فصل پنجم- آنالیز تابع توصیف

آنالیز حوزه فرکانسی را نمی توان مستقیماً به سیستم های غیر خطی اعمال کرد چرا که توابع پاسخ فرکانسی برای سیستمهای غیرخطی، غیرقابل تعریف هستند.

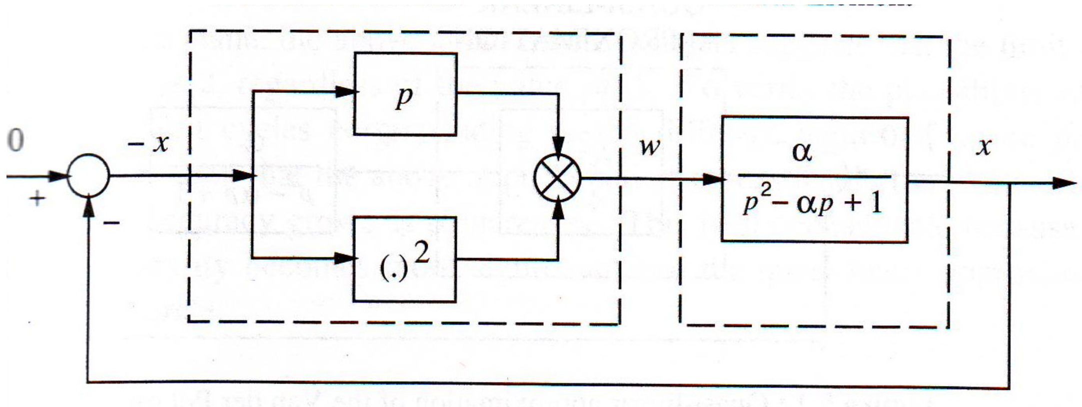
جهت بعضی از سیستم های غیرخطی به منظور پیش بینی تقریبی رفتار سیستم، نمونه خاصی از روش پاسخ فرکانسی بنام تابع توصیف بکار گرفته می شود.

این روش نسبت به سایر روش های تحلیل سیستم های غیرخطی نسبتاً یک روش سریع بوده و با آنکه جواب های آن تقریبی است، اما بخوبی و بسادگی در آنالیز رفتار سیستم به کار می آید.

جهت ارائه الگوریتم تعیین تابع توصیف نخست یک مثال ساده را بررسی می کنیم.

سیستمی غیرخطی با ضابطه $\ddot{x}+\alpha(x^2-1)\dot{x}+x=0$ را درنظر بگیرید. قبلاً این سیستم در بحث پایداری لیاپانوف و همچنین آنالیز صفحه فاز مورد بررسی قرار گرفته بود. در همین مثال طی یک روش خاص سیکل حدی نیز مورد مطالعه قرار می گیرد..

جهت بررسی سیکل حدی در این سیستم بدین صورت بحث را دنبال می کنیم. نخست بلوک دیاگرام سیستم را به فرم زیر درنظر می گیریم.



فرض کنیم که در سیستم یک سیکل حدی موجود بوده و سیگنال خروجی در این وضعیت به شکل $x(t)=A\sin\omega t$ باشد.

بنابراین سیگنال خروجی بلوک غیرخطی عبارتست از

$$w=-x^2\dot{x}=-A^2\sin^2(\omega t)A\,\omega\cos(\omega t)$$

دقت داشته باشید که معادله دیفرانسیل اولیه به فرم زیر نوشته شده تا آنکه بتوانیم قسمتهای خطی و غیرخطی آنرا جدا کنیم

$$\ddot{x} + \alpha x^2 \dot{x} - \alpha \dot{x} + x = 0$$

که مساوی است با

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - (-\alpha x^2 \dot{x}) = 0$$

مجدداً به رابطه w برمی گردیم

$$w = -\frac{A^3\omega}{2}\big(1 - \cos(2\omega t)\big)\cos(\omega t) = -\frac{A^3\omega}{4}\big(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)\big)$$

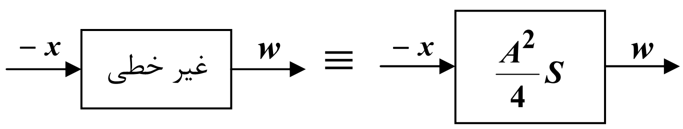
میتوان عملاً سیگنال w را به فرم زیر تقریب زد. (با صرفنظر کردن از هارمونیک سوم)

$$w \approx -\frac{A^3}{4}\omega\cos(\omega t)$$

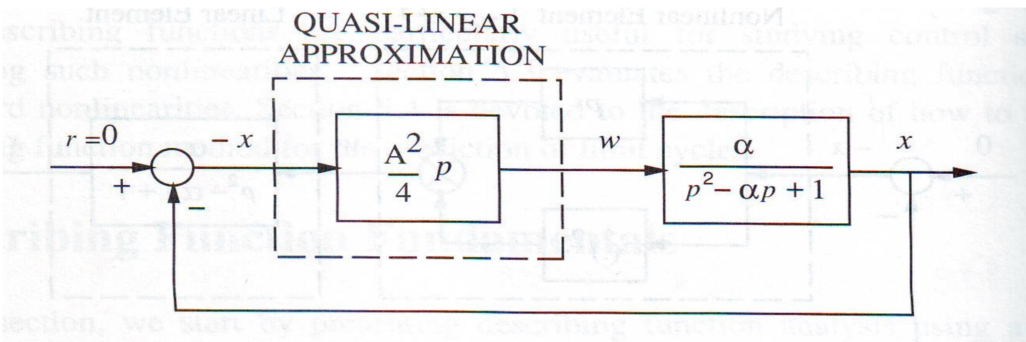
و یا به عبارتی میتوان نوشت

$$w = -\frac{A^3}{4}\frac{d}{dt}(-A\sin(\omega t))$$

باتوجه به اینکه ورودی بلوک غیرخطی $-x$ و خروجی آن w است پس میتوان گفت که فرم تقریب زده شده بلوک غیرخطی به صورت زیر است.



باتوجه به تقریب بکار رفته اصطلاحاً نمایش معادل فوق را نمایش نیمه خطی (quasi-linear) بلوک غیرخطی می گوئیم که در مجموع در ساختار بلوک دیاگرامی زیر خود را نشان می دهد.



نکته مهم: تابع تبدیل بلوک نیمه خطی به دامنه سیگنال ورودی وابسته است. (دقیقاً برخلاف سیستم های خطی که چنین وابستگی وجود ندارد)

رابطه بین w و x را در حوزه فرکانس ω مورد بررسی قرار می دهیم.

$$w = N(A,\omega)(-x)$$

که

$$N(A,\omega) = \frac{A^2}{4}(j\omega)$$

با توجه به اینکه از ابتدا فرض کرده بودیم

$$x = A\sin(\omega t)$$

است. پس باتوجه به بلوک دیاگرام خطی شده سیستم داریم.

$$G(j\omega)N(A,\omega)(-x) = x$$

که $G(j\omega)$ تابع تبدیل بلوک خطی سیستم است.

از رابطه فوق میتوان نوشت

$$\big(1 + G(j\omega)N(A,\omega)\big)x = 0$$

$$\rightarrow\ 1 + G(j\omega)N(A,\omega) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{A^2(j\omega)}{4}\frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

با حل معادله فوق بدست خواهیم آورد.

