

بسم الله الرحمن الرحيم

درس اول: توان صحیح

قبل از این که قوانین جدید توان و محاسبات اعداد توان دار را برای شما بیان کنیم، بهتر است که مروری بر قوانین و مثال های توان که در سال های گذشته فرا گرفته اید، داشته باشیم و سپس، مطالب جدید را مطرح کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \text{مثال: } 5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m \Rightarrow \text{مثال: } 4^3 \times 7^3 = (4 \times 7)^3 = 28^3$$

$$a^n \times a^n = \begin{cases} a^{n+n} = a^{2n} \\ (a \times a)^n = (a^2)^n \end{cases} \Rightarrow (a^2)^n = a^{2n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn} \Rightarrow \text{مثال: } (2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow \text{مثال: } 3^{11} \div 3^4 = 3^{11-4} = 3^7$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow \text{مثال: } 14^4 \div 2^4 = \left(\frac{14}{2}\right)^4 = 7^4 \text{ یا } 3^{11} \div 5^{11} = \left(\frac{3}{5}\right)^{11}$$

(b ≠ 0)

$$a^m \div a^m = \begin{cases} a^{m-m} = a^0 \\ \left(\frac{a}{a}\right)^m = 1^m = 1 \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1$$

(a ≠ 0)

$$a^{m^n} = a^{(m^n)} \Rightarrow \text{مثال: } a^{5^2} = a^{(5^2)} = a^{25}, 2^{2^2} = 2^{(2^2)} = 2^{16}$$

توان منفی: اگر پایه ی عدد توان داری را معکوس کنیم، علامت توان آن تغییر می کند (یعنی اگر علامت توان مثبت باشد، منفی می شود و

اگر علامت توان منفی باشد، مثبت می شود).

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+2} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{+6} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-6} \quad 2^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$



از این نکته ی ساده به راحتی می توان استفاده کرد و هر عددی با توان منفی را به عددی با توان مثبت تبدیل کنیم.

$$\text{الف) } 2^{-4} \quad \text{ب) } \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \quad \text{ج) } \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} =$$

اعداد روبه رو را با توان مثبت بنویسید.



$$\text{الف) } 3^{-4} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad \text{ب) } \left(\frac{5}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \quad \text{ج) } \left(\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3$$



توان -1 هر عدد غیر صفر، یعنی معکوس آن عدد.



$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \text{مثال: } 3^{-1} = \frac{1}{3} = \text{معکوس } 3 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2} = \text{معکوس } \frac{2}{5}$$

روش دیگر تبدیل یک عدد با توان منفی به عددی با توان مثبت: هر عدد غیر صفر به توان منفی برابر است با، یک بر روی توان مثبت

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

همان عدد، یعنی:

$$(a \neq 0, n \in \mathbb{N}) \quad 5^{-6} = \frac{1}{5^6}, \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$



اگر صورت یا مخرج کسری دارای عددی با توان منفی باشند، با انتقال عدد دارای توان منفی از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت، علامت توان، مثبت می‌شود.

$$\frac{2^{-3}}{3^{-7}} = \frac{2^7}{3^3}$$



$$\frac{2^{-7} \times 5^2}{3^3 \times 5^{-1}} =$$

حاصل عبارت روبه‌رو را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.



$$\left(\frac{2^{-7} \times 5^2}{3^3 \times 5^{-1}} \right) = \frac{5^2 \times 5^1}{3^3 \times 2^7} = \frac{5^{2+1}}{3^3 \times 2^7} = \left(\frac{5}{3} \right)^3 \times \left(\frac{5}{2} \right)^7$$



برای محاسبه‌ی حاصل اعداد توان‌دار با توان منفی یا مقایسه‌ی اعداد با توان منفی، ابتدا باید آن‌ها را مثبت کنیم.



حاصل اعداد توان‌دار زیر را حساب کنید.

الف) $3^{-2} =$

ب) $\left(\frac{2}{5} \right)^{-2} =$



الف) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3^2}$

ب) $\left(\frac{2}{5} \right)^{-2} = \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}$

$3^{-2}, 5^{-2}, 2^{-2}$

اعداد توان‌دار مقابل را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست بنویسید.



