wL^2}{12} = \frac{6}{L^2} EI \left( \frac{-wL^4}{24EI} \right) \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{-wL^2}{6}$$

$$Q_3 - \frac{wL}{2} = \frac{-12}{L^3} EI \left( \frac{-wL^4}{24EI} \right) \quad \Rightarrow \quad Q_3 = wL$$

$$Q_4 + \frac{wL^2}{12} = \frac{6}{L^2} EI \left( \frac{-wL^4}{24EI} \right) \quad \Rightarrow \quad Q_4 = \frac{-wL^2}{3}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

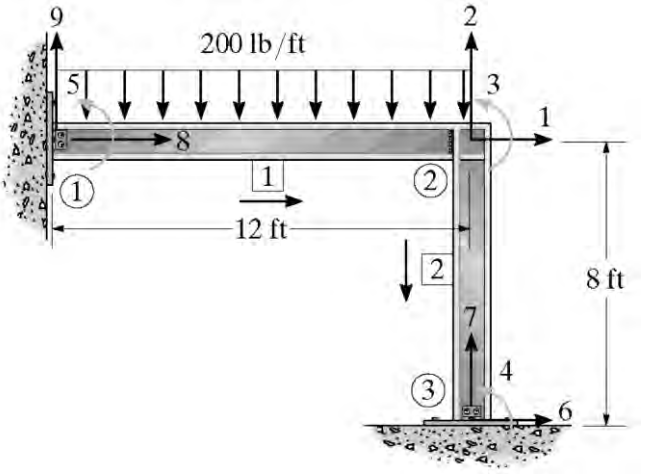
Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# فصل شانزدهم

# تحلیل قاب‌ها با استفاده از روش سختی

۱۶-۱) برای قاب نشان داده شده در شکل زیر، ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های ① و ③ مفصلی هستند. برای تمام اعضای سازه، مقدار $E=29(10^3)ksi$، $I=600in^4$ و $A=10in^2$ می‌باشد.




*شکل مسئله ۱۶-۱*

حل) برای عضو شماره ۱ داریم:

$$\lambda_x=\frac{12-0}{12}=1 \quad , \quad \lambda_y=0 \quad , \quad \frac{AE}{L}=\frac{10\times29\times10^3}{12\times12}=2013.89$$

$$\frac{12EI}{L^3}=\frac{12\times29\times10^3\times600}{12^3\times12^3}=69.93 \quad , \quad \frac{6EI}{L^2}=\frac{6\times29\times10^3\times600}{12^2\times12^2}=5034.72$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



$$\frac{4EI}{L}=\frac{4\times29\times10^3\times600}{12\times12}=483333.33 \quad , \quad \frac{2EI}{L}=\frac{2\times29\times10^3\times600}{12\times12}=241666.67$$

$$\mathbf{k}_1=\begin{bmatrix} 2013.89 & 0 & 0 & -2013.89 & 0 & 0 \\ 0 & 69.93 & 5034.72 & 0 & -69.93 & 5034.72 \\ 0 & 5034.72 & 483333.33 & 0 & -5034.72 & 241666.67 \\ -2013.89 & 0 & 0 & 2013.89 & 0 & 0 \\ 0 & -69.93 & -5034.72 & 0 & 69.93 & -5034.72 \\ 0 & 5034.72 & 241666.67 & 0 & -5034.72 & 483333.33 \end{bmatrix}$$

برای عضو شماره ۲ داریم:

$$\lambda_x=0 \quad , \quad \lambda_y=\frac{-8-0}{8}=-1 \quad , \quad \frac{AE}{L}=\frac{10\times29\times10^3}{8\times12}=3020.83$$

$$\frac{12EI}{L^3}=\frac{12\times29\times10^3\times600}{8^3\times12^3}=236 \quad , \quad \frac{6EI}{L^2}=\frac{6\times29\times10^3\times600}{8^2\times12^2}=11328.13$$

$$\frac{4EI}{L}=\frac{4\times29\times10^3\times600}{8\times12}=725000 \quad , \quad \frac{2EI}{L}=\frac{2\times29\times10^3\times600}{8\times12}=362500$$