(فرکانس و اندازه ای که به ازاء آن دیاگرام نایکوئیست از نقطه ۱- عبور می کند) $\omega = 1$ و $A = 2$

از طرف دیگر با استناد به تابع تبدیل حلقه بسته سیستم معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$1 + \frac{A^2 S}{4} \times \frac{\alpha}{S^2 - \alpha S + 1}$$

که جوابهای این معادله (مقادیر ویژه سیستم) خواهند بود.

$$S_{1,2} = -\frac{1}{8}\alpha(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\alpha^2(A^2 - 4)^2 - 1}$$

حال می خواهیم با استناد به مقدار A بدست آمده در پاسخ فرکانسی $(A = 2)$قطبهای سیستم را بیابیم. اگر $A = 2$ باشد

$$S_{1,2} = \pm j$$

قطب روی محور $j\omega$ معرف حضور یک سیکل حدی است که دامنهٔ آن ۲ و فرکانس آن ۱ می باشد

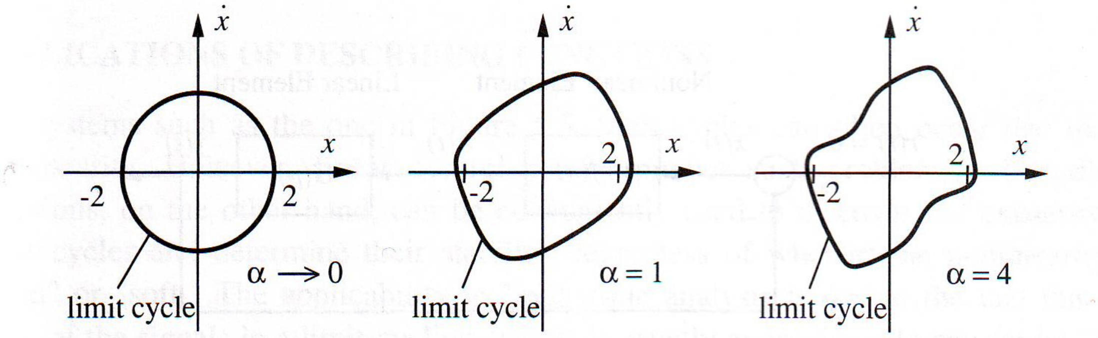
نکته: دامنه و فرکانس سیکل حدی به α هیچ ارتباطی ندارد. البته این مسئله فقط به خاطر تقریب در فرم غیرخطی بلوک می باشد.

اگر آنالیز صفحه فازی را برای سیستم تقریب زده شده و سیستم واقعی ترسیم کنیم به نتیجه جالبی می رسیم و آن اینکه:

در فرم خطی شده، سیکل حدی دایره ای به شعاع ۲ خواهد بود (بدون توجه به α)

اما اگر سیستم را در فرم کاملاً غیرخطی آنالیز کنیم ملاحظه می شود که:

وقتی α را خیلی کوچک در نظر می گیریم، سیکل حدی موجود به سمت دایره میل می کند (شکل a) و وقتی α برابر یک انتخاب می گردد، شکل ظاهری سیکل حدی به دایره نسبتاً نزدیک است، (شکلb). و در نهایت اگر $\alpha = 4$ انتخاب شود، شکل سیکل حدی با دایره تفاوت زیادی دارد، و این روند کاملاً منطقی است چرا که با رشد α عامل غیرخطی سیستم نمود بیشتری خواهد یافت و لذا تقریب نیمه خطی به کار رفته از دقت کمتری برخوردار خواهد بود. (به شکل های زیر دقت کنید.)



پایداری سیکل حدی نیز را میتوان بسادگی مطالعه کرد.

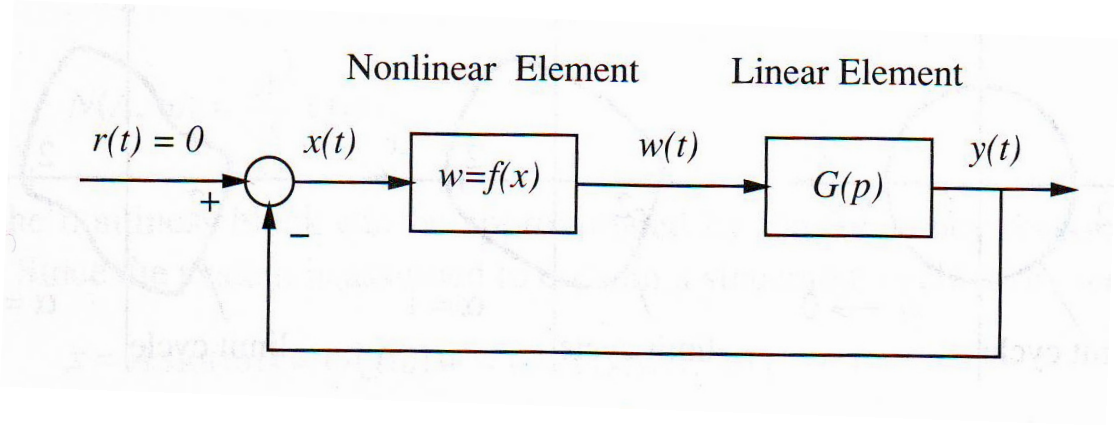
مثلاً اگر دامنه سیکل حدی را بزرگتر از ۲ اختیار کنیم $(A > 2)$ آنگاه مقادیر ویژه سیستم در سمت راست صفحه مختلط قرار خواهند گرفت و مسیرهای حالت وضعیت واگرا خواهند داشت و در نهایت به روی سیکل حدی قرار می گیرند و این یعنی پایداری سیکل حدی با دامنه ۲.

باید دقت داشت که در آنالیز تقریبی فوق، مرحله اصلی کار جایگزینی بلوک غیرخطی سیستم با بلوک نیمه خطی $\frac{A^2}{4}S$ بود. دامنه و فرکانس سیکل حدی نیز توسط رابطه $1+G(j\omega)N(A,\omega)=0$ بدست می آید.

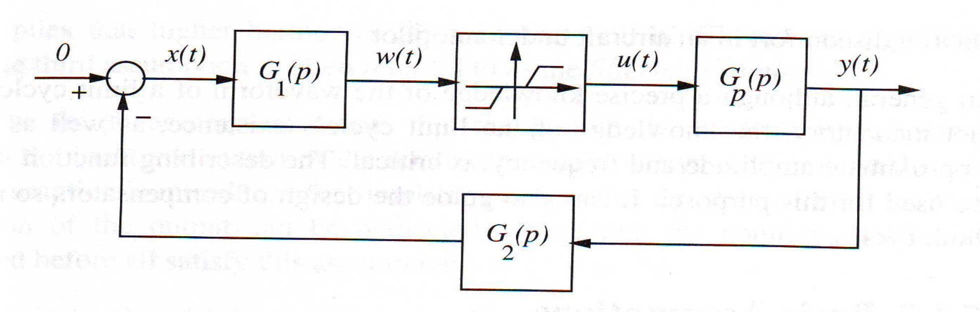
$N(A,\omega)$ همان بلوک نیمه خطی سیستم است که از این به بعد آنرا تابع توصیف (describing function) عامل غیرخطی سیستم می نامیم.