$2^{-2} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2^2}$

$3^{-2} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3^2}$

$5^{-2} = \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \frac{1}{5^2}$



$\frac{1}{22} < \frac{1}{27} < \frac{1}{25} \Rightarrow 2^{-2} < 3^{-2} < 5^{-2}$

حاصل عبارات زیر را به صورت عددی با توان مثبت بنویسید.



الف) $6^{-3} \times 6^{-7} =$

ب) $7^{-9} \div 7^{-2} =$

الف) $6^{-3} \times 6^{-7} = 6^{-3+(-7)} = 6^{-10} = \left(\frac{1}{6} \right)^{10}$



ب) $7^{-9} \div 7^{-2} = 7^{-9-(-2)} = 7^{-9+2} = 7^{-7} = \left(\frac{1}{7} \right)^7$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

$\left(\frac{1}{7} \right)^{-2} = 7^2 = 49$

$4^{-2} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}$

اگر توان عدد منفی باشد، نمی‌توان گفت که لزوماً حاصل عدد توان‌دار، منفی می‌شود. یعنی توان منفی نشانه‌ی منفی بودن عدد توان‌دار نیست.

$-2^{-2} = -\left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4}$

$-5^{-4} = -\left(\frac{1}{5} \right)^4 = -\frac{1}{625}$

به مثال‌های روبه‌رو دقت کنید.

به مثال‌های زیر دقت کنید.

$(-8)^{-2} = \left(-\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1}{64}$

پایه منفی و توان هم منفی است، اما حاصل مثبت شده است. چون پایه داخل پرانتز و توان عدد زوج است.

$\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{81}{16}$

چند نکته‌ی مفید برای محاسبه با عددهای دارای توان منفی:

$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \Rightarrow \boxed{0.2 = 5^{-1}}$

$0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 25^{-1} = (5^2)^{-1} = 5^{-2} \Rightarrow \boxed{0.04 = 5^{-2}}$

$0.008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = 125^{-1} = (5^3)^{-1} = 5^{-3} \Rightarrow \boxed{0.008 = 5^{-3}}$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\boxed{0/0016 = 5^{-4}}$$


$$0/5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{0/5 = 2^{-1}}$$

$$0/25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2} \Rightarrow \boxed{0/25 = 2^{-2}}$$

$$0/125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3} \Rightarrow \boxed{0/125 = 2^{-3}}$$

$$\boxed{0/0625 = 2^{-4} = 4^{-2}}$$


به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که:

حاصل عبارتهای زیر را به صورت عددی با توان مثبت بنویسید. 

الف) $(0/008)^{-5} \times 5^y =$

ب) $\frac{2^{11}}{(0/25)^{-2}} =$

الف) $(0/008)^{-5} \times 5^y = (5^{-3})^{-5} \times 5^y = 5^{15} \times 5^y = 5^{22}$

ب) $\frac{2^{11}}{(0/25)^{-2}} = \frac{2^{11}}{(2^{-2})^{-2}} = \frac{2^{11}}{2^4} = 2^5$ 

درس دوم: نماد علمی

سال نوری یکی از واحدهای اندازه‌گیری مسافت است که در نجوم برای بیان فاصله‌ی بین ستارگان و سیارات استفاده می‌شود. یک سال نوری، مسافتی است که نور در مدت یک سال با سرعت ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه می‌پیماید. می‌خواهیم بدانیم که یک سال نوری چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که هر سال به طور معمول ۳۶۵ روز، هر روز ۲۴ ساعت و هر ساعت ۳۶۰۰ ثانیه است، پس می‌توان نوشت:

$$\text{کیلومتر} = 300000 \times 3600 \times 24 \times 365 = 946080000000$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نوشتن اعداد بسیار بزرگ یا اعداد بسیار کوچک با رقم، کار ساده‌ای نیست و امکان خطا در محاسبه را افزایش می‌دهد؛ به همین دلیل برای سهولت در محاسبه و نوشتن این‌گونه اعداد، از نماد علمی اعداد استفاده می‌کنیم. به طور کلی نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^m$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیح است.