$$\mathbf{k}_2=\begin{bmatrix} 236 & 0 & 11328.13 & -236 & 0 & 11328.13 \\ 0 & 3020.83 & 0 & 0 & -3020.83 & 0 \\ 11328.13 & 0 & 725000 & -11328.13 & 0 & 362500 \\ -236 & 0 & -11328.13 & 236 & 0 & -11328.13 \\ 0 & -3020.83 & 0 & 0 & 3020.83 & 0 \\ 11328.13 & 0 & 362500 & -11328.13 & 0 & 725000 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی قاب به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 2249.89 & 0 & 11328.13 & 11328.13 & 0 & -236 & 0 & -2013.89 & 0 \\ 0 & 3090.76 & -5034.72 & 0 & -5034.72 & 0 & -3020.83 & 0 & -69.93 \\ 11328.13 & -5034.72 & 1208333.33 & 362500 & 241666.67 & -11328.13 & 0 & 0 & 5034.72 \\ 11328.13 & 0 & 362500 & 725000 & 0 & -11328.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5034.72 & 241666.67 & 0 & 413333.33 & 0 & 0 & 0 & 5034.72 \\ -236 & 0 & -11328.13 & -11328.13 & 0 & 236 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3020.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3020.83 & 0 & 0 \\ -2013.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2013.89 & 0 \\ 0 & -69.93 & 5034.72 & 0 & 5034.72 & 0 & 0 & 0 & 69.93 \end{bmatrix}$$

۱۶-۲) در قاب نشان داده شده در مسئله ۱۶-۱، مقدار نیروی ایجاد شده در انتهای هر یک از اعضا را تعیین نمایید. فرض نمایید که تکیه‌گاه‌های ① و ③ مفصلی هستند. برای تمام اعضای سازه، مقدار $E=29(10^3)ksi$، $I=600in^4$ و $A=10in^2$ می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



حل) با توجه به نتایج بدست آمده در مسئله ۱۶-۱،

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.2 \\ 28.8 \\ 0 \\ -28.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1.2 \\ 28.8 \\ 0 \\ -28.8 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 - 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2249.89 & 0 & 11328.13 & 11328.13 & 0 & -236 & 0 & -2013.89 & 0 \\ 0 & 3090.76 & -5034.72 & 0 & -5034.72 & 0 & -3020.83 & 0 & -69.93 \\ 11328.13 & -5034.72 & 1208333.33 & 362500 & 241666.67 & -11328.13 & 0 & 0 & 5034.72 \\ 11328.13 & 0 & 362500 & 725000 & 0 & -11328.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5034.72 & 241666.67 & 0 & 413333.33 & 0 & 0 & 0 & 5034.72 \\ -236 & 0 & -11328.13 & -11328.13 & 0 & 236 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3020.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3020.83 & 0 & 0 \\ -2013.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2013.89 & 0 \\ 0 & -69.93 & 5034.72 & 0 & 5034.72 & 0 & 0 & 0 & 69.93 \end{bmatrix}$$

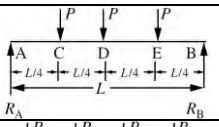
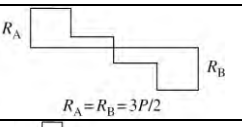
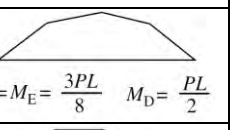
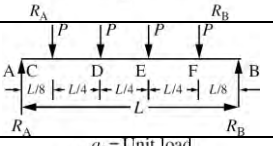
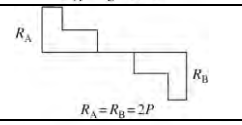
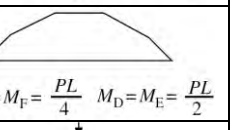
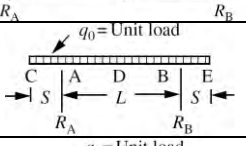
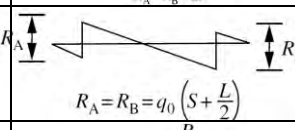
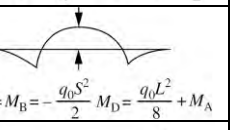
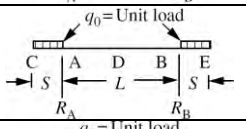
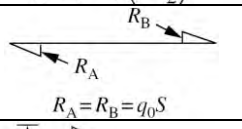
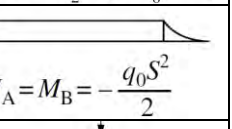
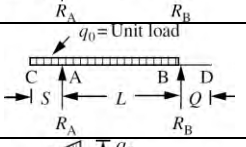
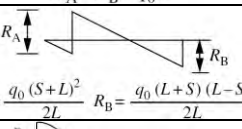
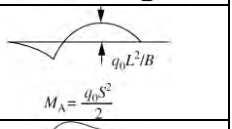
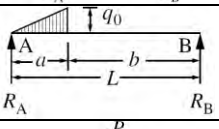
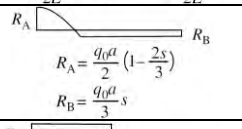
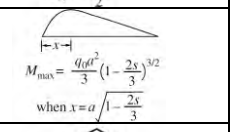
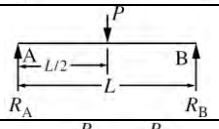
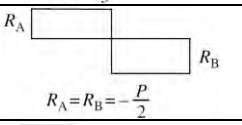
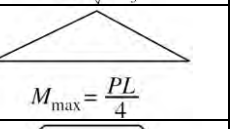
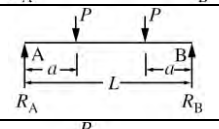
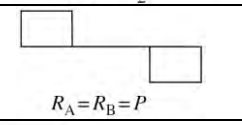
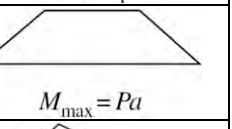
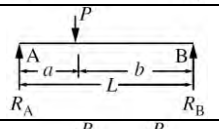
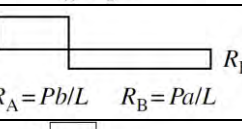
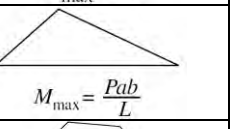
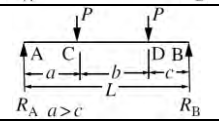
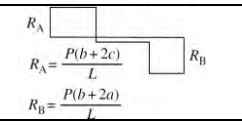
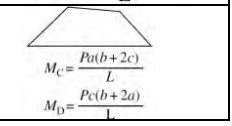
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