<u>سؤال: برای چه نوع از سیستمهای غیرخطی می توان توابع توصیف مشخص کرد، آیا این سیستم غیرخطی باید دارای ویژگی خاصی باشد؟</u>

<u>پاسخ</u>: به طور کامل هر سیستمی که بتوان ساختار آن را مطابق بلوک دیاگرام زیر درآورد قابلیت تعریف تابع توصیف را برای عامل غیرخطی دارد.



بلوک دیاگرام سیستم های صنعتی همراه با عامل اشباع



این بلوک دیاگرام را میتوان بسادگی به فرم شکل قبل درآورد.

کاربردهای توابع توصیف

۱- پیش بینی سیکل حدی

نمایش های خطی از یک سیستم واقعی که دارای عوامل غیرخطی هستند، هرگز نمی توانند سیکل های حدی را پیشگویی کنند، اما توابع توصیف معادل با عامل غیرخطی بسادگی این قابلیت دارند.

۲- تعیین پایداری سیستم غیرخطی

صرفنظر از سخت بودن یا نرم بودن عامل غیرخطی، تابع توصیف میتواند در پایداری یا ناپایداری سیکل حدی تعیین کننده باشد.

در ادامه بحث، به بررسی مقدمات لازم جهت ارائه روش کلاسیک تعیین تابع توصیف خواهیم پرداخت.

نخست بررسی فرضیات لازم برای تعریف یک تابع توصیف.

فرضیات اساسی

جهت ارائه تابع توصیف برای عامل غیرخطی، سیستم باید ۴ شرط زیر را برآورده سازد .

۱- در بلوک دیاگرام سیستم تنها یک عامل غیرخطی موجود باشد.

۲- عامل غیرخطی باید نامتغیر با زمان باشد.

۳- نظر به فرم سینوسی سیگنال ورودی $x = \sin(\omega t)$، تنها مؤلفه اصلی سیگنال خروجی عامل غیرخطی یعنی $w_1(t)$ مورد توجه قرار گیرد.

۴- عامل غیرخطی یک تابع فرد باشد.

فرض سوم جزء فرضیات اصلی در تعریف تابع توصیف است. این فرض بیان می دارد که در حقیقت تابع تبدیل $G(S)$ عاملِ خطی، همانند یک فیلتر پایین گذر عمل کرده و تنها اجازه عبور هارمونیک اول سیگنال بدست آمده در خروجی عامل غیر خطی را می دهد. که البته اگر این فرض دور از واقعیت باشد تقریب نیمه خطی بوجود آمده نمی تواند نتایج صحیحی را در تشخیص سیکل های حدی احتمالی بدست دهد.

تعاریف اساسی در تابع توصیف

در این بخش می خواهیم روش عمومی تعیین تابع توصیف را شرح دهیم .

روش کار بدین قرار است که مطابق شکل زیر یک سیگنال سینوسی با دامنه A و فرکانس ω به عامل غیر خطی اعمال می گردد. خروجی المان غیر خطی اغلب یک سیگنال پریودیک و عموما یک سیگنال غیر سینوسی است.

با به کار بردن سری فوریه خواهیم داشت.

$$w(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n Cos(n\omega t)+b_n Sin(n\omega t)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)d(\omega t)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)Cos(n\omega t)d(\omega t)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)Sin(n\omega t)d(\omega t)$$

با توجه به فرض فرد بودن تابع $w(t)$، a_0 مساوی صفر خواهد شد. و با توجه به اینکه فقط هارمونیک اول مورد توجه خواهد بود بنابراین داریم. $w(t)\approx w_1(t)=a_1 Cos(\omega t)+b_1 Sin(\omega t)=M\ Sin(\omega t+\varphi)$

که M و φ تابعی از ω و A بوده و به صورت زیر بیان می شوند.

$$M(A,\omega)=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\qquad,\qquad \varphi(A,\omega)=tg^{-1}(a_1/b_1)$$

با توجه به توضیحات فوق عامل خطی که جایگزین عامل غیر خطی خواهد شد، با ضابطه زیر که برابر نسبت خروجی سیستم به ورودی آن تعریف می شود، معادل خواهد شد.

$$N(A,\omega)=\frac{Me^{j(\omega t+\varphi)}}{Ae^{j\omega t}}=\frac{M}{A}e^{j\varphi}=\frac{1}{A}(b_1+ja_1)$$

$N(A,\omega)$ همان تابع توصیف جایگزین عامل غیر خطی است.

در ظاهر $N(A,\omega)$ ، همچون پاسخ فر کانسیِ یک عامل خطی عمل می کند. چرا که در تعریف پاسخ فرکانسی نیز دامنه خروجی سیستم به ورودی آن تقسیم می شد.

با این تفاوت که در سیستم خطی، پاسخ فرکانسی تابعی از دامنه ورودی نبوده ، اما همانگونه که ملاحظه می گردد پاسخ فرکانسی تابع توصیف، به دامنه A وابسته است.

معمولا تابع توصیف به دامنه و فرکانس سیگنال ورودی وابسته بوده که البته در بعضی حالات استثناء نیز وجود دارد ، مثلا به طور کلی می توان گفت که اگر عامل غیر خطی تک مقداره (single-valued) باشد، آنگاه $N(A,\omega)$ مستقل از فرکانس است.

از طرفی به خاطر آنکه سیگنال خروجی عامل غیر خطی به عنوان یک سیگنال فرد فرض شده بوده است پس $a_1=0$ گردیده و به بیانی دیگر $N(A,\omega)$ یک عبارت کاملا حقیقی خواهد بود.

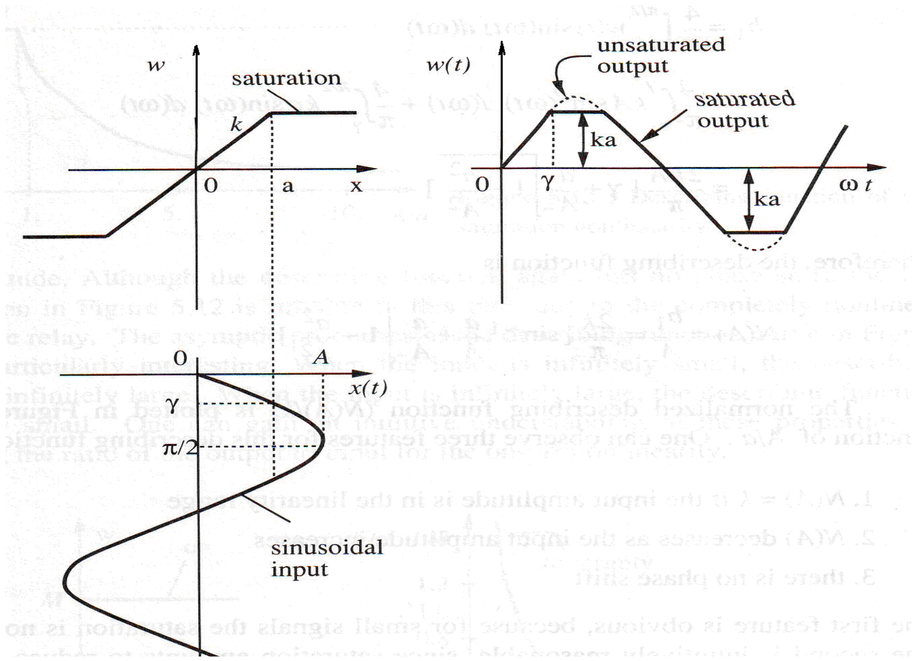
نکته : تابع توصیف برای المان های غیر خطی که شامل دینامیک بوده (با یک معادله دیفرانشیل غیر خطی بیان می گردد) نیز کاملا قابل اجرا است.