مسافتی که نور در یک سال بر حسب کیلومتر می‌پیماید به صورت نماد علمی به این شکل نوشته می‌شود: $946080000000 = \frac{9}{4608} \times 10^{12}$ نماد علمی

در جدول زیر تعدادی عدد را با نماد علمی نمایش داده‌ایم.

اعداد بین صفر و یک

$$0/17 = 1/7 \times 10^{-1} \leftarrow \text{نماد علمی}$$

$$0/1394 = 1/394 \times 10^{-1}$$

$$0/00000034 = 3/4 \times 10^{-7}$$

$$0/02015 = 2/015 \times 10^{-2}$$

$$0/00031415 = 3/1415 \times 10^{-4}$$

اعداد بزرگ‌تر از 10^0

$$23 = 2/3 \times 10^1 \leftarrow \text{نماد علمی}$$

$$1394 = 1/394 \times 10^3$$

$$78000000 = 7/8 \times 10^7$$

$$142857 = 1/42857 \times 10^5$$

$$271828000 = 2/71828 \times 10^8$$


همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌کنید در نماد علمی اعداد بزرگ‌تر از 10^0 ، توان 10^0 ، عدد مثبت و در نماد علمی اعداد بین صفر و یک، توان 10^0 ، عدد منفی است.


$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0/1$$

$$10^{-2} = 0/01$$

$$10^{-3} = 0/001$$

$$10^{-n} = 0/ \underbrace{00000001}_{(n-1) \text{ تا صفر}}$$

به اعداد روبه‌رو دقت کنید. 

به حاصل ضرب‌ها و تقسیم‌های زیر و تغییر مکان‌های اعشار دقت کنید. 

$$20/16 \times 10 = 201/6$$

$$20/16 \div 10 = 2/016$$

$$31415/9265 \times 1000 = 31415926/5$$

$$31415/9265 \div 1000 = 31/4159265$$

$$756 \times 10000 = 7560000$$

$$756 \div 10000 = 0/0756$$

$$3/576 \times 10^6 = 3576000$$

$$3/576 \div 10^6 = 0/000003576$$

$$139/5 \times 10^5 = 13950000$$

$$139/5 \div 10^6 = 0/0001395$$

$$a \div 10^n = a \times 10^{-n}$$

$$3/57 \div 10^2 = 3/57 \times 10^{-2} = 0/0357$$



درس سوم: ریشه گیری

می دانیم که مجذور یا مربع عددهای $+2$ و -2 برابر عدد ۴ است. عددهای ۲ و -2 را ریشه های دوم عدد ۴ می گوئیم. به طور کلی \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد حقیقی مثبت a هستند.

اعداد منفی ریشه ی دوم ندارند و عدد صفر فقط یک ریشه ی دوم دارد که همان صفر است.

$$\sqrt{0} = 0$$

مکعب (توان سوم) عدد ۳ برابر است با $27 = 3^3$. عدد ۳ را ریشه ی سوم عدد ۲۷ می گوئیم و می نویسیم:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

مکعب عدد -4 برابر است با $-64 = (-4)^3$ ، عدد -4 را ریشه ی سوم عدد -64 می گوئیم و می نویسیم:

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

هر عدد حقیقی مانند a ، فقط یک ریشه ی سوم دارد که آن را با $\sqrt[3]{a}$ نشان می دهیم.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

$$6^3 = 216 \Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$$



ضرب و تقسیم رادیکالها: برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5} \quad , \quad \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$



$$\sqrt{4 \times 49} = \sqrt{4} \times \sqrt{49} \quad , \quad \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}$$



ساده کردن رادیکالها:

به مثال های زیر دقت کنید.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

عدد $5\sqrt{2}$ ، ساده شده ی $\sqrt{50}$ و عدد $2\sqrt[3]{2}$ ، ساده شده ی $\sqrt[3]{16}$ است.


حجم مکعبی به ضلع a ، برابر است با a^3 . بنابراین اندازه ی ضلع مکعب، برابر است با ریشه ی سوم عدد حجم مکعب.



