

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری دوم

وقت: ۴ ساعت

چهارشنبه ۲۲ مرداد ۱۳۹۳

پهلویشی نخست. قورباغه‌ی دودویی ۲۵ امتیاز

به ازای هر عدد طبیعی n ، تعداد بیت‌های ۰ سمت راست نمایش دودویی n را $f(n)$ می‌نامیم. برای مثال $f(۱۲) = ۲$ است.

محور اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. قورباغه‌ای داریم که هرگاه روی عدد n قرار بگیرد، می‌تواند به یکی از ۲ عدد $n + f(n)$ و $n - f(n)$ برود. قورباغه تنها حق دارد روی اعداد طبیعی قرار بگیرد.

فرض کنید قورباغه روی عدد n باشد. تعداد اعدادی به جز خود n ، که قورباغه می‌تواند با تعدادی گام به آن‌ها برسد را $g(n)$ می‌نامیم. برای مثال، $g(۴) = ۶$ و $g(۳) = ۰$ است. مقدار $g(۱) + g(۲) + \dots + g(۱۰^۶)$ را محاسبه کنید.

توجه: در ابتدای پاسخ‌برگ خود، عدد نهایی پاسخ‌تان را بنویسید. فرض کنید پاسخ اصلی مسئله x و پاسخ شما y باشد. برگه‌ی شما تنها در صورتی تصحیح خواهد شد که $\frac{Ax}{3} \leq y \leq \frac{12x}{3}$ باشد.

پهلویشی دوم. درخت اشتاینر ۲۵ امتیاز

گراف ساده‌ی وزن‌دار G را با وزن‌های نامنفی در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه رئوس G از دو مجموعه رأس جدا از هم و ناتهی R, S تشکیل شده باشد. می‌خواهیم یک زیردرخت با وزن کمینه از G انتخاب کنیم؛ طوری که به ازای هر رأس از R ، دست کم یک یال در درخت وجود داشته باشد که به آن رأس وصل باشد. به این زیردرخت با وزن کمینه، **درخت اشتاینر** می‌گوییم.

(۱) مسئله‌ای دیگر را در نظر بگیرید. گراف ساده‌ی وزن‌دار H با وزن‌های مثبت داده شده است. فرض کنید مجموعه رئوس H از ۲ مجموعه رأس جدا از هم و ناتهی P, Q تشکیل شده باشد. می‌خواهیم یک زیرگراف با وزن کمینه از H انتخاب کنیم؛ طوری که به ازای هر رأس مانند u از P ، رأسی مانند v از Q وجود داشته باشد که u به v مسیر داشته باشد. ثابت کنید برای یافتن این زیرگراف با وزن کمینه، الگوریتم با زمان چندجمله‌ای وجود دارد. (۱۰ نمره)

(ب) مسئله‌ای دیگر را در نظر بگیرید. گراف ساده‌ی وزن‌دار H با وزن‌های مثبت داده شده است. فرض کنید مجموعه رئوس H از ۳ مجموعه رأس جدا از هم و ناتهی P, Q, T تشکیل شده باشد. می‌خواهیم یک زیرگراف با وزن کمینه از H انتخاب کنیم؛ طوری که به ازای هر رأس مانند u از P ، رأسی مانند v از Q وجود داشته باشد که u به v مسیر داشته باشد. ثابت کنید یافتن این زیرگراف با وزن کمینه، الگوریتم با زمان چندجمله‌ای دارد اگر و تنها اگر یافتن درخت اشتاینر الگوریتم با زمان چندجمله‌ای داشته باشد. (۱۵ نمره)

پرومشی سومه بچه گراف! ۵۰ امتیاز

گراف کامل n رأسی G را در نظر بگیرید ($n > 3$) که هر یال آن، وزنی مثبت دارد. می‌دانیم برای هر عدد طبیعی $1 \leq w \leq \binom{n}{2}$ ، دقیقن یک یال با وزن w وجود دارد. کم‌وزن‌ترین یال متصل به هر رأس را، ساق آن رأس می‌نامیم. بچه‌ی گراف G ، که آن را با $f(G)$ نشان می‌دهیم، یک زیرگراف از G است. هر یال از G ، در بچه‌اش وجود دارد، اگر ساق دست‌کم یک رأس باشد.

(ا) بیشینه‌ی تعداد یال‌های $f(G)$ چقدر است؟ (۵ امتیاز)

(ب) ثابت کنید اگر $f(G)$ درخت شود، یک زیردرخت فراگیر با وزن کمینه از G است. (۱۵ امتیاز)

(پ) ثابت کنید احتمال این که $f(G)$ هم‌بند باشد،

$$\frac{(n-2)!^2}{\prod_{i=2}^{n-2} \left(\binom{n}{2} - \binom{i}{2} \right)}$$

است. (۳۰ امتیاز)