تابع توصیف عوامل غیر خطی مشترک در سیستمها

در ادامه بحث به نحوه محاسبه تابع توصیف عوامل غیر خطی خواهیم پرداخت.

تابع توصیف معرف عامل اشباع

رابطه بین ورودی و خروجی عامل اشباع در شکل های زیر ترسیم شده است.



در شکل فوق ، a و K محدوده قسمت خطی عامل اشباع را نشان می دهند. با توجه به اینکه عامل اشباع بعنوان یک تابع تک مقداره بیان می شود. پس طبق بحث های قبل، انتظار می رود که تابع توصیفِ عامل اشباع ، یک تابع حقیقی از دامنه ورودی گردد.

برای عامل اشباع می توان سیگنال $w(t)$ را با ضابطه زیر تعریف کرد.

$$w(t)=\begin{cases} KASin(\omega t) & 0<\omega t<\gamma \\ Ka & \gamma<\omega t<\pi/2 \end{cases}$$

که $\gamma = Sin^{-1}(a/A)$

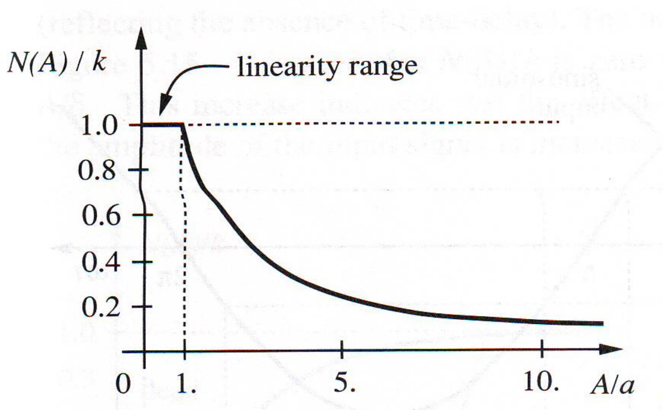
چون $w(t)$ تابع فرد است پس در بسط فوریه آن ضریب a_1 مساوی صفر خواهد شد و ضریب b_1 برابر با

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} w(t)Sin(\omega t)d(\omega t)$$
$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\gamma} KASin^2(\omega t)d(\omega t)+\frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi/2} KaSin(\omega t)d(\omega t)=\frac{2KA}{\pi}\left[\gamma+\frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right]$$

بنابراین تابع توصیف N(A) عبارت خواهد بود از

$$N(A)=\frac{b_1}{A}=\frac{2K}{\pi}\left[Sin^{-1}\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right]$$

اگر منحنی تغییرات نسبت $\frac{N(A)}{K}$ را که اصطلاحا به آن تابع توصیف نرمالیزه شده می گویند، بر حسب $\frac{A}{a}$ رسم کنیم شکل زیر حاصل خواهد شد.



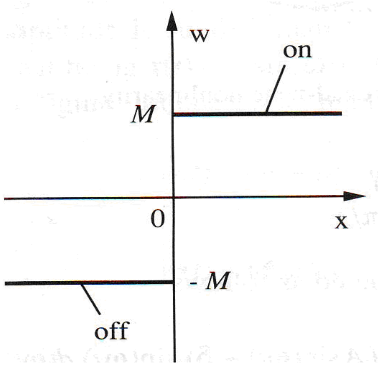
و نتایج زیر بدست می آید.

۱) اگر دامنه ورودی در محدوده خطیِ عامل اشباع باشد آنگاه N(A)=K خواهد بود.

۲) اگر دامنه ورودی بیش از محدوده خطی عامل اشباع باشد آنگاه اندازه N(A) کاهش خواهد یافت.

۳) چون بین ورودی و خروجی N(A) اختلاف فازی وجود ندارد، بنابراین عامل اشباع هیچگونه تاخیری بین ورودی و خروجی ایجاد نمی کند.

تابع توصیف معرف عامل قطع و وصل (on/off)



منحنی عملکرد این عامل در شکل مقابل ترسیم شده است.

این عامل شباهت های ویژه ای با عامل اشباع دارد چرا که در عامل اشباع اگر $a \to 0$ و $K \to \infty$ میل کند آنگاه دقیقا مشخصه عامل قطع و وصل بدست می اید.

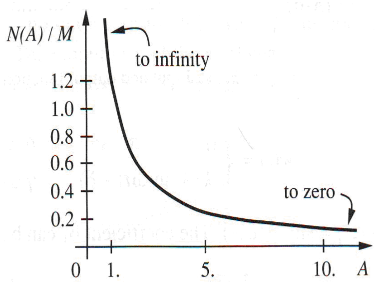
بنابراین b_1 برابر خواهد شد با :

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi/2} MSin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}M$$

بنابراین تابع توصیف عبارت خواهد بود از :

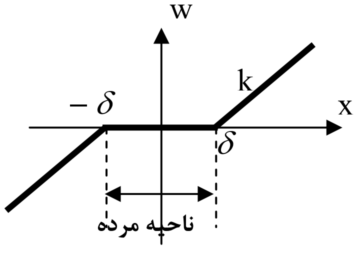
$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

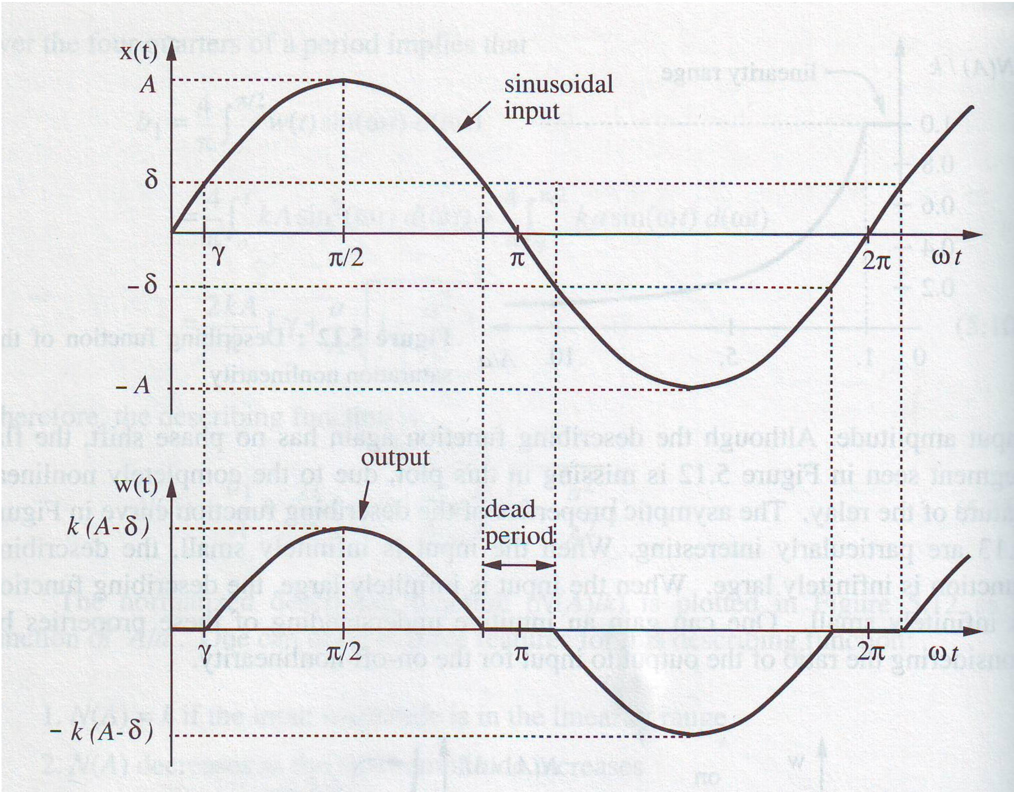
نمایش تابع توصیف نرمالیزه شده $\frac{N(A)}{M}$ در شکل مقابل بر حسب دامنه ورودی ترسیم شده است.