حجم مکعبی 64 cm^3 است. اندازه‌ی ضلع آن چند سانتی‌متر است؟ 

$$\sqrt[3]{64} = 4 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\frac{8^2 + 12^2}{10^2 + 15^2}} = \frac{8+12}{10+15}$$

درستی تساوی مقابل را نشان دهید. 

$$\sqrt{\frac{8^2 + 12^2}{10^2 + 15^2}} = \sqrt{\frac{4^2(2^2 + 3^2)}{5^2(2^2 + 3^2)}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{20}{25} = \frac{8+12}{10+15}$$



درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها


در درس گذشته ساده‌کردن اعداد رادیکالی را فراگرفتید. اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده‌کردن کاملاً یکسان باشند، آن رادیکال‌ها را رادیکال‌های متشابه می‌گوییم. رادیکال‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد.

$$3\sqrt{5}, \frac{7}{4}\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

عددهای رادیکالی مقابل با هم متشابه‌اند.

متشابه‌بودن عبارت‌های رادیکالی به ضریب عددی آن‌ها بستگی ندارد.

عددهای $2\sqrt{7}$ و $2\sqrt[3]{7}$ متشابه نیستند چون قسمت رادیکالی آن‌ها یکسان نیست.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید. 

الف) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} =$

ب) $6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} =$

ج) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} =$

د) $8\sqrt{2} - \sqrt{18} =$


الف) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2+4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$



ب) $6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (6-2)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$


ج) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} = 5\sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

د) $8\sqrt{2} - \sqrt{18} = 8\sqrt{2} - \sqrt{9 \times 2} = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید. 

الف) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} =$

ب) $9\sqrt{27} + 7\sqrt{12} =$


ابتدا باید رادیکال‌ها را ساده کنیم و سپس جمع و تفریق را انجام دهیم. 

الف) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} = 3\sqrt{4 \times 2} - 5\sqrt{9 \times 2} = 3 \times 2\sqrt{2} - 5 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$

ب) $9\sqrt{27} + 7\sqrt{12} = 9\sqrt{9 \times 3} + 7\sqrt{4 \times 3} = 9 \times 3\sqrt{3} + 7 \times 2\sqrt{3} = 27\sqrt{3} + 14\sqrt{3} = 41\sqrt{3}$


گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات لازم است تا در محاسبات کسری، اگر مخرج کسرها شامل رادیکال یا عبارت رادیکالی باشند، مخرج را از حالت رادیکالی خارج کنیم. به این کار گویا کردن مخرج می‌گویند.

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. 

الف) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} =$


ب) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم. 

الف) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

ب) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$

صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم.

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. (دقت کنید!) 

الف) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}} =$

ب) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2}} =$

الف) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{6\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{3} = 2\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{6}$



همان‌طور که مشاهده کردید، چون در این مثال با ریشه‌ی سوم ($\sqrt[3]{\quad}$) سروکار داشتیم، باید سعی کنیم توان عدد زیر رادیکال ۳ بشود تا بتوانیم رادیکال را حذف کنیم.

ب) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{6}}{2} = \sqrt[3]{6}$

می‌دانیم که به طور کلی در محاسبات ریاضی، هر چه اعداد کوچک‌تر باشند، کار محاسبه ساده‌تر است به همین دلیل در گویا کردن مخرج

کسرها، اگر مخرج کسری دارای رادیکال قابل ساده شدن باشد، بهتر است که ابتدا رادیکال را ساده کنیم و سپس مخرج را گویا کنیم. برای درک

بهتر این موضوع به مثال زیر دقت کنید.

کسر $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{32}}$ را گویا کنید.

روش اول:

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \times \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{6\sqrt{96}}{\sqrt{32^2}} = \frac{6\sqrt{16 \times 6}}{32} = \frac{6 \times 4 \sqrt{6}}{32} = \frac{6 \sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{32}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{16 \times 2}} = \frac{6\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

روش دوم: (روش بهتر) ابتدا $\sqrt{32}$ را ساده می‌کنیم:

www.daktshop.ir

دکتاب