# فایل کمکی ۱

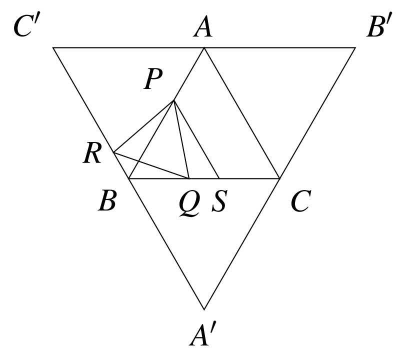
ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

**لم**

فرض کنید $A'B'C'$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد که $A$، $B$ و $C$ به ترتیب اوساط اضلاع $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ در آن هستند. $P,Q$ را دو نقطه‌ی دل‌خواه در نظر بگیرید که درون یا روی مثلث $ABC$ هستند. ثابت کنید اگر نقطه‌ی $R$ با این دو نقطه مثلث متساوی‌الاضلاع بسازد، درون یا روی مثلث $A'B'C'$ قرار دارد.

**اثبات:**

□ ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $P,Q$ روی محیط مثلث $ABC$ باشند، حکم برقرار است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $P$ و $Q$ به ترتیب روی اضلاع $AB$ و $BC$ باشند. دو نقطه‌ی نامزد برای $R$ وجود دارد تا با $P,Q$ مثلث متساوی‌الاضلاع بسازد. فرض می‌کنیم $R$ نقطه‌ی نامزد نزدیک‌تر به $B$ است[آ] (برای نقطه‌ی نامزد دیگر، حکم به طور مشابه ثابت می‌شود). دست کم یکی از دو زاویه‌ی $BPQ,BQP$ از $۶۰^\circ$ بیش‌تر نیست. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $BPQ \leq ۶۰^\circ$ باشد. از $P$ خطی موازی $AC$ رسم می‌کنیم تا $BC$ را در $S$ قطع کند.

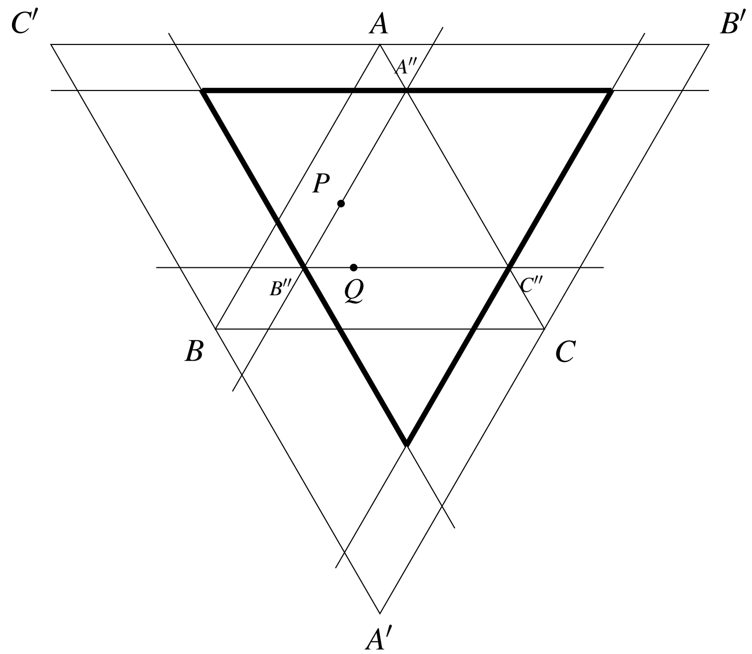



مثلث‌های $PBS,PQR$ متساوی‌الاضلاع هستند؛ پس $PB=PS$ و $PR=PQ$. هم‌چنین داریم:

$$\angle RPB + \angle BPQ = \angle BPQ + \angle QPS = 60^\circ$$

پس $\angle PRB = \angle QPS$ و در نتیجه دو مثلث $PRB$ و $PQS$ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین هم‌نهشت هستند. پس $\angle PBR = \angle PSQ = ۶۰^\circ$ و در نتیجه نقطه‌ی $R$ در امتداد یا روی $BC'$ قرار دارد. هم‌چنین از آن‌جایی که $BR = QS \leq BC = BC'$ پس نقطه‌ی $R$ دقیقن روی $BC'$ قرار دارد و حکم ثابت می‌شود. ■

□ حال ثابت می‌کنیم به ازای هر $P,Q$ دل‌خواه (نه لزومن روی محیط مثلث $ABC$) حکم برقرار است. امتداد $PQ$، دست کم دو ضلع از مثلث $ABC$ را قطع می‌کند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید امتداد $PQ$ از طرف $P$ ضلع $AB$ و از طرف $Q$ ضلع $BC$ را قطع کند (اگر دو ضلع قطع شدند، یکی را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم). از $P$ خطی موازی $AB$ رسم می‌کنیم و از $Q$ خطی موازی $BC$ رسم می‌کنیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی $B''$ قطع کنند. هم‌چنین فرض کنید این دو خط، اضلاع $AC$ و $BC$ را به ترتیب در نقاط $A''$ و $C''$ قطع کنند. از $A''$ خطی موازی $BC$، از $C''$ خطی موازی $AB$ و از $B''$ خطی موازی $AC$ رسم می‌کنیم.




حال نقاط $P,Q$ روی محیط مثلث $A''B''C''$ قرار دارند و طبق اثبات قسمت قبل، نقطه‌ی سوم درون مثلث پررنگ قرار دارد؛ پس درون مثلث $A'B'C'$ نیز قرار دارد و حکم ثابت می‌شود. ■

[آ] با تعریف دقیق‌تر، $R$ را آن نقطه‌ی نامزدی در نظر می‌گیریم که در شکل، $P$ و $Q$ و $R$ به ترتیب ساعت‌گرد قرار گرفته باشند