تابع توصیف معرف عامل ناحیه مرده (dead-Zone)

منحنی مشخصه این عامل در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ یک سیستم با عامل ناحیه مرده ، به ورودی سینوسی $x(t) = ASin\omega t$ و با فرض انکه $A \geq \delta$ باشد در شکل زیر نشان داده شده است.





و سیگنال w(t) با ضابطه زیر قابل تعریف است.

$$w(t)=\begin{cases}0 & 0\le \omega t<\gamma\\ K(ASin(\omega t)-\delta) & \gamma<\omega t\le \pi/2\end{cases}$$

که $\gamma = Sin^{-1}(\delta/A)$. کاملا مشخص است که به خاطر فرد بـودن w(t) ، ضـریب a_1 در بـسط فوریـه صفر و ضریب b_1 عبارتست از :

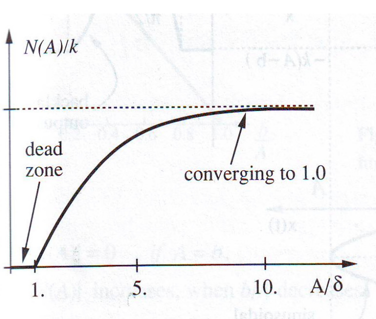
$$b_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}w(t)Sin(\omega t)d(\omega t)=\frac{4}{\pi}\int_\gamma^{\pi/2}K(ASin(\omega t)-\delta)Sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$=\frac{2KA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-Sin^{-1}\frac{\delta}{A}-\frac{\delta}{A}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{A^2}}\right]$$

و در نتیجه تابع توصیف برابر است با :

$$N(A)=\frac{2K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-Sin^{-1}\frac{\delta}{A}-\frac{\delta}{A}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{A^2}}\right]$$

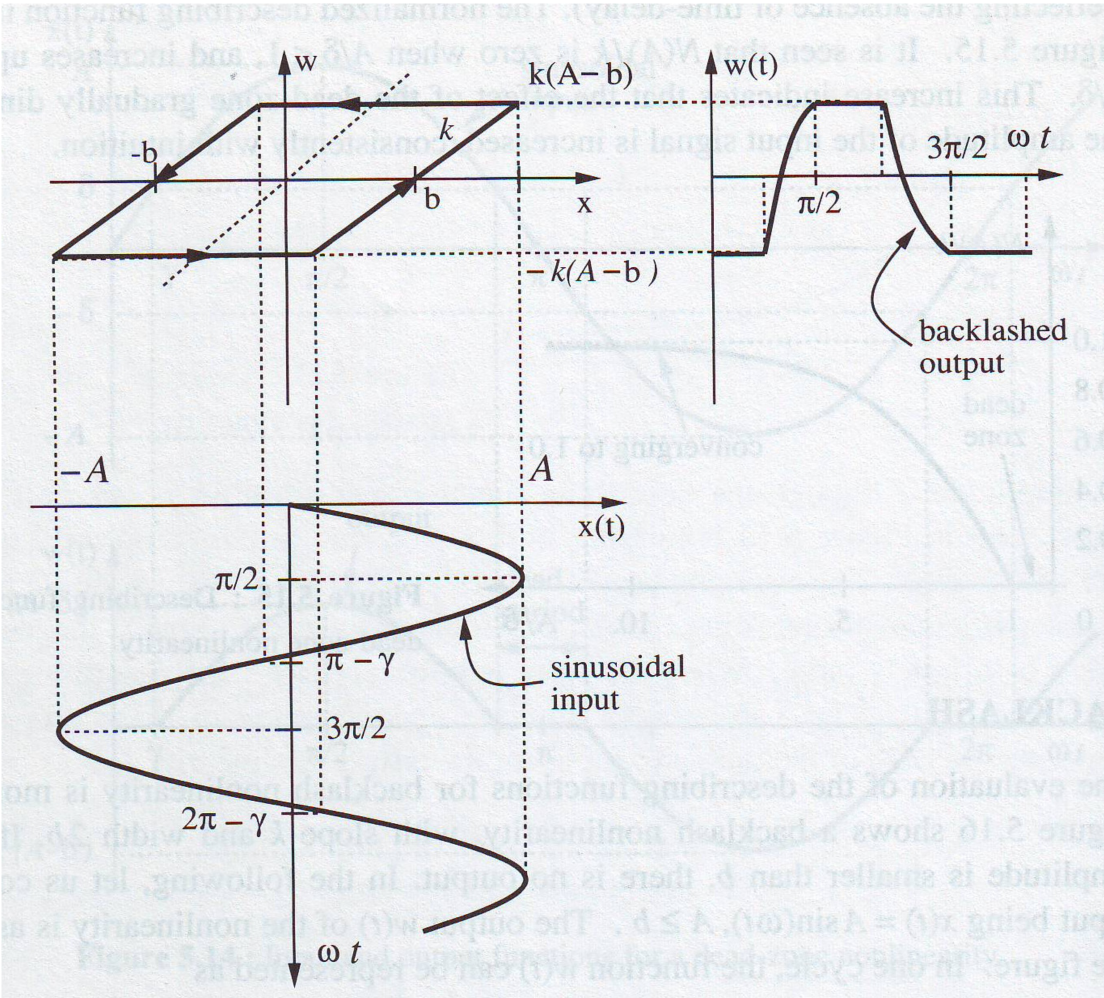
در اینجا نیز ملاحظه می کنیم که چون N(A) یک تـابع حقیقـی است پس هیچگونه انتقـال فـازی بـین ورودی و خروجـی نـداریم. منحنی تغییرات تابع توصیف نرمایزه شده $(N(A)/K)$ در شـکل مقابل ترسیم شده است.



با توجه به منحنی کاملا روشن است که افزایش مقدار تابع توصیف بازاء افزایش دامنـه ورودی معـرف آنـست که اثر عامل ناحیه مرده با افزایش دامنه ورودی کم رنگ می شود.

تابع توصیف معرف عامل (backlash)

در شکل زیر مشخصه عامل backlash و پاسخ آن بازاء ورودی سینوسی ترسیم شده است.