# پیوست الف

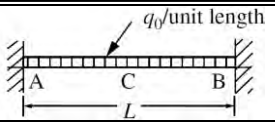
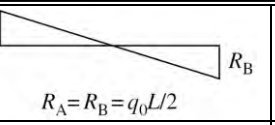
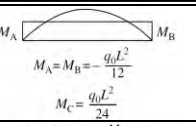
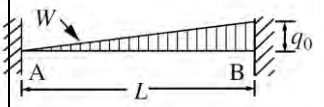
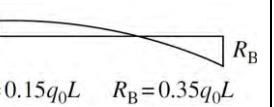
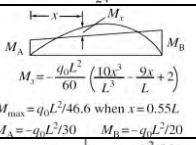
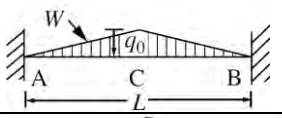
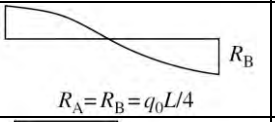
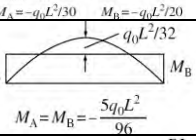
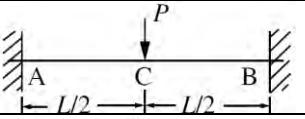
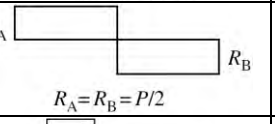
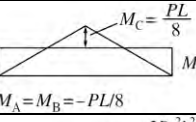
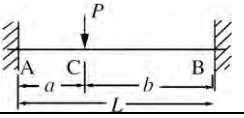
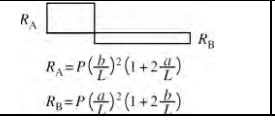
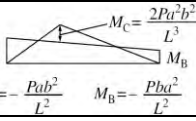
## دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی

| بارگذاری | دیاگرام نیروی برشی | دیاگرام لنگر خمشی |
|---|---|---|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com انتشار با ذکر منبع و بدون استفاده تجاری بلامانع است



| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

**مراجع:**


1. Hibbeler, R. C. 2002. *Structural Engineering,* 5th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Hibbeler, R.C. 2004. *Engineering Mechanics: Statics,* 10th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Megson, T.H.G . 1996. *Structural and Stress Analysis,* Butterworth Heinmann
4. Norris, C, H ,Wilbure, J, B, Utku, S, *Elementary Structural Analysis,* 3th ed
5. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. 1961. *Theory of Elastic Stability,* McGraw-Hill, New York.
6. Meriam, J. L. and Kraige, L. G. 1992. *Engineering Mechanics,* 3rd ed. John Wiley & Sons, New York.
7. Pilkey, W. D. 2004. *Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*. John Wiley & Sons, New York.

۸. علیرضایی، مهدی،۱۳۸۶ «*ستاتیک*» کاردانی به کارشناسی، انتشارات اندیشه عصر فارابی

۹. سلطانی محمدی، م، علیرضایی،م، محمدزاده، ع؛۱۳۸۷، «*تحلیل سازه‌ها*» انتشارات آزاده

# Problem Solving Approach in Structural Analysis

ISBN : 978 - 964 - 301 - 475 - 7

آزاده
انتشارات

تهران ، خیابان انقلاب ، مقابل دانشگاه تهران ( بین خیابان فخر رازی و خیابان دانشگاه) جنب بانک ملت ،
ساختمان ۱۲۰۲ کد پستی : ۱۳۱۴۷ تلفن : ۶۶۴۱۴۳۷۴ ـ ۶۶۴۱۵۷۵۳ فکس : ۶۶۴۱۴۵۱۰