برای یک سیکل، می توان سیگنال $w(t)$ را به فرم زیر نمایش داد.

$$w(t) = (A-b)K \qquad \frac{\pi}{2} < \omega t \le \pi - \gamma$$

$$w(t) = (A\sin(\omega t) + b)K \qquad \pi - \gamma < \omega t \le \frac{3\pi}{2}$$

$$w(t) = -(A-b)K \qquad \frac{3\pi}{2} < \omega t \le 2\pi - \gamma$$

$$w(t) = (A\sin(\omega t) - b)K \qquad 2\pi - \gamma < \omega t \le \frac{5\pi}{2}$$

که $\gamma = Sin^{-1}(1-2b/A)$. بر خلاف وضعیت های قبل، در اینجا سیگنال $w(t)$ نه فرد است و نه زوج . بنابراین ضرائب a_1 و b_1 هر دو مخالف صفرند. با حل انتگرال های مربوطه این ضرائب برابر خواهند شد با:

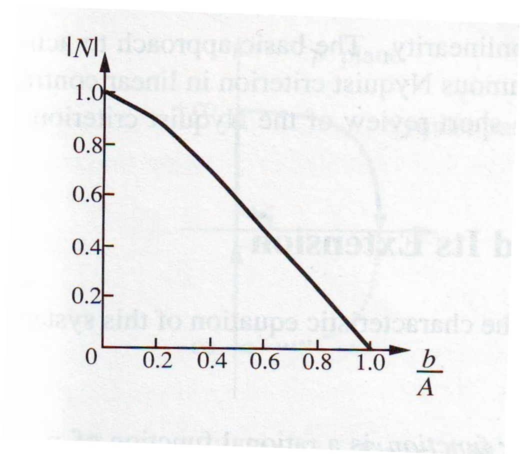
$$a_1 = \frac{4Kb}{\pi}\left(\frac{b}{A}-1\right)$$

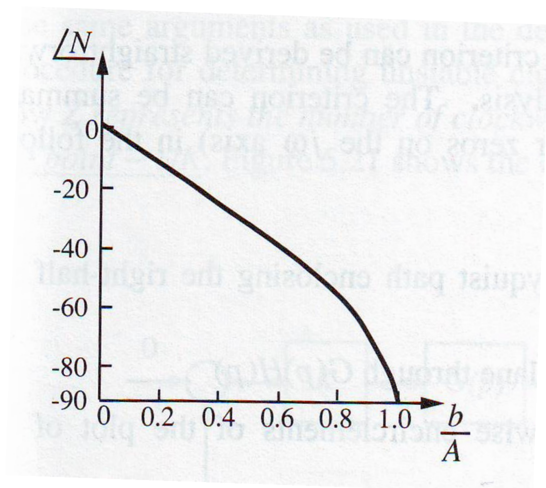
$$b_1 = \frac{KA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - Sin^{-1}\left(\frac{2b}{A}-1\right) - \left(\frac{2b}{A}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{2b}{A}-1\right)^2}\right]$$

بنابراین تابع توصیف عامل backlash عبارت خواهد بود از:

$$|N(A)| = \frac{1}{A}\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad , \qquad \angle N(A) = \tan^{-1}(a_1/b_1)$$

منحنی اندازه و فاز تابع توصیف در شکل های زیر آورده شده است.





موارد مهم بدست آمده از منحنی اندازه عبارتند از :

۱) اگر A=b باشد آنگاه $|N(A)=0|$

۲) با کاهش b/A آنگاه $|N(A)|$ افزایش خواهد یافت.

۳) اگر $b/A \to 0$ میل کند آنگاه $|N(A)| \to 1$ میل خواهد کرد.

در رابطه با منحنی فاز نیز می توان این نتایج را استخراج کرد که :

۱) حداکثر تاخیر فاز بوجود آمده برابر است با ۹۰ درجه

۲) تاخیر فاز بوجود آمده ، ناشی از تاخیر زمانی موجود در عامل backlash است (فاصله b پدید آورنده تاخیر است) که در سایر عوامل غیر خطی قبلی وجود نداشت.

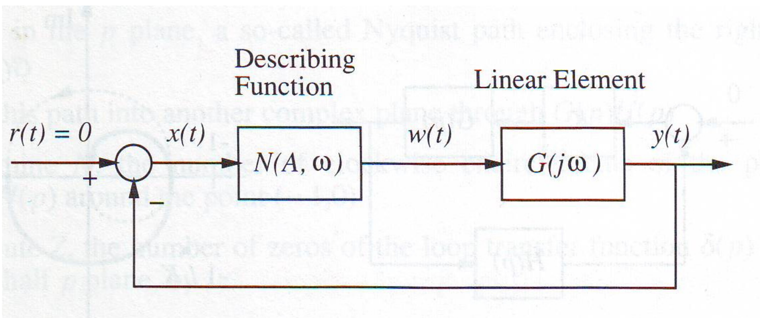
البته باید توجه داشت که مقادیر بزرگتر b منجر به تاخیر فازهای بزرگتر خواهد شد که می تواند ناپایداری سیستم را باعث شود.

آنالیز توابع توصیف برای سیستمهای غیر خطی

در بخش قبل آموختیم که چگونه می توان برای یک سیستم غیر خطیِ همراه با یک جزء غیر خطی، تابع توصیف را استخراج کرد. در مرحله بعد ی بر اساس نمایش تابع توصیف سیستم غیر خطی، روشی را در جهت پیش بینی حضور سیکل حدی معرفی می نمائیم.
در این راستا معیار نایکوئیست بسط یافته را که قبلا در سیستمهای خطی با آن آشنا شده ایم، بکار می گیریم.

بررسی وجود سیکل حدی در سیستم غیر خطی

فرض کنید که نوساناتی با دامنه A و فرکانس ω به طور ماندگار در بلوک دیاگرام سیستم شکلِ زیر برقرار است



با توجه به ساختار موجود، روابط زیر را می توان نوشت

$$x = -y$$
$$w = N(A,\omega)x\ .$$
$$y = G(j\omega)w$$

پس داریم.

$$y = G(j\omega)N(A,\omega)(-y)$$

چون y مخالف صفر است (فرض کرده بودیم نوسان داریم) ، بنابر این

$$G(j\omega)N(A,\omega)+1=0$$

و یا می توان نوشت.

$$G(j\omega) = \frac{-1}{N(A,\omega)} \quad ❈$$

بنابراین اگر در سیستم سیکل حدی وجود داشته باشد، بایستی رابطه فوق برقرار گردد و این بدان معنی است که اگر معادله فوق جوابی نداشته باشد پس در سیستم سیکل حدی نداریم.

معادله فوق خود بیانگر دو معادله غیر خطی است، چرا که $G(j\omega)$ یک جزء حقیقی و یک جـزء موهـومی داشته و هر کدام با عبارت $N(A,\omega)$ یک معادله غیر خطی را تشکیل می دهـد. کـه بـا توجـه بـه سـاختار $N(A,\omega)$ ، تعداد جواب های بیشماری بدست می آید. معمولا حل معادلات غیـر خطـی بـه روش تحلیلـی مشکل است، خصوصا اگر درجه $G(S)$ بزرگ باشد. به همین دلیل یک روش گرافیکی جهـت حـل ایـن مشکل پیشنهاد می شود.

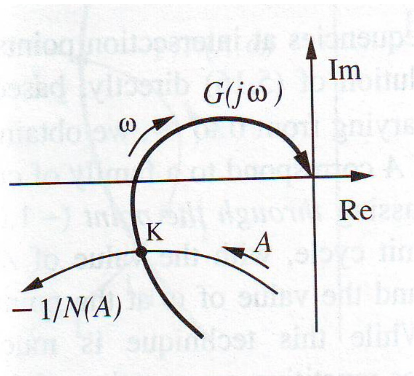
ایده اصلی در حل گرافیکی معادله فوق، ترسیم دو منحنـی $G(j\omega)$ و $\frac{-1}{N(A,\omega)}$ در صـفحه مخـتلط و تعیین محل برخورد آن دو است.

جهت بررسی روانترِ روش گرافیکیِ تعیین جوابهای معادله * ، نخست فـرض مـی کنـیم کـه تـابع توصـیف مستقل از ω باشد.

<u>۱)روش تعیین سیکل حدی اگر $N(A,\omega)$ مستقل از ω باشد</u>

در این حالت داریم $G(j\omega)=-\frac{1}{N(A)}$.

سیستمهای غیر خطی همراه با المان اشباع، ناحیه مرده یا backlash دارای ویژگی فوق هستند. اما مراحل کار جهت تعیین محل برخورد دو منحنی عبارتند از:



الف) در صفحه مختلط ، $G(j\omega)$ را بازاء تغییـرات ω و $-\frac{1}{N(A)}$ را بازاء تغییرات A ترسیم می کنیم. (شکل مقابل)

ب) اگر دو منحنی نقطه برخوردی داشته باشند آنگـاه یـک سـیکل حدی با دامنه A و فرکانس ω در سیستم غیر خطی وجود خواهـد داشت.

و اگر تعداد دفعات برخورد n بار باشد، آنگاه n سیکل حدی وجود خواهـد داشـت. اینکـه در عمـل کـدامین سیکل حدی برقرار می گردد، دقیقا به شرائط اولیه حاکم بر سیستم، وابسته خواهد بود.

در شکل فوق نقطه برخورد منفرد بوده (نقطه K) و در نتیجه دامنه نوسان سیکل حدی بوجود آمـده برابـر A_K و فرکانس نوسان ω_K می باشد.

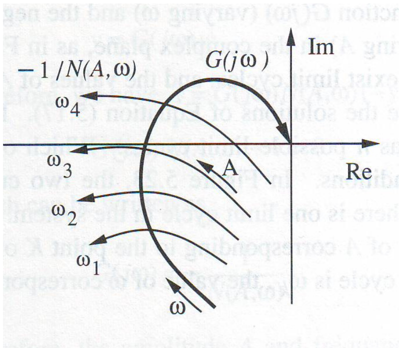
<u>نکته بسیار مهم</u> : روش فوق فقط حضور سیکل حدی را پیش گویی مـی کنـد و شـاید ایـن پـیش گـویی صحت نداشته باشد. چرا که $N(A,\omega)$ یک فرم نیمه خطی تقریبی دارد. جهت تائیـد ایـن پـیش گـویی لازم

است که شبیه سازی کامپیوتری و حل دقیق مسئله با حضور عوامل غیر خطی انجام گرفته و پاسخ واقعـی را یافت.

۲)روش تعیین سیکل حدی اگر N(A,ω) به ω وابسته باشد

در این حالت داریم $G(j\omega)=-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$

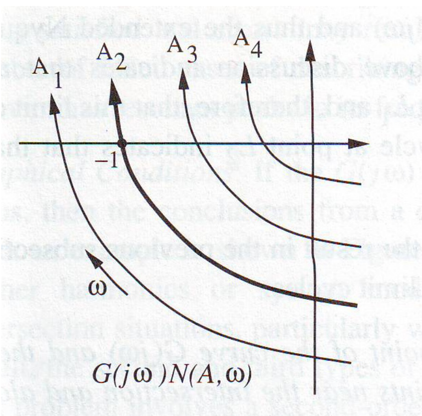
مراحل کار در این بخش مشابه قبل خواهد بود با این تفاوت که در اینجا خانواده ای از منحنی های مربوط به عبارت $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$ و بازاء ω های مختلف بدست خواهد آمد.



همانگونه که از شکل مقابل مشخص است، محل برخـورد $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$ و $G(j\omega)$ نقاط بسیار زیادی است و تنهـا محـل برخوردهـایی قابـل قبول است که با ω مربوط به $G(j\omega)$ مطابقت داشته باشد.

قاعدتا تطبیق فرکانس ω کار بسیار مشکل و زمان بری است. لذا به منظور اجتناب از اتلاف وقـت در یـافتن فرکانس ω مناسب، بهتر است که راه حل گرافیکی معادله * به طور مستقیم ارائه گردد.

در این روش با ثابت نگه داشتن مقدار A و تغییر فرکانس ω از ۰ تا ∞ منحنی $G(j\omega)N(A,\omega)$ ترسـیم می گردد.



آنگاه با تغییر مقدار A و ثابت نگه داشتن مجدد آن دوباره فرکـانس ω را از ۰ تا ∞ تغییر داده و منحنی جدیدی از $G(j\omega)N(A,\omega)$ را ترسیم می کنیم که در نتیجه خانواده ای از این منحنی ها مطابق شکل روبرو بدست می آید.

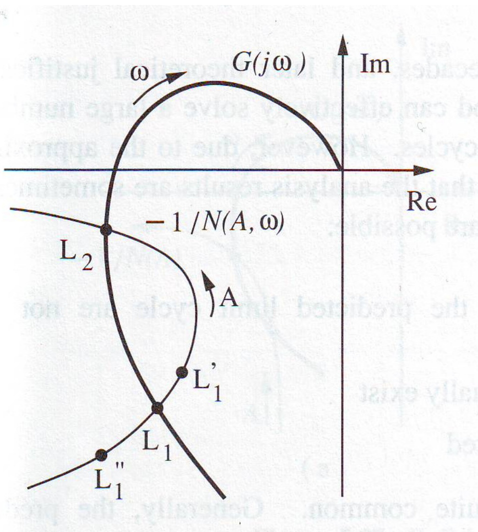
اگر بتوان منحنی یافت که از نقطه $-1+j0$ عبور کند ، یعنی آنکه در سیستم مورد بحث یک سیکل حدی وجود دارد.

دامنه نوسان سیکل حدی برای شکل فوق برابر A_2 و فرکانس نوسان عبارتـست از مقـدار ω در مکـانی کـه منحنی از نقطه $-1+j0$ عبور می کند.

پایداری سیکل های حدی

در بحث فوق، حضور یا عدم حضور سیکل حدی مورد بررسی قرار گرفت. حال این سوال مطرح است که چگونه می توان پایداری یا ناپایداری سیکل حدی را مشخص نمود؟

با ارائه یک روش توسعه یافته از معیار نایکوئیست می توان تا حدودی نسبتا مطلوب به سوال فوق پاسخ داد.



شکل مقابل ترسیم دیاگرام های قطبی $G(j\omega)$ و قرینه معکوس تابع توصیف را نشان می دهد.

در این شکل دو محل برخورد دیده می شود و این بدان معنی است که احتمالا در سیستم مورد بحث ۲ سیکل حدی وجود دارد. با توجه به جهت تغییر پارامتر A می توان گفت که مقدار A مربوط به نقطه L_1، کوچکتر از مقدار A مربوط به نقطه L_2 است. برای سادگی بحث فرض می کنیم که تابع تبدیل

G(S) هیچ قطب ناپایداری ندارد.

نخست به بررسی پایداری سیکل حدی در نقطه L_1 خواهیم پرداخت. روش کار به قرار زیراست:

اگر نقطه کار سیستم ابتدائا در نقطه L_1 باشد. در این وضعیت دامنه سیکل حدی برابر A_1 و فرکانس نوسان برابر ω_1 است. حال فرض می کنیم بازاء یک اغتشاش کوچک، دامنه ورودی به المان غیر خطی قدری افزایش یابد که نتیجه آن تغییر نقطه کار سیستم از L_1 به L'_1 است.

با توجه به معیار توسعه یافته نایکوئیست ، چون نقطه L'_1 توسط دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ محاط شده است (با توجه به جهت تغییرات ω بر روی دیاگرام) پس خواهیم گفت سیستم در این نقطه ناپایدار است و در نتیجه دامنه سیگنال های سیستم افزایش خواهد یافت و بنابراین نقطه کار سیستم در طول منحنی $-\frac{1}{N(A)}$ حرکت کرده تا به نقطه کار L_2 برسد.

اگر در همان وضعیت قبلی (نقطه کار L_1)، تحت تاثیر یک اغتـشاش، دامنـه ورودی بـه المـان غیـر خطـی قدری کاهش یابد، آنگاه نقطه کار به L_1'' تغییر وضعیت داده کـه در ایـن حالـت چـون نقطـه L_1'' توسـط $G(j\omega)$ محاط نشده، (یعنی پایداری نقطه L_1'') پس دامنه سیکل حدی همچنان رو به کاهش گذاشته تـا آنکه صفر شود و این بدان معنی است که در هر دوحالت دامنه نوسان سیکل حدی را از دست خـواهیم داد و این یعنی **ناپایداری سیکل حدی**.

اگر بحث فوق برای نقطه L_2، برقرار شود ملاحظه می گردد که سیکل حـدی مربـوط بـه نقطـه L_2 پایـدار است.

با خلاصه کردن بحث فوق می توان معیار پایداری سیکل حدی را به صورت زیر تعریف کرد:

هر نقطه برخورد بین دو منحنی $G(j\omega)$ و $-\dfrac{1}{N(A)}$ معرف یک سیکل حدی است. اگر نقاط نزدیک محل تقاطع دو منحنی و در طول افزایش A و بر روی منحنی $-\dfrac{1}{N(A)}$ توسط دیـاگرام قطبـی $G(j\omega)$ محـاط نگردد آنگاه سیکل حدی مربوطه پایدار است در غیر اینصورت سیکل حدی پایدار نیست.

بررسی میزان اعتماد به روش آنالیز تابع توصیف

تحقیقات ۳ دهه اخیر نشان می دهد که آنالیز تابع توصیف توانسته به گونه ای کاملا مـوثر، تعـداد زیـادی از مسائل عملی کنترل را که شامل سیکل حدی هـستند، حـل کنـد. امـا بـه خـاطر ذات تقریبـی روش تـابع توصیف، مشاهده می گردد که نتایج بدست آمده بعضا دقیق نیستند.

عدم دقت های موجود معمولا در سه طبقه بندی زیر قرار می گیرند.

۱) دامنه و فرکانس سیکل حدی بدست آمده طبق روش تابع توصیف دقیق نیستند.

۲) سیکل حدی پیش بینی شده ، غلط بوده و اصلا سیکل حدی وجود ندارد

۳) یک سیکل حدی واقعی طبق روش تابع توصیف اصلا پیش بینی نشده است

مورد اول تقریبا کاملا منطقی بنظر می رسد چرا که در تعیین تابع توصیف معمولا تقریب هایی زده شده (صرفنظر کردن از هارمونیک های با درجه بالاتر) ، که خود موجب بروز عدم دقت در دامنه و فرکانس سیکل حدی می شود.

دو مورد آخر ، اگرچه به ندرت اتفاق می افتد اما می تواند نتایج نامطلوبی را بدنبال داشته باشد. باید دقت داشت که حضور یا عدم حضور سیکل حدی دقیقا به موقعیت فیزیکی دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ و منحنی $-\frac{1}{N(A)}$ نسبت به یکدیگر دارد.

اصولا خطای بوجود آمده در نحوه تشخیص موجودیت سیکل حدی به دو مورد زیر بر می گردد:

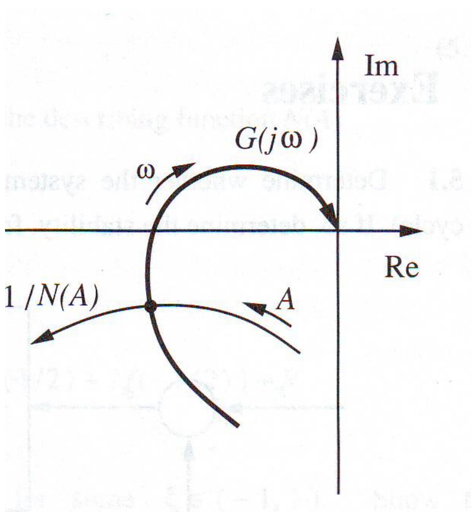
الف) اگر عامل خطی سیستم نتواند به خوبی به عنوان یک فیلتر پایین گذر عمل کند

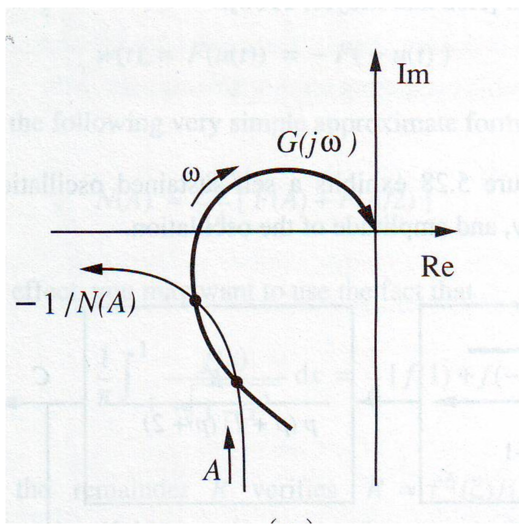
ب) اگر در دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ حالت رزونانس اتفاق بیافتد.

روش گرافیکی در تشخیص بهتر حضور یا عدم حضور سیکل حدی

اگر $G(j\omega)$ به منحنی $-\frac{1}{N(A)}$ مماس باشد و یا تقریبا مماس فرض شود (شکل سمت راست) آنگاه نتایج بدست آمده از روش تابع توصیف با خطای نسبتا بزرگی همراه خواهد بود. معمولا این حالت زمانی رخ می دهد که عمل فیلترینگ در $G(s)$ ضعیف بوده و نتواند به عنوان یک فیلتر پایین گذر خوب عمل نماید.

و اگر منحنی $-\frac{1}{N(A)}$ تقریبا بر دیاگرام $G(j\omega)$ در محل برخورد عمود باشد (شکل سمت چپ) احتمال حضور سیکل حدی تقریبا صدرصد است .





پایان فصل پنجم